Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 5 – 19 czerwca 2011

(wydanie pierwsze)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 5-19 czerwca 2011

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. (018) 33 11 660

Kadra:
Kamil Duszenko
Andrzej Grzesik
Szymon Kanonowicz
Michał Kieza
Przemysław Mazur
Michał Pilipczuk

Olimpiada Matematyczna w Internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 5-19 czerwca w Mszanie Dolnej, w ośrodku „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Kamil Duszenko, Andrzej Grzesik, Szymon Kanonowicz, Michał Kieza, Przemysław Mazur oraz Michał Pilipczuk. Ponadto z gościnnymi wykładami wystąpili: Danuta Ciesielska, Krzysztof Ciesielski, Joanna Ochremiak, Bartosz Walczak oraz Michał Wojciechowski.

W dniach 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 16 i 17 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 15 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 11 i 18 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny czterech zadań i trwały od rana do wieczora, a mecz matematyczny — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 146, 134 i 132 punkty. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

12 czerwca odbyła się piesza wycieczka na Turbacz, natomiast 15 czerwca odbyła się wycieczka do Zakopanego, gdzie uczestnicy podzielili się na dwie grupy, z których jedna pozostała w mieście, a druga dotarła do Czarnego Stawu Gąsienicowego.

Bezpośrednio po zakończeniu obozu, w dniach 19-22 czerwca w Krakowie odbyły się XI Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. Uczestniczyli w nich uczniowie, którzy weszli w skład delegacji tych krajów na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną. Przewodniczącym delegacji polskiej był Michał Pilipczuk, zastępcą przewodniczącego był Andrzej Grzesik. W dniach 20 i 21 czerwca każdy z zawodników rozwiązywał po trzy zadania, mając na to po cztery i pół godziny.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami oraz zadania z XI Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	12	6	0	4
2.	11	3	1	7
3.	15	0	0	7
4.	6	2	2	12
5.	6	2	1	13
6.	9	1	1	11
7.	8	1	1	12
8.	2	2	0	18
9.	19	2	0	1
10.	8	1	0	13
11.	0	2	0	20
12.	5	1	1	15
13.	16	1	0	5
14.	9	0	1	12
15.	4	1	0	17
16.	3	0	0	19
17.	8	3	4	7
18.	8	0	0	14
19.	9	6	0	7
20.	7	0	4	11
21.	17	1	0	2
22.	1	0	0	19
23.	6	1	0	13
24.	4	1	1	14
25.	3	2	2	13
26.	10	0	1	9
27.	8	5	0	7
28.	1	0	0	19
29.	4	0	0	16
30.	0	0	0	20
31.	0	0	0	20
32.	2	1	0	17
33.	9	2	0	9
34.	1	5	2	12
35.	1	2	4	13
36.	8	0	1	11

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E leżącym na półprostej $AB^{\rightarrow}$, a proste AD i BC — w punkcie F leżącym na półprostej $AD^{\rightarrow}$. Przypuśćmy, że istnieje okrąg styczny do półprostych $BE^{\rightarrow}$ i $DF^{\rightarrow}$ oraz do odcinków EC i CF. Wykazać, że odcinek stycznej poprowadzonej z punktu B do okręgu wpisanego w trójkąt ABD ma taką samą długość, jak odcinek stycznej poprowadzonej z punktu D do okręgu wpisanego w trójkąt BCD.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita n, że liczba $n^2 + 7$ jest podzielna przez 2^{2011}.

3. Funkcje $f, g : (0,2) \to (0,2)$ spełniają dla każdej liczby $x \in (0,2)$ równości

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x \qquad \text{oraz} \qquad f(x) + g(x) = 2x.$$

Udowodnić, że $f(1) = g(1)$.

4. Z klocków $2 \times 2 \times 1$ zbudowano sześcian o krawędzi 20. Dowieść, że istnieje prosta równoległa do jednej z krawędzi sześcianu, przecinająca wnętrze sześcianu i nie przecinająca wnętrza żadnego z klocków.

5. Rzucamy 2011-krotnie monetą i zapisujemy wynik w postaci ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{2011})$, gdzie dla $i = 1, 2, \ldots, 2011$ przyjmujemy $a_i = 1$ albo $a_i = 2$ w zależności od tego, czy w i-tym rzucie wypadł orzeł, czy reszka. Niech p oznacza prawdopodobieństwo tego, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_j = 2011$ dla pewnej liczby $j \in \{1, 2, \ldots, 2011\}$. Znaleźć pięćsetną cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby p.

6. Punkty P i Q leżą wewnątrz rombu $ABCD$, przy czym

$$\angle PBQ = \angle PDQ = \tfrac{1}{2}\angle ABC$$

oraz trójkąty APB i BQC mają rozłączne wnętrza. Udowodnić, że suma pól trójkątów APB, PDQ i BQC jest równa połowie pola rombu $ABCD$.

7. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n o następującej własności: dla dowolnych n takich par liczb całkowitych, że w każdej parze liczby dają różne reszty z dzielenia przez p, można wybrać po jednej liczbie z każdej pary w taki sposób, by suma n wybranych liczb była podzielna przez p.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki nieskończony zbiór punktów na płaszczyźnie, że żadne trzy punkty z tego zbioru nie leżą na jednej prostej, a odległość między dowolnymi dwoma jego punktami jest liczbą wymierną.

9. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ przeciwległe boki są równoległe. Udowodnić, że trójkąty ACE i BDF mają równe pola.

10. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ niech a_n oznacza sumę cyfr w zapisie dziesiętnym liczby 2^n. Rozstrzygnąć, czy ciąg a_1, a_2, a_3, $\ldots$ jest począwszy od pewnego miejsca niemalejący.

11. Dany jest wielomian $W(x)$ stopnia n o współczynnikach rzeczywistych, przy czym współczynnik przy potędze x^n wynosi 1. Wykazać, że istnieje co najwyżej n różnych liczb całkowitych a, dla których

$$|W(a)| < \frac{n!}{2^n}.$$

12. W grupie n osób każdy ma co najmniej d znajomych, przy czym $2d < n$. Wiadomo, że nie da się tak podzielić danej grupy na dwie podgrupy, że żadna osoba z jednej podgrupy nie zna żadnej osoby z drugiej podgrupy. Dowieść, że można wybrać $2d + 1$ osób i usadzić je wzdłuż jednej krawędzi prostokątnego stołu w taki sposób, że każdy będzie znał swoich sąsiadów.

13. Na płaszczyźnie danych jest n punktów białych oraz n punktów czarnych, przy czym żadne trzy z tych $2n$ punktów nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że można narysować n parami rozłącznych odcinków tak, by każdy z nich miał jeden koniec biały i jeden czarny.

14. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $ab + bc + cd + da = 1$. Dowieść, że

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}.$$

15. Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny liczb całkowitych zawierający kwadrat liczby całkowitej oraz sześcian liczby całkowitej. Wykazać, że w ciągu tym występuje szósta potęga liczby całkowitej.

16. Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o_1. Okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie F. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinka AB w punkcie E. Dowieść, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej.

17. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

18. W trójkącie nierównoramiennym ABC dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie D. Prosta ℓ jest styczna do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że prosta ℓ jest styczna do okręgu przechodzącego przez środki odcinków AD, BD i PQ.

19. W turnieju ping-ponga każdy gracz rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym z pozostałych graczy. Udowodnić, że albo można umieścić wszystkich graczy przy okrągłym stole tak, by każdy wygrał ze swoim sąsiadem z prawej strony, albo można rozbić wszystkich graczy na takie dwie grupy, że dowolny gracz z pierwszej grupy wygrał z dowolnym graczem z drugiej grupy.

20. Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą. Wykazać, że liczba

$$\binom{p^2}{p} - p$$

jest podzielna przez p^5.

21. Dana jest liczba całkowita a. Ciąg liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia równość

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a}{a_n} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnić, że jeżeli liczby a_1, a_2 oraz $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a}{a_1 a_2}$ są całkowite, to wszystkie wyrazy danego ciągu są całkowite.

22. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ściśle rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach naturalnych i różnicy niepodzielnej przez 10, że suma cyfr zapisu dziesiętnego dowolnego wyrazu jest większa niż 2011^{2011}.

23. Wyznaczyć liczbę sposobów takiego rozmieszczenia 2500 króli na szachownicy 100×100, że żaden król nie znajduje się w polu rażenia żadnego innego, a każdy wiersz i każda kolumna zawiera dokładnie 25 króli.

24. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Okrąg o przechodzi przez punkty B i C oraz przecina odcinki AB i AC. Okrąg o' jest styczny do odcinków AB i AC odpowiednio w punktach D i E, zaś do okręgu o wewnętrznie w punkcie F. Punkt M jest środkiem łuku BC okręgu o zawierającego punkt F. Dowieść, że proste BC, DE i FM przecinają się w jednym punkcie.

25. Wyznaczyć wszystkie trójki nieujemnych liczb całkowitych (x, y, z) spełniających równanie

$$2^x + 3^y = 5^z.$$

26. Dla skończonego ciągu zer i jedynek rozważamy następującą operację: w dowolnym miejscu wpisujemy lub z dowolnego miejsca wykreślamy ciąg postaci www, gdzie w jest dowolnym ciągiem złożonym z zer i jedynek. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od ciągu 01 można w wyniku wielokrotnego wykonywania takich operacji otrzymać ciąg 10.

27. Dane są trójkąty ostrokątne ABC i XYZ. Rozpatrujemy takie trójkąty PQR podobne do trójkąta XYZ (przy czym punktom P, Q, R odpowiadają kolejno punkty X, Y, Z), że punkty A, B, C leżą odpowiednio na bokach QR, RP, PQ. Dowieść, że środki okręgów wpisanych we wszystkie takie trójkąty PQR leżą na jednym okręgu.

28. Wyznaczyć największą wartość, jaką może przyjąć współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $W(x)$ różnego od stałego i spełniającego warunek

$$|W(x)| \leqslant 2 \qquad \text{dla każdego } x \in [-2, 2].$$

29. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Okrąg o środku J jest styczny w punkcie E do odcinka BC oraz jest styczny do przedłużeń boków AB i AC. Odcinki BC i AJ przecinają się w punkcie D. Okręgi opisane na trójkątach ABC i ADE przecinają się w punkcie F różnym od A. Udowodnić, że $\angle AFJ = 90°$.

30. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ spełniają równości

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n = 0.$$

Dowieść, że

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+(y_1+y_2+\ldots+y_n)^2 \leqslant n.$$

31. Niech A będzie n-elementowym zbiorem złożonym z dodatnich liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje n-elementowy zbiór dodatnich liczb całkowitych B o następujących dwóch własnościach:

1. Dla dowolnych dwóch różnych podzbiorów $B_1, B_2 \subset B$ suma wszystkich elementów podzbioru B_1 jest różna od sumy wszystkich elementów podzbioru B_2.
2. Każdy element zbioru A jest sumą wszystkich elementów pewnego podzbioru zbioru B.

32. Dane są dodatnie liczby całkowite a, m, n, przy czym $a > 1$ oraz $m \neq n$. Dowieść, że jeżeli liczby $a^m - 1$ i $a^n - 1$ mają te same dzielniki pierwsze, to liczba $a + 1$ jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym.

33. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3x$. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której wielomian $\underbrace{W(W(\ldots(W(W}_{n}(x)))\ldots))$ ma co najmniej 2011 różnych pierwiastków rzeczywistych.

34. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną m o następującej własności: Spośród dowolnych m różnych ciągów o długości n złożonych z zer i jedynek można wybrać n ciągów i wpisać je w wiersze kwadratowej tabeli tak, by na głównej przekątnej tabeli wszystkie liczby były równe.

35. Wewnątrz wielokąta wypukłego $A_1A_2\dots A_n$ leży taki punkt P, że jego rzuty P_1, P_2, …, P_n odpowiednio na proste A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 znajdują się wewnątrz boków wielokąta. Dowieść, że dla dowolnych punktów X_1, X_2, …, X_n leżących odpowiednio wewnątrz odcinków A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 zachodzi nierówność

$$\max\left\{\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \frac{X_2X_3}{P_2P_3}, \dots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right\} \geqslant 1.$$

36. Niech k będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że liczba $p = 4k-1$ jest pierwsza. Wyznaczyć resztę z dzielenia przez p liczby

$$(1^2+1)(2^2+1)\dots((2k-1)^2+1).$$

Zawody drużynowe

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech o_A będzie okręgiem o średnicy BC, zaś ω_A — okręgiem stycznym do odcinków AB i AC oraz zewnętrznie do okręgu o_A w punkcie X_A. Analogicznie definiujemy okręgi o_B, o_C, ω_B, ω_C oraz punkty X_B, X_C. Udowodnić, że proste AX_A, BX_B, CX_C przecinają się w jednym punkcie.

2. Niech $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ będzie ciągiem złożonym ze wszystkich liczb naturalnych, które można zapisać w postaci x^y, gdzie $x, y \geqslant 2$ są liczbami całkowitymi. Dowieść, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i - 1} = 1.$$

3. Dane są takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$, że punkty o współrzędnych $(F(1), G(1))$, $(F(2), G(2))$, $\ldots$, $(F(2011), G(2011))$ na płaszczyźnie są kolejnymi wierzchołkami 2011-kąta foremnego. Wykazać, że przynajmniej jeden z tych wielomianów ma stopień nie niższy niż 2010.

4. Dowieść, że dowolną grupę osób można podzielić na takie dwie podgrupy (z których jedna może być pusta), że każda osoba ma w swojej podgrupie parzystą liczbę znajomych.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę naturalną n, że liczba $2^{n!}-1$ jest podzielna przez 257^{101}.

2. Dana jest liczba pierwsza p oraz różne liczby a, b, c, d ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, przy czym liczby a^4, b^4, c^4, d^4 dają jednakowe reszty z dzielenia przez p. Udowodnić, że liczba $a^2+b^2+c^2+d^2$ jest podzielna przez liczbę $a+b+c+d$.

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że liczba 2^n-1 jest dzielnikiem pewnej liczby postaci m^2+9, gdzie m jest liczbą całkowitą.

4. Każde pole szachownicy 12×12 pomalowano na jeden z trzech kolorów. Wykazać, że istnieją cztery pola o tym samym kolorze, których środki są wierzchołkami prostokąta.

5. W grupie n chłopców i n dziewczyn każdy chłopiec zna co najmniej k dziewczyn. Przypuśćmy, że można zorganizować występ całej grupy na scenie tanecznej, podczas którego każdy chłopiec zatańczy w parze ze znaną mu dziewczyną. Dowieść, że można zorganizować bal składający się z $k!$ takich występów, przy czym układ par nie powtórzy się w różnych występach.

6. W ogrodzie zoologicznym żyje n zwierząt. Wycieczka dzieci chce zwiedzić ogród, przy czym każde dziecko chce zobaczyć swoje ulubione zwierzęta. Dla każdego niepustego podzbioru A zbioru dzieci istnieje zwierzę, które chce zobaczyć nieparzysta liczba dzieci ze zbioru A. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę uczestników wycieczki.

7. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Przypuśćmy, że okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

8. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt P leży wewnątrz tego czworokąta. Punkty O_1, O_2, O_3, O_4 są odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach ABP, BCP, CDP, DAP. Wykazać, że środki odcinków O_1O_3, O_2O_4 i OP leżą na jednej prostej.

9. Udowodnić, że w dowolnym czworościanie suma miar kątów dwuściennych przy wszystkich krawędziach jest mniejsza niż 540°.

10. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje ciągłe $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, że

$$f(2x^2 - 1) = 2xf(x)$$

dla wszystkich liczb $x \in [-1, 1]$.

11. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje dodatnie wartości dla nieujemnych argumentów. Dowieść, że istnieją takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$ o współczynnikach dodatnich, że

$$W(x) \cdot F(x) = G(x)$$

dla każdego x.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3, ... spełniają warunek

$$x_{m+n} \leqslant x_m + x_n \qquad \text{dla } m, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n} \geqslant x_n.$$

2. Danych jest n różnych liczb całkowitych a_1, a_2, ..., a_n. Niech

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_n)$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ liczba

$$\frac{a_1^k}{b_1} + \frac{a_2^k}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^k}{b_n}$$

jest całkowita.

3. Ciąg a_0, a_1, a_2, ... jest zadany wzorami: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n najwyższe potęgi dwójki dzielące liczby n i a_n są jednakowe.

4. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb pierwszych (p, q), że liczba $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ jest podzielna przez pq.

5. Zbadać, czy istnieje taki 2011-elementowy zbiór złożony z liczb całkowitych, że średnia arytmetyczna wszystkich elementów dowolnego jego niepustego podzbioru jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku całkowitym większym niż 2011.

6. Rozpatrujemy wszystkie ściśle malejące ciągi dodatnich liczb całkowitych o sumie równej 2011. Wykazać, że wśród nich ciągów o długości parzystej jest tyle samo, co ciągów o długości nieparzystej.

7. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych (k, m, n), że trzy ściany prostopadłościanu $k \times m \times n$ o wspólnym wierzchołku można okleić niezachodzącymi na siebie prostokątami 3×1. Prostokąty mogą być zaginane na krawędziach prostopadłościanu.

8. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną d, dla której prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dany jest skończony zbiór punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdą parę punktów połączono odcinkiem czerwonym albo zielonym. Wówczas jeden z tych kolorów ma taką własność, że dowolne dwa punkty, które można połączyć ścieżką tego koloru, można także połączyć ścieżką tego koloru składającą się z co najwyżej d odcinków.

9. Na trójkącie nierównobocznym ABC opisano okrąg o środku O. Punkty A', B', C' są odpowiednio środkami tych łuków BC, CA, AB tego okręgu, które zawierają wewnątrz wierzchołek danego trójkąta. Rozważmy punkty przecięcia prostych: $X = AB' \cap BA'$, $Y = BC' \cap CB'$, $Z = CA' \cap AC'$. Dowieść, że punkty O, X, Y, Z leżą na jednej prostej.

10. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AD, BE, CF są wysokościami i przecinają się w punkcie H. Okrąg o środku O przechodzący przez punkty A i H przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q różnych od A. Okrąg opisany na trójkącie OPQ jest styczny do odcinka BC w punkcie R. Wykazać, że

$$\frac{CR}{BR} = \frac{ED}{FD}.$$

11. Rozstrzygnąć, czy istnieje ostrosłup czworokątny o krawędziach bocznych różnej długości, który można podzielić na trzy przystające czworościany.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a^2 < bc$. Udowodnić, że spełniona jest nierówność

$$b^3 + ac^2 > ab(a+c).$$

2. Na tablicy napisano n nieujemnych liczb całkowitych, których największy wspólny dzielnik wynosi 1. W jednym kroku można zmazać dwie liczby x, y takie, że $x \geqslant y$, oraz zastąpić je liczbami $x-y$, $2y$. Rozstrzygnąć, dla jakich początkowych ciągów liczb całkowitych można doprowadzić do sytuacji, w której $n-1$ liczb na tablicy jest zerami.

3. Punkty A, B, C, D leżą w tej kolejności na okręgu, przy czym proste AB i CD nie są równoległe oraz długość łuku $\widehat{AB}$ zawierającego punkty C, D jest dwa razy większa niż długość łuku $\widehat{CD}$ nie zawierającego punktów A, B. Punkt E leży po tej samej stronie prostej AB co C oraz D, przy czym $AC = AE$ oraz $BD = BE$. Wykazać, że jeśli prosta prostopadła do prostej AB przechodząca przez E połowi łuk $\widehat{CD}$ nie zawierający punktów A, B, to $\angle ACB = 108°$.

4. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych ma następującą własność: dla dowolnych wielomianów $F(x)$, $G(x)$, $Q(x)$ o współczynnikach całkowitych, jeśli

$$P(Q(x)) = F(x) \cdot G(x),$$

to $F(x)$ lub $G(x)$ jest wielomianem stałym.

Wykazać, że $P(x)$ jest wielomianem stałym.

5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M, N są odpowiednio środkami boków AD oraz BC. Punkty K oraz L leżą odpowiednio na bokach AB i CD, przy czym $\angle MKA = \angle NLC$. Wykazać, że jeśli proste BD, KM oraz LN przecinają się w jednym punkcie, to spełnione są równości

$$\angle KMN = \angle BDC \qquad \text{oraz} \qquad \angle LNM = \angle ABD.$$

6. Niech a będzie liczbą całkowitą. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, dla których

$$p \,|\, n^2 + 3 \qquad \text{oraz} \qquad p \,|\, m^3 - a$$

dla pewnych liczb całkowitych n, m.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E leżącym na półprostej $AB^{\rightarrow}$, a proste AD i BC — w punkcie F leżącym na półprostej $AD^{\rightarrow}$. Przypuśćmy, że istnieje okrąg styczny do półprostych $BE^{\rightarrow}$ i $DF^{\rightarrow}$ oraz do odcinków EC i CF. Wykazać, że odcinek stycznej poprowadzonej z punktu B do okręgu wpisanego w trójkąt ABD ma taką samą długość, jak odcinek stycznej poprowadzonej z punktu D do okręgu wpisanego w trójkąt BCD.

