Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 29 maja–11 czerwca 2022

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 29 maja–11 czerwca 2022

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. 18 33 11 660

Kadra:
Tomasz Cieśla, Justyna Jaworska, Michał Kieza, Mikołaj Leonarski, Konrad Majewski, Wojciech Nadara, Łukasz Orski, Rafał Pyzik, Radosław Żak.

Uczestnicy:
Helena Arendacz, Mariam Baghdasaryan, Mikołaj Cudny, Mateusz Gabzdyl, Robert Kluszczyński, Miłosz Kwiatkowski, Stanisław Lada, Michał Lipiec, Michał Mańka, Aleksander Mielnikau, Piotr Miernik, Korneliusz Obarski, Mateusz Pałucki, Mateusz Przebieracz, Mateusz Rajs, Daniela Spurtacz, Agata Stępińska, Maksymilian Wdowiarz-Bilski, Marek Zbysiński, Krzysztof Zdon.

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`om.mimuw.edu.pl`
`www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 29 maja – 11 czerwca 2022 w Mszanie Dolnej, w Ośrodku Sportowo-Rekreacyjnym „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Tomasz Cieśla, Justyna Jaworska, Michał Kieza, Mikołaj Leonarski, Konrad Majewski, Wojciech Nadara, Łukasz Orski, Rafał Pyzik i Radosław Żak.

W dniach 30 i 31 maja oraz 1, 3, 6, 7, 8 i 9 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 2 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 4 i 10 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny ośmiu zadań i trwały od rana do wieczora, a mecze matematyczne — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 192 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 138, 131 i 109 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyła się wycieczka: 5 czerwca na Ćwilin i Mogielicę.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z Obozu wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `om.mimuw.edu.pl`.

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	2	0	0	18
2.	0	5	1	14
3.	6	1	0	13
4.	12	3	4	1
5.	7	1	1	11
6.	8	0	0	12
7.	5	0	2	13
8.	4	1	0	15
9.	17	0	0	3
10.	8	1	0	11
11.	7	0	0	13
12.	0	0	1	19
13.	18	0	0	2
14.	7	1	0	12
15.	2	0	0	18
16.	0	0	0	20
17.	8	0	1	10
18.	8	2	0	9
19.	2	2	2	13
20.	1	0	0	18
21.	10	0	2	7
22.	10	1	1	7
23.	2	0	2	15
24.	1	0	0	18
25.	12	1	3	3
26.	9	3	0	7
27.	6	0	0	13
28.	3	0	0	16
29.	17	1	0	1
30.	10	0	0	9
31.	3	1	0	15
32.	1	0	0	18

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Dany jest ciąg niezerowych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ oraz nieujemna liczba całkowita d, dla której $\sum_{k=1}^{n} k^l a_k = 0$ dla każdego $l = 0, 1, \ldots, d$. Udowodnić, że ciąg $a_1, \ldots, a_n$ zmienia znak przynajmniej $d+1$ razy.

2. W pewnym kraju jest n miast. Każde dwa miasta są połączone dokładnie jedną jednokierunkową drogą. *Ścieżką* z miasta X do miasta Y nazwiemy ciąg dróg, którym można przejść z X do Y bez wracania do już odwiedzonego miasta. Zbiór ścieżek nazwiemy *sprytnym* jeżeli żadna droga nie należy do dwóch lub więcej ścieżek z tego zbioru. Niech A i B będą dwoma różnymi miastami. Niech N_{AB} oznacza największą liczbę elementów sprytnego zbioru ścieżek z A do B. Niech N_{BA} oznacza największą liczbę elementów sprytnego zbioru ścieżek z B do A. Wykazać, że $N_{AB} = N_{BA}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba dróg wychodzących z A jest równa liczbie dróg wychodzących z B.

3. Niech $\mathcal{P} = A_1A_2A_3 \ldots A_{180}$ będzie 180–kątem foremnym. Niech X będzie punktem we wnętrzu $\mathcal{P}$. Udowodnić, że istnieją takie indeksy $i \neq j$, że

$$179^\circ < \sphericalangle A_iXA_j \leqslant 180^\circ.$$

4. Dla dodatniej liczby całkowitej n definiujemy

$$q_n = (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)/n.$$

Wykazać, że dla $n \geqslant 2$ liczba $q_1q_2 \ldots q_n$ nie jest całkowita.

5. Dana jest nieujemna liczba całkowita n. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_3}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_{2^n}}{2^n} \right\rfloor,$$

gdzie $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^n})$ jest dowolną permutacją zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$.

6. Dane są dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ o tej własności, że dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots, 99, 101$ istnieje taki zbiór indeksów $\mathcal{I}$, że $n = \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i$, ale nie istnieje taki zbiór indeksów $\mathcal{J}$, że $100 = \sum_{i\in\mathcal{J}} a_i$. Rozstrzygnąć, czy musi istnieć taki zbiór indeksów $\mathcal{K}$, że $200 = \sum_{i\in\mathcal{K}} a_i$.

7. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg Ω. Niech prosta styczna do Ω w punkcie D przecina półproste BA i BC odpowiednio w punktach E i F. Punkt T leży wewnątrz trójkąta ABC, spełniając $TE \parallel CD$ oraz $TF \parallel AD$. Niech $K \neq D$ będzie takim punktem na odcinku DF, że $TD = TK$. Udowodnić, że proste AC, BK i DT przecinają się w jednym punkcie.

8. Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności. Istnieje taka permutacja $d_1, d_2, \ldots, d_k$ wszystkich dzielników n, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$, liczba $d_1 + \cdots + d_i$ jest kwadratem liczby całkowitej.

9. W każde pole kwadratowej tabeli o wymiarach $n \times n$, gdzie $n \geqslant 4$, została wpisana liczba $+1$ lub -1. Każdemu zbiorowi n pól, zawierającemu po jednym polu z każdego wiersza i z każdej kolumny, przyporządkowujemy iloczyn liczb wpisanych w te pola. Dowieść, że suma uzyskanych iloczynów dzieli się przez 4.

10. Wykazać, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|.$$

11. W trójkącie ostrokątnym ABC prosta przechodząca przez punkt C prostopadła do prostej AC przecina dwusieczną zewnętrzną kąta ABC w punkcie D. Niech H będzie rzutem punktu D na prostą BC. Punkt K leży na odcinku AB, przy czym $KH \parallel AC$. Niech M będzie środkiem odcinka AK. Udowodnić, że $MC = MB + BH$.

12. Wykazać, że istnieje tylko skończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba

$$\left(\frac{n}{1}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\dots\left(\frac{n}{n}+n\right)$$

jest całkowita.

13. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Punkty E i F leżą na odcinkach odpowiednio AD i BC w taki sposób, że $\frac{AE}{DE} = \frac{BF}{CF}$. Niech G będzie rzutem B na AF. Udowodnić, że prosta EF jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie CFG.

14. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że jeśli n jest liczbą naturalną, a $x = \sqrt{n}$ nie jest liczbą naturalną, to różnica

$$\lfloor (x + \lfloor x \rfloor)^p \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$$

dzieli się przez p.

15. Niech $a_1, a_2, \dots, a_m$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Dowieść, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite b, c, N, że równość

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n + a_i} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{bn + c} \right\rfloor$$

zachodzi dla wszystkich liczb całkowitych $n > N$.

16. Dany jest spójny nieskierowany graf G o n wierzchołkach, z których każdy jest połączony z przynajmniej trzema innymi. Udowodnij, że istnieje jego drzewo rozpinające D, które ma co najmniej $\frac{2}{9}n$ liści.

Uwaga 1. Mówimy, że graf G jest spójny, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u i v istnieje ciąg krawędzi tego grafu prowadzący od u do v.

Uwaga 2. Przez drzewo rozpinające grafu G rozumiemy taki spójny podzbiór D krawędzi grafu G, że każdy wierzchołek grafu G jest końcem co najmniej jednej krawędzi z D oraz nie istnieje cykl składający się z krawędzi D.

17. Czy istnieje 2022 liczb rzeczywistych (niekoniecznie różnych), które nie wszystkie są zerami, spełniających następujący warunek: dla dowolnych 1011 spośród nich, współczynniki wielomianu unormowanego stopnia 1011 (poza współczynnikiem przy x^{1011}), którego są one pierwiastkami, są permutacją pozostałych 1011 liczb?

18. Dany jest nieskończony ciąg $a_1, a_2, \dots$ dodatnich liczb całkowitych spełniający dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zależność

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{p_n}$$

gdzie p_n to pewien dzielnik pierwszy a_n. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych n zachodzi $a_{n+k} = ka_n$.

19. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Punkt P jest przecięciem przekątnych AC i BD. Niech M i N będą odpowiednio środkami boków AD i BC. Przez ω_1, ω_2 oraz ω_3 oznaczamy okręgi opisane na trójkątach odpowiednio ADP, BCP oraz OMN. Niech punkt E będzie przecięciem ω_1 i ω_3, które nie leży na łuku APD okręgu ω_1, a punkt F przecięciem ω_2 i ω_3, które nie leży na łuku BPC okręgu ω_2. Udowodnić, że $OF = OE$.

20. Rozważmy $m+1$ poziomych i $n+1$ pionowych prostych ($m, n \geqslant 4$) tworzących kratę o mn kwadratach i $(m+1)(n+1)$ wierzchołkach. Rozważmy łamaną zamkniętą złożoną z odcinków tej kraty, która przechodzi przez wszystkie $(m-1)(n-1)$ wewnętrznych wierzchołków kraty, nie ma samoprzecięć i nie przechodzi przez żaden zewnętrzny wierzchołek kraty. Niech A oznacza liczbę wierzchołków kraty, przez które łamana przechodzi „na wprost", B liczbę kwadratów, których dokładnie dwa naprzeciwległe boki należą do łamanej, a C liczbę kwadratów, których żaden bok nie należy do łamanej. Udowodnić, że

$$A = B - C + m + n - 1.$$

21. W pewnym kraju znajduje się n miast. Zarząd Infrastruktury buduje co roku jedną jednokierunkową drogę między dwoma miastami, przy czym droga z A do B może zostać zbudowana tylko, jeśli niemożliwym jest dojechanie z A do B za pomocą istniejących dróg (w szczególności, między dwoma miastami zbudowane mogą zostać najwyżej dwie drogi – po jednej w każdą stronę). Wyznaczyć największą możliwą liczbę dróg, które mogą zostać w ten sposób zbudowane.

22. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, że dla dowolnej funkcji $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ przyjmującej jako wartości wszystkie liczby całkowite funkcja $f+g$ również przyjmuje jako wartości wszystkie liczby całkowite.

23. Niech F_n będzie ciągiem Fibonacciego: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Dla $n > 2$, niech R_n będzie resztą z dzielenia liczby $\prod_{k=1}^{F_n - 1} k^k$ przez F_n. Wykazać, że R_n także jest liczbą Fibonacciego.

24. Niech ABC będzie trójkątem różnobocznym. Punkty O i H są jego odpowiednio środkiem okręgu opisanego i ortocentrum. Punkt P leży wewnątrz trójkąta AHO spełniając $\sphericalangle AHP = \sphericalangle POA$. Niech M będzie środkiem odcinka OP. Proste BM i CM przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie odpowiednio w punktach X i Y. Wykazać, że prosta XY przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie APO.

25. Dowieść, że dla wszystkich liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ z przedziału $[-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \geqslant \left| \prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i \right|.$$

26. Punkty D i E są środkami łuków AB i BC okręgu opisanego na trójkącie ABC niezawierających pozostałych wierzchołków. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktów A i C odpowiednio na proste BD i BE. Dwusieczna kąta ABC przecina odcinek AC w punkcie F. Wykazać, że prosta PQ połowi odcinek BF.

27. Niech G będzie grafem nieskierowanym bez trójkątów o n wierzchołkach. Wykazać, że wierzchołki grafu G można tak pomalować za pomocą co najwyżej $2\sqrt{n}$ kolorów, aby żadne dwa wierzchołki tego samego koloru nie sąsiadowały ze sobą.

28. Nieskończony podzbiór dodatnich liczb całkowitych S nazwiemy *czadowym*, jeżeli dla dowolnych parami różnych $a, b, c \in S$, wszystkie dodatnie dzielniki liczby $\frac{a^c - b^c}{a - b}$ również należą do S. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n > 1$ istnieje zbiór czadowy S, dla którego $n \notin S$.

29. W trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $AB < AC$, punkty D, E, F są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z A, B, C. Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie AEF. Niech ω_1 i ω_2

będą okręgami przechodzącymi przez D i stycznymi do ω odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że ω_1 i ω_2 przecinają się na prostej BC w punkcie $P \neq D$.

30. *Punktem kratowym* nazwiemy punkt na płaszczyźnie o obu współrzędnych całkowitych. Dany jest skończony zbiór S punktów kratowych. Wykazać, że można wykonać jedynie skończenie wiele następujących operacji: dla czterech różnych punktów kratowych A, B, C, D, przy czym punkty A, B należą do S, punkty C, D nie należą do S, $AB > CD$ oraz $ACBD$ jest równoległobokiem, punkty A, B usuwamy z S, zaś punkty C, D dodajemy do S.

31. Niech S będzie zbiorem dodatnich liczb całkowitych, które można przedstawić w postaci a^2+3b^2+1 dla pewnych liczb całkowitych a, b. Wykazać, że jeśli liczba parzysta n należy do zbioru S, to dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych k liczba n^k także należy do zbioru S.

32. Udowodnić, że dla dowolnych $x, y, z > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{2x^4 + x^2y^2}{(y^2 + z^2 + xz)^2} + \frac{2y^4 + y^2z^2}{(z^2 + x^2 + yx)^2} + \frac{2z^4 + z^2x^2}{(x^2 + y^2 + zy)^2} \geqslant 1.$$

Zawody drużynowe

1. Dana jest niezerowa funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz liczba dodatnia b, przy czym spełniona jest równość $f(x+b) = -f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Rozstrzygnąć, czy funkcja f musi mieć okres podstawowy (czyli najmniejszy z dodatnich okresów).

2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1} + \frac{1}{b+\frac{1}{c}+1} + \frac{1}{c+\frac{1}{a}+1} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1}.$$

3. W turnieju badmintona każdy zawodnik rozegrał z każdym dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Każdy zawodnik wygrał co najmniej jeden mecz. Okazało się, że nie istnieje taka czwórka zawodników A, B, C, D, że A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z A, a D wygrał z A, B i C. Wykazać, że nie istnieje żadna taka czwórka zawodników X, Y, Z, T, że X wygrał z Y, Y wygrał z Z, Z wygrał z X, a T przegrał z X, Y i Z.

4. Niech n, k, t będą dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym $n > k \geqslant 2$. Zdefiniujmy zbiór $S = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \mid 1 \leqslant x_1 < \ldots < x_k \leqslant n\}$. Załóżmy, że istnieje taka funkcja $f : S \to \{1, 2, \ldots, t\}$, że dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leqslant x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} \leqslant n$ zachodzi $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq f(x_2, x_3, \ldots, x_{k+1})$. Wykazać, że

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^t}}}}}}_{k-1 \text{ dwójek}} \geqslant n$$

5. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu o środku I, przy czym punkt I nie leży na prostej AC. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AI i CI, zaś punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AI i CI. Wykazać, że proste KN i LM przecinają się na prostej BD.

6. W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a punkt H jest ortocentrum. Punkt P jest odbiciem A względem prostej OH. Załóżmy, że punkty P i A leżą po różnych stronach prostej BC. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $BE = PC$, $CF = PB$. Niech K będzie punktem przecięcia AP i OH. Udowodnić, że $\sphericalangle EKF = 90^\circ$.

7. Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite k, dla których istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz $n > 1$, że liczba $a^n + 1$ jest iloczynem k najmniejszych nieparzystych liczb pierwszych.

8. Dodatnią liczbę całkowitą t nazwiemy *dobrą*, jeśli $t = x^3 + y^2$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x, y. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 3$ istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych m, że zbiór $\{m+1, m+2, \ldots, m+n^2\}$ zawiera dokładnie $n+1$ liczb dobrych.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, że $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$ oraz

$$a + b + c + d + abc + bcd + cda + dab = 0.$$

Wykazać, że

$$|2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd| > |a + b + c + d|.$$

2. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definiujemy następująco: niech $x_1 > 1$ będzie liczbą wymierną oraz niech $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\lfloor x_n \rfloor}$. Wykazać, że ten ciąg zawiera liczbę całkowitą.

3. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia $n > 1$ o współczynnikach rzeczywistych. Równanie $P(P(P(x))) = P(x)$ ma n^3 różnych pierwiastków rzeczywistych. Udowodnić, że te pierwiastki mogą być podzielone na dwa zbiory o równej średniej arytmetycznej.

4. Na tablicy zostało napisanych skończenie wiele liczb całkowitych większych niż 1. Co minutę na tablicę dopisywana jest najmniejsza liczba całkowita większa od każdej liczby na tablicy i niepodzielna przez żadną z nich. Wykazać, że od pewnego momentu na tablicy będą dopisywane tylko liczby pierwsze.

5. Na płaszczyźnie danych jest n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Wykazać, że wśród części, na które rozcinają one płaszczyznę, jest co najmniej $n - 2$ trójkątów.

6. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Wokół ogniska na okręgu stoi $3n$ groźnych słowiańskich wojów. Na początku każdy woj groźnie patrzy na innego. W pojedynczym ruchu jeden woj zaczyna obracać swój wzrok zgodnie z ruchem wskazówek zegara dopóki nie zobaczy innego woja. *Groźnym trójkątem* nazywamy układ w którym woj A patrzy na woja B, woj B na woja C oraz woj C na woja A. Jaka jest najmniejsza taka liczba N, że niezależnie od początkowego ustawienia można uzyskać n groźnych trójkątów w co najwyżej N ruchach?

7. Prosta styczna do okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC przecina proste AB, BC i CA odpowiednio w punktach C', A' i B'. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Niech D, E, F to takie punkty, różne od H, odpowiednio na prostych $A'H, B'H, C'H$, że $AH = AD, BH = BE$ oraz $CH = CF$. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach ABC i DEF są styczne.

8. Wysokości czworościanu $ABCD$ przecinają się w punkcie H leżącym wewnątrz czworościanu. Punkt D' jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka D, zaś punkt P jest obrazem symetrycznym punktu D' względem H. Dowieść, że jeśli $P \neq D$, to rzuty prostokątne punktu D' na proste AD, BD, CD oraz AP, BP i CP leżą na jednej płaszczyźnie.

9. Okrąg wpisany w trójkąt ABC o środku w punkcie I jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Niech P będzie rzutem punktu D na prostą EF. Półproste AP oraz IP przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach G i Q. Niech M będzie środkiem odcinka BC. Wykazać, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt GQM.

10. Wykazać, że liczba $n^3 - n - 3$ nie jest kwadratem liczby całkowitej dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n.

11. Udowodnić, że jeśli dla pewnych liczb całkowitych dodatnich a, b liczby $ab + 1$ oraz $ab + a + 1$ są kwadratami pewnych liczb całkowitych, to $8(2b + 1) \mid a$.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Dany jest wielościan wypukły P. W każdy jego wierzchołek wpisano liczbę nieujemną tak, że suma wszystkich wpisanych liczb wynosi 1. Następnie na każdej krawędzi P napisano liczbę będącą iloczynem liczb wpisanych w wierzchołkach będących końcami tej krawędzi. Udowodnić, że suma liczb napisanych na krawędziach jest nie większa niż $0,375$.

2. Dany jest skończony zbiór dodatnich liczb całkowitych S. Udowodnić, że istnieje liczba N o następującej własności. Dla dowolnych (niekoniecznie różnych) liczb $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell \in S$, jeżeli $k, \ell > N$ oraz

$$\prod_{i=1}^{k} a_i = \prod_{i=1}^{\ell} b_i,$$

to istnieją niepuste podzbiory właściwe $A \subset \{1, \ldots, k\}$ i $B \subset \{1, \ldots, \ell\}$, dla których

$$\prod_{i \in A} a_i = \prod_{i \in B} b_i.$$

3. W przedszkolu jest $4n$ dzieci podzielonych na n czteroosobowych grupek przyjaciół. Pani kazała wszystkim dzieciom złapać się za ręce tworząc zbiór kółek. Okazało się, że każde kółko jest złożone z parzystej liczby dzieci. Udowodnić, że każdemu dziecku da się przyporządkować liczbę od 1 do 4 w taki sposób, że żadna para dzieci z jednej grupki ani para, która trzyma się za ręce nie dostała tego samego numeru.