Rozwiązanie:

Niech P, Q, R, S oznaczają odpowiednio punkty styczności pierwszego z danych w zadaniu okręgów do prostych AB, EC, CF, AD. Wówczas

$$\begin{aligned} AP &= AB + BP = AB + BR = AB + BC + CR, \\ AS &= AD + DS = AD + DQ = AD + DC + CQ, \end{aligned}$$

a ponieważ $AP = AS$ i $CR = CQ$, więc stwierdzamy, że

$$AB + BC = AD + DC. \tag{$*$}$$

Pozostaje spostrzec, że odcinek stycznej poprowadzonej z punktu B do okręgu wpisanego w trójkąt ABD ma długość $\frac{1}{2}(AB+BD-AD)$, zaś odcinek stycznej poprowadzonej z punktu D do okręgu wpisanego w trójkąt BCD ma długość $\frac{1}{2}(DC + DB - BC)$, i na mocy związku $(*)$ obie te długości są równe.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita n, że liczba $n^2 + 7$ jest podzielna przez 2^{2011}.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdego $k \geqslant 3$ istnieje taka liczba całkowita n, że $2^k \mid n^2 + 7$.

Dla $k = 3$ taką liczbą jest $n = 1$. Przejdźmy teraz do kroku indukcyjnego; przypuśćmy zatem, że $2^k \mid n^2+7$ dla pewnej liczby n. Jeżeli również $2^{k+1} \mid n^2+7$, to krok indukcyjny jest zakończony. W przeciwnym razie dla liczby $m = n+2^{k-1}$ mamy $m^2+7 = n^2+7+2^k n+2^{2k-2}$. Ponadto liczby n^2+7 oraz $2^k n$ są podzielne przez 2^k, ale nie przez 2^{k+1} (gdyż liczba n jest nieparzysta). Stąd ich suma jest podzielna przez 2^{k+1}. A skoro $2^{k+1} \mid 2^{2k-2}$ z uwagi na nierówność $k \geqslant 3$, więc dochodzimy do wniosku, że $2^{k+1} \mid m^2 + 7$; to zaś kończy dowód indukcyjny.

3. Funkcje $f, g : (0,2) \to (0,2)$ spełniają dla każdej liczby $x \in (0,2)$ równości

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x \qquad \text{oraz} \qquad f(x) + g(x) = 2x.$$

Udowodnić, że $f(1) = g(1)$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że $f(1) > 1$; wobec tego mamy $f(1) = 1 + c$ dla pewnej liczby $c \in (0,1)$. Udowodnimy indukcyjnie, że w tej sytuacji dla każdego $n \geqslant 0$ spełnione są zależności $f(1+nc) = 1+(n+1)c$ oraz $(n+1)c < 1$ — a więc uzyskamy sprzeczność, gdyż ostatnia nierówność nie może zachodzić dla wszystkich n.

Stwierdzenie powyższe jest oczywiście prawdziwe dla $n = 0$. Jeśli natomiast jest ono prawdziwe dla pewnego n, to

$$\begin{aligned} f(1+(n+1)c) &= 2[1+(n+1)c] - g(1+(n+1)c) = \\ &= [2+(2n+2)c] - g(f(1+nc)) = \\ &= [2+(2n+2)c] - (1+nc) = 1+(n+2)c. \end{aligned}$$

Zatem liczba $1+(n+2)c$ jest wartością funkcji f dla argumentu $x = 1+(n+1)c$, skąd ponadto otrzymujemy nierówność $1+(n+2)c < 2$, czyli $(n+2)c < 1$. To kończy indukcję.

Analogicznie wykluczamy możliwość $g(1) > 1$. W takim razie $f(1), g(1) \leqslant 1$; a skoro $f(1) + g(1) = 2$, więc ostatecznie $f(1) = g(1) = 1$.

4. Z klocków $2 \times 2 \times 1$ zbudowano sześcian o krawędzi 20. Dowieść, że istnieje prosta równoległa do jednej z krawędzi sześcianu, przecinająca wnętrze sześcianu i nie przecinająca wnętrza żadnego z klocków.

Rozwiązanie:

Dzieląc każdą ścianę sześcianu na 20 kwadratów jednostkowych otrzymujemy na każdej ścianie $19^2 = 361$ punktów będących wierzchołkami podziału. Zatem istnieje $3 \cdot 361 = 1083$ prostych równoległych do pewnej krawędzi sześcianu i przechodzących przez parę takich punktów.

Zauważmy teraz, że każda taka prosta przecina wnętrza parzystej liczby klocków. Rzeczywiście, niech ℓ będzie odcinkiem takiej prostej zawartym w sześcianie i niech k będzie równoległą do niej krawędzią sześcianu. Weźmy pod uwagę prostopadłościan P, którego krawędzie są równoległe do krawędzi sześcianu, przy czym dwiema z tych krawędzi są k i ℓ. Wówczas część wspólna prostopadłościanu P z dowolnym klockiem, którego wnętrza nie przecina ℓ, ma objętość 0, 2 albo 4, czyli objętość parzystą. Z kolei część wspólna prostopadłościanu z klockiem o wnętrzu przeciętym przez ℓ jest sześcianem jednostkowym (taki klocek musi leżeć „prostopadle” do ℓ). Jednak objętość prostopadłościanu P jest liczbą podzielną przez 20, a więc parzystą. W związku z tym liczba klocków, których wnętrza przecina ℓ, musi być parzysta.

Wszystkich klocków jest 2000. Wobec tego najwyżej 1000 spośród 1083 rozważanych prostych może przecinać wnętrze pewnego klocka, co kończy rozwiązanie.

5. Rzucamy 2011-krotnie monetą i zapisujemy wynik w postaci ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{2011})$, gdzie dla $i = 1, 2, \ldots, 2011$ przyjmujemy $a_i = 1$ albo $a_i = 2$ w zależności od tego, czy w i-tym rzucie wypadł orzeł, czy reszka. Niech p oznacza prawdopodobieństwo tego, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_j = 2011$ dla pewnej liczby $j \in \{1, 2, \ldots, 2011\}$. Znaleźć pięćsetną cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby p.

Rozwiązanie:

Dla każdego $n \geqslant 1$ rozważmy n-krotny rzut monetą; wynik zapisujemy w postaci analogicznego ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo tego, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_j = n$ dla pewnej liczby $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. W szczególności mamy więc $p = p_{2011}$.

Jeśli $n \geqslant 3$, to ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, w których $a_1 + a_2 + \ldots + a_j = n$ dla pewnego wskaźnika j, można podzielić na dwie grupy:

- ciągi, w których $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n - 1$ oraz $a_{k+1} = 1$ dla pewnego wskaźnika $k \leqslant n - 1$;
- ciągi, w których $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n - 2$ oraz $a_{k+1} = 2$ dla pewnego wskaźnika $k \leqslant n - 2$.

Prawdopodobieństwo tego, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ jest równe $n - 1$ (odpowiednio $n-2$) dla pewnego k, wynosi p_{n-1} (odpowiednio p_{n-2}). Prawdopobieństwo tego, że dla takiego wskaźnika k mamy $a_{k+1} = 1$ (odpowiednio $a_{k+1} = 2$), jest równe $\frac{1}{2}$. To prowadzi do następującej zależności rekurencyjnej:

$$p_n = \tfrac{1}{2} p_{n-1} + \tfrac{1}{2} p_{n-2} \qquad \text{dla } n \geqslant 3.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że $p_1 = \frac{1}{2}$ oraz $p_2 = \frac{3}{4}$. Rozwiązując rekurencję liniową otrzymujemy

$$p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Tak więc

$$(*) \qquad p = \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2011}}.$$

Ponieważ $3 \cdot 2^{2011} > 2^{2008} = 16^{502} > 10^{502}$, więc rozwinięcie dziesiętne po przecinku drugiego składnika po prawej stronie równości $(*)$ rozpoczyna się od co najmniej 502 zer. Stąd wniosek, że rozwinięcie dziesiętne liczby p rozpoczyna się od co najmniej 501 cyfr 6. *Odpowiedź:* 6.

6. Punkty P i Q leżą wewnątrz rombu $ABCD$, przy czym

$$\angle PBQ = \angle PDQ = \tfrac{1}{2}\angle ABC$$

oraz trójkąty APB i BQC mają rozłączne wnętrza. Udowodnić, że suma pól trójkątów APB, PDQ i BQC jest równa połowie pola rombu $ABCD$.

Rozwiązanie:

Odbijmy punkt A względem prostej BP, uzyskując punkt X. Wówczas z równości $BX = BA = BC$ i $\angle PBQ = \frac{1}{2}\angle ABC$ wynika, że punkt X jest symetryczny do punktu C względem prostej BQ. Zatem

$$(1) \qquad [APB] + [BQC] = [XPB] + [BQX] = [BPXQ] = [BPQ] \pm [XPQ],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$, a znak $\pm$ zależy od tego, po której stronie prostej PQ leży punkt X. Analogicznie punkt Y symetryczny do punktu A względem prostej DP jest także symetryczny do punktu C względem prostej DQ, skąd otrzymujemy

$$(2) \qquad [APD] + [DQC] = [YPD] + [DQY] = [DPYQ] = [DPQ] \pm [YPQ].$$

Punkty X i Y są różne — w przeciwnym wypadku mielibyśmy $\angle APB = \angle XPB$ i $\angle APD = \angle XPD$, czyli $\angle APB + \angle APD = 180^\circ$ i punkt P leżałby na przekątnej BD; wtedy jednak $\angle PBQ < \frac{1}{2}\angle ABC$, w sprzeczności z założeniami zadania. Ponadto trójkąty XPQ i YPQ są przystające, gdyż mają one wspólny bok PQ oraz $XP = AP = YP$ i $XQ = CQ = YQ$; co więcej, są one symetryczne względem prostej PQ. Wobec tego $[XPQ] = [YPQ]$ i znaki $\pm$ w równościach (1) i (2) są jednakowe, a w takim razie

$$[APB] + [BQC] + [DPQ] = [APD] + [DQC] + [BPQ].$$

Stąd wynika teza zadania, gdyż 6 wypisanych wyżej trójkątów stanowi rozbicie rombu $ABCD$.

7. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n o następującej własności: dla dowolnych n takich par liczb całkowitych, że w każdej parze liczby dają różne reszty z dzielenia przez p, można wybrać po jednej liczbie z każdej pary w taki sposób, by suma n wybranych liczb była podzielna przez p.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $n = p-1$. Przykładem co najwyżej $p-2$ par, z których nie można wybrać po jednym elemencie i otrzymać sumy podzielnej przez p, są pary: $(1,2)$, $(0,1)$, $(0,1)$, $\ldots$, $(0,1)$ — przy dowolnym wyborze otrzymujemy bowiem sumę co najmniej 1 i co najwyżej $p-1$.

Udowodnimy teraz, że dla $p-1$ par (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_{p-1}, b_{p-1}) żądany wybór jest zawsze możliwy. Dla $i = 1, 2, \ldots, p-1$ niech R_i oznacza zbiór reszt z dzielenia przez p wszystkich liczb postaci $*_1 + *_2 + \ldots + *_i$, gdzie w miejsce każdego z symboli $*$ możemy niezależnie podstawić a lub b. Jest jasne, że $|R_{i+1}| \geqslant |R_i|$ dla każdego i. Wykażemy, że dla $i = 1, 2, \ldots, p-2$ jeśli $|R_i| < p$, to $|R_{i+1}| > |R_i|$. Ponieważ $|R_1| = 2$, więc przez oczywistą indukcję uzyskamy stąd $|R_i| \geqslant i+1$ dla $i = 1, 2, \ldots, p-1$ i w szczególności $|R_{p-1}| = p$, skąd natychmiast wyniknie nasza teza.

Przypuśćmy zatem, że $|R_{i+1}| = |R_i|$. Zauważmy, że R_{i+1} jest zbiorem reszt z dzielenia przez p liczb postaci $x + y$, gdzie $x \in R_i$ oraz $y \in \{a_{i+1}, b_{i+1}\}$. Ponadto zarówno sumy $x + a_{i+1}$, jak i sumy $x + b_{i+1}$ dla $x \in R_i$ dają $|R_i|$ różnych reszt z dzielenia przez p. Wobec tego z równości $|R_{i+1}| = |R_i|$ wynika, że zbiór reszt z dzielenia sum $x+a_{i+1}$ przez p jest równy zbiorowi reszt z dzielenia sum $x + b_{i+1}$ przez p. Zatem zbiór reszt z dzielenia sum $y + b_{i+1} - a_{i+1}$ przez p, gdzie $y \in R_i$, jest równy zbiorowi R_i. Stąd dla każdej reszty $x \in R_i$ reszta z dzielenia liczby $x + b_{i+1} - a_{i+1}$ przez p również należy do R_i; rozpoczynając od jednej reszty i stosując ten fakt wielokrotnie do kolejno otrzymywanych reszt uzyskamy w końcu wszystkie możliwe reszty, skoro liczba $b_{i+1} - a_{i+1}$ nie jest podzielna przez liczbę pierwszą p. W takim razie $|R_i| = p$, co kończy dowód.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki nieskończony zbiór punktów na płaszczyźnie, że żadne trzy punkty z tego zbioru nie leżą na jednej prostej, a odległość między dowolnymi dwoma jego punktami jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Taki zbiór istnieje. Niech α będzie kątem ostrym wyznaczonym przez równości $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Wykażemy, że żądaną własność ma zbiór S punktów o współrzędnych $P_n = (\cos 2n\alpha, \sin 2n\alpha)$ dla wszystkich liczb całkowitych n.

Punkty P_n są różne dla różnych wartości n. Gdyby bowiem $P_m = P_n$ dla pewnych $m \neq n$, to mielibyśmy $\cos 2m\alpha = \cos 2n\alpha$ oraz $\sin 2m\alpha = \sin 2n\alpha$, zatem kąty $2m\alpha$ i $2n\alpha$ różniłyby się o całkowitą wielokrotność 2π. Wobec tego kąt α byłby wymierną wielokrotnością 2π, a ciąg $a_i = 2^{i-1}\alpha$ byłby okresowy modulo 2π (począwszy od pewnego miejsca), czyli ciąg $b_i = \cos 2^{i-1}\alpha$ byłby okresowy. Jednak $b_1 = \frac{4}{5}$ oraz $b_{i+1} = 2b_i^2 - 1$ dla każdego i, skąd przez prostą indukcję wynika, że dla $i \geqslant 2$ liczbę b_i można zapisać jako ułamek o liczniku dającym resztę 1 z dzielenia przez 5 oraz mianowniku równym $5^{2^{i-1}}$, w związku z czym ciąg $\{b_i\}_{i \geqslant 1}$ nie jest okresowy.

Zatem zbiór S jest nieskończony. Leży on ponadto na okręgu jednostkowym, więc żadne jego trzy punkty nie są współliniowe. Pozostaje sprawdzić, że dla dowolnych m i n odległość między punktami P_m i P_n jest wymierna. Ale

$$d(P_m, P_n) = \sqrt{(\cos 2m\alpha - \cos 2n\alpha)^2 + (\sin 2m\alpha - \sin 2n\alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{2 - 2(\cos 2m\alpha \cos 2n\alpha + \sin 2m\alpha \sin 2n\alpha)} =$$
$$= \sqrt{2 - 2\cos 2(m-n)\alpha} = |2\sin(m-n)\alpha|.$$

A ponieważ liczby $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ są wymierne, więc ze wzorów na sinus i cosinus sumy wynika przez prostą indukcję, że dla każdego całkowitego k liczby $\cos k\alpha$ i $\sin k\alpha$ są wymierne. To kończy rozwiązanie.

9. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ przeciwległe boki są równoległe. Udowodnić, że trójkąty ACE i BDF mają równe pola.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia punktów przecięcia głównych przekątnych sześciokąta: $K = CF \cap AD$, $L = BE \cap CF$, $M = AD \cap BE$. Zauważmy, że trójkąt KLM (który może degenerować się do punktu) jest zawarty wewnątrz trójkątów ACE i BDF — punkty K, L, M leżą bowiem po tej samej stronie prostych AC, CE, EA, co trójkąt ACE, gdyż są punktami przecięcia odcinków, z których co najmniej jeden leży po odpowiedniej stronie.

Dla dowolnego trapezu $XYZT$ ($XY \parallel ZT$), którego przekątne przecinają się w punkcie U, prawdziwa jest równość pól trójkątów $[XYT] = [XYZ]$, a więc i równość pól $[XUT] = [YUZ]$. Stosując to spostrzeżenie do trapezów $ABDE$, $BCEF$ i $CDFA$ dostajemy

$$[AEM] = [BDM], \quad [CEL] = [BFL], \quad [ACK] = [FDK];$$

dodając trzy powyższe równości stronami, a następnie dodając do obu stron wielkość $[KLM]$, otrzymujemy zależność $[ACE] = [BDF]$.

10. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ niech a_n oznacza sumę cyfr w zapisie dziesiętnym liczby 2^n. Rozstrzygnąć, czy ciąg a_1, a_2, a_3, $\ldots$ jest począwszy od pewnego miejsca niemalejący.

Rozwiązanie:

Badając reszty z dzielenia przez 9 kolejnych potęg 2^n dochodzimy do następującego wyniku:

$n \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$2^n \pmod 9$	1	2	4	8	7	5

Ponadto dowolna liczba naturalna daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, jak jej suma cyfr. Stąd wniosek, że powyższa tabelka pozostanie prawdziwa, jeśli $2^n \pmod 9$ zamienimy na a_n.

Przypuśćmy teraz, że dany w treści zadania ciąg jest począwszy od pewnego miejsca niemalejący; zatem istnieje taka liczba naturalna k, że $a_i \leqslant a_{i+1}$ dla wszystkich $i \geqslant 6k$. Wobec tego dla dowolnej liczby $j \geqslant k$ łącząc nierówności

$a_{6j} \leqslant a_{6j+1} \leqslant a_{6j+2} \leqslant a_{6j+3} \leqslant a_{6j+4} \leqslant a_{6j+5} \leqslant a_{6j+6}$ z powyższymi wartościami reszt z dzielenia przez 9 wypisanych przed chwilą 7 liczb, stwierdzamy, że

$$\begin{array}{lll} a_{6j+1} \geqslant a_{6j} + 1, & a_{6j+2} \geqslant a_{6j+1} + 2, & a_{6j+3} \geqslant a_{6j+2} + 4, \\ a_{6j+4} \geqslant a_{6j+3} + 8, & a_{6j+5} \geqslant a_{6j+4} + 7, & a_{6j+6} \geqslant a_{6j+5} + 5, \end{array}$$

skąd uzyskujemy $a_{6(j+1)} \geqslant a_{6j} + 27$ dla każdej liczby $j \geqslant k$ i w rezultacie $a_{6\ell} \geqslant a_{6k} + 27(\ell - k)$ dla każdego $\ell \geqslant k$. Z drugiej strony, dla wszystkich liczb naturalnych ℓ mamy $2^{6\ell} = 64^\ell < 100^\ell$, zatem $a_{6\ell}$ jest sumą cyfr liczby mającej co najwyżej 2ℓ cyfr i w związku z tym $a_{6\ell} \leqslant 18\ell$. Porównując obie nierówności dostajemy $18\ell \geqslant a_{6k} + 27(\ell - k)$; to jednak nie może zachodzić dla dowolnie dużych liczb ℓ, więc otrzymujemy sprzeczność. *Odpowiedź:* Nie.

11. Dany jest wielomian $W(x)$ stopnia n o współczynnikach rzeczywistych, przy czym współczynnik przy potędze x^n wynosi 1. Wykazać, że istnieje co najwyżej n różnych liczb całkowitych a, dla których

$$|W(a)| < \frac{n!}{2^n}.$$

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, wbrew tezie, że dla liczb całkowitych $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ spełnione są zależności $|W(a_i)| < \dfrac{n!}{2^n}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Stosując wzór interpolacyjny Lagrange'a zapisujemy wielomian $W(x)$ w postaci

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n+1} W(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Odczytując z powyższego wzoru współczynnik przy potędze x^n widzimy, że

$$\sum_{i=1}^{n+1} W(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j} = 1.$$

Zauważmy teraz, że dla $i = 1, 2, \ldots, n+1$ zachodzą następujące nierówności: $a_i - a_j \geqslant i - j$, gdy $j < i$, oraz $a_j - a_i \geqslant j - i$, gdy $j > i$. Zatem

$$\prod_{j \neq i} |a_i - a_j| = \prod_{j=1}^{i-1} (a_i - a_j) \cdot \prod_{j=i+1}^{n+1} (a_j - a_i) \geqslant (i-1)! \cdot (n-i+1)! = \frac{n!}{\binom{n}{i-1}},$$

skąd otrzymujemy

$$1 \;=\; \left| \sum_{i=1}^{n+1} W(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} |W(a_i)| \prod_{j \neq i} \frac{1}{|a_i - a_j|} <$$

$$< \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n!}{2^n} \cdot \frac{1}{n!}\binom{n}{i-1} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 1,$$

czyli sprzeczność.

12. W grupie n osób każdy ma co najmniej d znajomych, przy czym $2d < n$. Wiadomo, że nie da się tak podzielić danej grupy na dwie podgrupy, że żadna osoba z jednej podgrupy nie zna żadnej osoby z drugiej podgrupy. Dowieść, że można wybrać $2d+1$ osób i usadzić je wzdłuż jednej krawędzi prostokątnego stołu w taki sposób, że każdy będzie znał swoich sąsiadów.

Rozwiązanie:

Niech k będzie największą taką liczbą, że istnieją osoby X_1, X_2, ..., X_k, które można usadzić w wypisanej kolejności wzdłuż jednej krawędzi stołu zgodnie z wymaganiami zadania. Przypuśćmy, że $k \leqslant 2d$; wówczas otrzymując sprzeczność zakończymy rozwiązanie.

Wszyscy znajomi osoby X_k należą do zbioru $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}$ — gdyby istniał inny znajomy osoby X_k, to umieszczając go obok X_k otrzymalibyśmy sprzeczność z maksymalnością k. Analogicznie wszyscy znajomi osoby X_1 siedzą już przy stole. Rozpatrzymy teraz dwa przypadki:

Przypadek 1: osoby X_1 i X_k znają się. Wtedy możemy osoby X_1, X_2, ..., X_k rozmieścić przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zna swoich sąsiadów. Skoro $k \leqslant 2d$, to tym bardziej $k < n$. Na mocy założeń zadania istnieje osoba Y nie siedząca przy stole i znająca jedną z siedzących tam osób X_i. Umieśćmy osobę Y pomiędzy X_i i X_{i+1} (gdzie $X_{k+1} = X_1$), a następnie wstawmy ścianę pomiędzy osoby Y i X_{i+1}. Otrzymamy wówczas rozmieszczenie $k+1$ osób zgodne z warunkami zadania, wbrew maksymalności k.

Przypadek 2: osoby X_1 i X_k nie znają się. Wówczas X_k ma następujących znajomych: X_{k-1} oraz co najmniej $d-1$ osób w $(k-3)$-elementowym zbiorze $A = \{X_2, X_3, \ldots, X_{k-2}\}$. Podobnie X_1 zna X_2 oraz co najmniej $d-1$ osób w $(k-3)$-elementowym zbiorze $B = \{X_3, X_4, \ldots, X_{k-1}\}$. Sąsiad z lewej strony osoby należącej do B należy do A. Zatem co najmniej $d-1$ osób z B sąsiaduje po swojej lewej stronie ze znajomym X_k. Ponadto co najmniej $d-1$ osób z B zna się z X_1. A ponieważ $|B| = k-3 \leqslant 2d-3$, więc pewna osoba z B spełnia oba te warunki jednocześnie; tym samym istnieje takie $i \in \{3, 4, \ldots, k-1\}$, że X_{i-1} zna się z X_k oraz X_i zna sie z X_1. W tej sytuacji osoby X_1, X_2, ..., X_k można rozmieścić przy okrągłym stole w kolejności X_1, X_i, X_{i+1}, ..., X_k, X_{i-1}, X_{i-2}, ..., X_2 i uzyskać sprzeczność tak jak w Przypadku 1.

13. Na płaszczyźnie danych jest n punktów białych oraz n punktów czarnych, przy czym żadne trzy z tych $2n$ punktów nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że można narysować n parami rozłącznych odcinków tak, by każdy z nich miał jeden koniec biały i jeden czarny.

Rozwiązanie:

Niech X_1, X_2, ..., X_n będą białymi, zaś Y_1, Y_2, ..., Y_n — czarnymi punktami. Mamy wykazać istnienie takiej permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, że odcinki $X_1Y_{a_1}$, $X_2Y_{a_2}$, ..., $X_nY_{a_n}$ są parami rozłączne.

Wybierzmy w tym celu tę permutację, dla której wartość sumy długości $X_1Y_{a_1} + X_2Y_{a_2} + \ldots + X_nY_{a_n}$ jest najmniejsza. Udowodnimy, że ta permutacja spełnia warunki zadania. Przypuśćmy bowiem, wbrew tej tezie, że pewne dwa z rozpatrywanych odcinków mają punkt wspólny P; dla ustalenia oznaczeń niech będą to odcinki $X_1Y_{a_1}$ oraz $X_2Y_{a_2}$. Punkt P leży oczywiście w ich wnętrzu; zatem z nierówności trójkąta dostajemy

$$\begin{aligned} X_1Y_{a_2} + X_2Y_{a_1} &< X_1P + PY_{a_2} + X_2P + PY_{a_1} = \\ &= X_1P + PY_{a_1} + X_2P + PY_{a_2} = X_1Y_{a_1} + X_2Y_{a_2}. \end{aligned}$$

Wobec tego zamiana odcinków $X_1Y_{a_1}$ i $X_2Y_{a_2}$ na odcinki $X_1Y_{a_2}$ i $X_2Y_{a_1}$ zmniejsza wartość zdefiniowanej na początku akapitu sumy. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

14. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $ab + bc + cd + da = 1$. Dowieść, że

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} K &= \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c}, \\ L &= a(b+c+d) + b(c+d+a) + c(d+a+b) + d(a+b+c), \\ M &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

Wówczas na mocy nierówności Schwarza mamy $KL \geqslant M^2$. Zatem do uzyskania nierówności $K \geqslant \frac{1}{3}$ wystarczy sprawdzić, że $M^2 \geqslant \frac{1}{3}L$.

Z nierówności $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 \geqslant 0$ oraz danego w treści zadania warunku dostajemy $M \geqslant 1$. Wobec tego $M^2 \geqslant M$ i nierówność $M^2 \geqslant \frac{1}{3}L$ będzie udowodniona, jeśli sprawdzimy, że $3M \geqslant L$. Ale

$$3M - L = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2 \geqslant 0,$$

co kończy rozwiązanie.

15. Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny liczb całkowitych zawierający kwadrat liczby całkowitej oraz sześcian liczby całkowitej. Wykazać, że w ciągu tym występuje szósta potęga liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Rozumowanie poprowadzimy przez indukcję ze względu na różnicę d rozważanego ciągu arytmetycznego. Dla $d = 1$ teza zadania jest oczywista.

Niech a będzie pierwszym wyrazem ciągu. Ponadto niech $b = \mathrm{NWD}(a, d)$ oraz $c = \frac{d}{b}$. Rozważymy dwa przypadki:

Przypadek 1: $\mathrm{NWD}(b, c) > 1$. Weźmy pod uwagę wspólny dzielnik pierwszy p liczb b i c. Niech p^α i p^δ będą najwyższymi potęgami p dzielącymi odpowiednio liczby a i d. Z zależności $p \,|\, c$ wynika, że $\delta > \alpha > 0$. Zatem w rozpatrywanym ciągu arytmetycznym najwyższą potęgą p dzielącą dowolny wyraz jest p^α. W takim razie, skoro w ciągu występują kwadrat oraz sześcian, mamy $6 \,|\, \alpha$. W tej sytuacji możemy zastosować założenie indukcyjne do ciągu arytmetycznego o początkowym wyrazie $\frac{a}{p^\alpha}$ i różnicy $\frac{d}{p^\alpha}$ — ciąg ten również zawiera kwadrat oraz sześcian, a więc i szóstą potęgę, która po pomnożeniu przez p^α pozostanie szóstą potęgą.

Przypadek 2: $\mathrm{NWD}(b, c) = 1$. Ponieważ także $\mathrm{NWD}(\frac{a}{b}, c) = 1$ na mocy określenia liczby b, więc widzimy, że $\mathrm{NWD}(a, c) = 1$. Ale liczba c jest dzielnikiem liczby d; stąd zaś $\mathrm{NWD}(a + id, c) = 1$ dla każdej liczby całkowitej i. Inaczej mówiąc, wszystkie wyrazy rozważanego ciągu arytmetycznego są względnie pierwsze z liczbą c. Przypuśćmy, że w danym ciągu występują wyrazy x^2 i y^3, gdzie x i y są liczbami całkowitymi (jak już wiemy, względnie pierwszymi z liczbą c). Wtedy $x^2 \equiv y^3 \equiv a \pmod{d}$. Ponadto istnieje liczba całkowita k, dla której $ky \equiv x \pmod{c}$. Wówczas $k^6a^2 \equiv k^6y^6 \equiv x^6 \equiv a^3 \pmod{c}$, skąd dostajemy $k^6 \equiv a \pmod{c}$. Wobec tego $(k + \ell c)^6 \equiv a \pmod{c}$ dla dowolnej liczby całkowitej ℓ. Wybierzmy liczbę ℓ w taki sposób, że $b \,|\, k + \ell c$ — jest to możliwe, skoro $\mathrm{NWD}(b, c) = 1$. W rezultacie $(k + \ell c)^6 \equiv 0 \equiv a \pmod{b}$, skąd uwzględniając rozkład $d = bc$ uzyskujemy $(k + \ell c)^6 \equiv a \pmod{d}$. Dodając w razie potrzeby wielokrotność d do liczby $k + \ell c$ zapewnimy, że jej szósta potęga będzie wyrazem ciągu arytmetycznego. A to właśnie należało udowodnić.

16. Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o_1. Okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie F. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinka AB w punkcie E. Dowieść, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Niech okrąg o_3 dopisany do boku AB trójkąta ABC będzie doń styczny w punkcie G. Wówczas $AG = BE$. A ponieważ trapez $ABCD$ jest symetryczny względem symetralnej odcinka AB, więc $\angle BDE = \angle ACG$. Zatem zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy równość $\angle BDF = \angle ACG$.

Rozpatrzmy odwzorowanie φ będące złożeniem inwersji o środku C i promieniu $\sqrt{CA \cdot CB}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta ACB. Przekształcenie φ, podobnie jak inwersja, jest inwolucją, tzn. złożenie $\varphi \circ \varphi$ jest identycznością. Łatwo sprawdzamy, że φ zamienia punkty A i B, a więc wymienia prostą AB z okręgiem o_1. Ponadto obrazem okręgu o_2 stycznego do półprostych $CA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ oraz do okręgu o_1 w punkcie F jest okrąg o_3 styczny do tych samych półprostych oraz do prostej AB w punkcie G. Stąd zaś wynika związek $\angle ACG = \angle BCF$, który wraz z równością $\angle BCF = \angle BDF$ kończy rozwiązanie.

17. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $f(0) = c$. Podstawiając w danym równaniu $x = y = 0$ dostajemy $f(c^2 + c) = 0$; kładąc z kolei $x = y = c^2 + c$ uzyskujemy $f(0) = 0 + c^2 + c$, skąd $0 = 0 + c^2$, czyli $c = 0$.

Przyjmując $x = 0$ otrzymujemy teraz $f(f(y)) = y$ dla każdego y. To oznacza, że funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna. Biorąc $y = 0$ stwierdzamy, że $f(f(x)^2) = xf(x)$ dla dowolnego x; następnie zaś podstawiając $x = f(t)$ i $y = 0$ dostajemy $f(f(f(t))^2 + 0) = f(t)f(f(t)) + 0$, czyli $f(t^2) = tf(t) = f(f(t)^2)$ dla wszystkich liczb t. A skoro funkcja f jest różnowartościowa, otrzymujemy stąd $t^2 = f(t)^2$ dla dowolnego t. Wobec tego $f(x) \in \{x, -x\}$ dla każdej liczby x.

Gdyby istniały różne od zera liczby a i b, dla których $f(a) = a$ i $f(b) = -b$, to podstawiając w wyjściowym równaniu $x = a$ i $y = b$ dostalibyśmy zależność $f(a^2 - b) = a^2 + b$, ale liczba po prawej stronie nie jest równa $a^2 - b$ ani $-(a^2 - b)$. W takim razie albo $f(x) = x$ dla wszystkich liczb $x \neq 0$, albo $f(x) = -x$ dla wszystkich liczb $x \neq 0$. Na koniec sprawdzamy, że obie otrzymane funkcje są rozwiązaniami. *Odpowiedź:* $f(x) = x$ oraz $f(x) = -x$.

18. W trójkącie nierównoramiennym ABC dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie D. Prosta ℓ jest styczna do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że prosta ℓ jest styczna do okręgu przechodzącego przez środki odcinków AD, BD i PQ.

Rozwiązanie:

Niech O_1, O_2 będą odpowiednio środkami, zaś r_1, r_2 — promieniami okręgów o_1, o_2 opisanych odpowiednio na trójkątach ADC, BDC oraz niech K, L, M będą odpowiednio środkami odcinków AD, BD, PQ. Niech wreszcie S oznacza punkt przecięcia prostych O_1O_2 i ℓ (proste te nie są równoległe; w przeciwnym razie mielibyśmy $r_1 = r_2$ i $\angle CAD = \angle CBD$, wbrew warunkom zadania).

Trójkąty równoramienne AO_1D i BO_2D są podobne, gdyż zachodzą równości $\angle AO_1D = \angle ACB = \angle BO_2D$. Stąd dostajemy $\angle SO_1A = \angle SO_2D$, czyli jednokładność o środku S i promieniu $\frac{r_2}{r_1}$ (która przekształca o_1 na o_2 oraz punkt P na Q) przeprowadza punkt A na D oraz punkt D na B. W szczególności punkt S leży na prostej AB. Ponadto

$$\frac{SQ}{SP} = \frac{SD}{SA} = \frac{SB}{SD} = \frac{r_2}{r_1};$$

skoro zaś punkty M, K, L są odpowiednio środkami odcinków PQ, AD, DB, więc

$$\frac{SM}{SP} = \frac{SK}{SA} = \frac{SL}{SD} = \frac{\frac{1}{2}(r_1 + r_2)}{r_1}.$$

Zatem jednokładność o środku S i promieniu $\frac{r_1+r_2}{2r_1}$ przeprowadza okrąg o_1 styczny do prostej ℓ w punkcie P na okrąg przechodzący przez punkty K, L, M i styczny do prostej ℓ w punkcie M. A stąd wynika teza zadania.

19. W turnieju ping-ponga każdy gracz rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym z pozostałych graczy. Udowodnić, że albo można umieścić wszystkich graczy przy okrągłym stole tak, by każdy wygrał ze swoim sąsiadem z prawej strony, albo można rozbić wszystkich graczy na takie dwie grupy, że dowolny gracz z pierwszej grupy wygrał z dowolnym graczem z drugiej grupy.

Rozwiązanie:

Jeżeli możliwe jest umieszczenie graczy przy okrągłym stole w sposób opisany w zadaniu, to nietrudno się przekonać, że dla dowolnego rozbicia graczy na dwie grupy A i B nie może się zdarzyć, że każdy gracz z A wygrał z dowolnym graczem z B (istnieje bowiem członek grupy B, którego sąsiad z prawej strony należy do A — rozpatrując mianowicie ciąg kolejnych graczy wokół stołu, począwszy od pewnego członka B, zauważamy, że w pewnym momencie musi nastąpić „przeskok” do A). Należy teraz wykazać implikację przeciwną: jeśli takie rozbicie nie istnieje, to można graczy rozmieścić przy okrągłym stole.

W tym celu udowodnimy najpierw, że można *niektórych* spośród graczy rozmieścić przy okrągłym stole. Zauważmy bowiem, że w myśl nieistnienia rozbicia każdy gracz wygrał przynajmniej jeden mecz. Rozpocznijmy teraz od dowolnego gracza, następnie znajdźmy gracza, który z nim przegrał, później gracza, który przegrał z tym drugim itd.; w pewnym momencie dojdziemy do gracza, który wystąpił w tym łańcuszku już wcześniej — a wtedy można fragment owego łańcuszka rozpoczynający się od tego gracza rozmieścić przy stole.

Weźmy teraz pod uwagę takie rozmieszczenie graczy przy okrągłym stole, w którym liczba siedzących przy stole jest możliwie największa. Wystarczy zatem dowieść, że przy stole siedzą wszyscy gracze. Przypuśćmy w takim razie, iż tak nie jest.

Jeżeli któryś z graczy X poza stołem przegrał z pewnym siedzącym oraz wygrał z pewnym siedzącym, to można — tak jak w pierwszym akapicie rozwiązania — znaleźć takiego gracza siedzącego A oraz jego sąsiada z prawej strony B, że X przegrał z A oraz wygrał z B. Wtedy gracza X możemy usadzić pomiędzy A i B, co prowadzi do sprzeczności z maksymalnością dotychczasowego rozmieszczenia.

Zatem zbiór wszystkich graczy rozpada się na trzy zbiory: zbiór S siedzących przy stole, zbiór S_1 tych, którzy przegrali ze wszystkimi siedzącymi, oraz zbiór S_2 tych, którzy wygrali ze wszystkimi siedzącymi. Na mocy nieistnienia rozbicia zbiory S_1 i S_2 są niepuste. Gdyby każdy gracz z S_1 przegrał z każdym graczem z S_2, to otrzymalibyśmy niedopuszczalne rozbicie: na zbiory S_2 oraz $S \cup S_1$. Wobec tego istnieją gracze $X \in S_1$ oraz $Y \in S_2$, przy czym X wygrał z Y. Ponadto dowolny gracz przy stole wygrał z X oraz przegrał z Y. W tej sytuacji umieszczając graczy X i Y pomiędzy parę dowolnie wybranych graczy już siedzących uzyskujemy rozmieszczenie większej liczby graczy przy okrągłym stole, wbrew założonej wcześniej maksymalności. Teza została tym samym wykazana.

20. Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą. Wykazać, że liczba

$$\binom{p^2}{p} - p$$

jest podzielna przez p^5.

Rozwiązanie:

Obliczamy, że

$$\begin{aligned}\binom{p^2}{p} - p &= \frac{p^2 \cdot (p^2-1)(p^2-2)\ldots(p^2-(p-1))}{p \cdot (p-1)!} - p = \\ &= p \cdot \frac{(p^2-1)(p^2-2)\ldots(p^2-(p-1)) - (p-1)!}{(p-1)!}.\end{aligned}$$

W takim razie wystarczy udowodnić, że licznik ostatniego ułamka jest podzielny przez p^4. Wymnażając nawiasy w iloczynie $(p^2-1)(p^2-2)\ldots(p^2-(p-1))$ otrzymujemy sumę liczby podzielnej przez p^4 oraz liczby $-p^2\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i} + (p-1)!$.

Wobec tego wystarczy wykazać podzielność $p^2 \,\Big|\, \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i}$.

Zauważmy dalej, że

$$2\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i} = \sum_{i=1}^{p-1}(p-1)!\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{p-i}\right) = p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i(p-i)},$$

więc wystarczy udowodnić, że $p \,\Big|\, \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i(p-i)}$. Dla $i = 1, 2, \ldots, p-1$ niech r_i będzie liczbą ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ spełniającą warunek $ir_i \equiv 1 \pmod p$. Wówczas $r_{p-i} = p - r_i$, a ciąg $(r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$ jest permutacją ciągu $(1, 2, \ldots, p-1)$.

Zatem $\dfrac{(p-1)!}{i(p-i)} \equiv (p-1)! r_i (p-r_i) \equiv -(p-1)! \cdot (-r_i^2) \pmod{p}$ i w efekcie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i(p-i)} &\equiv \sum_{i=1}^{p-1} (p-1)! \cdot (-r_i^2) = -(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} i^2 = \\ &= -(p-1)! \cdot \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} \equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie.

21. Dana jest liczba całkowita a. Ciąg liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia równość

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a}{a_n} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnić, że jeżeli liczby a_1, a_2 oraz $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a}{a_1 a_2}$ są całkowite, to wszystkie wyrazy danego ciągu są całkowite.

Rozwiązanie:

Dla każdego $n \geqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + a &= a_{n+2}^2 + a_n a_{n+2} = a_{n+2}(a_n + a_{n+2}) = \\ &= a_{n+2}\left(a_n + \frac{a_{n+1}^2 + a}{a_n}\right) = a_{n+2} \cdot \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2 + a}{a_n}, \end{aligned}$$

czyli

$$\frac{a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + a}{a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2 + a}{a_n a_{n+1}}.$$

Zatem liczba całkowita $b = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a}{a_1 a_2}$ ma następującą własność:

$$\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2 + a}{a_n a_{n+1}} = b \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wobec tego

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2 + a}{a_n a_{n+1}} - a_n = b a_{n+1} - a_n$$

dla dowolnego $n \geqslant 1$, skąd wobec całkowitości liczb a_1, a_2 przez prostą indukcję dostajemy tezę.

22. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ściśle rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach naturalnych i różnicy niepodzielnej przez 10, że suma cyfr zapisu dziesiętnego dowolnego wyrazu jest większa niż 2011^{2011}.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak. Wykażemy, że ciąg o pierwszym wyrazie i różnicy równej $10^k - 1$, gdzie $k > \frac{1}{9} \cdot 2011^{2011}$, spełnia warunki zadania. Należy zatem udowodnić, że zapis dziesiętny dowolnej dodatniej wielokrotności liczby $10^k - 1$ ma sumę cyfr nie mniejszą niż $9k$.

Przypuśćmy, że istnieją wielokrotności o mniejszej sumie cyfr; niech m będzie najmniejszą z nich. Oczywiście liczba m ma więcej niż k cyfr. Rozpatrzmy zapis dziesiętny tej liczby: $m = \overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}a_{k+2}a_{k+3}\ldots}$. Weźmy pod uwagę różnicę $\overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}} - (10^k - 1)$; niech $\overline{b_1b_2\ldots b_kb_{k+1}}$ będzie zapisem dziesiętnym tej różnicy (zauważmy, że $b_1 = a_1 - 1$; może się więc zdarzyć, że w tym $(k+1)$-cyfrowym zapisie wystąpią zera na początku). W tej sytuacji liczba $m' = \overline{b_1b_2\ldots b_kb_{k+1}a_{k+2}a_{k+3}\ldots}$ jest mniejszą dodatnią wielokrotnością liczby $10^k - 1$. Ponadto m' ma sumę cyfr nie większą niż m, gdyż $b = \overline{b_1b_2\ldots b_kb_{k+1}}$ ma sumę cyfr nie większą niż $a = \overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}$ — jako że b jest o 1 większa od liczby o kolejnych cyfrach $a_1 - 1$, a_2, a_3, $\ldots$, a_k, a_{k+1}, a powiększenie liczby o 1 może zwiększyć sumę cyfr najwyżej o 1. Uzyskana sprzeczność z minimalnością m kończy rozwiązanie.