4. Na płaszczyźnie danych jest n niebieskich i n czerwonych punktów. Żadne trzy z tych $2n$ punktów nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że istnieje takie parowanie punktów, w którym w każdej parze jest jeden czerwony i jeden niebieski punkt i jeżeli dla każdej pary narysujemy koło, którego owa para jest średnicą, to wszystkie tak narysowane koła będą miały niepuste przecięcie.

5. W przestrzeni trójwymiarowej danych jest n punktów $A_1, \ldots, A_n$ i n wektorów $v_1, \ldots, v_n$. Udowodnić, że istnieje taka permutacja σ zbioru $\{1, \ldots, n\}$, że dla każdych $1 \leqslant i, j \leqslant n$ odległość między punktami $A_i + v_{\sigma(i)}$ oraz $A_j + v_{\sigma(j)}$ jest nie mniejsza niż odległość między punktami A_i oraz A_j.

6. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $f(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla których dla każdej nieparzystej liczby pierwszej p zachodzi podzielność $f(p) \mid 2^p - 2$.

7. Niech $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Wykazać, że istnieje taka bijekcja $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, że dla każdych liczb $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n).$$

8. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, niech $\sigma(n)$ oznacza sumę dodatnich dzielników n. Niech a i b będą takimi dwiema dodatnimi liczbami całkowitymi, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi $\sigma(a^n) \mid \sigma(b^n)$. Udowodnić, że jeśli p jest liczbą pierwszą i $p^k \mid a$ oraz $p^{k+1} \nmid a$, to istnieje taka liczba pierwsza q, że $q^k \mid b$ oraz $q^{k+1} \nmid b$.

9. W trójkącie ABC odcinki BE i CF są dwusiecznymi i przecinają się w punkcie I. Punkt $N \neq A$ leży na okręgu opisanym na trójkącie AEF, przy czym $\sphericalangle IAN = 90^\circ$. Prosta NI przecina okrąg opisany na AEF po raz drugi w punkcie $L \neq I$. Udowodnić, że środek okręgu opisanego na trójkącie AIL leży na prostej BC.

10. Niech AA_1, BB_1, CC_1 będą wysokościami trójkąta ostrokątnego różnobocznego ABC. Załóżmy, że A_2, B_2, C_2 są punktami styczności odpowiednio z bokami BC, CA, AB odpowiednich okręgów dopisanych. Wiadomo, że prosta B_1C_1 jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wykazać, że punkt A_1 leży na okręgu opisanym na trójkącie $A_2B_2C_2$.

11. Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o wierzchołku S, w który można wpisać sferę s. Półproste CB i DA przecinają się w punkcie P, zaś półproste AB i DC przecinają się w punkcie Q. Sfera s jest styczna do ścian ABS i BCS odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że jeśli proste PK i QL leżą na płaszczyźnie, to punkt styczności sfery s z podstawą leży na odcinku BD.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Dany jest ciąg niezerowych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ oraz nieujemna liczba całkowita d, dla której $\sum_{k=1}^{n} k^l a_k = 0$ dla każdego $l = 0, 1, \ldots, d$. Udowodnić, że ciąg $a_1, \ldots, a_n$ zmienia znak przynajmniej $d+1$ razy.

Rozwiązanie:

Niech dany ciąg zmienia znak dokładnie m razy. Załóżmy nie wprost, że $m \leqslant d$. Niech $1 \leqslant t_1 < \cdots < t_m < N$ będą takimi liczbami całkowitymi, że dla każdego $i = 1, \ldots, m$ zachodzi $a_{t_i} a_{t_i+1} < 0$. Definiujemy wielomian

$$P(x) = \prod_{i=1}^{m} \left(x - t_i - \frac{1}{2} \right).$$

Wszystkimi pierwiastkami $P(x)$ są liczby $t_1 + \frac{1}{2}, \ldots, t_m + \frac{1}{2}$. Zauważmy, że dla każdego $k = 1, \ldots, n-1$ zachodzi

$$P(k)P(k+1) < 0 \iff a_k a_{k+1} < 0.$$

Istotnie, dla dowolnego k na przedziale $(k, k+1)$ wielomian $P(x)$ ma co najwyżej jeden (licząc z krotnościami) pierwiastek. Zatem $P(k)P(k+1) < 0$ jest równoważne temu, że $P(x)$ ma na przedziale $(k, k+1)$ dokładnie jeden pierwiastek, co z kolei jest równoważne temu, że k jest postaci t_i dla pewnego i, a to zaś zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k a_{k+1} < 0$.

Zatem dla $k = 1, \ldots, n$ liczba $P(k)a_k$ ma stały znak, stąd

$$\sum_{k=1}^{n} P(k) a_k \neq 0.$$

Z drugiej strony, jeśli zapiszemy $P(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$ dla pewnych liczb rzeczywistych $b_0, b_1, \ldots, b_m$, to

$$\sum_{k=1}^{n} P(k) a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=0}^{m} b_l k^l = \sum_{l=0}^{m} b_l \sum_{k=1}^{n} k^l a_k = 0.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

2. W pewnym kraju jest n miast. Każde dwa miasta są połączone dokładnie jedną jednokierunkową drogą. *Ścieżką* z miasta X do miasta Y nazwiemy ciąg dróg, którym można przejść z X do Y bez wracania do już odwiedzonego miasta. Zbiór ścieżek nazwiemy *sprytnym* jeżeli żadna droga nie należy do dwóch lub więcej ścieżek z tego zbioru. Niech A i B będą dwoma różnymi miastami. Niech N_{AB} oznacza największą liczbę elementów sprytnego zbioru ścieżek z A do B. Niech N_{BA} oznacza największą liczbę elementów sprytnego zbioru ścieżek z B do A. Wykazać, że $N_{AB} = N_{BA}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba dróg wychodzących z A jest równa liczbie dróg wychodzących z B.

Rozwiązanie:

Oznaczamy $X \leftarrow Y$ (lub $Y \rightarrow X$), jeżeli droga pomiędzy X oraz Y prowadzi z X do Y.

Powiemy, że ścieżka jest *krótka*, jeżeli składa się z co najwyżej dwóch dróg.

Podzielmy miasta różne od A i B na cztery grupy $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ według następujących reguł. Dla każdego miasta C, niech

$$\begin{array}{lllllll} C \in \mathcal{I} & \iff & A \rightarrow C \leftarrow B & \qquad & C \in \mathcal{O} & \iff & A \leftarrow C \rightarrow B \\ C \in \mathcal{A} & \iff & A \rightarrow C \rightarrow B & \qquad & C \in \mathcal{B} & \iff & A \leftarrow C \leftarrow B. \end{array}$$

Lemat. *Niech $\mathcal{P}$ będzie sprytnym zbiorem ścieżek z A do B o p elementach. Wtedy istnieje sprytny zbiór ścieżek z A do B o co najmniej p elementach, który zawiera wszystkie krótkie ścieżki z A do B.*

Dowód. W celu uzyskania odpowiedniego zbioru modyfikujemy $\mathcal{P}$ w sposób opisany poniżej.

Jeżeli $A \to B$ i ścieżka składająca się z tej jednej drogi nie należy do $\mathcal{P}$, dodajemy ją.

Rozważmy dowolne miasto $C \in \mathcal{A}$, dla którego ścieżka $A \to C \to B$ nie należy do $\mathcal{P}$. Jeżeli $\mathcal{P}$ zawiera co najwyżej jedną ścieżkę zawierającą jedną z dróg $A \to C$ lub $C \to B$, usuwamy tę ścieżkę i dodajemy $A \to C \to B$. W przeciwnym przypadku, $\mathcal{P}$ zawiera dwie ścieżki postaci $A \to C \dashrightarrow B$ i $A \dashrightarrow C \to B$, gdzie $C \dashrightarrow B$ oraz $A \dashrightarrow C$ są pewnymi ścieżkami. W tym przypadku, zastępujemy je ścieżkami $A \to C \to B$ oraz $A \dashrightarrow C \dashrightarrow B$ (w tej drugiej ewentualnie usuwając powstałe po połączeniu cykle).

Po dowolnej wyżej opisanej operacji liczba ścieżek w $\mathcal{P}$ nie maleje i zbiór pozostaje sprytny. Stosując takie operacje do wszystkich miast $C \in \mathcal{A}$ otrzymamy szukany zbiór. $\square$

Wracamy do rozwiązania zadania. Bez straty ogólności załóżmy, że $A \to B$ oraz niech a i b oznaczają odpowiednio liczbę dróg wychodzących z A i B. Niech $\mathcal{P}$ będzie sprytnym zbiorem ścieżek z A do B mającym N_{AB} elementów. Przekształcimy go w sprytny zbiór $\mathcal{Q}$ ścieżek z B do A mający co najmniej $N_{AB} + (b - a)$ elementów. Wtedy otrzymamy

$$N_{BA} \geqslant N_{AB} + (b - a) \text{ i analogicznie } N_{AB} \geqslant N_{BA} + (a - b).$$

Wtedy $N_{BA} - N_{AB} = b - a$, z czego bezpośrednio wyniknie żądana w treści zadania równoważność.

Stosujemy lemat otrzymując pewien sprytny zbiór $\mathcal{P}'$ ścieżek z A do B o co najmniej N_{AB} elementach zawierający wszystkich $|\mathcal{A}| + 1$ krótkich ścieżek z A do B. Zauważmy, że wszystkie ścieżki z $\mathcal{P}'$ nie zawierają dróg należących do krótkich ścieżek z B do A. Każda niekrótka ścieżka w $\mathcal{P}'$ jest postaci $A \to C \dashrightarrow D \to B$, gdzie $C \dashrightarrow D$ jest ścieżką z $C \in \mathcal{I}$ do $D \in \mathcal{O}$. Dla każdej takiej ścieżki, dokładamy do $\mathcal{Q}$ ścieżkę $B \to C \dashrightarrow D \to A$. Dodajemy do $\mathcal{Q}$ również wszystkie krótkie ścieżki z B do A. Widzimy, że $\mathcal{Q}$ jest sprytny.

Wszystkie drogi wychodzące z A kończą się w miastach z $\mathcal{I} \cup \mathcal{A} \cup \{B\}$, zaś wszystkie drogi wychodzące z B kończą się w miastach z $\mathcal{I} \cup \mathcal{A}$. Stąd

$$a = |\mathcal{I}| + |\mathcal{A}| + 1, \;\; b = |\mathcal{I}| + |\mathcal{B}|,$$

więc

$$a - b = |\mathcal{A}| - |\mathcal{B}| + 1.$$

Z drugiej strony, ponieważ jest $|\mathcal{A}| + 1$ krótkich ścieżek z A do B oraz $|\mathcal{B}|$ krótkich ścieżek z B do A, to

$$|\mathcal{Q}| \geqslant |\mathcal{P}'| - (|\mathcal{A}| + 1) + |\mathcal{B}| \geqslant N_{AB} + (b - a),$$

co kończy dowód zadania.

3. Niech $\mathcal{P} = A_1A_2A_3 \ldots A_{180}$ będzie 180–kątem foremnym. Niech X będzie punktem we wnętrzu $\mathcal{P}$. Udowodnić, że istnieją takie indeksy $i \neq j$, że

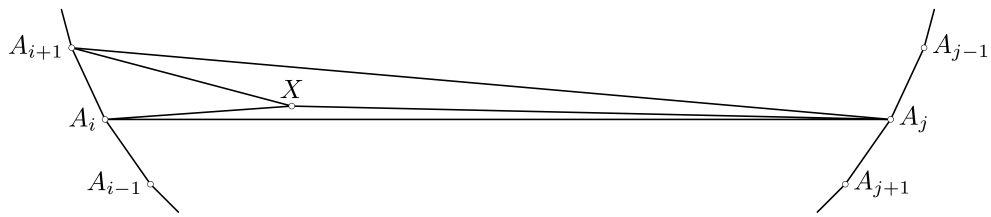
$$179^\circ < \sphericalangle A_iXA_j \leqslant 180^\circ.$$

Rozwiązanie:

Niech A_iA_j będzie najbliższą X przekątną $\mathcal{P}$ (jeśli jest kilka takich przekątnych, to wybieramy tę najkrótszą). Bez straty ogólności załóżmy, że X leży wewnątrz wielokąta $A_iA_{i+1}A_{i+2} \ldots A_j$. Zauważmy, że X leży wewnątrz trójkąta $A_iA_{i+1}A_j$, gdyż inaczej przekątna $A_{i+1}A_j$ byłaby bliżej X niż A_iA_j. W takim razie

$$2\sphericalangle XA_jA_i \leqslant \sphericalangle XA_jA_i + \sphericalangle XA_jA_{i+1} = \sphericalangle A_iA_jA_{i+1} = 1^\circ.$$

Analogicznie
$$2\sphericalangle XA_iA_j \leqslant 1^\circ.$$
Zatem
$$\sphericalangle A_iXA_j = 180^\circ - \sphericalangle XA_iA_j - \sphericalangle XA_jA_i \geqslant 179^\circ.$$
Jeśli powyższa nierówność jest ostra, to zadanie jest rozwiązane. W przeciwnym razie we wszystkich powyższych nierównościach zachodzą równości — w szczególności X leży na dwusiecznej kąta $A_{i+1}A_jA_i$. Zatem A_jA_{i+1} też jest przekątną najbliższą X. Z początkowego wyboru A_iA_j wynika, że $A_iA_j \leqslant A_{i+1}A_j$, a ponieważ w 180-kącie foremnym żaden wierzchołek nie leży na symetralnej żadnego boku, więc mamy nierówność ostrą: $A_iA_j < A_{i+1}A_j$. Wynika stąd, że $\sphericalangle A_jXA_{i+1} > \sphericalangle A_jXA_i = 179^\circ$ i mamy tezę.



4. Dla dodatniej liczby całkowitej n definiujemy
$$q_n = (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)/n.$$
Wykazać, że dla $n \geqslant 2$ liczba $q_1q_2\ldots q_n$ nie jest całkowita.

Rozwiązanie:

Korzystając ze znanego wzoru na sumę kolejnych kwadratów $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ otrzymujemy, że
$$q_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$
W takim razie
$$q_1q_2\ldots q_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{(i+1)(2i+1)}{6} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(2i+2)(2i+1)}{12} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+1}\cdot 3^n}.$$
Załóżmy, że powyższa liczba jest całkowita. Niech k będzie największą liczbą całkowitą, dla której $2^k \leqslant (2n+2)$. Wtedy wykładnik, z jakim 2 dzieli $(2n+2)!$ jest równy
$$\left\lfloor \frac{2n+2}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2n+2}{2^k} \right\rfloor \leqslant \frac{2n+2}{2^1} + \frac{2n+2}{2^2} + \cdots + \frac{2n+2}{2^k} = (2n+2)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right),$$
stąd
$$2n+1 \leqslant (2n+2)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right),$$
czyli
$$1 - \frac{1}{2n+2} \leqslant 1 - \frac{1}{2^k},$$
więc $2n+2 \leqslant 2^k$, zatem $2n+2 = 2^k \geqslant 4$.

Niech l będzie największą liczbą całkowitą, dla której $3^l \leqslant 2^k$. Wtedy wykładnik, z jakim 3 dzieli $(2^k)!$ jest równy
$$\left\lfloor \frac{2^k}{3^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^k}{3^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^k}{3^l} \right\rfloor \leqslant \frac{2^k-1}{3^1} + \frac{2^k-1}{3^2} + \cdots + \frac{2^k-1}{3^l} = \frac{2^k-1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^l}\right),$$

stąd

$$2^{k-1}-1 \leqslant \frac{2^k-1}{2}\left(1-\frac{1}{3^l}\right),$$

czyli

$$1-\frac{1}{2^k-1} \leqslant 1-\frac{1}{3^l},$$

więc $2n+1=2^k-1 \leqslant 3^l$, zatem $2n+1=3^l \geqslant 3$.

Wreszcie dostajemy równość $3^l+1=2^k$. Prawa strona jest podzielna przez 4, więc l musi być nieparzyste. Jednak wtedy $8 \nmid 3^l+1$, skąd $k=2$ i $l=1$, zatem $n=1$, co kończy dowód.

5. Dana jest nieujemna liczba całkowita n. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\left\lfloor\frac{a_1}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{a_2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{a_3}{3}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{a_{2^n}}{2^n}\right\rfloor,$$

gdzie $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{2^n})$ jest dowolną permutacją zbioru $\{1,2,3,\ldots,2^n\}$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $n+1$.

Podamy przykład, dla którego powyższa wartość jest osiągana, a później udowodnimy, że mniejszej wartości nie da się osiągnąć.

Rozważmy permutację

$$(a_1)=1,\ (a_2,a_3)=(3,2),\ (a_4,a_5,a_6,a_7)=(7,4,5,6),\ \ldots$$
$$(a_{2^k},\ldots,a_{2^{k+1}-1})=(2^{k+1}-1,2^k,2^k+1,\ldots,2^{k+1}-2),\ \ldots,\ (a_{2^n})=(2^n).$$

Składa się ona z $n+1$ cykli. Dla każdego cyklu $(a_p,\ldots,a_q)=(q,p,p+1,\ldots,q-1)$ zachodzi $q<2p$, zatem

$$\sum_{i=p}^{q}\left\lfloor\frac{a_i}{i}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{q}{p}\right\rfloor+\sum_{i=p+1}^{q}\left\lfloor\frac{i-1}{i}\right\rfloor=1.$$

Suma wartości powyższych wyrażeń po wszystkich cyklach wynosi $n+1$.

Udowodnimy, że wartość wyrażenia z treści zadania nie może być mniejsza niż $n+1$, wykazując poniższy, ogólniejszy lemat.

Lemat. *Niech $b_1,\ldots,b_{2^n}$ będą różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wtedy*

$$\sum_{i=1}^{2^n}\left\lfloor\frac{b_i}{i}\right\rfloor \geqslant n+1.$$

Dowód. Udowodnimy lemat przez indukcję po n. Dla $n=0$ oczywiście $\left\lfloor\frac{b_1}{1}\right\rfloor \geqslant 1$.

Dalej załóżmy, że teza jest prawdziwa dla pewnego n i rozważmy $n+1$. Jeżeli istnieje $2^n<j\leqslant 2^{n+1}$, dla którego $b_j \geqslant j$, to możemy wprost skorzystać z założenia indukcyjnego

$$\sum_{i=1}^{2^{n+1}}\left\lfloor\frac{b_i}{i}\right\rfloor \geqslant \left(\sum_{i=1}^{2^n}\left\lfloor\frac{b_i}{i}\right\rfloor\right)+\left\lfloor\frac{b_j}{j}\right\rfloor \geqslant (n+1)+1=n+2.$$

Natomiast jeżeli takiego indeksu nie ma, to dla każdego $2^n<j\leqslant 2^{n+1}$ zachodzi $b_j<j$. W szczególności oznacza to, że musi istnieć $1\leqslant m\leqslant 2^n$, dla którego $b_m \geqslant 2^{n+1}$ oraz $b_{2^n+1}\leqslant 2^n$. Rozważmy 2^n liczb

$$c_1=b_1,c_2=b_2,\ldots,c_{m-1}=b_{m-1},c_m=b_{2^n+1},c_{m+1}=b_{m+1},\ldots,c_{2^n}=b_{2^n}.$$

Zauważmy, że
$$\left\lfloor \frac{b_m}{m} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{2^{n+1}}{m} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{2^n + 2^n}{m} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{m + b_{2^n+1}}{m} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{c_m}{m} \right\rfloor .$$
□

Korzystając z założenia indukcyjnego dla liczb $c_1, \ldots, c_{2^n}$ otrzymujemy
$$\sum_{i=1}^{2^{n+1}} \left\lfloor \frac{b_i}{i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{2^n} \left\lfloor \frac{b_i}{i} \right\rfloor \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{2^n} \left\lfloor \frac{c_i}{i} \right\rfloor \geqslant 1 + (n+1) = n+2,$$
co kończy dowód lematu.

6. Dane są dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ o tej własności, że dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots, 99, 101$ istnieje taki zbiór indeksów $\mathcal{I}$, że $n = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i$, ale nie istnieje taki zbiór indeksów $\mathcal{J}$, że $100 = \sum_{i \in \mathcal{J}} a_i$. Rozstrzygnąć, czy musi istnieć taki zbiór indeksów $\mathcal{K}$, że $200 = \sum_{i \in \mathcal{K}} a_i$.

Rozwiązanie:

Lemat. *Wśród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jest 101.*

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Niech
$$101 = a_{i_1} + \cdots + a_{i_l},$$
przy czym $l \geqslant 2$ i $a_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_l}$. Jeśli $a_{i_1} = 1$, to wtedy
$$a_{i_2} + a_{i_3} + \cdots + a_{i_l} = 100,$$
co jest sprzeczne z treścią zadania. Jeśli natomiast $a_{i_1} > 1$, to ponieważ $a_{i_1} \leqslant 99$, możemy zapisać
$$a_{i_1} - 1 = a_{j_1} + \cdots + a_{j_m}$$
dla pewnych $j_1, \ldots, j_m$. Wtedy
$$a_{j_1} + \cdots + a_{j_m} + a_{i_2} + a_{i_3} + \cdots + a_{i_l} = a_{i_1} - 1 + a_{i_2} + a_{i_3} + \cdots + a_{i_l} = 100,$$
ponownie otrzymujemy sprzeczność. □

Korzystając z lematu otrzymujemy $a_p = 101$ dla pewnego $1 \leqslant p \leqslant k$. Wiedząc, że dla pewnego $\mathcal{I}$ zachodzi $99 = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i$ otrzymujemy, że $200 = \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \{p\}} a_i$, co kończy dowód.

7. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg Ω. Niech prosta styczna do Ω w punkcie D przecina półproste BA i BC odpowiednio w punktach E i F. Punkt T leży wewnątrz trójkąta ABC, spełniając $TE \parallel CD$ oraz $TF \parallel AD$. Niech $K \neq D$ będzie takim punktem na odcinku DF, że $TD = TK$. Udowodnić, że proste AC, BK i DT przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech $P \neq B$ będzie punktem przecięcia prostej BD z okręgiem opisanym na trójkącie BEF. Zauważmy, że
$$\sphericalangle TFE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle DBA = \sphericalangle PBE = \sphericalangle PFE.$$
Analogicznie
$$\sphericalangle TEF = \sphericalangle CDF = \sphericalangle DBC = \sphericalangle PBF = \sphericalangle PEF,$$
stąd P jest symetryczny do T względem EF i czworokąt $PDTK$ jest rombem.

Niech X będzie punktem przecięcia AC i DT, zaś niech Y będzie punktem przecięcia BK i DT. Wykażemy, że $DX = DY$ i w ten sposób zakończymy rozwiązanie zadania.

Zauważmy, że $\triangle DCX \sim \triangle PBE$. Wynika to z równości

$$\sphericalangle DCX = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA = \sphericalangle PBE$$

oraz

$$\sphericalangle CDX = \sphericalangle DTE = \sphericalangle DPE.$$

W takim razie

$$DX = \frac{CD \cdot PE}{PB}. \tag{1}$$

Ponieważ $TK \parallel BD$ oraz $DY \parallel PK$, to

$$\frac{PD}{DY} = \frac{TD}{DY} = \frac{KB}{BY} = \frac{PB}{BD}, \quad \text{więc} \quad DY = \frac{PD \cdot BD}{PB}. \tag{2}$$

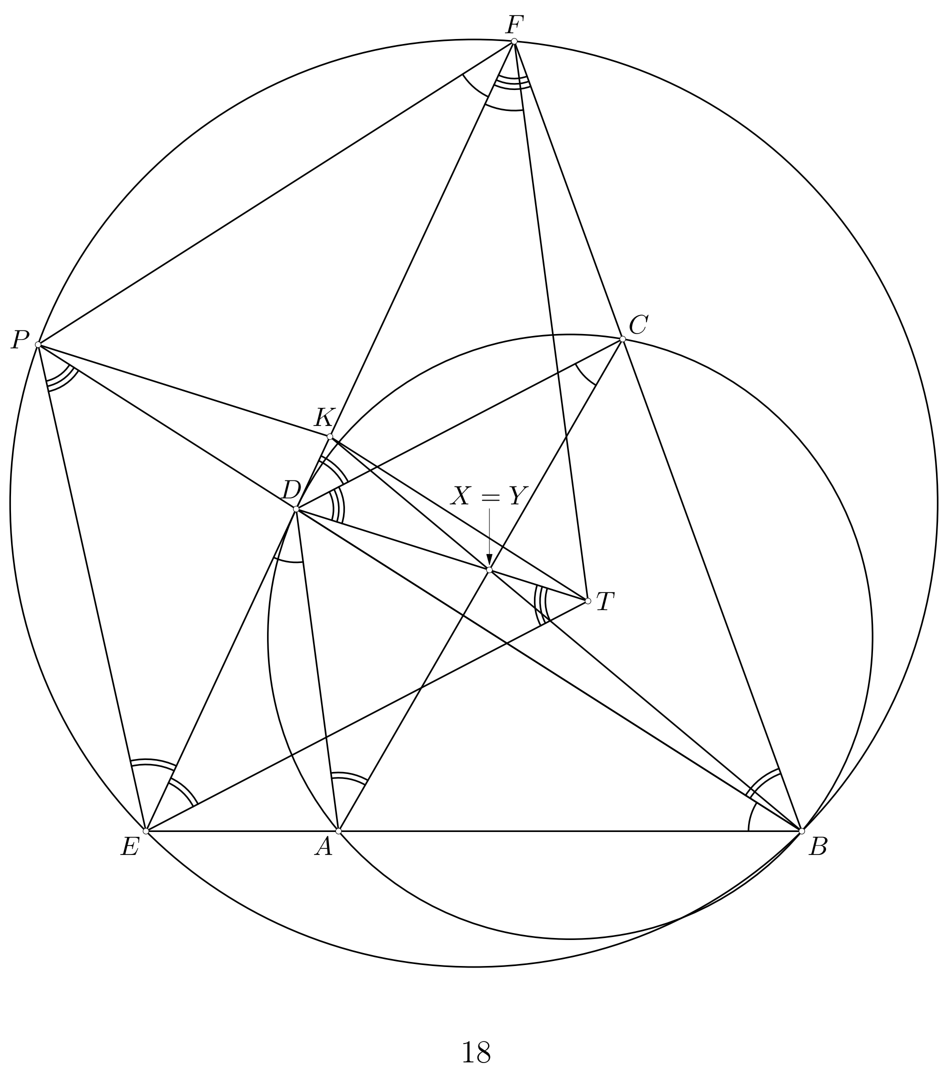
Pozostaje zauważyć, że

$$\sphericalangle CFD = \sphericalangle BFE = \sphericalangle BPE = \sphericalangle DPE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CDF = \sphericalangle CBD = \sphericalangle PED,$$

stąd $\triangle PED \sim \triangle FDC$, zatem

$$CD \cdot PE = DE \cdot FD = PD \cdot BD.$$

W połączeniu z (1) i (2) dostajemy $DX = DY$, co kończy dowód zadania.



8. Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności. Istnieje taka permutacja $d_1, d_2, \ldots, d_k$ wszystkich dzielników n, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$, liczba $d_1 + \cdots + d_i$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Dla każdego $i = 1, \ldots, k$, niech

$$s_i^2 = d_1 + \cdots + d_i.$$

i dodatkowo niech $s_0 = 0$. Oczywiście $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k$, więc

$$s_i \geqslant i \qquad \text{oraz} \qquad d_i = s_i^2 - s_{i-1}^2 = (s_i + s_{i-1})(s_i - s_{i-1}) \geqslant s_i + s_{i-1} \geqslant 2i - 1.$$

Liczba 1 jest wśród $d_1, \ldots, d_k$, jednak ponieważ $d_i \geqslant 2i - 1$, to musi być $d_1 = 1$.

Rozważmy d_2. Zachodzi $d_2 = s_2^2 - 1 = (s_2 + 1)(s_2 - 1)$., więc liczby $s_2 + 1, s_2 - 1$ są dzielnikami n. W szczególności, istnieje taki indeks j, że $d_j = s_2 + 1$. Zauważmy, że

$$s_2 + s_1 = s_2 + 1 = d_j \geqslant s_j + s_{j-1}.$$

Ponieważ $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k$, to musi zachodzić $j = 2$. Zatem $d_2 = s_2 + 1$ i w konsekwencji $s_2 - 1 = 1$, stąd $s_2 = 2$ i $d_2 = 3$.

Możemy powtarzać to rozumowanie.

Lemat. *$d_i = 2i - 1$ oraz $s_i = i$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Dowód. Dowód przez indukcję po i. Lemat został dowiedziony dla $i = 1, 2$. Załóżmy, że dowiedliśmy już $d_1 = 1, d_2 = 3, \ldots, d_i = 2i - 1$ i rozważmy następny dzielnik d_{i+1}

$$d_{i+1} = s_{i+1}^2 - s_i^2 = s_{i+1}^2 - i^2 = (s_{i+1} + i)(s_{i+1} - i).$$

Liczby $s_{i+1} + i, s_{i+1} - i$ są dzielnikami n, więc istnieje taki indeks j, że $d_j = s_{i+1} + i$. Podobnie jak wcześniej, otrzymujemy

$$s_{i+1} + s_i = s_{i+1} + i = d_j \geqslant s_j + s_{j-1},$$

skąd $j \leqslant i + 1$. Z drugiej strony, $d_j = s_{i+1} + i > 2i > d_i > d_{i-1} > \cdots > d_1$, więc $j \leqslant i$ jest niemożliwe. Zatem musi być $j = i + 1$, $d_{i+1} = (s_{i+1} + i)$ i w konsekwencji $s_{i+1} - i = 1$, więc $s_{i+1} = i + 1$ oraz $d_{i+1} = 2i + 1$, co kończy dowód indukcyjny lematu. □

Z lematu wynika, że $(d_1, \ldots, d_k) = (1, 3, \ldots, n - 2, n)$, w szczególności $n = d_k = 2k - 1$, więc n jest nieparzyste. Z podzielności $n - 2 \mid n = (n - 2) + 2$ wynika, że $n - 2 \mid 2$. Stąd $n = 1$ lub $n = 3$. Sprawdzamy, że dla takich n warunek z zadania rzeczywiście zachodzi. Dla $n = 1$ mamy $d_1 = 1 = 1^2$, dla $n = 3$ mamy $d_1 = 1, d_3 = 3$ oraz $s_1 = 1^2$ i $s_2 = 1 + 3 = 2^2$.

9. W każde pole kwadratowej tabeli o wymiarach $n \times n$, gdzie $n \geqslant 4$, została wpisana liczba $+1$ lub -1. Każdemu zbiorowi n pól, zawierającemu po jednym polu z każdego wiersza i z każdej kolumny, przyporządkowujemy iloczyn liczb wpisanych w te pola. Dowieść, że suma uzyskanych iloczynów dzieli się przez 4.

Rozwiązanie:

Sposób I

Każdy ze zbiorów n pól spełniających warunki zadania nazwijmy *dobrym*. Liczba dobrych zbiorów jest równa $n!$ (element z pierwszego wiersza możemy wybrać na n sposobów, z drugiego na $n-1$, z trzeciego na $n-2$ itd.). Niech P_i będzie iloczynem wszystkich liczb w dobrym zbiorze oraz niech k spośród iloczynów P_i będzie równych -1. Liczba z każdego pola występuje w $(n-1)!$ zbiorach, zatem pojawia się w iloczynie $\prod_{i=1}^{n!} P_i$ parzystą liczbę razy. Stąd wniosek, że $\prod_{i=1}^{n!} P_i = 1$, a więc k jest parzysta. W takim razie

$$\sum_{i=1}^{n!} P_i = k \cdot (-1) + (n! - k) \cdot 1 = n! - 2k.$$

Pozostaje zauważyć, że skoro $n \geqslant 4$, to $n!$ dzieli się przez 4.

Sposób II

Udowodnimy mocniejszą tezę: dla dowolnego $n \geqslant 1$ suma wszystkich uzyskanych iloczynów dzieli się przez $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Jest to oczywiste dla $n = 1$ i $n = 2$. Dla większych n rozumujemy indukcyjnie. Załóżmy, że dla dowolnych $1 \leqslant i, j \leqslant n$ w i-ty wiersz i j-tą kolumnę wpisano liczbę a_{ij}. Zauważmy, że suma z zadania jest równa wyrażeniu

$$S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_{1i}a_{2j} + a_{1j}a_{2i})S_{ij},$$

gdzie S_{ij} jest sumą analogicznych iloczynów dla tabeli $(n-2) \times (n-2)$ powstałej z wyjściowej poprzez wykreślenie pierwszych dwóch wierszów oraz i-tej i j-tej kolumny. Z założenia indukcyjnego dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$ liczba S_{ij} dzieli się przez $2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} = 2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$. Ponadto liczba $(a_{1i}a_{2j} + a_{1j}a_{2i})$ jest równa -2, 0 lub 2, czyli jest parzysta. Ostatecznie widzimy, że S dzieli się przez $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ jako suma liczb podzielnych przez $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

10. Wykazać, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Przypuśćmy, że taka funkcja f istnieje. Ustalmy pewne dwie liczby rzeczywiste $x < y$. Udowodnimy, że dla dowolnej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2^n(y - x). \tag{3}$$

Stąd otrzymamy już szukaną sprzeczność, ponieważ lewa strona nierówności 3 ma ustaloną wartość, a prawa może być dowolnie duża.

Dowód nierówności 3 przeprowadzimy indukcyjnie po wartości n. Dla $n = 0$ nierówność wynika wprost z własności funkcji f. Załóżmy, że nierówność ta jest prawdziwa dla pewnej liczby naturalnej n. Niech $r = \frac{y-x}{4}$. Wtedy $y = x + 4r$. Stosując nierówność z treści zadania dla funkcji f i kolejno par $(x, x + 2r)$, $(x + r, x + 3r)$ i $(x + 2r, x + 4r)$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) + f(x+2r)}{2} &\geqslant f(x + r) + 2^n|2r| \\
\frac{f(x+r) + f(x+3r)}{2} &\geqslant f(x + 2r) + 2^n|2r| \\
\frac{f(x+2r) + f(x+4r)}{2} &\geqslant f(x + 3r) + 2^n|2r|
\end{aligned}$$

Po pomnożeniu drugiej z tych nierówności stronami przez 2 i dodaniu do niej nierówności pierwszej i trzeciej otrzymamy

$$\frac{f(x) + f(x+4r)}{2} \geqslant f(x + 2r) + 2^{n+2}|2r|,$$

co po podstawieniu $r = \frac{y-x}{4}$ jest równoważne nierówności

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geqslant f(\frac{x+y}{2}) + 2^{n+1}(y - x).$$

To kończy dowód kroku indukcyjnego i tezy zadania.

Sposób II

Rozumujemy nie wprost. Przypuśćmy, że taka funkcja f istnieje. Podstawmy $x=(n+1)t$, $y=(n-1)t$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, a t dowolną liczbą rzeczywistą. Otrzymujemy

$$\frac{f((n+1)t)+f((n-1)t)}{2} \geqslant f(nt)+|t|,$$

czyli równoważnie

$$f((n+1)t)-f(nt) \geqslant f(nt)-f((n-1)t)+2|t|.$$

W takim razie

$$f((n+1)t)-f(nt) \geqslant f(nt)-f((n-1)t)+2|t| \geqslant f((n-1)t)-f((n-2)t)+4|t| \geqslant \ldots \geqslant f(t)-f(0)+2n|t|.$$

Stąd

$$f((n+1)t)-f(0)=\sum_{i=0}^{n}(f((i+1)t)-f(it)) \geqslant \sum_{i=0}^{n}(f(t)-f(0)+2i|t|)=n(f(t)-f(0))+n(n+1)|t|.$$

Wstawiając $t=\frac{1}{n+1}$ oraz $t=-\frac{1}{n+1}$ otrzymujemy

$$f(1)-f(0) \geqslant n\left(f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f(0)\right)+n$$

oraz

$$f(-1)-f(0) \geqslant n\left(f\left(-\frac{1}{n+1}\right)-f(0)\right)+n.$$

Po dodaniu stronami i skorzystaniu z zadanego warunku dla $x=\frac{1}{n+1}$ i $y=-\frac{1}{n+1}$ dostajemy

$$f(1)+f(-1)-2f(0) \geqslant n\left(f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f\left(-\frac{1}{n+1}\right)-2f(0)\right)+2n \geqslant n\cdot\frac{2}{n+1}+2n>2n.$$

Wybierając n tak duże, że $2n \geqslant f(1)+f(-1)-2f(0)$ otrzymujemy sprzeczność.

11. W trójkącie ostrokątnym ABC prosta przechodząca przez punkt C prostopadła do prostej AC przecina dwusieczną zewnętrzną kąta ABC w punkcie D. Niech H będzie rzutem punktu D na prostą BC. Punkt K leży na odcinku AB, przy czym $KH \parallel AC$. Niech M będzie środkiem odcinka AK. Udowodnić, że $MC=MB+BH$.

Rozwiązanie:

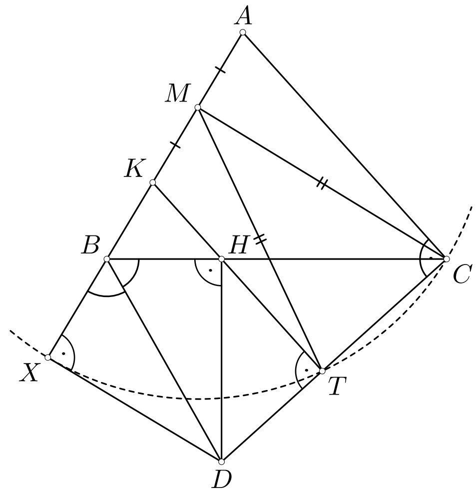
Niech X będzie rzutem punktu D na prostą AB oraz niech T będzie punktem przecięcia prostych KH i CD. Niech Ω to okrąg opisany na trójkącie CTX. Zauważmy, że $\triangle DBH \equiv \triangle DBX$, więc $DH=DX$ oraz $BH=BX$. Również $\triangle DTH \sim \triangle DHC$, ponieważ są to trójkąty prostokątne o wspólnym kącie. Zatem $DT\cdot CD=DH^2$. W połączeniu tych równości otrzymujemy

$$DX^2=DH^2=DT\cdot DC.$$

Oznacza to, że prosta DX jest styczna do okręgu Ω. Zauważmy, że skoro czworokąt $ACTK$ jest trapezem prostokątnym, to symetralna odcinka CT przechodzi przez punkt M. Łącząc to z faktem, że prosta MX jest prostopadła do stycznej do okręgu Ω w punkcie X otrzymujemy, że punkt M jest środkiem okręgu Ω. Pozostaje zauważyć, że

$$MC=MX=MB+BX=MB+BH,$$

co kończy dowód.



12. Wykazać, że istnieje tylko skończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba

$$\left(\frac{n}{1}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{n}{n}+n\right)$$

jest całkowita.

Rozwiązanie:

Warunek z zadania można przepisać jako:

$$n! \mid (n+1)(n+4)(n+9)\cdots(n+n^2).$$

Udowodnimy, że dla $n > 4$ podzielność ta nie może zachodzić. Rozważmy dwa przypadki:

Przypadek 1. $n \equiv 1 \pmod 4$ lub $n \equiv 2 \pmod 4$.

Zauważmy, że dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $4 \nmid n+i^2$, czyli $v_2(n+i^2) \leqslant 1$ (tutaj $v_2(n)$ oznacza największą liczbę $k \in \mathbb{N}$, dla której $2^k \mid n$). Ponadto tylko dla połowy wartości i zachodzi $v_2(n+i^2) = 1$. To oznacza, że $v_2((n+1)(n+4)\ldots(n^2+n)) \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Nietrudno jednak wykazać za pomocą indukcji, że $v_2(n!) > \frac{n}{2}$ dla $n \geqslant 4$. Podzielność nie może więc zachodzić.

Przypadek 2. $n \equiv 0 \pmod 4$ lub $n \equiv 3 \pmod 4$.

Niech $d = 1$ gdy $n \equiv 0 \pmod 4$ oraz $d = 4$ dla $n \equiv 3 \pmod 4$. Wówczas $n - d \equiv 3 \pmod 4$. Liczba $n - d$ ma wobec tego dzielnik pierwszy $p \equiv 3 \pmod 4$. Ponieważ $n \equiv d \pmod p$ jest resztą kwadratową modulo p, liczba $-n$ jest nieresztą. To w szczególności oznacza, że dla dowolnego i zachodzi $n + i^2 \not\equiv 0 \pmod p$. Otrzymujemy stąd, że $p \nmid (n+1)(n+4)(n+9)\cdots(n+n^2)$, a ponadto wiemy, że $p \mid n!$, co kończy rozwiązanie zadania.