23. Wyznaczyć liczbę sposobów takiego rozmieszczenia 2500 króli na szachownicy 100×100, że żaden król nie znajduje się w polu rażenia żadnego innego, a każdy wiersz i każda kolumna zawiera dokładnie 25 króli.

Rozwiązanie:

Podzielmy szachownicę na 2500 kwadratów 2×2. W każdym z tych kwadratów musi się znaleźć dokładnie jeden król. Prostokąty 25×2 i 2×25 złożone z 25 takich kwadratów nazwiemy *blokami.*

Rozważmy blok poziomy. Jeżeli w pewnym kwadracie król znajduje się po prawej stronie, to także we wszystkich kwadratach leżących na prawo król musi stać po prawej stronie. W szczególności jeśli dzieje się tak w lewym brzegowym kwadracie, to jest tak we wszystkich kwadratach bloku (będziemy taki blok nazywać *prawostronnym*). Ponieważ w drugiej kolumnie szachownicy ma znajdować się 25 króli, to każdy z 25 poziomych bloków zawierających takiego króla jest prawostronny. Analogicznie rozpatrując przedostatnią kolumnę stwierdzamy, że każdy z pozostałych 25 poziomych bloków jest lewostronny.

Zatem każdy blok poziomy jest opisany przez literę P (prawostronny) albo L (lewostronny). Podobnie każdy blok pionowy jest opisany przez literę G albo D (góra albo dół). Każdy kwadrat 2×2 znajduje się na przecięciu dwóch bloków, a litery przypisane tym blokom jednoznacznie określają pozycję króla. Pozostaje więc zbadać, które ze sposobów przypisania 25 liter L i P blokom poziomym oraz 25 liter G i D blokom pionowym prowadzą do rozmieszczeń króli zgodnych z warunkami zadania.

Przypuśćmy, że z dwóch sąsiednich bloków poziomych górny ma literę L, a dolny literę P, zaś z dwóch sąsiednich bloków pionowych lewy ma literę G, a prawy literę D. Wtedy dwa króle stoją na polach mających wspólny wierzchołek — punkt przecięcia prostych poziomej i pionowej, rozgraniczających dane pary bloków. Analogiczną *niedopuszczalną sytuację* otrzymujemy, gdy górny i dolny blok mają odpowiednio litery P i L, zaś lewy i prawy blok mają odpowiednio litery D i G.

Zauważmy teraz, że jeśli ciąg liter odpowiadających kolejnym (licząc od góry) blokom poziomym jest różny od ciągów $X_1 = (P, P, \ldots, P, L, L, \ldots, L)$ i $X_2 = (L, L, \ldots, L, P, P, \ldots, P)$, to wystąpią obie z następujących konfiguracji dwóch sąsiednich bloków: górny blok P i dolny L oraz górny blok L i dolny P. A wtedy każda para sąsiednich bloków pionowych z różnymi literami w połączeniu z jedną z powyższych par poziomych bloków utworzy niedopuszczalną sytuację. Podobną sprzeczność dostajemy, gdy ciąg liter odpowiadających kolejnym (licząc od lewej strony) blokom pionowym jest różny od ciągów $Y_1 = (G, G, \ldots, G, D, D, \ldots, D)$ i $Y_2 = (D, D, \ldots, D, G, G, \ldots, G)$.

Ponadto pary ciągów X_1, Y_2 oraz X_2, Y_1 także prowadzą do niedopuszczalnej sytuacji. Pozostaje stwierdzić, że pary X_1, Y_1 i X_2, Y_2 opisują rozmieszczenia króli spełniające wymagane warunki. *Odpowiedź:* 2.

24. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Okrąg o przechodzi przez punkty B i C oraz przecina odcinki AB i AC. Okrąg o' jest styczny do odcinków AB i AC odpowiednio w punktach D i E, zaś do okręgu o wewnętrznie w punkcie F. Punkt M jest środkiem łuku BC okręgu o zawierającego punkt F. Dowieść, że proste BC, DE i FM przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech prosta DE przecina prostą BC w punkcie G. Wtedy z twierdzenia Menelausa dostajemy

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

co po uwzględnieniu zależności $AD = AE$ daje

$$\frac{BG}{GC} = \frac{BD}{CE}.$$

Rozważmy jednokładność o środku F i skali λ, która przeprowadza okrąg o na o'. Oznaczając przez K i L punkty, w których odpowiednio proste BF i CF przecinają po raz drugi okrąg o', otrzymujemy równości $BK = (1-\lambda)BF$ oraz $CL = (1-\lambda)CF$, skąd

$$\frac{BD}{CE} = \frac{\sqrt{BK \cdot BF}}{\sqrt{CL \cdot CF}} = \frac{\sqrt{(1-\lambda)BF^2}}{\sqrt{(1-\lambda)CF^2}} = \frac{BF}{CF}.$$

Pozostaje wywnioskować z uzyskanego właśnie związku $\frac{BG}{GC} = \frac{BF}{CF}$, że punkty G, F, M leżą na jednej prostej. Ale związek ten oznacza, że półprosta $FG^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta zewnętrznego w trójkącie FBC przy wierzchołku F; jeśli zatem N jest środkiem łuku BC okręgu o nie zawierającego punktu M, to $\angle GFN = 90^\circ$ oraz $\angle MFN = 90^\circ$ (gdyż odcinek MN jest średnicą okręgu o), co kończy rozwiązanie.

25. Wyznaczyć wszystkie trójki nieujemnych liczb całkowitych (x, y, z) spełniających równanie

$$2^x + 3^y = 5^z.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $z > 0$, gdyż $2^x + 3^y \geqslant 2$. Ponadto $x > 0$, gdyż dla $x = 0$ lewa strona równania byłaby parzysta. Rozpatrzymy dwa przypadki:

Przypadek 1: $x = 1$. Dostajemy wtedy równanie $2 + 3^y = 5^z$. Badając możliwość $y \leqslant 1$ znajdujemy rozwiązanie $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, załóżmy zatem, że $y \geqslant 2$. Wobec tego $5^z = 2 + 3^y \equiv 2 \pmod 9$ i obliczając reszty z dzielenia potęg piątki przez 9 wyznaczamy $z \equiv 5 \pmod 6$. Stąd $5^z \equiv 3 \pmod 7$ i w takim razie $3^y = 5^z - 2 \equiv 1 \pmod 7$. To prowadzi do zależności $6 \mid y$. Jednak parzystość y daje $2 + 3^y \equiv 2 + 1 = 3 \pmod 4$; tak więc wobec zależności $5^z \equiv 1 \pmod 4$ innych rozwiązań w tym przypadku nie ma.

Przypadek 2: $x \geqslant 2$. Wówczas $1 \equiv 5^z = 2^x + 3^y \equiv 3^y = (-1)^y \pmod 4$ i w rezultacie $2 \mid y$. Ponadto $2^x = 5^z - 3^y \equiv -3^y \pmod 5$, skąd uwzględniając parzystość y dostajemy też $2 \mid x$.

Jeżeli $y = 0$, to $2^x = 5^z - 1$; dla $x = 2$ uzyskujemy drugie rozwiązanie $(x, y, z) = (2, 0, 1)$, zaś dla $x \geqslant 3$ ze względu na parzystość liczby y mamy $5^z - 1 = 2^x \equiv 0 \pmod 8$, skąd $2 \mid z$. Wobec tego $(5^{z/2})^2 - (2^{x/2})^2 = 5^z - 2^x = 1$. Jednak kwadraty dodatnich liczb całkowitych nie mogą się różnić o 1.

Pozostaje więc rozważyć możliwość $y > 0$, czyli — z uwagi na wykazaną wcześniej podzielność $2 \mid y$ — możliwość $y \geqslant 2$. W tej sytuacji dostajemy $2^x \equiv 2^x + 3^y = 5^z \pmod 9$ i parzystość liczby x pociąga za sobą parzystość liczby z, gdyż 5 nie jest kwadratem $\pmod 9$. Otrzymujemy stąd rozkład $3^y = 5^z - 2^x = (5^{z/2} - 2^{x/2})(5^{z/2} + 2^{x/2})$. Suma czynników po prawej stronie wynosi $2 \cdot 5^{z/2}$ i nie jest podzielna przez 3. Zatem mniejszy z tych czynników musi być równy 1, co daje $5^{z/2} - 2^{x/2} = 1$, lub równoważnie $2^{x/2} + 3^0 = 5^{z/2}$. Jest to równanie takie samo jak dane w treści zadania, przy dodatkowym założeniu, że niewiadoma y jest równa zeru. W Przypadku 1 nie uzyskaliśmy takich rozwiązań, a w rozważonej już części Przypadku 2 uzyskaliśmy jedno. Mamy więc $\frac{x}{2} = 2$ oraz $\frac{z}{2} = 1$, skąd trzecie rozwiązanie: $(x, y, z) = (4, 2, 2)$. *Odpowiedź:* $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(2, 0, 1)$, $(4, 2, 2)$.

26. Dla skończonego ciągu zer i jedynek rozważamy następującą operację: w dowolnym miejscu wpisujemy lub z dowolnego miejsca wykreślamy ciąg postaci www, gdzie w jest dowolnym ciągiem złożonym z zer i jedynek. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od ciągu 01 można w wyniku wielokrotnego wykonywania takich operacji otrzymać ciąg 10.

Rozwiązanie:

Przypiszmy ciągowi $x_1x_2\ldots x_n$ złożonemu z zer i jedynek resztę z dzielenia liczby $\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i$ przez 3.

Jeżeli do ciągu $x_1x_2\ldots x_n$ wstawiamy w pewnym miejscu ciąg postaci www, gdzie $w = w_1w_2\ldots w_k$ jest ciągiem zer i jedynek, to otrzymujemy ciąg postaci $x_1x_2\ldots x_jw_1w_2\ldots w_kw_1w_2\ldots w_kw_1w_2\ldots w_kx_{j+1}x_{j+2}\ldots x_n$ dla pewnego wskaźnika $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Temu ciągowi przyporządkowana jest liczba

$$\sum_{i=1}^{j} ix_i \;+\; \sum_{i=1}^{k}((j+i)+(j+k+i)+(j+2k+i))w_i + \sum_{i=j+1}^{n}(3k+i)x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} ix_i + 3\sum_{i=1}^{k}(j+k+i)w_i + 3k\sum_{i=j+1}^{n} x_i,$$

która daje taką resztę z dzielenia przez 3, jak liczba przyporządkowana ciągowi $x_1x_2\ldots x_n$.

Zatem wszystkim ciągom uzyskiwanym w wyniku wykonywania operacji przypisany jest ten sam element zbioru $\{0, 1, 2\}$. Zaś ciągom 01 i 10 przyporządkowane są odpowiednio liczby 2 i 1. *Odpowiedź:* Nie można.

27. Dane są trójkąty ostrokątne ABC i XYZ. Rozpatrujemy takie trójkąty PQR podobne do trójkąta XYZ (przy czym punktom P, Q, R odpowiadają kolejno punkty X, Y, Z), że punkty A, B, C leżą odpowiednio na bokach QR, RP, PQ. Dowieść, że środki okręgów wpisanych we wszystkie takie trójkąty PQR leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że na mocy równości $\angle ARB = \angle YZX$, $\angle BPC = \angle ZXY$, $\angle CQA = \angle XYZ$ okręgi o_1, o_2 i o_3 opisane odpowiednio na trójkątach ARB, BPC i CQA nie zależą od wyboru trójkąta PQR.

Niech okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punkcie D, leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Punkt D nie zależy od wyboru trójkąta PQR; od tego wyboru nie zależą również miary kątów $\angle DRP = \angle DAB$ i $\angle DPR = \angle DCB$. Z drugiej strony, miary kątów DRP i DPR określają jednoznacznie położenie punktu D w trójkącie PQR. Innymi słowy, w trójkącie XYZ istnieje taki punkt T niezależny od wyboru trójkąta PQR, że podobieństwo przekształcające punkty X, Y, Z odpowiednio na punkty P, Q, R odwzorowuje punkt T na D.

Niech J będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt XYZ. Wtedy złożenie obrotu wokół punktu T o kąt $\alpha = \angle XTJ$ z jednokładnością o środku T i skali $\lambda = \frac{JT}{XT}$ przekształca punkt X na J. W takim razie złożenie φ obrotu wokół punktu D o kąt α z jednokładnością o środku D i skali λ odwzorowuje punkt P na środek I okręgu wpisanego w trójkąt PQR. Stąd wniosek, że zbiór możliwych punktów I zawiera się w obrazie zbioru możliwych punktów P przez przekształcenie φ. A ponieważ zbiór możliwych punktów P leży na okręgu o_1, który jest odwzorowywany przez φ także na okrąg, więc rozwiązanie jest zakończone.

28. Wyznaczyć największą wartość, jaką może przyjąć współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $W(x)$ różnego od stałego i spełniającego warunek

$$|W(x)| \leqslant 2 \qquad \text{dla każdego } x \in [-2,2].$$

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy ciąg wielomianów zadany wzorami: $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - 2$ oraz $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ dla $n \geqslant 2$. Przez prostą indukcję stwierdzamy, że dla każdego $n \geqslant 1$ wielomian $P_n(x)$ ma stopień n oraz współczynnik 1 przy potędze x^n. Wykażemy, że każdy wielomian $P_n(x)$ ma następującą własność:

$$(*) \qquad P_n(2\cos t) = 2\cos nt \qquad \text{dla dowolnego } t.$$

Dowód wzoru $(*)$ przebiega indukcyjnie. Dla $n = 1$ i $n = 2$ wzór ten jest prawdziwy. Jeśli natomiast jest on prawdziwy dla $n = m-1$ oraz $n = m$, to z tożsamości $\cos(m+1)t = 2\cos mt \cos t - \cos(m-1)t$ łatwo wynika, że jest on prawdziwy również dla $n = m+1$.

Niech k będzie stopniem wielomianu $W(x)$ danego w treści zadania. Przypuśćmy, że współczynnik c przy potędze x^k w tym wielomianie jest większy od 1. Wówczas wielomian $G(x) = \frac{1}{c}W(x)$ spełnia nierówność ostrą $|G(x)| < 2$ dla $x \in [-2,2]$.

Dla wielomianu $P_k(x)$ istnieje ciąg punktów $-2 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = 2$, w których wartości $P_k(x_0)$, $P_k(x_1)$, $P_k(x_2)$, …, $P_k(x_k)$ są na przemian równe 2 oraz -2: rzeczywiście, biorąc $x_i = 2\cos\frac{k-i}{k}\pi$ dla $i = 0,1,2,\ldots,k$ mamy $P_k(x_i) = P_k(2\cos\frac{k-i}{k}\pi) = 2\cos(k-i)\pi = 2(-1)^{k-i}$ na mocy wzoru $(*)$. Ponieważ liczby $G(x_i)$ dla $i = 0,1,2,\ldots,k$ mają wartość bezwzględną mniejszą niż 2, więc różnica $G(x) - P_k(x)$ przyjmuje w punktach $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ naprzemiennie wartości różnych znaków. Stąd wynika, że różnica ta ma pierwiastek w każdym z k przedziałów $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, …, $[x_{k-1},x_k]$. Zatem stopień tej (niezerowej) różnicy jest równy co najmniej k, co nie jest możliwe, gdyż wielomiany $G(x)$ i $P_k(x)$ mają stopień k oraz współczynnik 1 przy potędze x^k.

Pozostaje stwierdzić, że wielomian $W(x) = x$ spełnia warunki zadania. *Odpowiedź:* 1.

29. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Okrąg o środku J jest styczny w punkcie E do odcinka BC oraz jest styczny do przedłużeń boków AB i AC. Odcinki BC i AJ przecinają się w punkcie D. Okręgi opisane na trójkątach ABC i ADE przecinają się w punkcie F różnym od A. Udowodnić, że $\angle AFJ = 90°$.

Rozwiązanie:

Nie tracąc ogólności przyjmijmy, że $AB > AC$; wtedy punkt F leży po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C. Niech dany w treści zadania okrąg o środku J będzie styczny do półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ odpowiednio w punktach P i Q. Ponieważ $\angle EFA = \angle ADC = \angle CBA + \angle BAD = \angle CFA + \angle BAD$, więc $\angle EFC = \angle EFA - \angle CFA = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC$. Z równości $\angle BFC = \angle BAC$ wynika zatem, że półprosta $FE^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta BFC i w takim razie

$$\frac{BF}{CF} = \frac{BE}{CE} = \frac{BP}{CQ}.$$

Stąd i z zależności $\angle FBP = 180° - \angle FBA = 180° - \angle FCA = \angle FCQ$ uzyskujemy podobieństwo trójkątów FBP i FCQ, które prowadzi do wniosku, że $\angle FPA = \angle FQA$. Wobec tego punkty A, F, P, Q leżą na jednym okręgu. Jednak z uwagi na równości $\angle APJ = \angle AQJ = 90°$ średnicą tego okręgu jest odcinek AJ, a to oznacza, że $\angle AFJ = 90°$.

30. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ spełniają równości

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0.$$

Dowieść, że

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2 \leqslant n.$$

Rozwiązanie:

Określmy $a_i = x_i \sum_{j=1}^{n} x_j + y_i \sum_{j=1}^{n} y_j$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 + 2x_iy_i \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} y_k + y_i^2 \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^2 \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^2 = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i.
\end{aligned}$$

Zatem na mocy nierówności Schwarza otrzymujemy

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i = n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2,$$

co daje żądaną nierówność $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+(y_1+y_2+\ldots+y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant n.$

31. Niech A będzie n-elementowym zbiorem złożonym z dodatnich liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje n-elementowy zbiór dodatnich liczb całkowitych B o następujących dwóch własnościach:

1. Dla dowolnych dwóch różnych podzbiorów $B_1, B_2 \subset B$ suma wszystkich elementów podzbioru B_1 jest różna od sumy wszystkich elementów podzbioru B_2.

2. Każdy element zbioru A jest sumą wszystkich elementów pewnego podzbioru zbioru B.

Rozwiązanie:

Zastosujmy indukcję ze względu na sumę wszystkich elementów zbioru A. Dla sumy równej 1 teza jest prawdziwa.

Przechodząc do kroku indukcyjnego rozważmy zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Jeżeli wszystkie elementy zbioru A są parzyste, to stosując założenie indukcyjne do zbioru $A' = \{\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_2, \ldots, \frac{1}{2}a_n\}$ otrzymujemy zbiór B' o odpowiednich własnościach 1. i 2.; wówczas zbiór B złożony z dwukrotności wszystkich elementów zbioru B' oczywiście spełnia tezę. Przypuśćmy zatem, że w zbiorze A istnieją liczby nieparzyste; niech a_n będzie najmniejszą z nich.

Weźmy pod uwagę zbiór $A' = \{a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1}\}$, gdzie dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ przyjmujemy $a'_i = \frac{1}{2}a_i$, jeżeli a_i jest liczbą parzystą, albo $a'_i = \frac{1}{2}(a_i - a_n)$, jeżeli a_i jest liczbą nieparzystą. Zbiór A' ma sumę wszystkich elementów mniejszą niż zbiór A (przy czym tych elementów może być mniej niż $n-1$, gdyż może mieć miejsce równość $a'_i = a'_j$, jeśli jedna z liczb a_i, a_j jest parzysta, a druga nieparzysta). Na mocy założenia indukcyjnego istnieje zbiór B' mający nie więcej niż $n-1$ elementów, o własnościach 1. i 2., odpowiadający zbiorowi A'. Dodając kilkukrotnie do zbioru B' element większy od sumy dotychczasowych elementów otrzymamy, nie naruszając własności 1. i 2., zbiór B'' o dokładnie $n-1$ elementach.

Wykażemy, że w tej sytuacji n-elementowy zbiór B złożony z liczby a_n oraz dwukrotności elementów zbioru B'' spełnia warunki zadania. Własność 1. jest spełniona, bowiem dwa różne podzbiory zbioru B o jednakowych sumach elementów musiałyby — z uwagi na parzystość wszystkich elementów oprócz a_n

— jednocześnie zawierać liczbę a_n lub jej nie zawierać; wtedy jednak usuwając w razie potrzeby a_n z obu zbiorów uzyskalibyśmy sprzeczność: równe byłyby sumy dwukrotności elementów różnych podzbiorów zbioru B''. Z kolei własność 2. dla zbioru B wynika z faktu, że każdy element zbioru A jest postaci $2x$ lub $2x + a_n$ dla pewnej liczby $x \in A'$, a każda z takich liczb $2x$ jest sumą parzystych elementów zbioru B. Rozwiązanie jest więc zakończone.