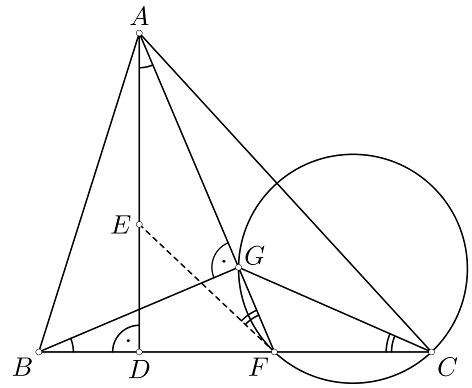
13. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Punkty E i F leżą na odcinkach odpowiednio AD i BC w taki sposób, że $\frac{AE}{DE} = \frac{BF}{CF}$. Niech G będzie rzutem B na AF. Udowodnić, że prosta EF jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie CFG.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\sphericalangle CBG = 90^\circ - \sphericalangle AFD = \sphericalangle EAF$ oraz

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{AD}{AF} = \frac{BF}{BC} \cdot \frac{BG}{BF} = \frac{BG}{BC}.$$

Zatem trójkąty CBG i FAE są podobne na mocy cechy podobieństwa bok-kąt-bok. W szczególności $\sphericalangle GCF = \sphericalangle AFE$, co jest równoważne styczności prostej EF do okręgu opisanego na trójkącie CFG.



14. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że jeśli n jest liczbą naturalną, a $x = \sqrt{n}$ nie jest liczbą naturalną, to różnica

$$\lfloor (x + \lfloor x \rfloor)^p \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor$$

dzieli się przez p.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $s = (\lfloor x \rfloor + x)^p$, $r = (\lfloor x \rfloor - x)^p$. Wówczas

$$\frac{s+r}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\lfloor x \rfloor^{p-k} x^k + \lfloor x \rfloor^{p-k} (-x)^k) = \sum_{j=0}^{[p/2]} \binom{p}{2j} \lfloor x \rfloor^{p-2j} x^{2j}.$$

Ponieważ w ostatniej sumie wszystkie składniki są liczbami całkowitymi, więc $(s+r)/2$ jest liczbą całkowitą. Zauważmy, że współczynniki $\binom{p}{2j}$ są podzielne przez p dla $j \neq 0$. Stąd i z Małego Twierdzenia Fermata dostajemy

$$\frac{s+r}{2} \equiv \lfloor x \rfloor^p \equiv \lfloor x \rfloor \pmod{p},$$

czyli $s + r \equiv 2 \lfloor x \rfloor \pmod{2p}$. Ponieważ $-1 < r < 0$, więc $\lfloor s \rfloor \equiv 2 \lfloor x \rfloor \pmod{2p}$, a to jest teza zadania.

15. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_m$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Dowieść, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite b, c, N, że równość

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n + a_i} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{bn + c} \right\rfloor$$

zachodzi dla wszystkich liczb całkowitych $n > N$.

Rozwiązanie:

Rozważamy dwa przypadki. Jeśli wszystkie liczby $a_1, \ldots, a_m$ są równe, to wystarczy przyjąć $b = m^2$ oraz $c = m^2 a_1$. Wtedy równość z treści zadania zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych n.

Załóżmy teraz, że wśród liczb $a_1, \ldots, a_m$ są co najmniej dwie różne. Udowodnimy, że liczby $b = m^2$ oraz $c = m(a_1 + \ldots + a_m) - 1$ spełniają warunki zadania. W tym celu wystarczy wykazać, że

$$\left\lfloor \sqrt{bn + c} \right\rfloor \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n + a_i} < \left\lfloor \sqrt{bn + c} \right\rfloor + 1.$$

Zacznijmy od oszacowania z góry wyrażenia $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{n + a_i}$. Z nierówności Jensena zastosowanej dla funkcji wklęsłej $f(x) = \sqrt{x}$, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{n+a_i} < m\sqrt{n + \frac{a_1 + \ldots + a_m}{m}} = \sqrt{m^2 n + m(a_1 + \ldots + a_m)}$$
$$\leqslant \left\lceil \sqrt{bn+c+1} \right\rceil \leqslant \left\lfloor \sqrt{bn+c} \right\rfloor + 1$$

Pozostaje oszacować wyrażenie $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{n+a_i}$ z dołu. Niech $\lambda = \frac{c}{2(c+1)} < \frac{1}{2}$. Zauważmy, że dla dostatecznie dużych n prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{n+a_i} \geqslant \sqrt{n} + \frac{\lambda a_i}{\sqrt{n}}. \tag{4}$$

Istotnie, po podniesieniu powyższej nierówności stronami do kwadratu i uproszczeniu dostaniemy nierówność

$$1 \geqslant 2\lambda + \frac{\lambda^2 a_i}{n},$$

która zachodzi dla dostatecznie dużych n, ponieważ $2\lambda < 1$. Stosując nierówność 4 do wyrażenia z zadania, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \sqrt{n+a_i} &\geqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\sqrt{n} + \frac{\lambda a_i}{\sqrt{n}} \right) \\
&\geqslant m\sqrt{n} + \frac{\lambda \cdot (a_1 + \cdots + a_m)}{\sqrt{n}} \\
&= m\sqrt{n} + \frac{\lambda \cdot (c+1)}{m\sqrt{n}} \\
&= m\sqrt{n} + \frac{c}{2m\sqrt{n}} > \sqrt{m^2 \cdot n + c} \geqslant \left\lfloor \sqrt{bn+c} \right\rfloor,
\end{aligned}$$

co należało dowieść.

16. Dany jest spójny nieskierowany graf G o n wierzchołkach, z których każdy jest połączony z przynajmniej trzema innymi. Udowodnij, że istnieje jego drzewo rozpinające D, które ma co najmniej $\frac{2}{9}n$ liści.

Uwaga 1. Mówimy, że graf G jest spójny, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u i v istnieje ciąg krawędzi tego grafu prowadzący od u do v.

Uwaga 2. Przez drzewo rozpinające grafu G rozumiemy taki spójny podzbiór D krawędzi grafu G, że każdy wierzchołek grafu G jest końcem co najmniej jednej krawędzi z D oraz nie istnieje cykl składający się z krawędzi D.

Rozwiązanie:

Wskażemy konstrukcję drzewa D. W każdym kroku konstrukcji mamy będziemy mieć jakieś drzewo D_i. Wierzchołki, których wszyscy sąsiedzi należą już do D_i będziemy przypisywać do jednego z trzech zbiorów:

- A_1 - wierzchołki, z których wychodzi dokładnie jedna krawędź należąca do D_i
- A_2 - wierzchołki, z których wychodzą dokładnie dwie krawędzie należące do D_i
- A_3 - wierzchołki, z których wychodzą przynajmniej trzy krawędzie należące do D_i

Zaczynamy od D_0 składającego się z dowolnego wierzchołka wraz z jego sąsiadami. Początkowo zbiór A_2 jest pusty, zbiór A_3 ma jeden element (warto odnotować, że zbiór A_1 może być niepusty). "Rozszerzeniem" wierzchołka $v \in D_i$ nazywamy dodanie do grafu D_i wszystkich sąsiadów v, którzy jeszcze nie należą do D_i (razem z krawędziami łączącymi ich z v). Drzewo D_i będziemy zawsze powiększać rozszerzając pewien jego wierzchołek. W ten sposób wszystkie wierzchołki w D_i nienależące do żadnego ze zbiorów A_1, A_2, A_3 są liśćmi w D_i. Mając skonstruowane D_i postępujemy zgodnie z następującym algorytmem:

- Jeśli wszystkie wierzchołki należą już do D_i to kończymy algorytm uzyskując $D = D_i$.
- Jeśli istnieje wierzchołek $v \in D_i$ taki, że po jego rozszerzeniu trafi on do zbioru A_3, to wtedy go rozszerzamy uzyskując graf D_{i+1}. Liczebność zbioru A_3 zwiększa się o 1, liczebność zbioru A_2 nie zmienia się, liczebność zbioru A_1 może się tylko zwiększyć (jeśli któryś z nowo dodanych wierzchołków do niego wpadnie lub któryś z dotychchczas nieprzyporządkowanych liści D_i) lub pozostać bez zmian. W każdym razie wartość $|A_3| - |A_2| + |A_1|$ nie zmniejszy się.
- Jeśli żaden z poprzednich punktów nie zaszedł, to każdy wierzchołek w D_i ma najwyżej jednego sąsiada nienależącego do D_i. Znajdujemy wierzchołek $w \notin D_i$ połączony z pewnym wierzchołkiem $v \in D_i$. Jeśli w ma przynajmniej 2 sąsiadów nienależących do D_i, to najpierw dodajemy do grafu D_i wierzchołek w wraz z krawędzią vw (czyli rozszerzamy v), a następnie rozszerzamy wierzchołek w. Wtedy liczność zbioru A_3 zwiększa się przynajmniej o 1 (dołącza do niego wierzchołek w), a liczność zbioru A_2 zwiększa się o najwyżej 1 (jedynie v może do niego dołączyć). Druga możliwość jest taka, że wierzchołek w ma najwyżej jednego sąsiada nienależącego do D_i. Wobec tego musi mieć przynajmniej dwóch sąsiadów należących do D_i (z treści zadania). Oznaczmy jednego z tych sąsiadów przez $v_1 = v$, a drugiego przez v_2. Do grafu D_i dodajemy wierzchołek w wraz z krawędzią wv_1. Wtedy liczność zbioru $|A_1|$ zwiększa się przynajmniej o 1 (dołącza do niego wierzchołek v_2), zaś liczność zbioru A_2 zwiększa się o najwyżej 1 (tylko v_1 może do niego dołączyć). W każdym razie wartość $|A_3| - |A_2| + |A_1|$ nie zmniejsza się.

Powtarzając powyższe kroki ostatecznie uzyskamy drzewo rozpinające D dla którego jest spełniona nierówność $|A_2| \leqslant |A_1| + |A_3|$. Możemy obliczyć liczbę wierzchołków i liczbę krawędzi tego drzewa:

$$n = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$n - 1 \geqslant \frac{|A_1| + 2|A_2| + 3|A_3|}{2}$$

Otrzymujemy stąd, że:

$$|A_3| - |A_1| \leqslant 2(n-1) - 2n = -2$$

$$|A_1| \geqslant |A_3| + 2$$

W połączeniu z nierównością $|A_1| \geqslant |A_2| - |A_3|$ otrzymujemy:

$$4|A_1| \geqslant |A_1| + |A_2| - |A_3| + 2|A_3| + 4 = n + 4$$

$$|A_1| \geqslant \frac{n}{4} + 1 \geqslant \frac{2}{9}n$$

17. Czy istnieje 2022 liczb rzeczywistych (niekoniecznie różnych), które nie wszystkie są zerami, spełniających następujący warunek: dla dowolnych 1011 spośród nich, współczynniki wielomianu unormowanego stopnia 1011 (poza współczynnikiem przy x^{1011}), którego są one pierwiastkami, są permutacją pozostałych 1011 liczb?

Rozwiązanie:

Sposób I

Jeśli wśród naszej kolekcji liczb znajduje się co najmniej 1011 zer, to współczynniki wielomianu x^{1011}, którego 1011-krotnym pierwiastkiem jest zero, muszą stanowić pozostałą część naszego podzbioru. Ponieważ wszystkie interesujące nas współczynniki są tu zerowe, oznaczałoby to iż wszystkie posiadane przez nas liczby są zerami, co jest niemożliwe.

Istnieje zatem co najmniej 1012 niezerowych liczb w naszej kolekcji. Niech S będzie multizbiorem składającym się z elementów postaci $|x|$, dla każdego niezerowego x w naszej kolekcji. Wtedy S ma co najmniej 1012 elementów; ponadto iloczyn dowolnych 1011 z nich jest także elementem S, innym od tych właśnie 1011 liczb – jako iż moduł współczynnika wolnego wielomianu to iloczyn modułów jego pierwiastków.

Jeśli teraz istniałoby takich 1010 elementów S, których iloczyn wynosi $P \neq 1$, to dla dowolnego t spośród pozostałych elementów S, także $t \cdot P$ będzie znajdywać się wśród pozostałych elementów S. Kontynuując, wśród tych elementów będzie znajdować się również $t \cdot P^2$, $t \cdot P^3$, ... – skoro zaś $P \neq 1$, to jest to nieskończenie wiele różnych liczb, co daje sprzeczność. To oznacza, że dla dowolnego wyboru 1010 elementów S, ich iloczyn jest równy 1.

Jeśli S zawierałoby dwa różne elementy $a \neq b$, to analizując dowolnych 1009 pozostałych, wiemy że ich iloczyn pomnożony przez a jest równy 1, zaś pomnożony przez b jest także równy 1. To daje sprzeczność. Zatem S składa się z takich samych liczb; ponieważ zaś iloczyn 1010 z nich jest równy 1, to wszystkie elementy S są równe 1.

To oznacza, że wracając do analizy naszej kolekcji liczb z zadania, każda z nich musi należeć do zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Naturalnie (z zasady szufladkowej Dirichleta) co najmniej 1011 z nich jest nieujemnych lub niedodatnich. Bez straty ogólności zachodzi pierwsza z tych opcji. Wtedy wybierając 1011 z tych liczb, biorąc wielomian o tychże pierwiastkach, i analizując jego współczynnik przy x^{1010} dostajemy, że minus suma tych liczb także należy do naszej kolekcji. To oznacza jednak, że suma ta jest równa 1 albo 0, to znaczy że w naszej kolekcji jest co najwyżej jedna jedynka. Ponieważ w tym przypadku posiadamy też co najmniej 1011 liczb niedodatnich (wszystkie poza, być może, tą jedynką), to używając analogicznego argumentu, mamy także co najwyżej jedną -1. To jednak oznacza, że w naszej kolekcji jest co najmniej 2020 zer. Korzystając z naszej uwagi z początku rozwiązania, to oznacza że wszystkie one są zerami, co jest jednak niemożliwe. Otrzymana sprzeczność oznacza, że takich 2022 liczb nie istnieje.

Sposób II

Udowodnimy, że takie liczby nie istnieją. Przez sprzeczność załóżmy, że $c_1, \ldots, c_{2022}$ będą szukanymi liczbami, a C nazwą tego ciągu. Niech $x_1, \ldots, x_{1011}$ oraz $y_1, \ldots, y_{1011}$ będą dowolnym ich podziałem na dwie połowy. Jeżeli użyjemy jednej z nich jako pierwiastków wielomianu, to jego współczynnikami będą elementy z drugiej połowy (oraz jedynka przy x^{1011}). Jeżeli teraz wstawimy jedynkę jako argument w dwóch równościach, które możemy otrzymać w taki sposób otrzymujemy następujące zależności:

$$(1 - x_1) \ldots (1 - x_{1011}) = 1 + y_1 + \ldots + y_{1011}$$

$$(1 - y_1) \ldots (1 - y_{1011}) = 1 + x_1 + \ldots + x_{1011}$$

Po wymnożeniu ich stronami otrzymujemy $\prod_{i=1}^{2022}(1 - c_i) = (1 + x_1 + \ldots + x_{1011})(1 + y_1 + \ldots + y_{1011})$. Możemy zauważyć, że lewa strona nie zależy od podziału naszych liczb na połowy, a suma czynników po prawej stronie jest równa $2 + \sum_{i=1}^{2022} c_i$, czyli również nie zależy od owego podziału. Jednak znanym faktem jest, że nie istnieją dwie różne nieuporządkowane pary liczb rzeczywistych o takich samych sumach i iloczynach, zatem nieuporządkowana para $(1 + x_1 + \ldots + x_{1011}, 1 + y_1 + \ldots + y_{1011})$ jest zawsze taka sama bez względu na podział liczb z C na połowy. Stąd wynika, że jesteśmy w stanie uzyskać co najwyżej dwie różne wartości jako sumę 1011 dowolnych liczb z C.

Teraz udowodnimy, że wśród elementów C mogą wystąpić co najwyżej dwie różne wartości. Załóżmy nie wprost, że istnieją wśród nich trzy różne liczby d, e, f. Dobierając z pozostałych liczb jakiekolwiek 1010 widzimy, że jako sumę 1011 liczb możemy uzyskać zarówno $S + d, S + e$ i $S + f$, gdzie S jest sumą owych 1010 liczb, co jest w sprzeczności ze stwierdzeniem, że możliwe sumy 1011 liczb były co najwyżej dwie.

W takim razie wiemy, że w C jest liczba występująca co najmniej 1011 razy — nazwijmy ją g. Rozpatrując wielomian $(x-g)^{1011}$ widzimy, że wśród jego współczynników znajdują się między innymi $-g^{1011}, 1011g^{1010}$, $\binom{1011}{2}g^{1009}$ oraz $\binom{1011}{3}g^{1008}$. Jeżeli g jest niezerowe, to te wyrażenia przyjmują co najmniej trzy różne wartości, co prowadzi do sprzeczności. Dla zerowego g z kolei wszystkie współczynniki $(x-g)^{1011}$ poza wiodącym to zera, co znowu prowadzi do sprzeczności.

18. Dany jest nieskończony ciąg $a_1, a_2, \ldots$ dodatnich liczb całkowitych spełniający dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zależność

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{p_n}$$

gdzie p_n to pewien dzielnik pierwszy a_n. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych n zachodzi $a_{n+k} = ka_n$.

Rozwiązanie:

Niech $v_p(m)$ dla $m \in \mathbb{Z}^+$ oraz $p \in \mathbb{P}$ oznacza wykładnik przy p w rozkładzie m na czynniki pierwsze. Niech $f(m)$ oznacza dla liczby naturalnej m iloczyn wszystkich liczb pierwszych większych od 3 w jej rozkładzie na czynniki pierwsze (liczba pierwsza może występować w rozkładzie kilka razy). Zatem po prostu $f(m) = m \cdot 2^{-v_2(m)} \cdot 3^{-v_3(m)}$. Zauważmy, że dla dowolnych $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi $f(m_1m_2) = f(m_1)f(m_2)$. Niech p_n oznacza tę liczbę pierwszą, dla której

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{p_n} = \frac{p_n+1}{p_n}a_n$$

Jeśli $p_n > 3$, to

$$f(p_n+1) = f\left(\frac{p_n+1}{2}\right) \leqslant \frac{p_n+1}{2} < p_n = f(p_n)$$

Jeśli $p_n = 3$, to $f(p_n+1) = 1 = f(p_n)$. Jeśli $p_n = 2$, to $f(p_n+1) = 1 = f(p_n)$. Zatem skoro

$$f(a_{n+1}) = f\left(\frac{p_n+1}{p_n}a_n\right) = \frac{f(p_n+1)}{f(p_n)}f(a_n)$$

to

$$f(a_{n+1}) \leqslant f(a_n),$$

przy czym nierówność jest ostra jeśli $p_n > 3$. Ponieważ $f(a_n)$ jest dodatnią liczbą całkowitą dla każdego n, to $p_n > 3$ może zachodzić jedynie dla skończenie wielu n.

Zauważmy ponadto, że jeśli $p_n = 2$ i $p_{n+1} = 3$ lub $p_n = 3$ i $p_{n+1} = 2$, to $a_{n+2} = 2a_n$. Żeby zatem teza zadania była fałszywa, to w ciągu p_n liczby 2 i 3 muszą występować obok siebie skończenie wiele razy. Skoro od pewnego miejsca ciąg p_n składa się wyłącznie z liczb $\{2, 3\}$ to musi on od pewnego miejsca być równy stale 2 lub stale 3. Jednak ciąg p_n nie może być stale równy 2 od pewnego miejsca, bo jeśli $p_n = 2$, to $v_2(a_{n+1}) < v_2(a_n)$ i znów mamy nieskończone schodzenie (tym razem dla $v_2(a_n)$). Podobnie ciąg p_n nie może stale równy 3 od pewnego miejsca, bo mamy nieskończone schodzenie dla $v_3(a_n)$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $k = 2$ spełnia tezę zadania.

19. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Punkt P jest przecięciem przekątnych AC i BD. Niech M i N będą odpowiednio środkami boków AD i BC. Przez ω_1, ω_2 oraz ω_3 oznaczamy okręgi opisane na trójkątach odpowiednio ADP, BCP oraz OMN. Niech punkt E będzie przecięciem ω_1 i ω_3, które nie leży na łuku APD okręgu ω_1, a punkt F przecięciem ω_2 i ω_3, które nie leży na łuku BPC okręgu ω_2. Udowodnić, że $OF = OE$.

Rozwiązanie:

Niech Ω oznacza okrąg opisany na czworokącie $ABCD$. Niech proste AD i BC przecinają się w Q, zaś proste AB i CD w punkcie R.