32. Dane są dodatnie liczby całkowite a, m, n, przy czym $a > 1$ oraz $m \neq n$. Dowieść, że jeżeli liczby $a^m - 1$ i $a^n - 1$ mają te same dzielniki pierwsze, to liczba $a + 1$ jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że $\mathrm{NWD}(a^m-1, a^n-1) = a^d-1$, gdzie $d = \mathrm{NWD}(m, n)$. Istotnie, skoro liczba d jest dzielnikiem liczb m i n, to liczba $a^d - 1$ jest dzielnikiem liczb $a^m - 1$ i $a^n - 1$. Z drugiej strony, stosując algorytm Euklidesa otrzymujemy dodatnie liczby całkowite x i y, dla których $xm - yn = d$; wówczas $a^m - 1 \,|\, a^{xm} - 1$ oraz $a^n - 1 \,|\, a^{yn} - 1$, skąd

$$\mathrm{NWD}(a^m - 1, a^n - 1) \,|\, (a^{xm} - 1) - (a^{yn} - 1) = a^{yn}(a^d - 1).$$

A ponieważ liczby $a^m - 1$ i $a^n - 1$ są względnie pierwsze z liczbą a^{yn}, więc dostajemy $\mathrm{NWD}(a^m - 1, a^n - 1) \,|\, a^d - 1$, co dowodzi zapowiedzianej na początku równości. Wynika z niej, że liczby $a^d - 1$, $a^m - 1$ i $a^n - 1$ mają te same dzielniki pierwsze.

Niech $b = a^d$ i $c = \frac{m}{d}$; możemy przyjąć, że $m > n$ i w szczególności $c > 1$. Liczby $b - 1$ oraz $b^c - 1$ mają te same dzielniki pierwsze. Zatem jeżeli p jest dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby c, to z podzielności $b - 1 \,|\, b^p - 1 \,|\, b^c - 1$ wnioskujemy, że liczby $b - 1$ oraz $b^p - 1$ mają te same dzielniki pierwsze. Wobec tego każdy dzielnik pierwszy liczby

$$\begin{aligned} E &= \frac{b^p - 1}{b - 1} = b^{p-1} + b^{p-2} + \ldots + b^2 + b + 1 = \\ &= (b - 1)[b^{p-2} + 2b^{p-3} + \ldots + (p - 3)b^2 + (p - 2)b + (p - 1)] + p \end{aligned}$$

jest też dzielnikiem liczby $b - 1$, a to jest możliwe jedynie wtedy, gdy E jest potęgą liczby p oraz $p \,|\, b - 1$. Ale dla $p \geqslant 3$ suma w nawiasie kwadratowym przystaje do $1 + 2 + \ldots + (p - 2) + (p - 1) = \frac{1}{2}(p - 1)p \equiv 0 \pmod{p}$, więc na mocy powyższej równości dodatnia liczba $E - p$ jest iloczynem dwóch liczb podzielnych przez p, czyli $p^2 \,|\, E - p$ i E nie może być potęgą liczby p. W takim razie $p = 2$ oraz $E = b + 1$ jest potęgą liczby 2.

Wykazaliśmy zatem, że liczba $a^d + 1$ jest potęgą dwójki. Gdyby $2 \,|\, d$, to liczba $a^d + 1 \geqslant 2^2 + 1 = 5$ dawałaby — wobec nieparzystości liczby a — resztę 2 z dzielenia przez 4 i nie mogłaby być potęgą dwójki. Stąd wniosek, że liczba d

jest nieparzysta, czyli $a+1$ jest dzielnikiem potęgi dwójki a^d+1, co kończy rozwiązanie.

33. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3x$. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której wielomian $\underbrace{W(W(\ldots(W(W}_{n}(x)))\ldots))$ ma co najmniej 2011 różnych pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Dla każdego n wielomian $G_n(x) = \underbrace{W(W(\ldots(W(W}_{n}(x)))\ldots))$ ma stopień 3^n, a więc liczba jego pierwiastków nie przekracza 3^n. Z drugiej strony, dla dowolnej liczby rzeczywistej t mamy

$$W(2\cos t) = 8\cos^3 t - 6\cos t = 2\cos 3t,$$

skąd przez prostą indukcję dostajemy $G_n(2\cos t) = 2\cos(3^n t)$ dla każdego n. Zatem liczby $x = 2\cos\dfrac{k-\frac{1}{2}}{3^n}\pi$ dla $k = 1, 2, \ldots, 3^n$ są różnymi pierwiastkami wielomianu $G_n(x)$, czyli wielomian ten ma dokładnie 3^n różnych pierwiastków rzeczywistych. Pozostaje stwierdzić, że najmniejszą liczbą naturalną n spełniającą nierówność $3^n > 2011$ jest $n = 7$. *Odpowiedź:* 7.

34. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną m o następującej własności: Spośród dowolnych m różnych ciągów o długości n złożonych z zer i jedynek można wybrać n ciągów i wpisać je w wiersze kwadratowej tabeli tak, by na głównej przekątnej tabeli wszystkie liczby były równe.

Rozwiązanie:

Bezpośrednie i nieco żmudne sprawdzenie dowodzi, że szukanymi wartościami dla $n = 2$, $n = 3$ i $n = 4$ są odpowiednio $m = 3$, $m = 4$ i $m = 5$. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdego $n \geqslant 4$ prawdziwa jest równość $m = 2^{n-2}+1$; dla $n = 4$ jest to prawda.

Zauważmy najpierw, że $m > 2^{n-2}$. Rzeczywiście, z 2^{n-2} ciągów, które na pierwszej pozycji mają zero, a na drugiej jedynkę, nie da się wybrać n ciągów, które po wpisaniu do kwadratowej tabeli utworzyłyby przekątną złożoną z jednakowych liczb.

Niech teraz $n \geqslant 4$ i przypuśćmy, że spośród dowolnych $2^{n-2}+1$ różnych ciągów o długości n można wybrać n ciągów w sposób opisany w treści zadania. Rozpatrzmy $2^{n-1}+1$ różnych ciągów o długości $n+1$, złożonych z zer i jedynek. Gdyby wszystkie te ciągi miały taką samą liczbę na pierwszej pozycji oraz taką samą liczbę na ostatniej pozycji, to podciągi utworzone z $n-1$ środkowych pozycji byłyby różne. Jednak różnych ciągów zer i jedynek o długości $n-1$ jest tylko 2^{n-1}, więc uzyskalibyśmy sprzeczność. Zatem nie tracąc ogólności możemy przyjąć, że wśród danych $2^{n-1}+1$ ciągów istnieją zarówno takie, które na pierwszej pozycji mają zero, jak i takie, które na pierwszej pozycji mają jedynkę.

Dla ustalenia uwagi niech zero występuje na pierwszej pozycji co najmniej $2^{n-2}+1$ razy. Wobec tego na mocy założenia indukcyjnego spośród ciągów, które na pierwszej pozycji mają zero, możemy wybrać n ciągów, które — po usunięciu pierwszego wyrazu — da się tak wpisać do tabeli $n \times n$, by otrzymać główną przekątną składającą się z jednakowych liczb. Jeżeli na tej przekątnej stoją zera, to z nierówności $2^{n-2}+1-n > 0$ prawdziwej dla $n \geqslant 4$ wynika, że istnieje ciąg rozpoczynający się od zera i różny od każdego z n ciągów uzyskanych w poprzednim zdaniu; da się więc wybrać łącznie $n+1$ ciągów i wpisać je do tabeli $(n+1)\times(n+1)$, której główna przekątna będzie zawierać tylko zera. Jeśli natomiast na przekątnej tabeli $n \times n$ stoją jedynki, to do n wybranych ciągów wystarczy dołączyć dowolny ciąg rozpoczynający się od jedynki, by otrzymać $n+1$ ciągów o wymaganej własności. To kończy rozumowanie indukcyjne.

Odpowiedź: $m = 3$ dla $n = 2$, $m = 4$ dla $n = 3$ oraz $m = 2^{n-2}+1$ dla $n \geqslant 4$.

35. Wewnątrz wielokąta wypukłego $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że jego rzuty $P_1, P_2, \ldots, P_n$ odpowiednio na proste $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ znajdują się wewnątrz boków wielokąta. Dowieść, że dla dowolnych punktów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ leżących odpowiednio wewnątrz odcinków $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ zachodzi nierówność

$$\max\left\{\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \frac{X_2X_3}{P_2P_3}, \ldots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right\} \geqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Z równości

$$\begin{aligned} \angle P_1PP_2 + \angle P_2PP_3 + \ldots + \angle P_nPP_1 &= 360^\circ, \\ \angle X_1PX_2 + \angle X_2PX_3 + \ldots + \angle X_nPX_1 &= 360^\circ \end{aligned}$$

wynika, że dla pewnego wskaźnika $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ spełniona jest zależność $\angle P_iPP_{i+1} \leqslant \angle X_iPX_{i+1}$ (gdzie $X_{n+1} = X_1$ i $P_{n+1} = P_1$). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $\angle P_1PP_2 \leqslant \angle X_1PX_2$.

Wybierzmy na półprostych $PP_1^{\rightarrow}$ i $PP_2^{\rightarrow}$ odpowiednio takie punkty Q_1 i Q_2, że $PQ_1 = PX_1$ i $PQ_2 = PX_2$. Punkty P_1 i P_2 są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki A_1A_2 i A_2A_3, więc $PX_1 \geqslant PP_1$ i $PX_2 \geqslant PP_2$. Wynika stąd, że punkt Q_1 albo pokrywa się z punktem P_1, albo leży poza odcinkiem PP_1; analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla punktu Q_2.

Wykażemy, że $Q_1Q_2 \geqslant P_1P_2$. Wybierzmy w tym celu punkty $K \in PP_1^{\rightarrow}$ i $L \in PP_2^{\rightarrow}$ zadane przez warunek $KP_2 \parallel LP_1 \parallel Q_1Q_2$. Wówczas odcinki

KP_2 i LP_1 albo pokrywają się (i wtedy $KP_2 = LP_1 = P_1P_2$), albo są podstawami niezdegenerowanego trapezu, którego przekątną jest odcinek P_1P_2. W tym drugim przypadku możemy bez ograniczenia ogólności rozumowania przyjąć, że prosta KP_2 jest bardziej odległa od punktu P, niż prosta P_1L. Ponadto $\angle KP_1P_2 = 180^\circ - \angle PP_1P_2 > 180^\circ - \angle PP_1A_2 = 90^\circ$ i wobec tego w trójkącie KP_1P_2 bok KP_2 jest najdłuższy; mamy więc $KP_2 > P_1P_2$. Zatem zawsze spełniona jest nierówność $\max\{LP_1, KP_2\} \geqslant P_1P_2$. Prosta Q_1Q_2 jest zaś co najmniej tak odległa od punktu P, jak proste LP_1 i KP_2. Stąd $Q_1Q_2 \geqslant \max\{LP_1, KP_2\}$ i wobec tego dowód zależności $Q_1Q_2 \geqslant P_1P_2$ jest zakończony.

Z drugiej strony, w trójkątach X_1PX_2 i Q_1PQ_2 mamy związki $PX_1 = PQ_1$, $PX_2 = PQ_2$ oraz $\angle Q_1PQ_2 \leqslant \angle X_1PX_2$. To wraz z twierdzeniem cosinusów dowodzi, że $X_1X_2 \geqslant Q_1Q_2$. W efekcie uzyskujemy nierówność $X_1X_2 \geqslant P_1P_2$, która pociąga za sobą tezę zadania.

36. Niech k będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że liczba $p = 4k - 1$ jest pierwsza. Wyznaczyć resztę z dzielenia przez p liczby

$$(1^2 + 1)(2^2 + 1)\ldots((2k-1)^2 + 1).$$

Rozwiązanie:

Weźmy pod uwagę wielomian $W(x) = (x-1)^{2k-1} - 1$. Dla $a = 1, 2, \ldots, 2k-1$ mamy

$$W(a^2 + 1) = (a^2)^{2k-1} - 1 = a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

na mocy małego twierdzenia Fermata. Dla różnych liczb $a, b \in \{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ kongruencja $a^2 + 1 \equiv b^2 + 1 \pmod{p}$ nie jest spełniona, gdyż oznaczałaby ona, że $p \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, co jednak nie jest możliwe wobec nierówności $0 < |a - b| < a + b < 4k - 2 < p$. Wobec tego zbiór $2k - 1$ czynników danego w treści zadania iloczynu pokrywa się ze zbiorem pierwiastków wielomianu $W(x) \pmod{p}$. Stopień tego wielomianu wynosi $2k - 1$ i jest liczbą nieparzystą, zatem na mocy wzorów Viete'a iloczyn tych pierwiastków $\pmod{p}$ jest przeciwny do wyrazu wolnego, równego $(-1)^{2k-1} - 1 = -2$. *Odpowiedź:* 2.

Zawody drużynowe

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech o_A będzie okręgiem o średnicy BC, zaś ω_A — okręgiem stycznym do odcinków AB i AC oraz zewnętrznie do okręgu o_A w punkcie X_A. Analogicznie definiujemy okręgi o_B, o_C, ω_B, ω_C oraz punkty X_B, X_C. Udowodnić, że proste AX_A, BX_B, CX_C przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a = BC$, $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$. Niech M będzie środkiem odcinka BC, a I oraz r niech będą odpowiednio środkiem oraz długością promienia okręgu ω_A. Przez D i E oznaczmy rzuty prostokątne odpowiednio punktów I i M na prostą AB, zaś P i Q niech będą rzutami prostokątnymi punktu X_A odpowiednio na proste AB i AC.

Rozważmy trapez $EMID$, którego podstawy mają długości $EM = \frac{1}{2}a\sin\beta$ i $DI = r$. Znając stosunek $IX_A : X_AM = r : \frac{1}{2}a$ możemy wyznaczyć długość odcinka PX_A, otrzymując

$$PX_A = \frac{IX_A \cdot EM + X_AM \cdot DI}{IX_A + X_AM} = \frac{r \cdot \frac{1}{2}a}{r + \frac{1}{2}a}(1 + \sin\beta).$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$QX_A = \frac{r \cdot \frac{1}{2}a}{r + \frac{1}{2}a}(1 + \sin\gamma).$$

W takim razie

$$\frac{\sin\angle CAX_A}{\sin\angle X_AAB} = \frac{QX_A}{AX_A} \cdot \frac{AX_A}{PX_A} = \frac{1 + \sin\gamma}{1 + \sin\beta}$$

i podobnie obliczamy, że

$$\frac{\sin\angle ABX_B}{\sin\angle X_BBC} = \frac{1 + \sin\alpha}{1 + \sin\gamma} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\sin\angle BCX_C}{\sin\angle X_CCA} = \frac{1 + \sin\beta}{1 + \sin\alpha}.$$

Mnożąc stronami trzy powyższe zależności oraz stosując trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy dostajemy tezę zadania.

2. Niech $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ będzie ciągiem złożonym ze wszystkich liczb naturalnych, które można zapisać w postaci x^y, gdzie $x, y \geqslant 2$ są liczbami całkowitymi. Dowieść, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i - 1} = 1.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego dostajemy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_i^j}.$$

Zauważmy teraz, że liczba sposobów przedstawienia liczby całkowitej $k>1$ w postaci a_i^j, gdzie $i,j\geqslant 1$, jest taka sama jak liczba sposobów przedstawienia k w postaci m^n, gdzie $m,n\geqslant 2$ są liczbami całkowitymi. Istotnie, wśród wszystkich przedstawień $k=u^w$, gdzie $u,w\geqslant 1$ są liczbami całkowitymi, dokładnie jedno nie jest przedstawieniem w postaci a_i^j (mianowicie to, w którym u jest najmniejsze możliwe) oraz dokładnie jedno nie jest przedstawieniem w postaci m^n, gdzie $m,n\geqslant 2$ (mianowicie to, w którym $w=1$). Wobec tego

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_i^j}=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{m^n},$$

gdyż po obu stronach występują jednakowe dodatnie składniki, i ponownie wykorzystując wzór na sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i-1}=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2(1-\frac{1}{m})}=\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=1.$$

3. Dane są takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$, że punkty o współrzędnych $(F(1),G(1))$, $(F(2),G(2))$, …, $(F(2011),G(2011))$ na płaszczyźnie są kolejnymi wierzchołkami 2011-kąta foremnego. Wykazać, że przynajmniej jeden z tych wielomianów ma stopień nie niższy niż 2010.

Rozwiązanie:

Mnożąc wielomiany $F(x)$ i $G(x)$ przez stałą różną od zera oraz dodając do nich stałe możemy przyjąć, że środek danego w zadaniu 2011-kąta ma współrzędne $(0,0)$, zaś wierzchołki leżą na okręgu o promieniu 1. W tej sytuacji istnieje taki kąt α, że

$$(*)\quad F(k)=\cos(\alpha+\tfrac{2k\pi}{2011})\quad\text{oraz}\quad G(k)=\sin(\alpha+\tfrac{2k\pi}{2011})\qquad\text{dla } 1\leqslant k\leqslant 2011.$$

Wykażemy przez indukcję, że jeśli istnieje taki kąt α, że równości $(*)$ zachodzą dla $k=1,2,\ldots,n$ (gdzie $n\leqslant 2011$), to przynajmniej jeden z wielomianów $F(x)$, $G(x)$ ma stopień nie niższy niż $n-1$; biorąc $n=2011$ uzyskamy tezę zadania. Dla $n=1$ jest to prawda, gdyż oba te wielomiany nie mogą być jednocześnie zerowe.

Przyjmijmy więc, że stwierdzenie to jest prawdziwe dla pewnego $n \leqslant 2010$. Niech wielomiany $F(x)$, $G(x)$ spełniają równości $(*)$ dla $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Wielomiany zadane wzorami $F^*(x) = F(x+1) - F(x)$ i $G^*(x) = G(x+1) - G(x)$ spełniają w takim razie równości

$$\begin{aligned} F^*(k) &= \cos(\alpha + \tfrac{2(k+1)\pi}{2011}) - \cos(\alpha + \tfrac{2k\pi}{2011}) = -2\sin\tfrac{\pi}{2011}\sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2011} + \tfrac{2k\pi}{2011}), \\ G^*(k) &= \sin(\alpha + \tfrac{2(k+1)\pi}{2011}) - \sin(\alpha + \tfrac{2k\pi}{2011}) = 2\sin\tfrac{\pi}{2011}\cos(\alpha + \tfrac{\pi}{2011} + \tfrac{2k\pi}{2011}) \end{aligned}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Stała $\sin\frac{\pi}{2011}$ jest różna od zera, zatem na mocy założenia indukcyjnego przynajmniej jeden z wielomianów $F^*(x)$, $G^*(x)$ ma stopień nie niższy niż $n-1$. A ponieważ dla dowolnego wielomianu $H(x)$ nie będącego wielomianem stałym wielomian $H^*(x) = H(x+1) - H(x)$ ma stopień o jeden niższy niż $H(x)$, więc stopień co najmniej jednego z wielomianów $F(x)$, $G(x)$ jest nie niższy niż n, co kończy rozwiązanie.

4. Dowieść, że dowolną grupę osób można podzielić na takie dwie podgrupy (z których jedna może być pusta), że każda osoba ma w swojej podgrupie parzystą liczbę znajomych.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne ze względu na liczbę n członków grupy. Dla $n = 1$ teza zadania jest oczywiście prawdziwa.

Weźmy teraz pod uwagę dowolną grupę A złożoną z n osób. Jeżeli każdy zna parzystą liczbę osób, to żądany podział otrzymujemy biorąc jedną podgrupę równą A i drugą podgrupę pustą. Przypuśćmy więc, że pewna osoba $x \in A$ ma nieparzystą liczbę znajomych; oznaczmy przez B zbiór tych znajomych.

Będziemy stosować założenie indukcyjne do $(n-1)$-elementowego zbioru $A \setminus \{x\}$, jednak z nieco zmienionymi relacjami znajomości. Mianowicie przyjmijmy, że dwie osoby należące do zbioru B znają się wtedy i tylko wtedy, gdy przedtem się nie znały. Znajomości pomiędzy osobami, z których co najwyżej jedna należy do B, pozostawiamy bez zmian. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy podział $A \setminus \{x\} = Z_1 \cup Z_2$, przy czym każdy członek dowolnej z podgrup Z_1, Z_2 ma w tej podgrupie parzystą liczbę znajomych (w nowym układzie znajomości). Ponieważ zbiór B składa się z nieparzystej liczby osób, więc dokładnie jeden ze zbiorów $Z_1 \cap B$, $Z_2 \cap B$ ma parzystą liczbę osób; niech będzie to zbiór $Z_1 \cap B$. Udowodnimy, że przyjmując $A_1 = Z_1 \cup \{x\}$ i $A_2 = Z_2$ otrzymujemy rozbicie $A = A_1 \cup A_2$ wyjściowej grupy zgodne z warunkami zadania.