Sposób I

Ponieważ O, M, E, F, N leżą na jednym okręgu, to wystarczy wykazać, że

$$\sphericalangle OME = \sphericalangle ONF.$$

Ponieważ $\sphericalangle OMQ = \sphericalangle ONQ = 90^\circ$, to równoważnie trzeba wykazać

$$\sphericalangle QME = \sphericalangle QNF.$$

Ostatnie dwa kąty są tworzone przez środkową i bok w trójkątach odpowiednio ADE i BCF. Ponieważ

$$\sphericalangle AED = 180^\circ - \sphericalangle APD = 180^\circ - \sphericalangle BPC = \sphericalangle BFC,$$

to do zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać równość kątów $\sphericalangle ADE$ i $\sphericalangle BCF$, wtedy teza będzie wynikać z podobieństwa trójkątów ADE i BCF.

Udowodnimy, że trójki punktów E, P, N oraz F, P, M są współliniowe. Niech $S \neq P$ będzie punktem przecięcia ω_1 i ω_2. Z tw. o osiach potęgowych dla okręgów Ω, ω_1 i ω_2 proste SP, AD i BC przecinają się w Q. W takim razie

$$\sphericalangle ASQ = \sphericalangle ASP = \sphericalangle ADP = \sphericalangle BCP = \sphericalangle ACQ,$$

stąd A, S, C, Q leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle SEP = \sphericalangle SAP = \sphericalangle SQN.$$

Zauważmy, że $\sphericalangle CSD = \sphericalangle PAD + \sphericalangle PBC = \sphericalangle COD$, więc punkty C, D, S, O leżą na jednym okręgu i stąd

$$\sphericalangle OSP = \sphericalangle CSP - \sphericalangle CSO = 180^\circ - \sphericalangle PBC - \sphericalangle CDO = 90^\circ,$$

więc $S \in \omega_3$. Wtedy

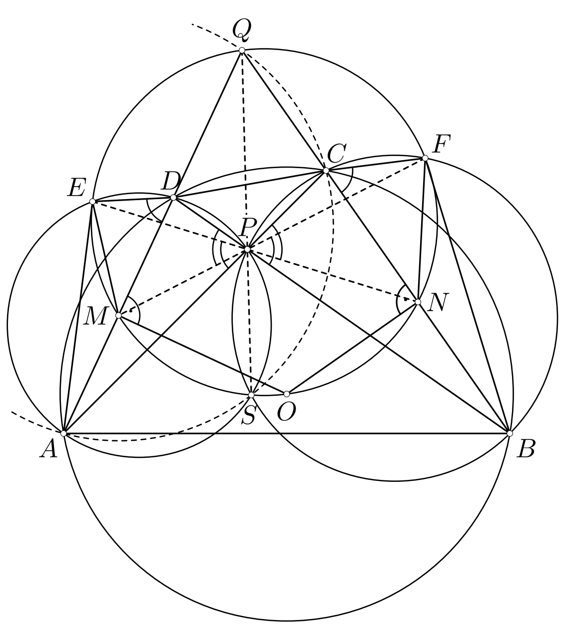
$$\sphericalangle SEP = \sphericalangle SQN = \sphericalangle SEN,$$

więc punkty E, P, N są współliniowe. Analogicznie dowodzimy, że punkty F, P, M są współliniowe.

Wreszcie, z podobieństwa trójkątów APD i BPC wynika, że $\sphericalangle DPM = \sphericalangle CPN$, gdyż są to odpowiadające kąty w tym podobieństwie. W takim razie

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle EPA = \sphericalangle CPN = \sphericalangle DPM = \sphericalangle FPB = \sphericalangle BCF,$$

co kończy dowód.



Sposób II

W rozwiązaniu będziemy korzystać z własności inwersji oraz biegunowych.

Rozważmy inwersję względem Ω. Niech M' i N' będą obrazami odpowiednio M i N w tej inwersji. Wtedy okrąg OMN przechodzi na prostą $M'N'$. Ponieważ M jest środkiem AD, to punkt M' jest przecięciem prostych stycznych do Ω w punktach A i D. Zatem prosta AD jest biegunową punktu M' względem Ω. Analogicznie prosta BC jest biegunową punktu N' względem Ω. W takim razie prosta $M'N'$ jest biegunową punktu Q. Ze znanego faktu o biegunowych wiemy, że prosta PR jest biegunową punktu Q. Zatem w rozważanej inwersji obrazem okręgu ω_3 jest prosta PR.

Niech P' oznacza obraz punktu P względem rozważanej inwersji. Wiadomo, że P' leży na okręgach opisanych na trójkątach OAC oraz OBD, stąd

$$\sphericalangle BP'C = \sphericalangle OP'C - \sphericalangle OP'B = \sphericalangle OAC - \sphericalangle OBD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle ADC = \sphericalangle BRC,$$

więc P' leży na okręgu opisanym na CRB. W takim razie obrazem w rozważanej inwersji okręgu ω_2 jest okrąg opisany na BRC. Analogicznie obrazem okręgu ω_1 jest okrąg opisany na ARD.

Niech E' będzie przecięciem prostej PR z okręgiem ARD, zaś F' przecięciem prostej PR z okręgiem BRC. Z uzyskanych wcześniej własności uzyskujemy, że są to obrazy inwersyjne odpowiednio punktów E i F. Zatem pozostaje udowodnić, że $OE' = OF'$.

Dalej rozważamy kolejną inwersję o środku w R i promieniu $r = \sqrt{RA \cdot RB}$. W tym przekształceniu E' przejdzie na E_1 będące przecięciem PR i BC, zaś F' na F_1 będące przecięciem PR i AD. Wreszcie niech R' będzie obrazem O w tej inwersji. Ze wzoru na długość odcinka po inwersji dostajemy

$$\frac{OE'}{OF'} = \frac{R'E_1\frac{r^2}{RR' \cdot RE_1}}{R'F_1\frac{r^2}{RR' \cdot RF_1}} = \frac{R'E_1 \cdot RF_1}{R'F_1 \cdot RE_1}.$$

Pozostaje udowodnić $\frac{R'E_1}{R'F_1} = \frac{RE_1}{RF_1}$. Ze znanego faktu o dwustosunku wiemy, że

$$(RPE_1F_1) = -1.$$

Ponadto, R' jest również obrazem inwersyjnym R względem Ω, stąd leży na biegunowej R, na której leży również P. Stąd

$$PR' \perp RR'.$$

Łącząc dwa powyższe fakty, ze znanego lematu o dwustosunku dostajemy, że RR' jest dwusieczną kąta zewnętrznego $E_1R'F_1$, skąd wynika $\frac{R'E_1}{R'F_1} = \frac{RE_1}{RF_1}$. To kończy rozwiązanie.

20. Rozważmy $m+1$ poziomych i $n+1$ pionowych prostych ($m, n \geqslant 4$) tworzących kratę o mn kwadratach i $(m+1)(n+1)$ wierzchołkach. Rozważmy łamaną zamkniętą złożoną z odcinków tej kraty, która przechodzi przez wszystkie $(m-1)(n-1)$ wewnętrznych wierzchołków kraty, nie ma samoprzecięć i nie przechodzi przez żaden zewnętrzny wierzchołek kraty. Niech A oznacza liczbę wierzchołków kraty, przez które łamana przechodzi „na wprost”, B liczbę kwadratów, których dokładnie dwa naprzeciwległe boki należą do łamanej, a C liczbę kwadratów, których żaden bok nie należy do łamanej. Udowodnić, że

$$A = B - C + m + n - 1.$$

Rozwiązanie:

Wszystkie mn kwadratów możemy naturalnie podzielić na takie, które leżą wewnątrz i na zewnątrz naszej łamanej zamkniętej. Niech X oznacza liczbę par kwadratów, które stykają się jedynie rogiem i jedno z nich leży wewnątrz pętli, a drugie na zewnątrz (nazwijmy takie pary *fikuśnymi*). Wyrazimy X na dwa różne sposoby.

Naokoło każdego wewnętrznego wierzchołka kraty są cztery kwadraty tworzące dwie pary pól stykających się rogiem. Jeżeli pętla przechodzi przez dany wierzchołek na wprost, to obie te pary są fikuśne. Jeżeli jednak pętla skręca w danym wierzchołku, to jedynie jedna z tych par jest fikuśna. W takim razie liczba fikuśnych par wynosi

$$(m-1)(n-1)+A.$$

Teraz skoncentrujmy się na jakimś kwadracie oraz na czterech polach, które sąsiadują z nim bokiem. Owych czterech sąsiadów tworzy cztery pary pól stykających się rogami. Jeżeli łamana zawiera jedynie pewne dwa naprzeciwległe boki tego kwadratu, to wszystkie takie cztery pary są fikuśne. Jeżeli łamana nie zawiera żadnych jego boków, to żadna z tych par nie jest fikuśna. W przeciwnych przypadkach dokładnie dwie z tych par są fikuśne. Wszystkie stwierdzenia o liczbie par fikuśnych sąsiadów są też prawdziwe dla kwadratów na boku lub w rogu naszej kraty. Niech D oznacza liczbę pól, które nie są ani typu B ani C. Wtedy, jeżeli wysumujemy liczbę fikuśnych par naokoło każdego kwadratu, to dostaniemy $4B+2D$, jednak każda fikuśna para zostanie w takiej sumie policzona dokładnie dwa razy, zatem ich liczba to $2B+D$. Jednak $2B+D = B-C+(B+C+D)$, ale $B+C+D = mn$, zatem liczba fikuśnych par to

$$B-C+mn.$$

Otrzymaliśmy zatem, że $(m-1)(n-1)+A = X = B-C+mn$, skąd wynika $A = B-C+m+n-1$, czyli nasza teza.

21. W pewnym kraju znajduje się n miast. Zarząd Infrastruktury buduje co roku jedną jednokierunkową drogę między dwoma miastami, przy czym droga z A do B może zostać zbudowana tylko, jeśli niemożliwym jest dojechanie z A do B za pomocą istniejących dróg (w szczególności, między dwoma miastami zbudowane mogą zostać najwyżej dwie drogi – po jednej w każdą stronę). Wyznaczyć największą możliwą liczbę dróg, które mogą zostać w ten sposób zbudowane.

Rozwiązanie:

Twierdzimy, że ta liczba to $\binom{n}{2}+n-1 = \frac{n^2+n-2}{2}$. Rozważmy zbiór dwukierunkowych dróg między miastami. Twierdzimy, że nie może on zawierać cyklu: istotnie, niech $A_1A_2\ldots A_k$ będzie takim cyklem, zaś $A_1 \to A_k$ ostatnią zbudowaną w nim drogą. Wtedy jednak możemy przejechać z A_1 do A_k przez A_2, A_3, ..., tak więc budowa tej drogi byłaby niemożliwa.

To oznacza, że dróg dwukierunkowych jest co najwyżej $n-1$, bo w przeciwnym wypadku mielibyśmy wśród nich cykl. Zatem łącznie wszystkich dróg może być co najwyżej $\binom{n}{2}+n-1$.

Pozostaje pokazać, że ta liczba dróg jest możliwa do osiągnięcia. Uszeregujmy miasta, oznaczając je przez A_1, A_2, ..., A_n. Następnie możemy wybudować drogę z A_i do A_j dla każdej pary liczb $i<j$. Na końcu zbudujmy drogi z A_n do A_{n-1}, z A_{n-1} do A_{n-2}, ..., kończąc na drodze z A_2 do A_1. To daje żądaną liczbę dróg.

22. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, że dla dowolnej funkcji $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ przyjmującej jako wartości wszystkie liczby całkowite funkcja $f+g$ również przyjmuje jako wartości wszystkie liczby całkowite.

Rozwiązanie:

Jeśli f jest funkcją stałą, to oczywiście spełnia warunki zadania. Przyjmijmy, że f nie jest stała. Rozważmy dwa przypadki:

1. f przyjmuje pewną wartość c nieskończenie wiele razy:

   Niech x_1, x_2, x_3, ... będzie ciągiem takich (parami różnych) liczb całkowitych, że $f(x_i)=c$. Skoro f nie jest stała, to znajdziemy też taką liczbę d, że $f(d) \neq c$.

Rozważmy teraz funkcję g daną przez

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=d\\ (-1)^i\lceil\frac{i}{2}\rceil, & x=x_i \text{ dla pewnego i}\\ c+1-f(x) & \text{w pozostałych przypadkach.}\end{cases}$$

Jest to surjekcja, gdyż $g(d)=0$, $g(x_{2k})=k$ dla k dodatnich, oraz $g(x_{-2k-1})=k$ dla k ujemnych. Ponadto $f(x)+g(x)$ nie przyjmuje żadnej wartości równej c: istotnie, dla $x=d$ przyjmuje wartość $f(d)\neq c$, dla $x=x_i$ wyrażenie to ma wartość $c+g(x_i)\neq c$, zaś w pozostałych przypadkach wartość ta to $c+1\neq c$. Zatem $f+g$ nie jest surjekcją, co daje sprzeczność.

2. f przyjmuje każdą z wartości skończenie wiele razy:

   To oznacza, że możemy wskazać taki ciąg parami różnych liczb całkowitych x_0, x_1, x_2, …, że $x_i\neq -(-1)^i\lceil\frac{i}{2}\rceil$ dla dowolnego $i=0, 1, 2, \ldots$. Rozważmy teraz funkcję

$$g(x)=\begin{cases}(-1)^i\lceil\frac{i}{2}\rceil, & x=x_i \text{ dla pewnego i}\\ 1-f(x) & \text{w pozostałych przypadkach.}\end{cases}$$

   Wtedy g jest surjekcją, jako że $g(x_{2k})=k$ dla k nieujemnych, oraz $g(x_{-2k-1})=k$ dla k ujemnych. Ponadto $f(x)+g(x)\neq 0$ dla dowolnego x, z doboru ciągu x_i. To oznacza, że $f+g$ nie jest surjekcją, co daje sprzeczność.

Ostatecznie więc jedyne funkcje spełniające warunek zadania to funkcje stałe.

23. Niech F_n będzie ciągiem Fibonacciego: $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ dla $n\geqslant 2$. Dla $n>2$, niech R_n będzie resztą z dzielenia liczby $\prod_{k=1}^{F_n-1}k^k$ przez F_n. Wykazać, że R_n także jest liczbą Fibonacciego.

Rozwiązanie:

Rozważmy najpierw przypadek, gdy F_n nie jest liczbą pierwszą. Wtedy przedstawiamy $F_n=k_1k_2$ jako iloczyn dwóch liczb mniejszych od niej. Jeśli $k_1\neq k_2$ to $F_n=k_1k_2|k_1^{k_1}k_2^{k_2}$, a jeśli $k_1=k_2$, to $F_n=k_1^2|k_1^{k_1}$. Stąd

$$F_n \mid \prod_{k=1}^{F_n-1}k^k$$

czyli $R_n=0=F_0$. Pozostaje zatem przypadek, gdy $F_n=p\in\mathbb{P}$. Przypadki $F_n\in\{2,3\}$ są oczywiste i nie będziemy ich dalej rozpatrywać. Ponieważ

$$\prod_{k=1}^{p-1}k^k=\prod_{k=1}^{p-1}(p-k)^{p-k}\equiv\prod_{k=1}^{p-1}(-k)^{p-k} \pmod p$$

to możemy napisać

$$\left(\prod_{k=1}^{p-1}k^k\right)^2\equiv\prod_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k}k^p\equiv(-1)^{p(p-1)/2}((p-1)!)^p \pmod p$$

Z twierdzenia Wilsona wynika zatem, że

$$R_n^2\equiv(-1)^{p(p+1)/2} \pmod p$$

Skorzystamy teraz z dobrze znanej tożsamości (zależność Cassiniego)

$$F_{n-1}^2+(-1)^{n-1}=F_{n-2}F_n=pF_{n-2} \text{ dla } n\geqslant 2.$$

Zauważmy, że $n-1$ musi być parzyste, bo inaczej $p|(F_{n-1}-1)(F_{n-1}+1)$, ale $p = F_n = F_{n-1} + F_{n-2} > F_{n-1}+1$ (bo rozważamy $F_n > 3$). Stąd wynika, że p nie dzieli ani $F_{n-1}-1$, ani $F_{n-1}+1$, czyli sprzeczność.

Zatem $n-1$ jest parzyste i mamy podzielność $p|F_{n-1}^2+1$. To oznacza, że p daje resztę 1 modulo 4 (ponieważ -1 jest resztą kwadratową modulo p). To z kolei daje, że liczba $\frac{p(p+1)}{2}$ jest nieparzysta, czyli $R_n^2 \equiv -1 \equiv F_{n-1}^2 \pmod p$. Zatem

$$0 \equiv R_n^2 - F_{n-1}^2 \equiv (R_n - F_{n-1})(R_n + F_{n-1}) \pmod p$$

Stąd

$$p|R_n - F_{n-1} \text{ i wtedy } R_n = F_{n-1} \qquad \text{albo} \qquad p|R_n + F_{n-1} \text{ i wtedy } R_n = F_{n-2}.$$

24. Niech ABC będzie trójkątem różnobocznym. Punkty O i H są jego odpowiednio środkiem okręgu opisanego i ortocentrum. Punkt P leży wewnątrz trójkąta AHO spełniając $\sphericalangle AHP = \sphericalangle POA$. Niech M będzie środkiem odcinka OP. Proste BM i CM przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie odpowiednio w punktach X i Y. Wykazać, że prosta XY przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie APO.

Rozwiązanie:

Niech symetralna odcinka OP przecina proste XY i BC odpowiednio w punktach Q i T. Ponieważ $QT \perp OM$, to z twierdzenia o motylku $QM = TM$. W takim razie T i Q są symetryczne względem prostej OP.

Niech U będzie odbiciem O względem BC. Znanym faktem jest, iż $AHUO$ tworzy równoległobok. Niech W będzie takim punktem, że $APWH$ jest równoległobokiem. Wtedy $PWUO$ również jest równoległobokiem oraz

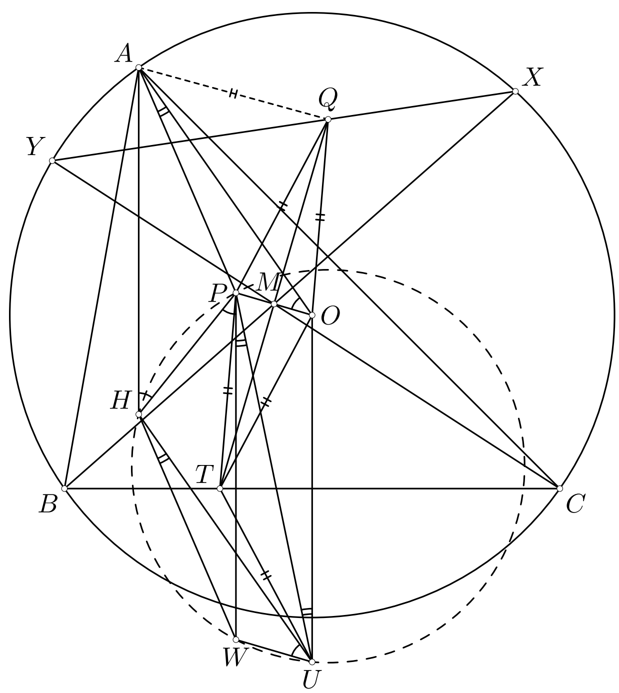
$$\sphericalangle HPW = \sphericalangle PHA = \sphericalangle POA = \sphericalangle HUW,$$

więc punkty H, P, U i W leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle PAO = \sphericalangle WHU = \sphericalangle WPU = \sphericalangle OUP.$$

Czyli okręgi opisane na trójkątach APO i UPO są symetryczne względem OP.

Zauważmy, że punkt T jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie POU, gdyż leży na symetralnych OP i OU. Z wcześniejszych obserwacji wynika, że punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na APO, co kończy dowód.



25. Dowieść, że dla wszystkich liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ z przedziału $[-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \geqslant \left| \prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i \right|.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy indukcję ze względu na n. Dla $n = 1$ obie strony są równe. Załóżmy, że dana nierówność jest prawdziwa dla pewnej liczby całkowitej $n - 1$ oraz liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$. Oznaczmy $A = \prod_{i=1}^{n-1} a_i$ i $B = \prod_{i=1}^{n-1} b_i$. Z założenia indukcyjnego mamy

$$\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - b_i| \geqslant |A - B|.$$

W takim razie

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \geqslant |A - B| + |a_n - b_n| \geqslant |Aa_n - Ba_n| + |Ba_n - Bb_n| \geqslant |Aa_n - Bb_n|,$$

co kończy krok indukcyjny.