Osoba x zna w swojej podgrupie A_1 te i tylko te osoby, które należą do $Z_1 \cap B$ — jest ich zatem parzysta liczba. Dowolna osoba $y \in B \cap A_1$ zna w swojej podgrupie osobę x oraz parzystą liczbę osób w Z_1 w nowym układzie znajomości — który w porównaniu ze starym układem różni się zmianami na zbiorze $(Z_1 \cap B) \setminus \{y\}$, mającym nieparzystą liczbę elementów. To oznacza, że w starym układzie znajomości y zna nieparzystą liczbę osób w zbiorze Z_1, a więc parzystą liczbę osób w podgrupie A_1. Podobnie dowodzimy, że dowolna osoba $y \in B \cap A_2$ zna w podgrupie A_2 parzystą liczbę osób, zarówno w starym, jak i w nowym układzie znajomości, ze względu na parzystość liczby elementów zbioru $(Z_2 \cap B) \setminus \{y\}$. Na koniec, dowolna osoba $y \in A \setminus (B \cup \{x\})$ zna w swojej podgrupie te same osoby w starym i w nowym układzie znajomości; liczba tych znajomych jest więc parzysta na mocy założenia indukcyjnego. To kończy rozwiązanie.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę naturalną n, że liczba $2^{n!}-1$ jest podzielna przez 257^{101}.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw następujący fakt: jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą oraz x jest taką liczbą całkowitą, że liczba $x-1$ dzieli się przez p^α, ale nie przez $p^{\alpha+1}$ (gdzie $\alpha \geqslant 1$), to zachodzi równoważność $p^{\alpha+1} \,|\, x^k-1 \Leftrightarrow p \,|\, k$, a ponadto podzielność $p^{\alpha+2} \,|\, x^k-1$ zachodzi tylko pod warunkiem, że $p^2 \,|\, k$.

By udowodnić ten fakt, piszemy $x = mp^\alpha+1$, gdzie m jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p, i korzystamy ze wzoru dwumianowego:

$$x^k = (mp^\alpha+1)^k = m^k p^{k\alpha} + \binom{k}{1} m^{k-1} p^{(k-1)\alpha} + \ldots + \binom{k}{2} m^2 p^{2\alpha} + \binom{k}{1} mp^\alpha + 1.$$

Wszystkie składniki po prawej stronie z wyjątkiem dwóch ostatnich są podzielne przez $p^{\alpha+1}$; stąd zaś otrzymujemy $x^k \equiv kmp^\alpha + 1 \pmod{p^{\alpha+1}}$, co dowodzi pierwszej części faktu. Aby uzasadnić drugą, zauważamy najpierw, że na mocy już udowodnionej pierwszej części warunkiem koniecznym podzielności $p^{\alpha+2} \,|\, x^k-1$ jest podzielność $p \,|\, k$. A wtedy trzeci od końca składnik w powyższym rozwinięciu dwumianowym wynosi $\frac{1}{2}k(k-1)m^2p^{2\alpha}$ i jest podzielny przez $p^{2\alpha+1}$, czyli także przez $p^{\alpha+2}$; wcześniejsze składniki oczywiście także są podzielne przez $p^{\alpha+2}$. Tak więc jeśli $p \,|\, k$, to $x^k \equiv kmp^\alpha+1 \pmod{p^{\alpha+2}}$, skąd wynika druga część dowodzonego faktu.

Stosując wielokrotnie ten fakt dochodzimy do następującego wniosku: dla p, x, α takich jak w założeniach faktu najwyższa potęga liczby p dzieląca liczbę x^k-1 ma wykładnik o α większy od najwyższej potęgi p dzielącej k.

Liczba $2^{16}-1 = (2^8-1)(2^8+1) = 255 \cdot 257$ jest podzielna przez liczbę pierwszą 257, ale nie przez jej kwadrat. Stąd dla $n \geqslant 6$ najwyższa potęga liczby 257 dzieląca liczbę $2^{n!}-1 = (2^{16})^{\frac{1}{16}n!}-1$ ma wykładnik o 1 większy, niż najwyższa potęga 257 dzieląca $\frac{1}{16}n!$. Zatem $257^{101} \,|\, 2^{n!}-1 \Leftrightarrow 257^{100} \,|\, \frac{1}{16}n! \Leftrightarrow 257^{100} \,|\, n!$, a najmniejszą liczbą naturalną n, dla której $257^{100} \,|\, n!$, jest oczywiście liczba $n = 257 \cdot 100$. *Odpowiedź:* $n = 25700$.

2. Dana jest liczba pierwsza p oraz różne liczby a, b, c, d ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, przy czym liczby a^4, b^4, c^4, d^4 dają jednakowe reszty z dzielenia przez p. Udowodnić, że liczba $a^2+b^2+c^2+d^2$ jest podzielna przez liczbę $a+b+c+d$.

Rozwiązanie:

Liczby a, b, c, d, rozpatrywane $\pmod p$, są wszystkimi pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 - a^4$ modulo p. Ponadto jeśli jego pierwiastkiem $\pmod p$

jest h, to jest nim również $p-h$, skąd $a+b+c+d=2p$. A ponieważ na mocy wzorów Viete'a mamy $ab+ac+ad+bc+bd+cd \equiv 0 \pmod{p}$, więc liczba

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b+c+d)^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

jest różnicą dwóch liczb podzielnych przez $2p$, zatem jest ona podzielna przez $2p=a+b+c+d$, co należało udowodnić.

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że liczba 2^n-1 jest dzielnikiem pewnej liczby postaci m^2+9, gdzie m jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że zachodzi podzielność $2^n-1 \mid m^2+9$, przy czym liczba n ma nieparzysty dzielnik pierwszy d. Wówczas także $2^d-1 \mid m^2+9$, a ponadto $2^d-1 \equiv 3 \pmod{4}$, więc liczba 2^d-1 ma dzielnik pierwszy p dający resztę 3 z dzielenia przez 4; dzielnik ten jest różny od 3, gdyż $2^d-1 \equiv 1 \pmod{3}$. Zatem $p \mid m^2+9$, skąd $m^2 \equiv -3^2 \pmod{p}$ i podnosząc tę kongruencję stronami do nieparzystej potęgi $\frac{1}{2}(p-1)$ dostajemy $m^{p-1} \equiv -3^{p-1} \pmod{p}$. Ta zależność jest jednak sprzeczna z małym twierdzeniem Fermata: jej prawa strona przystaje do -1, a lewa do 0 lub 1 $\pmod{p}$.

Założenie, że liczba n posiadająca nieparzysty dzielnik pierwszy spełnia warunki zadania, doprowadziło do sprzeczności. Wykażemy z kolei, że gdy $n=2^k$ dla pewnej liczby całkowitej k, to liczba n ma żądaną własność; możemy oczywiście przyjąć, że $k \geqslant 2$, gdyż liczby $n=1$ i $n=2$ tę własność mają.

W rozkładzie $2^n-1=3(2^2+1)(2^{2^2}+1)\ldots(2^{2^{k-1}}+1)$ czynniki po prawej stronie są parami względnie pierwsze, gdyż każdy czynnik jest dzielnikiem dowolnego z następnych pomniejszonego o 2. Zatem na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje rozwiązanie ℓ układu kongruencji

$$\ell \equiv 2^{2^{i-1}} \pmod{2^{2^i}+1} \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,k-1$$

i dla takiej liczby ℓ mamy $\ell^2 \equiv 2^{2^i} \equiv -1 \pmod{2^{2^i}+1}$, czyli $2^{2^i}+1 \mid \ell^2+1$ dla $i=1,2,\ldots,k-1$. Stąd wniosek, że $\frac{1}{3}(2^n-1) \mid \ell^2+1$, a więc liczba $m=3\ell$ spełnia warunki zadania. *Odpowiedź:* Potęgi dwójki.

4. Każde pole szachownicy 12×12 pomalowano na jeden z trzech kolorów. Wykazać, że istnieją cztery pola o tym samym kolorze, których środki są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie:

Wśród $12^2=144$ pól jeden kolor, powiedzmy zielony, występuje co najmniej $\frac{1}{3} \cdot 144=48$ razy. Weźmy zatem pod uwagę dowolny zbiór 48 zielonych pól; niech a_i dla $i=1,2,\ldots,12$ oznacza liczbę pól tego zbioru leżących w i-tym wierszu. Wówczas $a_1+a_2+\ldots+a_{12}=48$.

Istnieje $\binom{12}{2} = 66$ nieuporządkowanych par kolumn. Dla i-tego wiersza $\binom{a_i}{2}$ różnych takich par kolumn zawiera dwa zielone pola tego wiersza. Rozwiązanie zadania będzie więc zakończone, gdy wykażemy, że $\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \ldots + \binom{a_{12}}{2} > 66$, będzie to bowiem oznaczało, że w dwóch różnych wierszach znajdziemy dwa zielone pola położone w tych samych kolumnach, otrzymując cztery zielone pola tworzące prostokąt. Ale

$$\sum_{i=1}^{12} \binom{a_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} a_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} a_i \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^{12} a_i \right)^2 - 24 = 72.$$

5. W grupie n chłopców i n dziewczyn każdy chłopiec zna co najmniej k dziewczyn. Przypuśćmy, że można zorganizować występ całej grupy na scenie tanecznej, podczas którego każdy chłopiec zatańczy w parze ze znaną mu dziewczyną. Dowieść, że można zorganizować bal składający się z $k!$ takich występów, przy czym układ par nie powtórzy się w różnych występach.

Rozwiązanie:

Zastosujmy indukcję ze względu na k. Dla $k = 1$ teza jest oczywista.

Przypuśćmy, że istnieje chłopiec A o następującej własności: dla dowolnej znanej mu dziewczyny B można zorganizować występ grupy $n - 1$ chłopców i $n - 1$ dziewczyn powstającej po odrzuceniu A i B. W takiej $(2n-2)$-osobowej grupie każdy chłopiec zna co najmniej $k-1$ dziewczyn, więc na mocy założenia indukcyjnego da się zorganizować co najmniej $(k-1)!$ występów tej grupy z różnymi układami par. Dodając do tego parę A i B dostajemy $(k-1)!$ występów początkowej $2n$-osobowej grupy. Ponieważ dziewczynę B można wybrać na co najmniej k sposobów, więc łącznie otrzymamy co najmniej $k \cdot (k-1)! = k!$ występów.

Pozostaje wykazać, że nieistnienie takiego chłopca A prowadzi do sprzeczności. Załóżmy bowiem, że każdemu chłopcu można przypisać dziewczynę *nieodpowiednią* — taką, którą ten chłopiec zna i która nie może pojawić się z nim w parze w dopuszczalnym występie. Z drugiej strony, chłopca i dziewczynę będących w parze w istniejącym na mocy warunków zadania jednym występie nazwijmy *związanych*. Rozpocznijmy teraz od dowolnego chłopca, wybierzmy nieodpowiednią dla niego dziewczynę, związanego z nią chłopca, nieodpowiednią dla tego ostatniego dziewczynę itd.; w pewnym momencie powrócimy do chłopca, który pojawił się wcześniej, uzyskując cykl złożony na przemian z różnych chłopców i różnych dziewczyn, przy czym po chłopcu następuje nieodpowiednia dla niego dziewczyna, a po dziewczynie następuje związany z nią chłopiec. Wówczas możemy zamienić pary w występie: pary dziewczyna – następujący po niej w tym cyklu chłopiec zamieniamy na pary dziewczyna – poprzedzający ją chłopiec. Otrzymamy w ten sposób dopuszczalny układ par, w którym będą istnieć pary chłopiec – nieodpowiednia dla niego dziewczyna, w sprzeczności z określeniem tych ostatnich.

6. W ogrodzie zoologicznym żyje n zwierząt. Wycieczka dzieci chce zwiedzić ogród, przy czym każde dziecko chce zobaczyć swoje ulubione zwierzęta. Dla każdego niepustego podzbioru A zbioru dzieci istnieje zwierzę, które chce zobaczyć nieparzysta liczba dzieci ze zbioru A. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę uczestników wycieczki.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: n. Jeżeli wycieczka liczy n uczestników oraz każde dziecko chce zobaczyć tylko jedno zwierzę, przy czym różnym dzieciom odpowiadają różne zwierzęta, to warunki zadania są oczywiście spełnione. Przypuśćmy z kolei, że liczba dzieci wynosi $k > n$. Przyporządkujmy każdemu z 2^k podzbiorów zbioru wszystkich dzieci ciąg n-wyrazowy $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, gdzie dla $i = 1, 2, \ldots, n$ liczba r_i jest resztą z dzielenia przez 2 liczby tych dzieci w danym podzbiorze, które chcą zobaczyć i-te zwierzę. Wtedy $2^k > 2^n$, więc pewnym dwóm różnym podzbiorom dzieci przypisano ten sam ciąg, a zatem różnicy symetrycznej tych dwóch podzbiorów przypisano ciąg złożony z samych zer. Wobec tego ta różnica symetryczna jest niepustym podzbiorem zbioru wszystkich dzieci, w którym każde zwierzę chce zobaczyć parzysta liczba dzieci. Tak więc warunki zadania nie mogą być spełnione.

7. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Przypuśćmy, że okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech okrąg wpisany w trójkąt AEF będzie styczny do boków EA, AF, FE odpowiednio w punktach G, H, K, zaś okrąg wpisany w trójkąt DEF niech będzie styczny do boków FD, DE, EF odpowiednio w punktach I, J, K. Wówczas $EG = EK = EJ$ oraz $FH = FK = FI$, a więc

$$AF + ED = AH + HF + EJ + JD = AG + FI + EG + ID = AE + FD,$$

czyli w czworokąt $AFDE$ można wpisać okrąg o. Jednokładność o środku D i skali większej niż 1 przeprowadza okrąg wpisany w trójkąt DEF na okrąg o, a jednokładność o środku A i skali większej niż 1 przeprowadza okrąg o na okrąg wpisany w trójkąt ABC. Złożenie tych dwóch jednokładności jest jednokładnością j o środku leżącym na prostej AD i skali dodatniej, przeprowadzającą okrąg wpisany w trójkąt DEF na okrąg wpisany w trójkąt ABC. Ale istnieje tylko jedna jednokładność o skali dodatniej przeprowadzająca pierwszy z tych okręgów na drugi. Wobec tego analogiczne rozumowanie dowodzi, że środek jednokładności j leży także na prostych BE i CF, skąd wynika teza.

8. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt P leży wewnątrz tego czworokąta. Punkty O_1, O_2, O_3, O_4 są odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach ABP, BCP, CDP, DAP. Wykazać, że środki odcinków O_1O_3, O_2O_4 i OP leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Niech K_1, K_2, K_3, K_4 będą odpowiednio środkami tych łuków AB, BC, CD, DA okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, które nie zawierają wewnątrz wierzchołków tego czworokąta. Zauważmy, że dla $i = 1, 2, 3, 4$ punkt O_i leży na półprostej $OK_i^{\rightarrow}$. Półproste $OK_1^{\rightarrow}$, $OK_2^{\rightarrow}$, $OK_3^{\rightarrow}$, $OK_4^{\rightarrow}$ są ułożone wokół punktu O w wypisanej kolejności, więc punkt O leży wewnątrz czworokąta $O_1O_2O_3O_4$. Wewnątrz tego czworokąta leży również punkt P, gdyż jego kolejne boki zawierają się w symetralnych odpowiednio odcinków PB, PC, PD, PA wychodzących z punktu P w wymienionej kolejności. Ponadto

$$\angle OO_1O_2 = \angle PBA = \tfrac{1}{2}\angle PO_1A = \angle PO_1O_4;$$

podobnie $\angle OO_2O_3 = \angle PO_2O_1$, $\angle OO_3O_4 = \angle PO_3O_2$ i $\angle OO_4O_1 = \angle PO_4O_3$. Zatem istnieje elipsa o ogniskach P i O wpisana w czworokąt $O_1O_2O_3O_4$. Należy teraz udowodnić, że środek tej elipsy oraz środki przekątnych czworokąta leżą na jednej prostej. Wykonując przekształcenie afiniczne sprowadzamy to zadanie do przypadku, gdy w czworokąt można wpisać okrąg.

Niech więc $XYZT$ będzie czworokątem opisanym na okręgu o środku I i promieniu r oraz niech M, N będą odpowiednio środkami przekątnych XZ, YT. Mamy wykazać, że punkty M, N, I leżą na jednej prostej. Jeśli czworokąt jest równoległobokiem, to $M = N$ i nie ma czego dowodzić. W przeciwnym razie możemy bez ograniczania ogólności przyjąć, że półproste $YX^{\rightarrow}$ i $ZT^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie P.

Zachodzą następujące równości pól: $[XYM] = \frac{1}{2}[XYZ]$, $[ZTM] = \frac{1}{2}[ZTX]$, $[XYN] = \frac{1}{2}[TXY]$, $[ZTN] = \frac{1}{2}[YZT]$, $[XYI] = \frac{1}{2}XY \cdot r$ oraz $[ZTI] = \frac{1}{2}ZT \cdot r$. Z równości tych wynika, że

$$[XYM] + [ZTM] = [XYN] + [ZTN] = [XYI] + [ZTI] = \tfrac{1}{2}[XYZT].$$

Wobec tego pozostaje wykazać, że zbiór punktów H leżących wewnątrz czworokąta i spełniających równość $[XYH] + [ZTH] = \frac{1}{2}[XYZT]$ leży na jednej prostej. W tym celu wybierzmy punkty $Q \in PX^{\rightarrow}$, $R \in PT^{\rightarrow}$ spełniające równości $PQ = XY$, $PR = TZ$. Wtedy $[XYH] = [PQH]$ oraz $[ZTH] = [PRH]$, skąd

$$[XYH] + [ZTH] = [PQHR] = [PQR] + [QHR],$$

przy czym polu $[QHR]$ nadajemy ujemny znak, jeśli punkt H leży po tej samej stronie prostej QR, co punkt P, tzn. jeśli czworokąt $PQHR$ jest wklęsły. Równość $[XYH]+[ZTH]=\frac{1}{2}[XYZT]$ sprowadza się teraz do postaci $[QHR]=\frac{1}{2}[XYZT]-[PQR]$. A ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej c zbiór punktów H spełniających zależność $[QHR]=c$ jest zawarty w prostej równoległej do RQ, więc rozwiązanie jest zakończone.

9. Udowodnić, że w dowolnym czworościanie suma miar kątów dwuściennych przy wszystkich krawędziach jest mniejsza niż 540°.

Rozwiązanie:

Niech I będzie środkiem sfery wpisanej w czworościan, zaś I_1, I_2, I_3, I_4 niech będą punktami jej styczności ze ścianami. Wówczas dla $i\neq j$ kąt dwuścienny między ścianami zawierającymi punkty I_i oraz I_j wynosi $180^\circ-\angle I_iII_j$. Zatem wystarczy wykazać, że

$$(*)\qquad \angle I_1II_2+\angle I_1II_3+\angle I_1II_4+\angle I_2II_3+\angle I_2II_4+\angle I_3II_4>540^\circ.$$

Punkt I leży wewnątrz czworościanu $I_1I_2I_3I_4$; jest to jedyna informacja, którą wykorzystamy do dowodu nierówności $(*)$. Zauważmy, że wystarczy wykazać nierówność

$$(\square)\qquad \angle I_1II_2+\angle I_2II_3+\angle I_3II_4+\angle I_4II_1>360^\circ;$$

wypisując dwie analogiczne nierówności i dodając stronami uzyskamy bowiem zależność $(*)$.

Niech płaszczyzna I_1II_2 przecina krawędź I_3I_4 w punkcie J. Wtedy nierówność trójkąta dla kątów płaskich w kącie trójściennym daje

$$\angle I_2II_3+\angle I_3IJ>\angle I_2IJ \qquad \text{oraz} \qquad \angle I_4II_1+\angle I_4IJ>\angle I_1IJ.$$

Dodając te dwie równości stronami i stosując zależność $\angle I_3IJ+\angle I_4IJ=\angle I_3II_4$ dostajemy $\angle I_4II_1+\angle I_2II_3+\angle I_3II_4>\angle I_2IJ+\angle I_1IJ$. Dodając teraz $\angle I_1II_2$ do obu stron ostatniej zależności otrzymujemy związek $(\square)$.

10. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje ciągłe $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, że

$$f(2x^2-1)=2xf(x)$$

dla wszystkich liczb $x\in[-1,1]$.

Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby $x\in[-1,1]$ różnej od zera mamy

$$2xf(x)=f(2x^2-1)=f(2(-x)^2-1)=2(-x)f(-x),$$

skąd dostajemy $f(x) = -f(-x)$. A ponieważ f jest funkcją ciągłą, więc ta równość zachodzi też dla $x = 0$, co daje $f(0) = 0$.

Określmy teraz funkcję $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $g(x) = f(\cos x)$ dla każdego x. Jest to funkcja ciągła i dla każdej liczby t spełnia zależność

$$g(2t) = f(\cos 2t) = f(2\cos^2 t - 1) = 2\cos t \cdot f(\cos t) = g(t)\cos t.$$

Z tego wzoru wynika, że jeśli $2t$ jest miejscem zerowym funkcji g oraz $\cos t \neq 0$, to również t jest miejscem zerowym funkcji g.

Rozważmy zbiór A liczb postaci $\dfrac{2k+\frac{1}{2}}{2^n}\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą oraz $n \geqslant 1$ jest liczbą naturalną. Każdą liczbę $t \in A$ można wyrazić jako ułamek nieskracalny o mianowniku równym 2^m, gdzie $m \geqslant 2$, pomnożony przez π; wobec tego $\cos t \neq 0$. Zatem jeśli $s \in A$ oraz $g(2s) = 0$, to także $g(s) = 0$. Z drugiej strony, dla dowolnej liczby $t \in A$ mamy $2^n t = (2k + \frac{1}{2})\pi$ dla pewnych liczb całkowitych $n \geqslant 1$ i k; w takim razie $0 = f(0) = f(\cos 2^n t) = g(2^n t)$ i stosując stwierdzenie z poprzedniego zdania kolejno dla liczb $s = 2^{n-1}t, 2^{n-2}t, \ldots, 2t, t$ wnioskujemy, że $g(t) = 0$. To oznacza, że zbiór A zawiera się w zbiorze miejsc zerowych funkcji g. Ale zbiór A jest gęsty na prostej, tzn. dla każdej liczby rzeczywistej r i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje w zbiorze A liczba odległa od r o mniej niż ε. Stąd i z ciągłości wynika, że g jest funkcją zerową. Zatem $f(\cos x) = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x, czyli $f(x) = 0$ dla każdej liczby $x \in [-1, 1]$. Funkcja ta spełnia oczywiście żądany warunek. *Odpowiedź:* Funkcja zerowa.

11. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje dodatnie wartości dla nieujemnych argumentów. Dowieść, że istnieją takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$ o współczynnikach dodatnich, że

$$W(x) \cdot F(x) = G(x)$$

dla każdego x.

Rozwiązanie:

Stosując zasadnicze twierdzenie algebry rozłóżmy wielomian $W(x)$ na iloczyn $W_1(x)W_2(x)\ldots W_k(x)$ wielomianów nierozkładalnych stopnia pierwszego lub drugiego o współczynnikach rzeczywistych; można wtedy przyjąć, że wszystkie czynniki przyjmują dodatnie wartości dla nieujemnych argumentów. Jeżeli dla $i = 1, 2, \ldots, k$ znajdziemy takie wielomiany $F_i(x)$ oraz $G_i(x)$ o współczynnikach dodatnich, że $W_i(x) \cdot F_i(x) = G_i(x)$ dla każdego x, to iloczyny $F(x) = F_1(x)F_2(x)\ldots F_k(x)$ oraz $G(x) = G_1(x)G_2(x)\ldots G_k(x)$ będą oczywiście spełniać warunki zadania. Zatem wystarczy rozważyć przypadki, gdy stopień wielomianu $W(x)$ wynosi 1 bądź 2.

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest liniowy oraz $W(x) > 0$ dla $x \geqslant 0$, to $W(x)$ ma współczynniki dodatnie i można przyjąć $F(x) \equiv 1$ oraz $G(x) = W(x)$.

Niech z kolei $W(x)$ będzie nierozkładalnym wielomianem kwadratowym; wtedy $W(x) = c(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$, gdzie $c > 0$ oraz α jest nierzeczywistą liczbą zespoloną. Zauważmy, że jeśli ξ jest liczbą zespoloną, to trójmian kwadratowy $(x-\xi)(x-\overline{\xi}) = x^2 - 2\mathrm{Re}\,\xi \cdot x + |\xi|^2$ ma współczynniki dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy liczba ξ ma ujemną część rzeczywistą. Ponieważ α nie jest liczbą rzeczywistą, więc w ciągu α, α^2, α^{2^2}, α^{2^3}, $\ldots$ istnieje najwcześniejszy wyraz, którego część rzeczywista jest ujemna: jest to mianowicie wyraz α^{2^t}, gdzie $t \geqslant 0$ jest najmniejszą liczbą, dla której $2^t|\arg\alpha| > \frac{1}{2}\pi$. Przyjmijmy wówczas

$$F^*(x) = \prod_{i=0}^{t-1}(x^{2^i} + \alpha^{2^i})(x^{2^i} + \overline{\alpha^{2^i}}) \qquad \text{oraz} \qquad G^*(x) = c(x^{2^t} - \alpha^{2^t})(x^{2^t} - \overline{\alpha^{2^t}}).$$

Wówczas $W(x)\cdot F^*(x) = G^*(x)$ oraz $F^*(x)$ jest iloczynem wielomianów o współczynnikach nieujemnych, zaś $G^*(x)$ jest wielomianem o współczynnikach nieujemnych. Mnożąc $F^*(x)$ i $G^*(x)$ przez wielomian $(1+x)^\ell$ dla odpowiednio dużego ℓ otrzymujemy żądane wielomiany $F(x)$ i $G(x)$ o współczynnikach dodatnich.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3, … spełniają warunek

$$x_{m+n} \leqslant x_m + x_n \qquad \text{dla } m, n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n} \geqslant x_n.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy indukcję ze względu na n. Dla $n = 1$ dana do udowodnienia nierówność staje się równością. Przyjmijmy z kolei, że dana nierówność jest prawdziwa dla $n = 1, 2, \ldots, m-1$; udowodnimy jej prawdziwość dla $n = m$. Rzeczywiście, dodając stronami $m-1$ nierówności

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_i}{i} \geqslant x_i \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m-1$$

otrzymujemy

$$(m-1)x_1 + \frac{m-2}{2}x_2 + \ldots + \frac{2}{m-2}x_{m-2} + \frac{1}{m-1}x_{m-1} \geqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1}.$$

Dodając następnie wielkość $x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1}$ do obu stron dostajemy

$$mx_1 + \frac{m}{2}x_2 + \frac{m}{3}x_3 + \ldots + \frac{m}{m-2}x_{m-2} + \frac{m}{m-1}x_{m-1} \geqslant 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1}).$$

Na mocy założeń mamy $x_i + x_{m-i} \geqslant x_m$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$; sumując te zależności stronami uzyskujemy $2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1}) \geqslant (m-1)x_m$ i wobec tego

$$mx_1 + \frac{m}{2}x_2 + \frac{m}{3}x_3 + \ldots + \frac{m}{m-2}x_{m-2} + \frac{m}{m-1}x_{m-1} \geqslant (m-1)x_m.$$

Dodając teraz x_m do obu stron, a następnie dzieląc je przez m otrzymujemy tezę.

2. Danych jest n różnych liczb całkowitych a_1, a_2, …, a_n. Niech

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_n)$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ liczba

$$\frac{a_1^k}{b_1} + \frac{a_2^k}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^k}{b_n}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie:

Podzielmy wielomian $W(x) = x^k$ przez $G(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$, otrzymując iloraz $P(x)$ oraz resztę $R(x)$ stopnia niższego niż n. Mamy więc równość wielomianów

$$(*) \qquad x^k = P(x)(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) + R(x).$$

Ponadto wielomiany $P(x)$ i $R(x)$ mają współczynniki całkowite, gdyż wielomiany $W(x)$ i $G(x)$ mają współczynniki całkowite, a w wielomianie $G(x)$ współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1.

Na mocy związku $(*)$ prawdziwa jest równość $R(a_i) = a_i^k$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wobec tego stosując wzór interpolacyjny Lagrange'a do wielomianu $R(x)$ uzyskujemy przedstawienie

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} R(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{b_i} \prod_{j \neq i} (x - a_j).$$

Zatem dana w zadaniu liczba $\frac{a_1^k}{b_1} + \frac{a_2^k}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^k}{b_n}$ jest współczynnikiem przy potędze x^{n-1} w wielomianie $R(x)$. Pozostaje już tylko przypomnieć, że wielomian ten ma współczynniki całkowite.

3. Ciąg a_0, a_1, a_2, $\ldots$ jest zadany wzorami: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n najwyższe potęgi dwójki dzielące liczby n i a_n są jednakowe.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dla dowolnych liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$ prawdziwy jest wzór

$$(*) \qquad a_{m+n-1} = a_m a_n + a_{m-1} a_{n-1}.$$

Dowód tego wzoru przebiega przez indukcję ze względu na n przy ustalonej wartości m. Dla $n = 1$ i $n = 2$ wzór $(*)$ orzeka odpowiednio, że $a_m = a_m$ i $a_{m+1} = 2a_m + a_{m-1}$, więc jest prawdziwy. Natomiast krok indukcyjny sprowadza się, przy założeniu prawdziwości wzoru $(*)$ dla $n = k - 1$ i $n = k$, do następującego rachunku:

$$\begin{aligned} a_{m+(k+1)-1} &= 2a_{m+k-1} + a_{m+(k-1)-1} = \\ &= 2(a_m a_k + a_{m-1} a_{k-1}) + (a_m a_{k-1} + a_{m-1} a_{k-2}) = \\ &= a_m (2a_k + a_{k-1}) + a_{m-1}(2a_{k-1} + a_{k-2}) = \\ &= a_m a_{k+1} + a_{m-1} a_k. \end{aligned}$$

Stosując wzór $(*)$ dla $m = n+1$ stwierdzamy, że

$$(\square) \qquad a_{2n} = a_n(a_{n+1} + a_{n-1}) = 2a_n(a_n + a_{n-1}) \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Zauważmy teraz, że $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \equiv a_n \pmod 2$ dla każdego $n \geqslant 0$. Skoro $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$, więc przez prostą indukcję wynika stąd, że liczba a_n jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest nieparzysta. W szczególności oznacza to, że liczba stojąca w nawiasie po prawej stronie zależności $(\square)$ jest zawsze nieparzysta, i wobec tego dla dowolnego $n \geqslant 1$ najwyższa potęga dwójki dzieląca liczbę a_{2n} ma wykładnik o 1 większy, niż najwyższa potęga dwójki dzieląca liczbę a_n. To zaś, w połączeniu z nieparzystością liczby a_n dla nieparzystych wskaźników n, daje tezę zadania.

4. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb pierwszych (p, q), że liczba $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ jest podzielna przez pq.

Rozwiązanie:

Ponieważ czynniki $5^p - 2^p$ i $5^q - 2^q$ nie są podzielne przez 2 ani przez 5, więc liczby p i q są różne od 2 i 5.

Jedyną liczbą pierwszą $r \neq 2, 5$, dla której $r \mid 5^r - 2^r$ jest liczba $r = 3$; wynika to z małego twierdzenia Fermata, gdyż $5^r - 2^r \equiv 5 - 2 = 3 \pmod r$. Wobec tego jeśli para (p, q) spełnia warunki zadania oraz $p, q > 3$, to $p \mid 5^q - 2^q$ oraz $q \mid 5^p - 2^p$.

Jednak jeśli $p > 5$, to zbiór liczb naturalnych n, dla których zachodzi kongruencja $5^n \equiv 2^n \pmod p$, jest zbiorem wszystkich dodatnich wielokrotności najmniejszej liczby n o takiej własności. A skoro liczba pierwsza $n = q$ ma taką własność, zaś liczba $n = 1$ jej nie ma, więc prawdziwa jest równoważność $5^n \equiv 2^n \pmod p \Leftrightarrow q \mid n$. To wraz z małym twierdzeniem Fermata dowodzi, że $q \mid p - 1$. Podobnie uzasadniamy, że jeśli $q > 5$, to $p \mid q - 1$. Obie te podzielności nie mogą być jednocześnie spełnione; w efekcie każda para (p, q) będąca rozwiązaniem zadania zawiera przynajmniej jedną liczbę 3.

Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $p = 3$; otrzymujemy wtedy podzielność $3q \mid 117(5^q - 2^q)$. Jak już wiemy, dla $q > 3$ nie może być prawdziwa zależność $q \mid 5^q - 2^q$; warunki zadania są więc spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi podzielność $q \mid 117 = 3^2 \cdot 13$, czyli dla $q = 13$. Oczywiście liczby $p = q = 3$ także spełniają warunki zadania. *Odpowiedź:* $(p, q) = (3, 3), (3, 13), (13, 3)$.

5. Zbadać, czy istnieje taki 2011-elementowy zbiór złożony z liczb całkowitych, że średnia arytmetyczna wszystkich elementów dowolnego jego niepustego podzbioru jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku całkowitym większym niż 2011.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak. Udowodnimy najpierw, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ istnieje taka liczba całkowita $m \geqslant 1$, że każda z liczb m, $2m$, $3m$, …, nm jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku całkowitym większym niż 2011.

Dowód tego stwierdzenia przeprowadzamy indukcyjnie. Dla $n = 1$ wystarczy przyjąć $m = 1$. Przechodząc do kroku indukcyjnego przypuśćmy, że liczby m, $2m$, $3m$, …, nm są potęgami liczb całkowitych o wykładnikach odpowiednio równych $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n > 2011$. Określmy $k = \mathrm{NWW}(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$ oraz $m' = m[m(n+1)]^k = m^{k+1}(n+1)^k$. Liczby m', $2m'$, $3m'$, …, nm', $(n+1)m'$ są wówczas potęgami liczb całkowitych o wykładnikach odpowiednio równych $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, k+1$ i większych niż 2011, co kończy indukcję.

Wykorzystajmy teraz udowodnione stwierdzenie dla $n = 2011 \cdot 2011!$. Otrzymujemy taką dodatnią liczbę całkowitą m, że zbiór $A = \{m, 2m, 3m, \ldots, nm\}$ składa się z potęg liczb całkowitych o wykładnikach większych niż 2011. Wtedy zbiór $\{2011! \cdot m, 2 \cdot 2011! \cdot m, 3 \cdot 2011! \cdot m, \ldots, 2011 \cdot 2011! \cdot m\}$ ma postulowaną w zadaniu własność, gdyż średnia arytmetyczna dowolnego jego niepustego podzbioru należy do zbioru A i w związku z tym jest żądaną potęgą.

6. Rozpatrujemy wszystkie ściśle malejące ciągi dodatnich liczb całkowitych o sumie równej 2011. Wykazać, że wśród nich ciągów o długości parzystej jest tyle samo, co ciągów o długości nieparzystej.

Rozwiązanie:

Dla każdego z rozważanych ciągów $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ określamy $\ell(a)$ i $e(a)$ w następujący sposób: $\ell = \ell(a) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jest największą taką liczbą, że w podciągu a_1, a_2, …, a_ℓ każdy wyraz jest o 1 większy od następnego, zaś $e(a) = a_n$ jest ostatnim wyrazem ciągu.

Podzielmy wszystkie rozważane ciągi na dwie grupy A i B, przy czym grupa A składa się z ciągów a, w których $\ell(a) \geqslant e(a)$, natomiast grupa B składa się z ciągów a, w których $\ell(a) < e(a)$. Określimy teraz dwa wzajemnie odwrotne odwzorowania $\alpha : A \to B$ i $\beta : B \to A$.

Dla ciągu $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ z grupy A zachodzi nierówność $\ell \geqslant e$, gdzie dla uproszczenia notacji oznaczyliśmy $\ell = \ell(a)$ i $e = e(a)$. Zauważmy, że $e < n$; gdyby bowiem $e \geqslant n$, to także $\ell \geqslant n$ i w efekcie mielibyśmy $e = \ell = n$, czyli ciąg a miałby postać $(2n-1, 2n-2, \ldots, n+1, n)$, lecz suma wyrazów takiego ciągu wynosi $\frac{1}{2}n(3n-1) \neq 2011$. Określamy teraz

$$\alpha(a) = (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_{e-1} + 1, a_e + 1, a_{e+1}, a_{e+2}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1});$$

fragment od wyrazu a_{e+1} do wyrazu a_{n-1} może być pusty. Ciąg ten jest ściśle malejący i ma sumę wyrazów taką samą, jak ciąg a, a ponadto należy do grupy B, gdyż $\ell(\alpha(a)) = e$ oraz $e(\alpha(a)) = a_{n-1} > a_n = e$.

Dla ciągu $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ z grupy B zachodzi nierówność $\ell < e$, gdzie tym razem $\ell = \ell(b)$ i $e = e(b)$. Jeżeli $\ell = n$, to $e > n + 1$; w przeciwnym razie ciąg b

byłby ciągiem $(2n, 2n-1, \ldots, n+2, n+1)$ o sumie wyrazów $\frac{1}{2}n(3n+1) \neq 2011$. Definiujemy

$$\beta(b) = (b_1 - 1, b_2 - 1, \ldots, b_{\ell-1} - 1, b_\ell - 1, b_{\ell+1}, b_{\ell+2}, \ldots, b_{n-1}, b_n, \ell);$$

we wzorze tym fragment od wyrazu $b_{\ell+1}$ do wyrazu b_n może być pusty. Tak określony ciąg ma sumę wyrazów taką samą, jak ciąg a; jest też ściśle malejący, gdyż dla $\ell < n$ mamy $b_\ell - 1 > b_{\ell+1}$ na mocy określenia liczby ℓ oraz $b_n = e > \ell$, zaś dla $\ell = n$ mamy $b_\ell - 1 = e - 1 > n = \ell$. Ponadto ciąg $\beta(b)$ należy do grupy A, gdyż $\ell(\beta(b)) \geqslant \ell = e(\beta(b))$.

Nietrudno się przekonać, że odwzorowania α i β są wzajemnie odwrotne. Wobec tego wszystkie rozważane ciągi możemy podzielić na pary złożone z jednego ciągu należącego do grupy A i jednego należącego do grupy B, przy czym oba ciągi przechodzą nawzajem na siebie przy odwzorowaniach α i β. Ponieważ odwzorowania te przekształcają ciąg na ciąg krótszy lub dłuższy o jeden wyraz, więc w każdej takiej parze ciągów jeden ciąg ma długość parzystą, a drugi — długość nieparzystą. Wynika stąd teza zadania.

7. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych (k, m, n), że trzy ściany prostopadłościanu $k \times m \times n$ o wspólnym wierzchołku można okleić niezachodzącymi na siebie prostokątami 3×1. Prostokąty mogą być zaginane na krawędziach prostopadłościanu.

Rozwiązanie:

Pole powierzchni trzech ścian o wspólnym wierzchołku wynosi $km+kn+mn$; aby oklejenie tych ścian było możliwe, liczba ta powinna być podzielna przez 3. Jeśli jedna z liczb k, m, n dzieli się przez 3, to podzielność $3 \mid km+kn+mn$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z dwóch pozostałych liczb także dzieli się przez 3. Jest jasne, że jeśli przynajmniej dwie z liczb k, m, n są podzielne przez 3, to każda z trzech rozważanych ścian prostopadłościanu ma bok o długości podzielnej przez 3 i każdą z tych ścian z osobna można okleić prostokątami 3×1.

Wykażemy teraz, że jeśli żadna z liczb k, m, n nie jest podzielna przez 3, to żądane oklejenie nie jest wykonalne. (Można sprawdzić, że w tym przypadku podzielność $3 \mid km + kn + mn$ implikuje kongruencję $k \equiv m \equiv n \pmod 3$, nie będziemy jednak z tego korzystać.)

Potraktujmy każdą z trzech badanych ścian jako prostokątną tabelę złożoną z pól będących kwadratami jednostkowymi. Wprowadźmy w tych tabelach numerację wierszy i kolumn przyjmując, że w każdej tabeli pierwszy wiersz i pierwsza kolumna są przyległe do wspólnego wierzchołka P rozważanych trzech ścian. Następnie w każdej tabeli pomalujmy na niebiesko wszystkie pola, których numer wiersza lub numer kolumny daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Pozostałe pola pomalujmy na czerwono.

Pola czerwone w jednej tabeli są zgrupowane w kwadratach 2×2, być może z wyjątkami przy brzegach tabeli. Ponieważ jednak liczba kolumn daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3, więc albo ostatnia kolumna jest niebieska, albo trzecia od końca jest niebieska. Wynika stąd, że nie istnieją czerwone prostokąty 1×2 w ostatniej kolumnie tabeli, które byłyby zawarte w kwadratach 2×2, gdyby tabela miała jedną kolumnę więcej. Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla ostatniego wiersza. Natomiast w pierwszym wierszu i w pierwszej kolumnie znajduje się jedno czerwone pole narożne oraz czerwone prostokąty 1×2. Wobec tego wszystkie czerwone prostokąty z wyjątkiem pola narożnego zawierającego wierzchołek P mają przynajmniej jeden bok o długości parzystej. Stąd wniosek, że liczba pól czerwonych w każdej tabeli jest nieparzysta i w takim razie liczba wszystkich czerwonych pól jest nieparzysta.

Nietrudno natomiast spostrzec, że każdy prostokąt 3×1 przyklejony do trzech ścian o wierzchołku P pokrywa parzystą liczbę czerwonych pól. Zatem opisane w zadaniu oklejenie nie jest możliwe.

Odpowiedź: Co najmniej dwie z liczb k, m, n muszą być podzielne przez 3.

8. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną d, dla której prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dany jest skończony zbiór punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdą parę punktów połączono odcinkiem czerwonym albo zielonym. Wówczas jeden z tych kolorów ma taką własność, że dowolne dwa punkty, które można połączyć ścieżką tego koloru, można także połączyć ścieżką tego koloru składającą się z co najwyżej d odcinków.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $d = 3$. Zauważmy najpierw, że $d \geqslant 3$. Rzeczywiście, rozważmy cztery punkty A, B, C, D i pomalujmy odcinki AB, BC, CD na czerwono oraz odcinki AC, BD, AD na zielono. Wtedy dowolne dwa punkty można połączyć czerwoną ścieżką, jak również zieloną ścieżką, ale najkrótsza czerwona ścieżka od A do D ma długość 3, a najkrótsza zielona ścieżka od B do C także ma długość 3. (Przez *długość* ścieżki rozumiemy liczbę tworzących ją odcinków.)

Udowodnimy teraz, że $d = 3$. W tym celu rozpatrzymy dwa przypadki:

Przypadek 1: W danym zbiorze istnieją dwa różne punkty A, B, których nie można połączyć czerwoną ścieżką. Wykażemy, że wtedy dowolne dwa punkty można połączyć zieloną ścieżką o długości nie większej niż 2. Niech bowiem S będzie zbiorem wszystkich punktów, do których można dojść czerwoną ścieżką z punktu A, zaś S' — zbiorem pozostałych punktów. Wtedy $A \in S$, $B \in S'$ oraz dowolny odcinek o jednym końcu w zbiorze S i drugim końcu w zbiorze S' jest zielony. Ponadto każdą parę punktów należących do jednego zbioru można połączyć zieloną ścieżką utworzoną z 2 odcinków, których wspólny koniec jest dowolnym punktem drugiego zbioru.