26. Punkty D i E są środkami łuków AB i BC okręgu opisanego na trójkącie ABC niezawierających pozostałych wierzchołków. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktów A i C odpowiednio na proste BD i BE. Dwusieczna kąta ABC przecina odcinek AC w punkcie F. Wykazać, że prosta PQ połowi odcinek BF.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy bez straty dla ogólności, że $AB \geqslant BC$. Niech P' i Q' będą obrazami symetrycznymi punktu B odpowiednio względem punktów P i Q. Wystarczy wykazać, że P', F i Q' są współliniowe. Zauważmy, że

$$\sphericalangle FAP' = \sphericalangle FAB + \sphericalangle BAP' = \sphericalangle CAB + 180^\circ - 2\sphericalangle DBA = 180^\circ + \sphericalangle CAB - \sphericalangle BCA$$

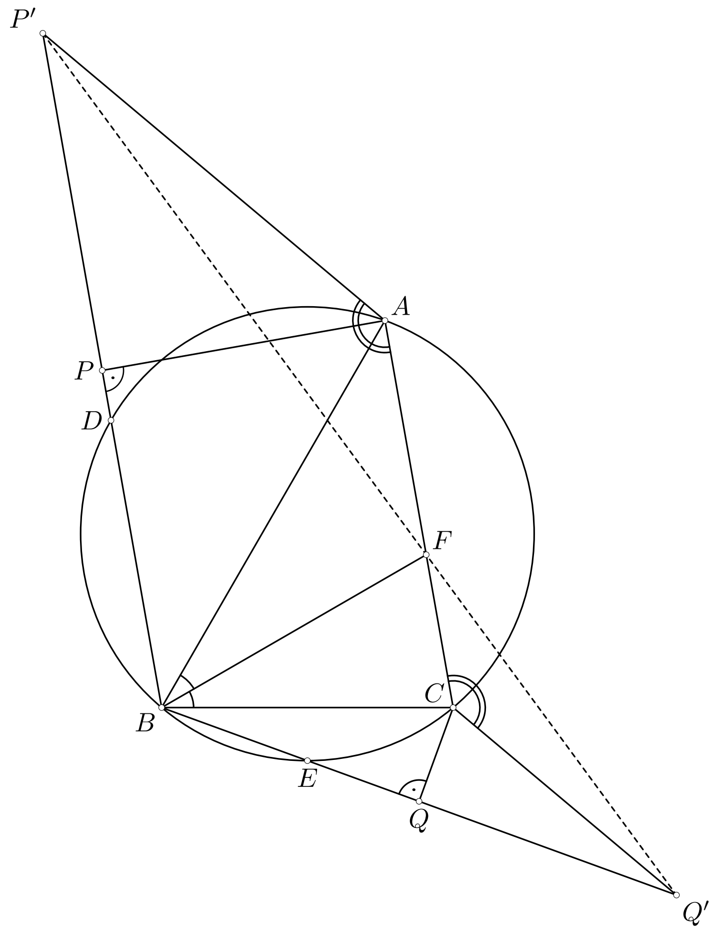
oraz

$$\sphericalangle FCQ' = 360^\circ - \sphericalangle FCB - \sphericalangle BCQ' = 360^\circ - \sphericalangle BCA - (180^\circ - 2\sphericalangle CBE) = 180^\circ - \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB.$$

Jeśli $AB = BC$, to $\sphericalangle FAP' = \sphericalangle FCQ = 180^\circ$ i oczywiście punkty P', F i Q' są współliniowe. Jeśli $AB > AC$, to stosując twierdzenie o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{AP'}{AF} = \frac{AB}{AF} = \frac{BC}{CF} = \frac{CQ'}{CF}.$$

To wraz z równością $\sphericalangle FAP' = \sphericalangle FCQ'$ oznacza, że trójkąty FAP' i FCQ' są podobne, więc $\sphericalangle AFP' = \sphericalangle CFQ'$, co kończy dowód.



27. Niech G będzie grafem nieskierowanym bez trójkątów o n wierzchołkach. Wykazać, że wierzchołki grafu G można tak pomalować za pomocą co najwyżej $2\sqrt{n}$ kolorów, aby żadne dwa wierzchołki tego samego koloru nie sąsiadowały ze sobą.

Rozwiązanie:

Udowodnimy tezę indukcyjnie po n. Dla $n = 1$ jest ona oczywista. Niech $n > 1$ i załóżmy, że dla wszystkich grafów bez trójkątów o mniej niż n wierzchołkach teza zachodzi.

Jeżeli stopień każdego wierzchołka wynosi co najwyżej $2\sqrt{n} - 2$, to możemy pokolorować wierzchołki na $2\sqrt{n}-1$ kolorów, kolorując je w dowolnej kolejności – dla każdego wierzchołka, w momencie w którym mamy go pokolorować, co najmniej jeden z $2\sqrt{n} - 1$ kolorów nie będzie występował wśród kolorów jego sąsiadów, więc możemy pokolorować rozważany wierzchołek tym kolorem.

Natomiast jeżeli istnieje wierzchołek v stopnia co najmniej $2\sqrt{n}-1$ i $N(v)$ jest zbiorem jego sąsiadów, to rozważmy następujące kolorowanie:

- podgraf $G \setminus (\{v\} \cup N(v))$ kolorujemy z założenia indukcyjnego na $\leqslant 2\sqrt{n - 2\sqrt{n}}$ kolorów,
- każdy wierzchołek z $N(v)$ kolorujemy nieużywanym powyżej kolorem c,
- wierzchołek v nieużywanym wcześniej kolorem c'.

Ponieważ graf G nie zawiera trójkątów, to każde dwa wierzchołki z $N(v)$ nie są połączone krawędzią, stąd takie kolorowanie jest poprawne, zatem uzyskaliśmy poprawne kolorowanie używające co najwyżej

$$2\sqrt{n - 2\sqrt{n}} + 2$$

kolorów. Do zakończenia rozwiązania pozostaje sprawdzić, że jest to nie więcej niż $2\sqrt{n}$. Przekształcamy równoważnie

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n-2\sqrt{n}}+2 \leqslant 2\sqrt{n}\\
1 \leqslant \sqrt{n}-\sqrt{n-2\sqrt{n}}\\
1 \leqslant \frac{n-(n-2\sqrt{n})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-2\sqrt{n}}}\\
1 \leqslant \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{n}}}}\\
1+\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{n}}} \leqslant 2\\
\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{n}}} \leqslant 1,
\end{aligned}$$

co jest prawdą. To kończy dowód.

28. Nieskończony podzbiór dodatnich liczb całkowitych S nazwiemy *czadowym*, jeżeli dla dowolnych parami różnych $a, b, c \in S$, wszystkie dodatnie dzielniki liczby $\frac{a^c-b^c}{a-b}$ również należą do S. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n > 1$ istnieje zbiór czadowy S, dla którego $n \notin S$.

Rozwiązanie:

Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym n. Rozważmy zbiór S liczb całkowitych dodatnich, których wszystkie dzielniki pierwsze są większe od p (w szczególności $1 \in S$, gdyż wtedy warunek jest pusto spełniony). Naturalnie $n \notin S$. Twierdzimy, że S jest czadowy.

Weźmy dowolne a, b, $c \in S$, oraz liczbę pierwszą $q \leqslant p$. Chcemy pokazać, że q nie dzieli liczby $\frac{a^c-b^c}{a-b}$.

Niech d będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią taką, że $q \mid a^d - b^d$. Ponieważ warunek ten jest równoważny $\left(\frac{a}{b}\right)^d \equiv 1 \pmod q$ ($b \not\equiv 0 \pmod q$, bo $b \in S$, zaś $q \leqslant p$), liczba d jest rzędem $\frac{a}{b}$ modulo q. W szczególności $d \mid q-1$.

Jeśli $q \nmid a^c - b^c$, to tym bardziej $q \nmid \frac{a^c-b^c}{a-b}$. Przyjmijmy zatem $q \mid a^c - b^c$. Z własności rzędów oznacza to, iż $d \mid c$. Jednak $d \mid q-1$, więc także $d \mid \mathrm{NWD}(c, q-1)$, ale $\mathrm{NWD}(c, q-1) = 1$: istotnie, skoro $c \in S$, to wszystkie dzielniki pierwsze c są większe od p, zatem także od q, zaś wszystkie dzielniki $q-1$ są oczywiście mniejsze od q. To oznacza, że $d = 1$, czyli $q \mid a - b$.

Wreszcie

$$\frac{a^c-b^c}{a-b} = \sum_{i=0}^{c-1} a^i b^{c-1-i} \equiv c\dot{a}^{c-1} \not\equiv 0 \pmod q$$

(gdyż $c \in S$ implikuje $q \nmid c$), co kończy dowód.

29. W trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $AB < AC$, punkty D, E, F są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z A, B, C. Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie AEF. Niech ω_1 i ω_2 będą okręgami przechodzącymi przez D i stycznymi do ω odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że ω_1 i ω_2 przecinają się na prostej BC w punkcie $P \neq D$.

Rozwiązanie:

Niech M będzie środkiem boku BC. Punkty E, F leżą na okręgu o średnicy BC, którego środkiem jest M. W szczególności

$$\sphericalangle BFM = \sphericalangle MBF = \sphericalangle CBF = 180^\circ - \sphericalangle FEC = \sphericalangle AEF,$$

co oznacza, że prosta MF jest styczna do ω. Analogicznie ME również jest styczna do ω.

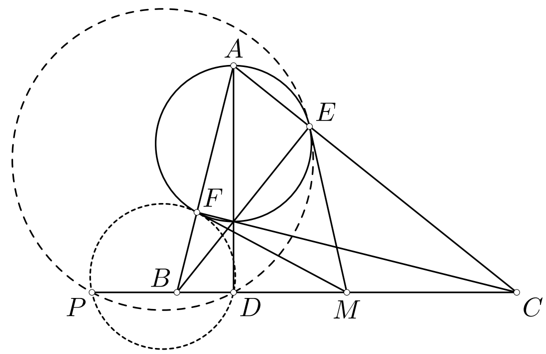
Niech P_1 będzie punktem przecięcia ω_1 z BC różnym od D, zaś P_2 punktem przecięcia ω_2 z BC, także różnym od D. Skoro ω_1 jest styczny do ω w E, to okręgi te mają wspólną styczną w E, zatem prosta ME jest styczna także do ω_1. Z twierdzenia o potędze punktu, D i P_1 leżą po tej samej stronie punktu M oraz

$$MD \cdot MP_1 = ME^2.$$

Analogicznie D i P_2 leżą po tej samej stronie punktu M oraz

$$MD \cdot MP_2 = MF^2.$$

Skoro $ME = MF$, otrzymujemy $MP_1 = MP_2$, a do tego P_1 oraz P_2 leżą na BC po tej samej stronie punktu M. Tak więc $P_1 = P_2$, co kończy dowód.



30. *Punktem kratowym* nazwiemy punkt na płaszczyźnie o obu współrzędnych całkowitych. Dany jest skończony zbiór S punktów kratowych. Wykazać, że można wykonać jedynie skończenie wiele następujących operacji: dla czterech różnych punktów kratowych A, B, C, D, przy czym punkty A, B należą do S, punkty C, D nie należą do S, $AB > CD$ oraz $ACBD$ jest równoległobokiem, punkty A, B usuwamy z S, zaś punkty C, D dodajemy do S.

Rozwiązanie:
Niech

$$I = \sum_{P \in S} OP^2,$$

gdzie O jest środkiem układu współrzędnych. Ponieważ S zawiera tylko punkty kratowe, to I jest nieujemną liczbą całkowitą. Udowodnimy, że po każdej operacji wartość I maleje, stąd operacji może być jedynie skończenie wiele.

Rozważmy punkty A, B, C, D, jak w treści zadania. Niech M będzie środkiem równoległoboku $ACBD$. Ze wzoru na długość środkowej w trójkącie otrzymujemy

$$\frac{OA^2 + OB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = OM^2 = \frac{OC^2 + OD^2}{2} - \frac{CD^2}{4}.$$

Ponieważ $AB > CD$, to z powyższej równości wynika $OA^2 + OB^2 > OC^2 + OD^2$, więc po operacji wartość I zmaleje, co kończy dowód.

31. Niech S będzie zbiorem dodatnich liczb całkowitych, które można przedstawić w postaci a^2+3b^2+1 dla pewnych liczb całkowitych a, b. Wykazać, że jeśli liczba parzysta n należy do zbioru S, to dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych k liczba n^k także należy do zbioru S.

Rozwiązanie:
Wystarczy wykazać, że jeśli $n \in S$, to $n^3 \in S$. Mamy $n - 1 = a^2 + 3b^2$, a z parzystości n wynika, że

$$n^2 + n + 1 = \left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 = c^2 + 3d^2$$

dla pewnych liczb całkowitych c i d. Stąd

$$n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1) = (a^2+3b^2)(c^2+3d^2) = (ac+3bd)^2 + 3(ad-bc)^2,$$

co daje żądane przedstawienie n^3.

32. Udowodnić, że dla dowolnych $x, y, z > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{2x^4+x^2y^2}{(y^2+z^2+xz)^2} + \frac{2y^4+y^2z^2}{(z^2+x^2+yx)^2} + \frac{2z^4+z^2x^2}{(x^2+y^2+zy)^2} \geqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy najpierw, że skoro $xz \leqslant \frac{x^2+z^2}{2}$, to możemy oszacować od dołu:

$$\sum_{cyk} \frac{2x^4+x^2y^2}{(y^2+z^2+xz)^2} \geqslant \sum_{cyk} \frac{2x^4+x^2y^2}{(y^2+\frac{3}{2}z^2+\frac{1}{2}x^2)^2} = 4\sum_{cyk} \frac{2x^4+x^2y^2}{(x^2+2y^2+3z^2)^2}$$

Podstawiając $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ dostajemy do udowodnienia nową nierówność:

$$\sum_{cyk} \frac{2a^2+ab}{(a+2b+3c)^2} = \sum_{cyk} \frac{a(2a+b)}{(a+2b+3c)^2} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Ponieważ wyrażenia są jednorodne, to możemy bez straty ogólności założyć, że $a+b+c=1$. Wtedy mamy do udowodnienia nierówność

$$\sum_{cyk} \frac{a(2a+b)}{(3-(2a+b))^2} = \sum_{cyk} af(2a+b) \geqslant \frac{1}{4}$$

gdzie $f(r) = \frac{r}{(3-r)^2}$ dla $r \in (0,3)$. Zauważmy, że f jest funkcją rosnącą i wypukłą na przedziale $(0,3)$:

$$f'(r) = \frac{(3-r)^2 - r2(3-r)(-1)}{(3-r)^4} = \frac{3-r+2r}{(3-r)^3} = \frac{3+r}{(3-r)^3} > 0,$$

$$f''(r) = \frac{(3-r)^3 - (3+r)3(3-r)^2(-1)}{(3-r)^6} = \frac{3-r+9+3r}{(3-r)^4} = \frac{12+2r}{(3-r)^4} > 0.$$

Możemy zatem zastosować nierówność Jensena z wagami a, b, c w punktach $2a+b, 2b+c, 2c+a$:

$$\sum_{cyk} af(2a+b) \geqslant f\left(\sum_{cyk} a(2a+b)\right)$$

Zauważmy, że z nierówności między średnią kwadratową i arytmetyczną

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{cyk} a(2a+b) = 2(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca) = \frac{1}{2}(a+b+c)^2 + \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2) \geqslant 1$$

Ponieważ $f(r)$ jest funkcją rosnącą, to

$$f\left(\sum_{cyk} a(2a+b)\right) \geqslant f(1) = \frac{1}{4},$$

co kończy dowód.

Zawody drużynowe

1. Dana jest niezerowa funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz liczba dodatnia b, przy czym spełniona jest równość $f(x+b)=-f(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$. Rozstrzygnąć, czy funkcja f musi mieć okres podstawowy (czyli najmniejszy z dodatnich okresów).

Rozwiązanie:
Sposób I
Zdefiniujmy zbiory

$$\begin{aligned} X &= \{\tfrac{k}{3^n} \mid k\in\mathbb{Z}, n=0,1,2,\ldots\},\\ Y &= \{\tfrac12 + x \mid x\in X\},\\ Z &= \mathbb{R}\setminus(X\cup Y). \end{aligned}$$

Niech

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } x\in X\\ -1 & \text{dla } x\in Y\\ 0 & \text{dla } x\in Z\end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja f wraz ze stałą $b=\frac12$ spełnia warunki zadania. Istotnie jeśli $x\in X$, to $x+\frac12\in Y$, a wtedy $f(x+b)=-1=-f(x)$. Jeśli $x\in Y$, to $x=\frac12+\frac{k}{3^n}$ dla pewnych k i n, a wtedy $x+\frac12=1+\frac{k}{3^n}=\frac{k+3^n}{3^n}\in X$, więc $f(x+b)=1=-f(x)$. Niech teraz $x\in Z$. W podobny sposób pokazujemy, że gdyby liczba $x+\frac12$ należała do zbioru X lub Y, to wtedy liczba x należałaby do zbioru Y i X odpowiednio. Stąd $x+\frac12\in Z$, więc $f(x+b)=0=-f(x)$.

Pozostaje zauważyć, że każda liczba postaci $t=\frac{1}{3^n}$, gdzie $n=0,1,2,\ldots$, jest dodatnim okresem funkcji f. Istotnie jeśli $x\in X$, to $x=\frac{k}{3^m}$ dla pewnych k, m, a wtedy $x+t=\frac{k3^n+3^m}{3^{n+m}}\in X$. Podobnie pokazujemy, że jeśli $x\in Y$, to $x+t\in Y$, oraz jeśli $x\in Z$, to $x+t\in Z$.

Sposób II
Określmy

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^{m+n} & \text{gdy } x=b(m+n\sqrt2) \text{ dla pewnych liczb całkowitych } m,n\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

Funkcja f jest dobrze określona, bo jeśli x da się przedstawić w postaci $b(m+n\sqrt2)$ dla pewnych liczb całkowitych m,n, to tylko na jeden sposób. Gdy $x=b(m+n\sqrt2)$ dla liczb całkowitych m,n, to $f(x+b)=(-1)^{m+n+1}=-(-1)^{m+n}=-f(x)$, a gdy x nie jest postaci $b(m+n\sqrt2)$, to $x+b$ też nie jest i mamy $f(x+b)=0=-f(x)$. Funkcja f spełnia więc założenia zadania.

Udowodnimy teraz, że dowolna liczba dodatnia postaci $b(2k+2\ell\sqrt2)$ jest okresem f. Jeśli $x=b(m+n\sqrt2)$, to $f(x+b(2k+2\ell\sqrt2))=(-1)^{2k+m+2\ell+n}=(-1)^{m+n}=f(x)$, a jeśli x nie jest postaci $b(m+n\sqrt2)$, to $x+b(2k+2\ell\sqrt2)$ też nie jest i $f(x+b(2k+2\ell\sqrt2))=0=f(x)$.

Do zakończenia dowodu pozostaje wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ można dobrać liczby całkowite k,ℓ tak, że $0<b(2k+2\ell\sqrt2)<\varepsilon$. Równoważnie: $0<k+\ell\sqrt2<\frac{\varepsilon}{2b}$. Wybierzmy liczbę naturalną N tak dużą, że $\frac1N<\frac{\varepsilon}{2b}$ i rozważmy liczby $\{\sqrt2\},\{2\sqrt2\}\ldots,\{(N+1)\sqrt2\}$. Tutaj, $\{t\}=t-\lfloor t\rfloor$ oznacza mantysę liczby t. Wszystkie te liczby należą do przedziału $(0,1)$ i są niewymierne. Z zasady szufladkowej wynika, że jeden z przedziałów $(0,\frac1N),(\frac1N,\frac2N),\ldots,(\frac{N-1}{N},1)$ zawiera dwie z liczb $\{\sqrt2\},\{2\sqrt2\}\ldots,\{(N+1)\sqrt2\}$. To znaczy, że dla pewnych i,j mamy $0<\{i\sqrt2\}-\{j\sqrt2\}<\frac1N$. Równoważnie: $0<-\lfloor i\sqrt2\rfloor+\lfloor j\sqrt2\rfloor+(i-j)\sqrt2<\frac1N$. Zatem dla $k=-\lfloor i\sqrt2\rfloor+\lfloor j\sqrt2\rfloor$ i $\ell=i-j$ mamy $0<k+\ell\sqrt2<\frac1N<\frac{\varepsilon}{2b}$, co kończy dowód.

2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a,b,c zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a+\frac1b+1}+\frac{1}{b+\frac1c+1}+\frac{1}{c+\frac1a+1}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1}.$$

Rozwiązanie:

Niech $abc = r^3$ dla pewnej liczby rzeczywistej dodatniej r. Liczby $a' = \frac{a}{r}$, $b' = \frac{b}{r}$, $c' = \frac{c}{r}$ spełniają warunek $a'b'c' = 1$, więc istnieją takie liczby dodatnie x, y, z, że $a' = \frac{y}{z}$, $b' = \frac{z}{x}$, $c' = \frac{x}{y}$. W takim razie

$$a = r \cdot \frac{y}{z}, \quad b = r \cdot \frac{z}{x}, \quad c = r \cdot \frac{x}{y}.$$

Daną w treści zadania nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{1}{\frac{ry}{z} + \frac{x}{zr} + 1} + \frac{1}{\frac{rz}{x} + \frac{y}{xr} + 1} + \frac{1}{\frac{rx}{y} + \frac{z}{yr} + 1} \geqslant \frac{3}{r + \frac{1}{r} + 1}$$

albo

$$\frac{z}{r^2y + x + rz} + \frac{x}{r^2z + y + rx} + \frac{y}{r^2x + z + ry} \geqslant \frac{3}{r^2 + 1 + r}.$$

Lewa strona na mocy nierówności Cauchy'ego-Schwarza jest nie mniejsza niż

$$\frac{(x+y+z)^2}{(r^2+1)(xy+yz+zx) + r(x^2+y^2+z^2)}.$$

Wystarczy więc udowodnić, że

$$\frac{(x+y+z)^2}{(r^2+1)(xy+yz+zx) + r(x^2+y^2+z^2)} \geqslant \frac{3}{r^2+r+1}.$$

Wymnażając stronami i redukując wyrazy podobne dostajemy

$$(r-1)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geqslant 0,$$

czyli

$$(r-1)^2 \cdot \frac{1}{2}((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2) \geqslant 0.$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co kończy rozwiązanie.

3. W turnieju badmintona każdy zawodnik rozegrał z każdym dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Każdy zawodnik wygrał co najmniej jeden mecz. Okazało się, że nie istnieje taka czwórka zawodników A, B, C, D, że A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z A, a D wygrał z A, B i C. Wykazać, że nie istnieje żadna taka czwórka zawodników X, Y, Z, T, że X wygrał z Y, Y wygrał z Z, Z wygrał z X, a T przegrał z X, Y i Z.

Rozwiązanie:

Przez $A \to B$ będziemy oznaczać fakt, że A wygrał z B.

Załóżmy nie wprost, że istnieje taka czwórka X, Y, Z, T_0 jak w zadaniu. Wiemy, że zawodnik T_0 wygrał z jakimś zawodnikiem $T_1 \neq X, Y, Z$. Pokażemy, że T_1 przegrał ze wszystkimi osobami X, Y, Z. Wiemy, że nie mógł on wygrać z nimi wszystkimi, bo powstałaby w ten sposób zakazana konfiguracja. Załóżmy teraz, że jedna z osób $\{X, Y, Z\}$ przegrała z T_1, zaś inna wygrała, bez strat ogólności $X \to T_1$ i $T_1 \to Y$. Zauważmy, że wówczas T_1, Y, T_0, X tworzy zakazaną konfigurację.

Tak więc T_1 przegrał ze wszystkimi osobami X, Y, Z. Teraz możemy kontynuować nasze rozumowanie, wybierając taką osobę $T_2 \neq X, Y, Z$, że T_1 wygrał z T_2. Ponownie wykazujemy, że X, Y i Z wygrali z T_2.

Można zatem stworzyć taki ciąg osób $T_0, T_1, T_2 \ldots$, że dla każdego i, X, Y i Z wygrali z T_i oraz $T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots$. Ponieważ jest skończenie wielu zawodników, w którymś momencie w ciągu (T_i) musiał powtórzyć się zawodnik. Niech $T_i = T_j$ $(i < j)$ będzie najwcześniejszym takim powtórzeniem. Rozważmy grupę zawodników $T_i, T_{i+1}, \ldots, T_{j-1}$. Wiemy, że $T_i \to T_{i+1} \to \ldots \to T_{j-1} \to T_i$.

Udowodnimy indukcyjnie, że jeśli w grupie zawodników $S_1, S_2, \ldots S_n$ zachodzi $S_1 \to S_2 \to \ldots \to S_n \to S_1$ to wówczas istnieją $A, B, C \in \{S_1, \ldots S_n\}$ takie że $A \to B \to C \to A$. Bazą indukcji jest trywialny przypadek $n = 3$. Dla $n > 3$ rozważmy mecz między S_1 a S_3. Wtedy albo $S_3 \to S_1$ i $(A, B, C) = (S_1, S_2, S_3)$ spełnia warunki zadania, albo $S_1 \to S_3$ i możemy użyć założenia indukcyjnego dla $n-1$ na zbiorze $S_1 \to S_3 \to S_4 \to \ldots \to S_n$.

Zatem w ciągu (T_i) będzie istniała taka trójka zawodników A, B, C, że $A \to B \to C \to A$. Zauważmy, że X wygrał ze wszystkimi zawodnikami T_i, w szczególności z A, B, C, co tworzy zakazaną konfigurację i kończy tym samym dowód nie wprost.

4. Niech n, k, t będą dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym $n > k \geqslant 2$. Zdefiniujmy zbiór $S = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \mid 1 \leqslant x_1 < \ldots < x_k \leqslant n\}$. Załóżmy, że istnieje taka funkcja $f : S \to \{1, 2, \ldots, t\}$, że dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leqslant x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} \leqslant n$ zachodzi $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq f(x_2, x_3, \ldots, x_{k+1})$. Wykazać, że

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^t}}}}}}_{k-1 \text{ dwójek}} \geqslant n$$

Rozwiązanie:

Ustalmy liczbę $n \geqslant 3$. Dla ustalonej wartości k zbiór S z treści zadania będziemy oznaczać przez S_k. Ponadto jeśli funkcja $f : S_k \to \{1, 2, \ldots, t\}$ spełnia warunek z treści zadania, to powiemy, że funkcja f jest (k, t)-*dobra.*

Tezę zadania będziemy dowodzić indukcyjnie po $k \geqslant 2$. Załóżmy, że $k = 2$ i niech $f : S_2 \to \{1, 2, \ldots, t\}$ będzie pewną funkcją $(2, t)$-dobrą dla pewnego $t \geqslant 1$. Funkcję f oraz jej własność możemy interpretować następująco: każdemu odcinkowi (x, y) o końcach całkowitych leżących w przedziale $[1, n]$ przyporządkowujemy jeden z t kolorów w taki sposób, aby każde dwa odcinki postaci $[x, y]$ i $[y, z]$ były różnych kolorów (dla $x < y < z$). Chcemy pokazać, że $2^t \geqslant n$. Dla $x = 1, 2, \ldots, n$ zdefiniujmy zbiór T_x składający się ze wszystkich kolorów odcinków, które zaczynają się na współrzędnej x. Formalnie $T_x = \{f(x, y) \mid 1 \leqslant x < y \leqslant n\}$. Wszystkich możliwych zbiorów T_x jest 2^t, dlatego do udowodnienia tezy wystarczy dowieść, że zbiory T_x są parami różne. Przypuśćmy, że zachodzi $T_x = T_y$ dla pewnych $x < y$. Rozważmy parę (x, y). Z definicji zbioru T_x mamy $f(x, y) \in T_x$. Ponadto ponieważ $T_x = T_y$, to $f(x, y) \in T_y$, co z definicji T_y oznacza, że istnieje takie $z > y$, że $f(x, y) = f(y, z)$. To jednak jest sprzeczne z założeniem o funkcji f.

Niech teraz $k > 2$ i załóżmy, że teza zadania jest prawdziwa dla $k - 1$. Niech $f : S_k \to \{1, 2, \ldots, t\}$ będzie pewną funkcją (k, t)-dobrą. Zdefiniujmy funkcję $g : S_{k-1} \to 2^{\{1,2,\ldots,t\}}$ wzorem $g(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) \mid x_k > x_{k-1}\}$. Twierdzimy, że funkcja g jest $(k-1, 2^t)$-dobra, zakładając, że ponumerowaliśmy podzbiory zbioru $\{1, \ldots, t\}$ liczbami $\{1, \ldots, 2^t\}$ w dowolny sposób. Istotnie przypuśćmy, że $g(x_1, \ldots, x_{k-1}) = g(x_2, \ldots, x_k)$ dla pewnych liczb całkowitych $1 \leqslant x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k \leqslant n$. Wtedy z definicji funkcji g mamy $f(x_1, \ldots, x_k) \in g(x_1, \ldots, x_{k-1}) = g(x_2, \ldots, x_k)$. Stąd ponownie z definicji funkcji g istnieje $x_{k+1} > x_k$ takie, że $f(x_1, \ldots, x_k) = f(x_2, \ldots, x_{k+1})$. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że funkcja f jest (k, t)-dobra.

Ponieważ funkcja g jest $(k-1, 2^t)$-dobra, to z założenia indukcyjnego otrzymujemy:

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{(2^t)}}}}}}}_{(k-2)+1 \text{ dwójek}} \geqslant n,$$

co należało dowieść.

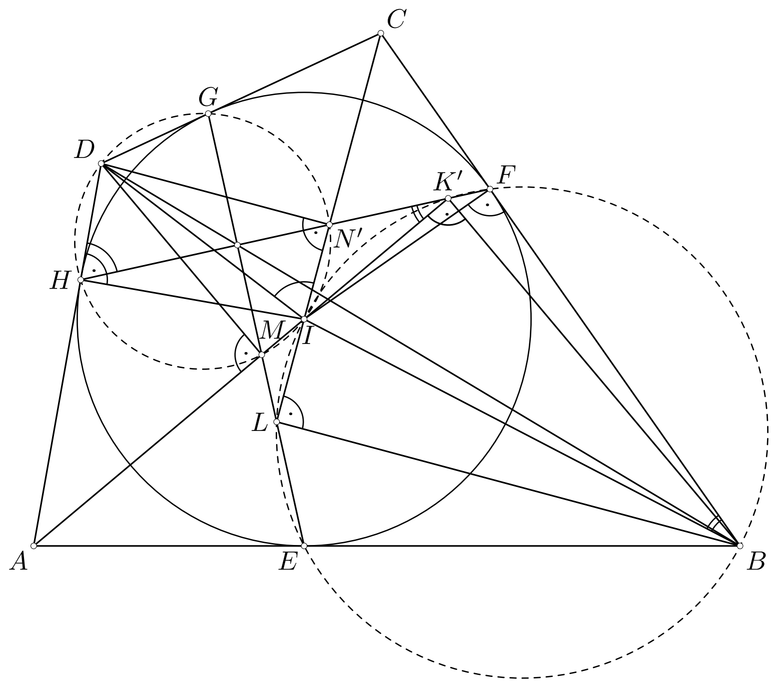
5. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu o środku I, przy czym punkt I nie leży na prostej AC. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AI i CI, zaś punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AI i CI. Wykazać, że proste KN i LM przecinają się na prostej BD.

Rozwiązanie:

Niech E, F, G, H będą punktami styczności okręgu wpisanego odpowiednio z bokami AB, BC, CD, DA.

Załóżmy, że proste AI i CI przecinają prostą FH odpowiednio w punktach K' i N'. Wykażemy, że $K = K'$ i $N = N'$. Zauważmy najpierw, że $\sphericalangle AHF = \sphericalangle BFH$ oraz $\sphericalangle CFH = \sphericalangle DHF$. Istotnie — jeśli AD i BC są równoległe, to oba kąty są proste, jeśli zaś proste AD i BC mają punkt wspólny S, to równość kątów wynika natychmiast z równości $HS = FS$.

Ponieważ $\sphericalangle HAI = \sphericalangle BAI$ i $\sphericalangle ABI = \sphericalangle FBI$, więc sumując kąty czworokąta $ABFH$ otrzymamy, że $\sphericalangle AHF = 180° - \sphericalangle HAI - \sphericalangle FBI$. To pozwala napisać $\sphericalangle HK'I = \sphericalangle FBI$, więc punkty B, F, K', I leżą na jednym okręgu, skąd $\sphericalangle AK'B = \sphericalangle IFB = 90°$, więc $K = K'$. Sumując zaś kąty czworokąta $CDHF$ i uwzględniając równości $\sphericalangle FCI = \sphericalangle DCI$ oraz $\sphericalangle HDI = \sphericalangle CDI$ dostaniemy $\sphericalangle DHF = 180° - \sphericalangle CDI - \sphericalangle DCI = \sphericalangle CID = \sphericalangle N'ID$. W takim razie punkty D, H, I, N' leżą na okręgu, skąd $\sphericalangle DN'C = \sphericalangle DHI = 90°$, czyli $N = N'$.



Analogicznie uzasadniamy, że punkty M i L leżą na prostej EG. Pozostaje zauważyć, że na mocy twierdzenia Brianchona proste FH, EG i BD mają punkt wspólny.

6. W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a punkt H jest ortocentrum. Punkt P jest odbiciem A względem prostej OH. Załóżmy, że punkty P i A leżą po różnych stronach prostej BC. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $BE = PC$, $CF = PB$. Niech K będzie punktem przecięcia AP i OH. Udowodnić, że $\sphericalangle EKF = 90°$.

Rozwiązanie:

Niech D będzie punktem symetrycznym do A względem O. Wtedy AD jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC. W takim razie $DC \perp AC \perp BH$, więc $DC \parallel BH$. Analogicznie $CH \parallel BD$. Zatem czworokąt $BHCD$ jest równoległobokiem. Oznaczmy jego środek przez M.

Mamy $AO = OP$, więc P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Oznaczmy punkt symetryczny do P względem M przez Q. Mamy $HQ \parallel PD \perp AP \perp OH$, więc Q leży na prostej OH. Mamy też

$BE = PC = BQ$ i $FC = PB = CQ$, więc trójkąty BEQ, CFQ są równoramienne. Zauważmy, że

$$\sphericalangle FQE = 360^\circ - \sphericalangle BQE - \sphericalangle CQF - \sphericalangle BQC =$$
$$= 360^\circ - \frac{180^\circ - \sphericalangle EBQ}{2} - \frac{180^\circ - \sphericalangle FCQ}{2} - \sphericalangle BQC = 180^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle EBQ + \frac{1}{2}\sphericalangle FCQ - \sphericalangle BQC.$$

Licząc kąty w czworokącie $ABQC$ otrzymujemy

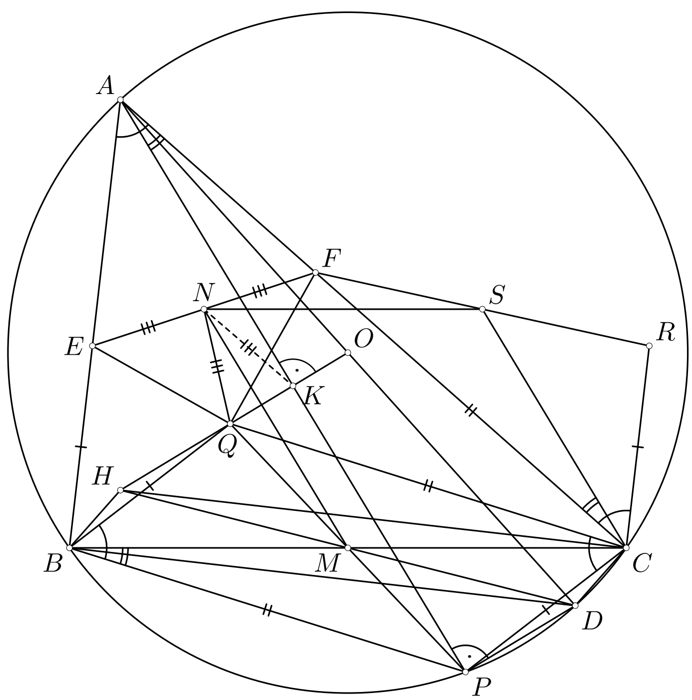
$$\frac{1}{2}\sphericalangle BQC = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC + \frac{1}{2}\sphericalangle EBQ + \frac{1}{2}\sphericalangle FCQ.$$

Zatem

$$\sphericalangle FQE = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC - \frac{1}{2}\sphericalangle BQC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle BPC) = 90^\circ.$$

Niech N będzie środkiem odcinka EF. Kąt FQE jest prosty, więc $NE = NF = NQ$. Do zakończenia dowodu wystarczy dowieść, że $NK = NQ$. W tym celu wystarczy dowieść, że $NM \parallel AP$, gdyż wtedy $NM \perp OH$ i ze względu na to, że $QM = MP$, prosta NM będzie symetralną odcinka QK.

Niech R będzie takim punktem, że $EBCR$ jest równoległobokiem i niech S będzie środkiem odcinka FR. Mamy $RC \parallel AB$, więc $\sphericalangle RCA = \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle CPB = \sphericalangle PBQ$. Ponadto $RC = EB = BQ$ i $CF = BP$. Z cechy przystawania bkb wynika, że trójkąty RCF i QBP są przystające. Skoro S jest środkiem RF, a M środkiem QP, to $\sphericalangle SCF = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC$. Wynika stąd, że $SC \parallel AP$. Ponadto $NMCS$ jest równoległobokiem, gdyż $NS = \frac{1}{2}ER = \frac{1}{2}BC = MC$ i $NS \parallel ER \parallel MC$. Stąd $NM \parallel SC \parallel AP$, co kończy dowód.



7. Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite k, dla których istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz $n > 1$, że liczba $a^n + 1$ jest iloczynem k najmniejszych nieparzystych liczb pierwszych.

Rozwiązanie:

Przez $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ oznaczmy k najmniejszych nieparzystych liczb pierwszych. Załóżmy, że $a^n + 1 = p_1 p_2 \cdots p_k$. Zauważmy, że jeśli $n \equiv 0 \pmod 2$ to $a^n + 1 \not\equiv 0 \pmod 3$. Zatem $n \equiv 1 \pmod 2$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $a = 2^b$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej b. Jeśli $k \leqslant 2$ to nasze równanie nie ma rozwiązania. Natomiast jeśli $k \geqslant 3$ to

$$0 \equiv p_1 p_2 \cdots p_k \equiv a^n + 1 \equiv 2, 3, 5 \pmod 7$$

. Otrzymana sprzeczność oznacza, że istnieje nieparzysta liczba pierwsza p dzieląca a. Oczywiście $p > p_k$, ponieważ w przeciwnym razie

$$0 \equiv p_1 p_2 \cdots p_k \equiv a^n + 1 \equiv 1 \pmod p.$$

W szczególności $a > p_k$.

Ustalmy liczbę pierwszą q dzielącą n oraz niech $n = qm$ dla pewnej liczby całkowitej m. Załóżmy, że $q \leqslant p_k$, co oznacza, że $q = p_i$, dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Wtedy

$$0 \equiv p_1 p_2 \cdots p_k \equiv a^{qm} + 1 \equiv a^m + 1 \pmod q,$$

gdzie ostatnia kongruencja wynika z małego twierdzenia Fermata. Korzystając z lematu o zwiększaniu wykładnika (ang. lifting-the-exponent lemma[1]) uzyskujemy

$$v_q(a^n + 1) = v_q(a^m + 1) + v_q(q) \geqslant 1 + 1 = 2,$$

co implikuje $q^2 \mid p_1 p_2 \cdots p_k$ — sprzeczność. Otrzymaliśmy zatem, że każdy dzielnik pierwszy n jest większy od p_k, więc $n > p_k$.

Łącząc uzyskane szacowania otrzymujemy

$$p_k^{p_k} \geqslant p_k^k \geqslant p_1 p_2 \cdots p_k = a^n + 1 > p_k^{p_k} + 1.$$

Ta sprzeczność oznacza, że nie istnieją liczby k spełniające warunki zadania, co kończy dowód.

8. Dodatnią liczbę całkowitą t nazwiemy *dobrą*, jeśli $t = x^3 + y^2$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x, y. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 3$ istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych m, że zbiór $\{m+1, m+2, \ldots, m+n^2\}$ zawiera dokładnie $n+1$ liczb dobrych.

Rozwiązanie:

Niech dla ustalonego $n \geqslant 3$, $D(m)$ oznacza liczbę dobrych liczb w zbiorze $\{m+1, m+2, \ldots, m+n^2\}$. Naszym zadaniem jest wykazać, że nieskończenie wiele liczb $m \in \mathbb{Z}_+$ spełnia $D(m) = n+1$.

Zauważmy, że dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}+$ zachodzi

$$|D(m+1) - D(m)| \leqslant 1.$$

Jeśli istnieją dwa nieskończone ciągi $(l_i)_{i>0}$ oraz $(u_i)_{i>0}$, spełniające dla każdego $i > 0$

$$D(l_i) = 0 \text{ oraz } D(u_i) \geqslant n+1,$$

to istnieje również nieskończenie wiele takich m, że $D(m) = n+1$. Rzeczywiście, zacznijmy od indeksu l_1 i poszukajmy najmniejszego i takiego, że $u_i > l_1$. W zbiorze

$$\{D(l_1), D(l_1+1), \ldots, D(u_i)\}$$

muszą znajdować się wszystkie liczby całkowite pomiędzy $D(l_1) = 0$ oraz $D(u_i) \geqslant n+1$. W szczególności znajdzie się tam $n+1$. Teraz możemy wybrać indeks j taki, że $l_j > u_i$ (pierwszy element (l_i) znajdujący się za już rozważanym przedziałem), a następnie znaleźć k takie, że $u_k > l_j$ oraz $l_j \leqslant m \leqslant u_k$ spełniające warunek zadania. Rozumowanie można kontynuować w nieskończoność.

Najpierw skonstruujemy ciąg (u_i). Wystarczy w tym celu przyjąć $u_i = i^6$, gdyż w przedziale $[i^6 + 1, i^6 + n^2]$ znajduje się $n+1$ liczb dobrych

$$(i^2)^3 + 1^2,\ (i^2)^3 + 2^2,\ \ldots,\ (i^2)^3 + n^2 \text{ oraz } 2^3 + (i^3)^2.$$

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Lifting-the-exponent_lemma`

Teraz udowodnimy, że ciąg (l_i). Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. Wtedy istnieje takie M, że dla każdego $m \geqslant M$ zachodzi $D(m) \geqslant 1$. Rozważmy dowolną dodatnią liczbę całkowitą t, dla której dla której $(tn)^6 > M$ oraz $t > M + n$. Wtedy wśród liczb

$$1, 2, 3, \ldots, (nt)^6$$

jest co najmniej

$$\left\lfloor \frac{(nt)^6 - M}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor n^4 t^6 - \frac{M}{n^2} \right\rfloor \geqslant n^4 t^6 - M.$$

liczb dobrych. Z drugiej strony, nie może być ich więcej niż par (x, y), dla których $x^3, y^2 \leqslant (nt)^6$, zaś tych jest

$$(nt)^2 \cdot (nt)^3 = n^5 t^5.$$

W takim razie otrzymujemy, że

$$t \leqslant n + \frac{M}{n^4 t^5} \leqslant n + M.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, że $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$ oraz

$$a + b + c + d + abc + bcd + cda + dab = 0.$$

Wykazać, że

$$|2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd| > |a + b + c + d|.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s.$$

Wtedy dany w treści zadania warunek możemy przepisać w postaci $p + r = 0$ albo $P(-1) = P(1)$. Ponieważ wielomian P ma cztery pierwiastki rzeczywiste, to pomiędzy nimi są trzy pierwiastki pochodnej P' danego wielomianu. Wielomian P nie ma pierwiastków w przedziale $(-1, 1)$, więc w tym przedziale jest co najwyżej jeden pierwiastek pochodnej P'. A skoro $P(-1) = P(1)$, to pochodne wielomianu P w punktach -1 i 1 muszą mieć inny znak (w przeciwnym razie w przedziale $(-1, 1)$ pochodna P' miałaby co najmniej dwa pierwiastki).

W takim razie $P'(-1) \cdot P'(1) < 0$ i przekształcając równoważnie otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}
(-4 + 3p - 2q + r)(4 + 3p + 2q + r) &< 0\\
(4 - 3p + 2q - r)(4 + 3p + 2q + r) &> 0\\
(4 + 2q)^2 - (3p + r)^2 &> 0\\
(4 + 2q)^2 &> (2p)^2\\
|2 + q| &> |p|
\end{aligned}$$

a to jest teza zadania.

2. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definiujemy następująco: niech $x_1 > 1$ będzie liczbą wymierną oraz niech $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\lfloor x_n \rfloor}$. Wykazać, że ten ciąg zawiera liczbę całkowitą.

Rozwiązanie:

Niech $a = \lfloor x_1 \rfloor$. Zauważmy, że $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{\lfloor x_i \rfloor} \leqslant 1$, a stąd $x_{i+1} \leqslant x_i + 1$. Ciąg (x_i) jest także nieograniczony, ponieważ jeśli $\lfloor x_i \rfloor = b$, to wówczas kolejne wyrazy ciągu wzrastają o $\frac{1}{b}$ dopóki nie przekroczą $b+1$, zatem $x_{i+b} \geqslant b+1$. Wobec tego, ciąg $(\lfloor x_n \rfloor)_{n>0}$ zawiera wszystkie liczby całkowite $\geqslant a$.

Dla $k \geqslant a$, oznaczymy przez i_k najmniejszy taki indeks, że $\lfloor x_{i_k} \rfloor = k$. Będziemy badać ciąg wartości

$$(r_{a+1}, r_{a+2}, r_{a+3}, \ldots) = (\{x_{i_{a+1}}\}, \{x_{i_{a+2}}\}, \{x_{i_{a+3}}\}, \ldots),$$

gdzie $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ oznacza część ułamkową liczby y.

Ponieważ $x_{i_k} = x_{i_k - 1} + \frac{1}{\lfloor x_{i_k - 1} \rfloor} = x_{i_k - 1} + \frac{1}{k-1} < k + \frac{1}{k-1}$, dostajemy $r_k < \frac{1}{k-1}$.

Jeśli wykażemy, że istnieje c, dla którego $r_c = 0$, teza zadania będzie wykazana, ponieważ wówczas $x_{i_c} = c$.

Zauważmy, że jeśli $r_n < \frac{1}{n}$, będziemy musieli n razy dodać do liczby x_{i_n} wartość $\frac{1}{n}$ zanim uzyskamy liczbę przekraczającą $n+1$. W szczególności wówczas $r_{n+1} = r_n$. Drugim przypadkiem jest $\frac{1}{n} \leqslant r_n < \frac{1}{n-1}$. Wtedy dodamy $\frac{1}{n}$ tylko $n - 1$ razy, zatem $r_{n+1} = r_n - \frac{1}{n}$. Podsumowując:

$$r_{n+1} = \begin{cases} r_n & \text{gdy } r_n < \frac{1}{n} \\ r_n - \frac{1}{n} & \text{gdy } r_n \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

Naszym celem jest wykazać, że nieważne z jaką liczbą wymierną $r_{a+1} < \frac{1}{a}$ zaczynamy, w którymś momencie dostaniemy wartość 0. Wykażemy w tym celu, że jeśli zaszedł przypadek drugi, $r_{n+1} = r_n - \frac{1}{n}$ to wówczas licznik ułamka r_{n+1} jest ściśle mniejszy od licznika r_n zapisanego w formie ułamka nieskracalnego.

$$r_n = \frac{\alpha}{\beta} \implies r_{n+1} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{n} = \frac{\alpha n - \beta}{\beta n}$$

$\alpha n - \beta < \alpha$, ponieważ $r_n = \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{n-1}$. Zatem przypadek 2. może zdarzyć się tylko skończoną liczbę razy i w końcu otrzymamy $r_c = 0$. Kończy to rozwiązanie.

3. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia $n > 1$ o współczynnikach rzeczywistych. Równanie $P(P(P(x))) = P(x)$ ma n^3 różnych pierwiastków rzeczywistych. Udowodnić, że te pierwiastki mogą być podzielone na dwa zbiory o równej średniej arytmetycznej.

Rozwiązanie:

Niech $Q(x) = P(P(P(x))) - P(x)$, $R(x) = P(P(x)) - x$. Zauważmy, że ponieważ $P(P(x)) = x \implies P(P(P(x))) = P(x)$, wszystkie pierwiastki $R(x)$ są także pierwiastkami $Q(x)$. Oznaczmy pierwiastki $Q(x)$ przez $r_1, r_2, \ldots, r_{n^3} \in \mathbb{R}$, z czego $r_1, r_2, \ldots, r_{n^2}$ są także pierwiastkami R. Pokażemy, że średnie arytmetyczne zbiorów $\{r_1, r_2, \ldots, r_{n^2}\}$ oraz $\{r_{n^2+1}, r_{n^2+2}, \ldots, r_{n^3}\}$ są równe.

Niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Obliczmy dwa najwyższe współczynniki $R(x)$:

$$R(x) = P(P(x)) - x = a_n^{n+1}x^{n^2} + na_n^n a_{n-1}x^{n^2-1} + A(x), \text{ gdzie } deg(A) \leqslant n^2 - 2$$

Ze wzorów Viete'a otrzymujemy wówczas:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{n^2} = -\frac{na_n^n a_{n-1}}{a_n^{n+1}} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}n$$

Obliczmy także dwa najwyższe współczynniki $Q(x)$:

$$Q(x) = P(P(P(x))) - P(x) = a_n^{n^2+n+1}x^{n^3} + a_n^{n^2+n}n^2 a_{n-1}x^{n^3-1} + B(x), \text{ gdzie } deg(B) \leqslant n^3 - 2$$

Tym razem otrzymujemy:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{n^3} = -\frac{n^2 a_n^{n^2+n}a_{n-1}}{a_n^{n^2+n+1}} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}n^2$$

Pozostaje teraz zauważyć, że

$$\frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_{n^2}}{n^2} = \frac{r_{n^2+1} + \cdots + r_{n^3}}{n^3 - n^2} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

co kończy rozwiązanie.

4. Na tablicy zostało napisanych skończenie wiele liczb całkowitych większych niż 1. Co minutę na tablicę dopisywana jest najmniejsza liczba całkowita większa od każdej liczby na tablicy i niepodzielna przez żadną z nich. Wykazać, że od pewnego momentu na tablicy będą dopisywane tylko liczby pierwsze.

Rozwiązanie:

Początkowo na tablicy widniało skończenie wiele liczb, oznaczmy największą z nich jako M. Liczby na tablicy (wraz z tymi dopisywanymi później) tworzą nieskończony ciąg (S_i).

Zauważmy, że dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje dokładnie jedna taka liczba $k \in \mathbb{Z}_+$, że $p^k \in S$. Żeby to pokazać, wystarczy rozważyć l takie, że $p^l > M$ - liczby p^l nie napiszemy na tablicy tylko wtedy, gdy wcześniej został napisany już jakiś jej dzielnik, czyli inna liczba postaci p^k. W szczególności, każda liczba pierwsza $q > M$ pojawi się kiedyś na tablicy.

Dla ustalonej liczby pierwszej p, niech $f(p)$ oznacza największą liczbę taką że $p^{f(p)} \leqslant M$ oraz $p^{f(p)} \notin S$. Dla dowolnej liczby złożonej $n \in S$ zachodzi wówczas:

$$v_p(n) \leqslant f(p) + 1$$

Dla $q > M$ nie może jednak zachodzić $q \mid n$, więc jeśli przez P oznaczymy zbiór liczb pierwszych niewiększych od M, dostajemy:

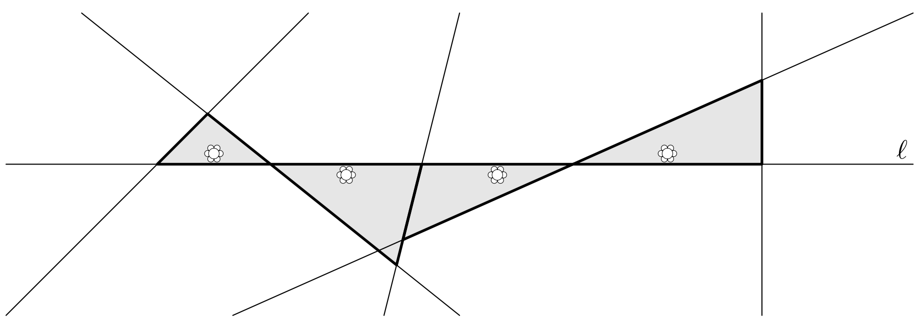
$$n \leqslant \prod_{p \in P} p^{f(p)+1}$$

Prawa strona tego równania jest oczywiście skończona. To dowodzi, że od pewnego momentu na tablicy będą pojawiać się tylko liczby pierwsze.

5. Na płaszczyźnie danych jest n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Wykazać, że wśród części, na które rozcinają one płaszczyznę, jest co najmniej $n-2$ trójkątów.

Rozwiązanie:
Użyjemy podwójnego zliczania.

Wybierzmy prostą ℓ z naszego zbioru i rozważmy pozostałe $n-1$ w prostej w kolejności, w jakiej przecinają ℓ. Każde dwie kolejne proste tworzą z ℓ trójkąt po którejś stronie ℓ. Narysujmy *kwiatek* we wnętrzu każdego takiego trójkąta tuż przy prostej ℓ.



Procedurę tę powtórzymy dla każdej z n prostych, otrzymując ostatecznie $n(n-2)$ kwiatków.

Naszych n prostych dzieli płaszczyznę na $\binom{n+1}{2}+1$ obszarów wypukłych, z których niektóre to trójkąty, niektóre to wielokąty o większej liczbie boków, a pozostałe są nieograniczone.

- Jeśli obszar jest trójkątem, zostały w nim narysowane dokładnie 3 kwiatki, po jednym dla każdego z boków

- Jeśli obszar jest m-kątem przy $m \geqslant 4$, to znajdą się w nim co najwyżej 2 kwiatki. Rzeczywiście, jeśli przy jakimś boku wielokąta znajduje się kwiatek, suma kątów przy tym boku musi być mniejsza niż $180°$. To jednak oznacza, że nie może być dwóch kwiatków przy niesąsiadujących bokach, ponieważ wtedy suma kątów m-kąta byłaby mniejsza od $(m-4) \cdot 180° + 2 \cdot 180° = (m-2) \cdot 180°$, co jest niemożliwe. Zatem liczba kwiatków wewnątrz tego wielokąta nie przekracza 2.

- Jeśli obszar jest nieograniczony, to nie może zawierać żadnego kwiatka, ponieważ każdy obszar zawierający kwiatka zawiera się w przynajmniej jednym trójkącie.

Niech A, B i C oznaczają odpowiednio liczbę trójkątów, liczbę pozostałych wielokątów i liczbę obszarów nieograniczonych. Nietrudno przekonać się, że $C = 2n$. Wobec tego $A+B = \binom{n+1}{2}+1-2n = \frac{n^2-3n+2}{2}$. Dostajemy:

$$\begin{cases} A + B = \binom{n+1}{2} + 1 - 2n = \frac{n^2-3n+2}{2} \\ 3A + 2B \geqslant n(n-2) \end{cases}$$

Gdzie drugie równanie wynika ze zliczenia liczby kwiatków.

Odejmując dwukrotność pierwszego równania od drugiego otrzymamy $A \geqslant n-2$, co należało wykazać.

6. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Wokół ogniska na okręgu stoi $3n$ groźnych słowiańskich wojów. Na początku każdy woj groźnie patrzy na innego. W pojedynczym ruchu jeden woj zaczyna obracać swój wzrok zgodnie z ruchem wskazówek zegara dopóki nie zobaczy innego woja. *Groźnym trójkątem* nazywamy układ w którym woj A patrzy na woja B, woj B na woja C oraz woj C na woja A. Jaka jest najmniejsza taka liczba N, że niezależnie od początkowego ustawienia można uzyskać n groźnych trójkątów w co najwyżej N ruchach?

Rozwiązanie:

Ponumerujmy wojów zgodnie z ruchem wskazówek zegara: $W_1, W_2, \ldots, W_{3n}$. Załóżmy, że początkowo woj W_1 patrzy na woja W_2, zaś wszyscy pozostali wojowie patrzą na woja W_1. Ile ruchów potrzeba teraz dla uzyskania groźnego trójkąta $W_iW_jW_k$? Jeśli $1 < i < j < k$ to wtedy potrzeba $(i-1)+(j-2)+(k-2) = i+j+k-5$ ruchów. Jeśli $1 < i < k < j$ to wtedy potrzeba $(i-1)+(j-2)+(k-1) = i+j+k-4$ ruchów. Jeśli $1 = i < j < k$ to wtedy potrzeba $(j-2)+(k-2) = i+j+k-5$ ruchów. Jeśli $1 = i < k < j$ to wtedy potrzeba $(j-2)+(k-1) = i+j+k-4$ ruchów. Zatem potrzeba przynajmniej

$$\sum_{i=1}^{3n} i - 5n = \frac{(3n+1)3n}{2} - 5n = \frac{9n^2-7n}{2}$$

ruchów. Teraz pozostaje wykazać, że taka liczba ruchów jest zawsze wystarczająca. Zastosujemy metodę probablistyczną. W każdym losowaniu będziemy losować z równym prawdopodobieństwem spośród wszystkich możliwości. Niech $f(W_i, W_j)$ oznacza ile ruchów potrzebuje woj W_i, aby spojrzeć na woja W_j. Niech $f(W_i, W_j, W_k)$ oznacza ile ruchów potrzeba, aby utworzyć groźny trójkąt $W_iW_jW_k$. Ustalmy woja, powiedzmy W_i. Żeby przejrzeć wszystkich pozostałych wojów potrzebuje on $3n-2$ ruchów. W związku z tym wartość oczekiwana ruchów, których potrzebuje woj W_i żeby spojrzeć na losowego woja $W_j \neq W_i$ wynosi $\frac{3n-2}{2}$. Jeśli zatem wylosujemy teraz parę uporządkowaną różnych wojów (W_i, W_j) to wartość oczekiwana $f(W_i, W_j)$ wynosi $\frac{3n-2}{2}$. Wylosujmy teraz uporządkowaną trójkę wojów (W_i, W_j, W_k). Ponieważ $f(W_i, W_j, W_k) = f(W_i, W_j) + f(W_j, W_k) + f(W_j, W_k)$ oraz każda uporządkowana para wojów ma równe prawdopodobieństwo być wylosowanym jako bok trójkąta, to wartość oczekiwana $f(W_i, W_j, W_k)$ wynosi $\frac{9n-6}{2}$. Wylosujmy teraz dowolne n rozłącznych trójek uporządkowanych wojów. Ponieważ każda trójka ma równe prawdopodobieństwo być wylosowanym, to wartość oczekiwana ruchów potrzebnych do utworzenia odpowiadających im n groźnych trójkątów wynosi $\frac{9n^2-6n}{2}$. Istnieje zatem taki wybór n trójek, że potrzeba najwyżej $\frac{9n^2-6n}{2}$ ruchów. To oszacowanie jest za słabe, musimy je poprawić. Wystarczy jednak udowodnić, że $f(W_i, W_j, W_k) \neq f(W_i, W_k, W_j)$. Wtedy bowiem

$$\min(f(W_i, W_j, W_k), f(W_i, W_k, W_j)) \leqslant \frac{f(W_i, W_j, W_k) + f(W_i, W_k, W_j) - 1}{2}$$

Stąd już uzyskujemy, że dla nieuporządkowanej, losowej trójki wojów oczekiwana liczba ruchów potrzebnych do zrobienia z niej groźnego trójkąta wynosi najwyżej $\frac{9n^2-7n}{2}$. Załóżmy, że wojowie W_i, W_j, W_k znajdują się w tej kolejności na okręgu (zgodnie z ruchem wskazówek zegara). W zależności od tego, gdzie początkowo patrzy W_i wartość $f(W_i, W_k) - f(W_i, W_j)$ może spełniać dwie możliwości:

$$f(W_i, W_k) - f(W_i, W_j) > 0 \text{ oraz } f(W_i, W_k) - f(W_i, W_j) \equiv k - j \pmod{3n}$$

$$f(W_i, W_k) - f(W_i, W_j) < 0 \text{ oraz } f(W_i, W_k) - f(W_i, W_j) \equiv k - j + 1 \pmod{3n}$$

Podobne zależności możemy wypisać dla $f(W_j, W_i) - f(W_j, W_k)$ oraz $f(W_k, W_j) - f(W_k, W_i)$. Widzimy zatem, że

$$f(W_i, W_k) - f(W_i, W_j) + f(W_j, W_i) - f(W_j, W_k) + f(W_k, W_j) - f(W_k, W_i) \neq 0$$

(ponieważ albo ta suma nie będzie przystawać do 0 modulo $3n$, albo będzie dodatnia). Jednak ta suma jest równa po prostu $f(W_i, W_k, W_j) - f(W_i, W_j, W_k)$. Stąd $f(W_i, W_j, W_k) \neq f(W_i, W_k, W_j)$

7. Prosta styczna do okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC przecina proste AB, BC i CA odpowiednio w punktach C', A' i B'. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Niech D, E, F to takie punkty, różne od H, odpowiednio na prostych $A'H, B'H, C'H$, że $AH = AD, BH = BE$ oraz $CH = CF$. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach ABC i DEF są styczne.

Rozwiązanie:

Niech punkty H_A, H_B, H_C to odpowiednio odbicia punktu H względem prostych BC, CA, AB. Znanym faktem jest, że te punkty leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Zauważmy, że