Przypadek 2: Dowolne dwa punkty danego zbioru można połączyć czerwoną ścieżką. Możemy przy tym przyjąć, że pewnej pary punktów A, B nie da się połączyć czerwoną ścieżką o długości co najwyżej 3, gdyż w przeciwnym razie teza jest prawdziwa.

Niech n będzie najmniejszą taką liczbą naturalną, że dowolny punkt rozważanego zbioru można połączyć z punktem A czerwoną ścieżką o długości co najwyżej n. Tak więc $n \geqslant 4$. Określmy $S_0 = \{A\}$. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ niech S_k będzie zbiorem tych punktów, dla których najkrótsza czerwona ścieżka prowadząca do A ma długość k. Zbiory S_0, S_1, S_2, …, S_n są niepuste, a ich suma jest zbiorem wszystkich danych punktów.

Jeżeli $|i - j| \geqslant 2$, to dowolny odcinek o jednym końcu w zbiorze S_i oraz drugim końcu w zbiorze S_j jest zielony. Zauważmy, że wobec nierówności $n \geqslant 4$ dla dowolnych dwóch (równych bądź nie) liczb a, b ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ istnieje ciąg $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ o wyrazach z tego zbioru, w którym $1 \leqslant m \leqslant 3$, $x_0 = a$, $x_m = b$ oraz $|x_i - x_{i-1}| \geqslant 2$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zatem z punktu zbioru $S_a = S_{x_0}$ można, przechodząc kolejno przez zbiory S_{x_1}, …, $S_{x_{m-1}}$, dojść do zbioru $S_b = S_{x_m}$ zieloną ścieżką o długości $m \leqslant 3$. A skoro liczby a i b wybraliśmy dowolnie, więc każdą parę punktów da się połączyć zieloną ścieżką o długości nie większej niż 3.

9. Na trójkącie nierównobocznym ABC opisano okrąg o środku O. Punkty A', B', C' są odpowiednio środkami tych łuków BC, CA, AB tego okręgu, które zawierają wewnątrz wierzchołek danego trójkąta. Rozważmy punkty przecięcia prostych: $X = AB' \cap BA'$, $Y = BC' \cap CB'$, $Z = CA' \cap AC'$. Dowieść, że punkty O, X, Y, Z leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Niech A'', B'', C'' będą końcami średnic danego w treści zadania okręgu o początkach odpowiednio A', B', C'; są one środkami tych łuków BC, CA, AB, które nie zawierają wewnątrz wierzchołka trójkąta ABC. Półproste $AA''^{\rightarrow}$, $BB''^{\rightarrow}$, $CC''^{\rightarrow}$ są dwusiecznymi kątów wewnętrznych tego trójkąta i przecinają się w punkcie I będącym środkiem okręgu wpisanego w ów trójkąt. Zastosujmy teraz twierdzenie Pascala do „sześciokąta” o kolejnych wierzchołkach A, A'', A', B, B'', B', otrzymując, że punkty $I = AA'' \cap BB''$, $O = A''A' \cap B''B'$, $X = A'B \cap B'A$ leżą na jednej prostej. Podobnie uzasadniamy, że punkty I, O, Y leżą na jednej prostej oraz punkty I, O, Z leżą na jednej prostej. Ponadto $I \neq O$, skoro trójkąt ABC nie jest równoboczny. A w takim razie punkty I, O, X, Y, Z leżą na jednej prostej.

10. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AD, BE, CF są wysokościami i przecinają się w punkcie H. Okrąg o środku O przechodzący przez punkty A i H przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q różnych od A.

Okrąg opisany na trójkącie OPQ jest styczny do odcinka BC w punkcie R. Wykazać, że
$$\frac{CR}{BR}=\frac{ED}{FD}.$$

Rozwiązanie:

Rozpoczniemy od wykazania, że symetralne odcinków BP i CQ przecinają się na odcinku BC.

Niech więc K i L będą odpowiednio środkami odcinków BP i CQ, a ich symetralne niech przecinają bok BC odpowiednio w punktach X i Y. Należy zatem udowodnić, że $BX+CY=BC$. Przyjmijmy, że punkt F leży wewnątrz lub na okręgu przechodzącym przez punkty A, P, H, Q; wtedy punkt E leży odpowiednio na zewnątrz lub na tym okręgu. Ponadto na mocy twierdzenia Talesa mamy
$$\frac{BX}{BC}+\frac{CY}{CB}=\frac{BK}{BF}+\frac{CL}{CE}=\frac{1}{2}\left(\frac{BP}{BF}+\frac{CQ}{CE}\right)=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{PF}{BF}+\frac{EQ}{CE}\right).$$

Wobec tego wystarczy uzasadnić, że $\dfrac{PF}{EQ}=\dfrac{BF}{CE}$. Oba te stosunki są jednak równe $\dfrac{FH}{EH}$; pierwszy — gdyż trójkąty prostokątne HFP i HEQ są podobne ze względu na istnienie okręgu opisanego na czworokącie $APHQ$, drugi — gdyż trójkąty prostokątne HFB i HEC są podobne z uwagi na równości $\angle HBF=\angle HCE=90^\circ-\angle A$, gdzie przez $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ oznaczamy miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC.

Wykażemy teraz, że punkt $X=Y$ pokrywa się z punktem R. W trójkącie równoramiennym BXP wyznaczamy $\angle BXP=180^\circ-2\angle B$ i analogicznie $\angle CXQ=180^\circ-2\angle C$. W takim razie $\angle PXQ=180^\circ-2\angle A$, co w połączeniu z zależnością $\angle POQ=2\angle PAQ=2\angle A$ dowodzi, że na czworokącie $PXQO$ można opisać okrąg. Na mocy założeń zadania oznacza to, że $X=Y=R$.

Zatem punkt R leży na symetralnych odcinków BP i CQ. Wynika stąd, że $BR=PR$ oraz $CR=QR$ i do dokończenia rozwiązania pozostaje udowodnić, że $\dfrac{QR}{PR}=\dfrac{ED}{FD}$. Ta równość jest jednak konsekwencją podobieństwa trójkątów PQR i FED. Aby dostrzec to podobieństwo, obliczamy kąty obu trójkątów. W pierwszym trójkącie mamy $\angle PQR=\angle PRB=180^\circ-2\angle B$ i podobnie $\angle QPR=180^\circ-2\angle C$. Natomiast w drugim z tych trójkątów wyznaczamy $\angle FED=180^\circ-\angle FEA-\angle DEC=180^\circ-2\angle B$ (i w analogiczny sposób $\angle EFD=180^\circ-2\angle C$), gdyż zachodzą równości $\angle FEA=\angle DEC=\angle B$, które wynikają z tego, że na czworokątach $BCEF$ i $ABDE$ można opisać okręgi odpowiednio o średnicach BC i AB.

To kończy rozwiązanie zadania.

11. Rozstrzygnąć, czy istnieje ostrosłup czworokątny o krawędziach bocznych różnej długości, który można podzielić na trzy przystające czworościany.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak. Rozpatrzmy trójkąt ABC o kątach przy wierzchołkach A, B, C równych odpowiednio $60°$, $30°$, $90°$. Niech D będzie środkiem boku AB oraz niech E będzie punktem boku BC wyznaczonym przez równość $BE : EC = 2 : 1$. Wtedy trójkąty BDE, ADE i ACE są przystające.

Niech teraz π będzie płaszczyzną w przestrzeni. Umieśćmy trójkąt ABC w przestrzeni tak, aby płaszczyzna tego trójkąta była prostopadła do π, a wspólną krawędzią obu płaszczyzn była prosta BC. Niech $\ell \subset \pi$ będzie prostą prostopadłą do prostej BC i przechodzącą przez punkt E. Na prostej ℓ wybierzmy punkty F i G leżące po różnych stronach punktu E i bardzo blisko tego punktu, przy czym $EF < EG$.

Wówczas ostrosłup o podstawie $BFCG$ i wierzchołku A spełnia warunki zadania: jego krawędzie boczne mają długości $AC < AF < AG < AB$ oraz można go podzielić na trzy przystające czworościany $BDFG$, $ADFG$ i $ACFG$.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a^2 < bc$. Udowodnić, że spełniona jest nierówność

$$b^3 + ac^2 > ab(a+c).$$

Rozwiązanie:

Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy

$$\begin{aligned} 4a^3b + b^3c + 2c^3a &\geqslant 7a^2bc, \\ 4b^3c + c^3a + 2a^3b &\geqslant 7b^2ca, \\ 4c^3a + a^3b + 2b^3c &\geqslant 7c^2ab. \end{aligned}$$

Dodając te trzy zależności stronami stwierdzamy, że

$$(*) \qquad a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Na mocy warunku $a^2 < bc$ mamy ponadto $-a^3b > -b^2ca$; dodając stronami tę nierówność do nierówności $(*)$ otrzymujemy

$$b^3c + c^3a > a^2bc + c^2ab,$$

co po podzieleniu stronami przez c daje tezę zadania.

2. Na tablicy napisano n nieujemnych liczb całkowitych, których największy wspólny dzielnik wynosi 1. W jednym kroku można zmazać dwie liczby x, y takie, że $x \geqslant y$, oraz zastąpić je liczbami $x - y$, $2y$. Rozstrzygnąć, dla jakich początkowych ciągów liczb całkowitych można doprowadzić do sytuacji, w której $n - 1$ liczb na tablicy jest zerami.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że suma wszystkich liczb na tablicy nie ulega zmianie w wyniku wykonywania zadanych operacji.

Opisany w zadaniu krok dla wybranej pary liczb można podzielić na dwie części: odjęcie jednej liczby od drugiej oraz pomnożenie pewnej liczby przez 2. Pierwsza część nie wpływa na największy wspólny dzielnik wszystkich napisanych na tablicy liczb, natomiast druga część albo nie zmienia tego największego wspólnego dzielnika, albo powoduje, że zwiększa się on dwukrotnie. A skoro dla początkowego układu liczb na tablicy jest on równy 1, więc po dowolnej liczbie kroków będzie on potęgą dwójki. Jeżeli wszystkie liczby na tablicy z wyjątkiem jednej są zerami, to suma wszystkich n liczb jest równa ich największemu wspólnemu dzielnikowi. Stąd wniosek, że do możliwości uzyskania $n-1$ zer na tablicy konieczne jest, aby suma początkowych n liczb była potęgą dwójki.

Wykażemy teraz, że jest to również warunek dostateczny.

Przypuśćmy, że suma początkowych n liczb wynosi 2^k, gdzie $k \in \{0,1,2,\ldots\}$. *Wykładnikiem* bieżącego układu liczb na tablicy nazwiemy największą taką liczbę $\alpha \in \{0,1,2,\ldots\}$, że wszystkie napisane w danym momencie liczby są podzielne przez 2^α. Jeżeli wykładnik jest równy k, to na tablicy napisana jest liczba 2^k oraz $n-1$ zer. Pozostaje zatem wykazać, że jeśli wykładnik jest mniejszy niż k, to można wykonać kilka kroków, w wyniku których wykładnik się zwiększy.

Niech zatem wykładnik bieżącego układu liczb na tablicy wynosi $\alpha < k$. To oznacza, że wszystkie napisane liczby są podzielne przez 2^α, nie wszystkie są podzielne przez $2^{\alpha+1}$, a suma wszystkich liczb jest równa 2^k. Wobec tego liczba liczb niepodzielnych przez $2^{\alpha+1}$ jest parzysta; możemy je więc podzielić na pary. Następnie wykonajmy krok wybierając po kolei każdą z tych par. Jeżeli liczby x, y są podzielne przez 2^α, ale nie przez $2^{\alpha+1}$, to liczby $x-y$ i $2y$ są podzielne przez $2^{\alpha+1}$. W takim razie po wykonaniu tych kroków wszystkie liczby na tablicy będą podzielne przez $2^{\alpha+1}$, czyli doprowadzimy do zwiększenia wykładnika. To kończy rozwiązanie.

Odpowiedź: Początkowy ciąg spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy suma wszystkich jego wyrazów jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym nieujemnym.

3. Punkty A, B, C, D leżą w tej kolejności na okręgu, przy czym proste AB i CD nie są równoległe oraz długość łuku $\widehat{AB}$ zawierającego punkty C, D jest dwa razy większa niż długość łuku $\widehat{CD}$ nie zawierającego punktów A, B. Punkt E leży po tej samej stronie prostej AB co C oraz D, przy czym $AC = AE$ oraz $BD = BE$. Wykazać, że jeśli prosta prostopadła do prostej AB przechodząca przez E połowi łuk $\widehat{CD}$ nie zawierający punktów A, B, to $\angle ACB = 108°$.

Rozwiązanie:

Niech o będzie okręgiem, na którym leżą punkty A, B, C, D, niech o_1 oznacza okrąg o środku A przechodzący przez punkty C i E oraz niech o_2 oznacza okrąg o środku B przechodzący przez punkty D i E. Ponadto niech punkt S będzie środkiem łuku $\widehat{CD}$ okręgu o nie zawierającego punktów A i B.

Niech C' będzie drugim, oprócz C, punktem przecięcia okręgów o i o_1. Wtedy punkt A jest środkiem łuku $\widehat{CC'}$ okręgu o. Oznaczmy przez C'' drugi punkt przecięcia prostej SC z okręgiem o_1. Zauważmy, że

$$\angle C''SA = 180° - \angle CSA = \angle CC'A = \angle C'CA = \angle C'SA,$$

zatem półprosta $SA^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta $C'SC''$.

Wobec tego $SC' = SC''$, gdyż półproste $SC'^{\rightarrow}$ i $SC''^{\rightarrow}$ są symetryczne względem prostej SA, na której leży środek okręgu o_1, a więc punkty przecięcia tych półprostych z tym okręgiem (odpowiednio C' i C'') także są symetryczne względem prostej SA.

Analogicznie jeśli okrąg o_2 przecina okrąg o w punkcie $D' \neq D$ oraz prosta SD przecina okrąg o_2 w punkcie $D'' \neq D$, to $SD' = SD''$.

Niech prosta ES przecina okrąg o w punkcie $E' \neq S$. Wykażemy, że punkty C', D', E' pokrywają się.

Przypuśćmy bowiem, że $C' \neq D'$. Punkty A i B są środkami odpowiednio okręgów o_1 i o_2, zatem prosta ES prostopadła do AB i przechodząca przez jeden ich punkt wspólny jest ich osią potęgową, skąd $SC \cdot SC'' = SD \cdot SD''$. Ale na mocy założenia, że punkt S jest środkiem łuku $\widehat{CD}$ okręgu o, dostajemy równość $SC = SD$. W takim razie $SC'' = SD''$ i w rezultacie $SC' = SD'$. To oznacza, że trójkąt $SC'D'$ jest równoramienny, a jego wysokość poprowadzona z wierzchołka S przechodzi przez środek okręgu o. Punkty C i D są więc symetryczne względem tej wysokości, a czworokąt $C'D'CD$ jest trapezem równoramiennym wpisanym w okrąg o. Jednak wtedy punkty A, B będące odpowiednio środkami łuków $\widehat{CC'}$, $\widehat{DD'}$ tego okręgu także są symetryczne względem rozważanej wysokości, co przeczy założeniu, że proste AB i CD nie są równoległe.

Zatem $C' = D'$ i w efekcie okręgi o, o_1, o_2 mają punkt wspólny E'.

Oznaczmy $\alpha = \angle CE'S = \angle DE'S$ oraz $\beta = \angle BE'C$. Łuk $\widehat{AB}$ okręgu o jest dwukrotnie dłuższy od łuku $\widehat{CD}$, skąd wyznaczamy $\angle DE'A = 2\alpha - \beta$. Wobec tego, z uwagi na równości $AC = AE = AE'$ i $BD = BE = BE'$, trójkąt ABE' ma następujące miary kątów:

$$\begin{aligned}
\angle AE'B &= 4\alpha, \\
\angle BAE' &= \angle BDE' = \angle BE'D = 2\alpha + \beta, \\
\angle ABE' &= \angle ACE' = \angle AE'C = 4\alpha - \beta.
\end{aligned}$$

Dodając te kąty dochodzimy do równości $10\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = 18^\circ$ i ostatecznie $\angle ACB = 180^\circ - \angle AE'B = 180^\circ - 4\alpha = 108^\circ$.

4. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych ma następującą własność: dla dowolnych wielomianów $F(x)$, $G(x)$, $Q(x)$ o współczynnikach całkowitych, jeśli

$$P(Q(x)) = F(x) \cdot G(x),$$

to $F(x)$ lub $G(x)$ jest wielomianem stałym.

Wykazać, że $P(x)$ jest wielomianem stałym.

Rozwiązanie:

Musimy wykluczyć możliwość, że $P(x)$ jest wielomianem stopnia pierwszego oraz możliwość, że $P(x)$ jest stopnia co najmniej drugiego. Rozpatrzymy więc obie te możliwości.

Przypadek 1: $P(x) = ax + b$ dla pewnych liczb całkowitych a i b, przy czym $a \neq 0$. Wtedy dla wielomianu $Q(x) = ax^2 + (b+1)x$ o współczynnikach całkowitych otrzymujemy

$$P(Q(x)) = a(ax^2 + (b+1)x) + b = a^2x^2 + a(b+1)x + b = (ax+b)(ax+1),$$

a więc wielomian $P(Q(x))$ można zapisać jako iloczyn wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych, wbrew warunkom zadania.

Przypadek 2: $P(x)$ jest wielomianem stopnia co najmniej drugiego. Zatem $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $n \geqslant 2$ i $a_n \neq 0$. Wówczas wielomian $Q(x) = P(x) + x$ stopnia n ma współczynniki całkowite, a ponadto

$$\begin{aligned} P(Q(x)) &= \sum_{i=0}^{n} a_i (P(x)+x)^i = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i + a_i \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} P(x)^j x^{i-j} \right) = \\ &= P(x) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_i \binom{i}{j} P(x)^{j-1} x^{i-j} \right). \end{aligned}$$

Wobec tego wielomian $P(Q(x))$ jest iloczynem wielomianu $P(x)$ oraz pewnego innego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Wielomian $P(Q(x))$ ma jednak stopień n^2, czyli wyższy niż wielomian $P(x)$. Ponownie uzyskaliśmy więc rozkład wielomianu $P(Q(x))$ sprzeczny z założeniami zadania.

5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M, N są odpowiednio środkami boków AD oraz BC. Punkty K oraz L leżą odpowiednio na bokach AB i CD, przy czym $\angle MKA = \angle NLC$. Wykazać, że jeśli proste BD, KM oraz LN przecinają się w jednym punkcie, to spełnione są równości

$$\angle KMN = \angle BDC \qquad \text{oraz} \qquad \angle LNM = \angle ABD.$$

Rozwiązanie:

Niech P będzie środkiem odcinka BD, zaś Q — wspólnym punktem prostych BD, KM oraz LN. Nie tracąc ogólności możemy przyjąć, że punkt Q leży na półprostej $DB^{\rightarrow}$.

Z twierdzenia Talesa wynikają równoległości $MP \parallel AB$ oraz $NP \parallel CD$. W takim razie

$$\angle PMQ = \angle PMK = \angle MKA = \angle NLC = \angle LNP = 180^\circ - \angle PNQ,$$

a ponieważ punkty M i N leżą po przeciwnych stronach prostej PQ, więc na czworokącie $PMQN$ można opisać okrąg. Stąd zaś, na mocy uzasadnionych na początku akapitu równoległości, uzyskujemy

$$\angle KMN = \angle QMN = \angle QPN = \angle BPN = \angle BDC$$

oraz

$$\angle LNM = 180^\circ - \angle QNM = 180^\circ - \angle QPM = \angle MPD = \angle ABD.$$

6. Niech a będzie liczbą całkowitą. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, dla których

$$p \mid n^2 + 3 \qquad \text{oraz} \qquad p \mid m^3 - a$$

dla pewnych liczb całkowitych n, m.

Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby całkowitej k mamy

$$(9a^2k^3)^2 + 3 = 3(27a^4k^6 + 1)$$

oraz

$$(9a^3k^4)^3 - a = a(729a^8k^{12} - 1) = a(27a^4k^6 - 1)(27a^4k^6 + 1).$$

Stąd wniosek, że liczba $27a^4k^6 + 1$ jest dzielnikiem zarówno liczby $n^2 + 3$ dla $n = 9a^2k^3$, jak i liczby $m^3 - a$ dla $m = 9a^3k^4$. Zatem zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, że $p \mid 27a^4k^6 + 1$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Przypuśćmy wobec tego, że istnieje tylko skończenie wiele takich liczb pierwszych; niech będą nimi p_1, p_2, ..., p_m. Wówczas dla $k = p_1p_2 \dots p_m$ liczba $27a^4k^6 + 1$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez każdą z liczb p_1, p_2, ..., p_m, a ponieważ liczba ta jest większa od 1, więc musi mieć dzielnik pierwszy różny od każdej z tych m liczb. To jednak prowadzi do sprzeczności, gdyż założyliśmy, że liczba postaci $27a^4k^6 + 1$ nie może mieć dzielnika pierwszego nie należącego do zbioru $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Sprzeczność ta dowodzi, że musi istnieć nieskończenie wiele liczb pierwszych o wymaganej własności.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.
13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści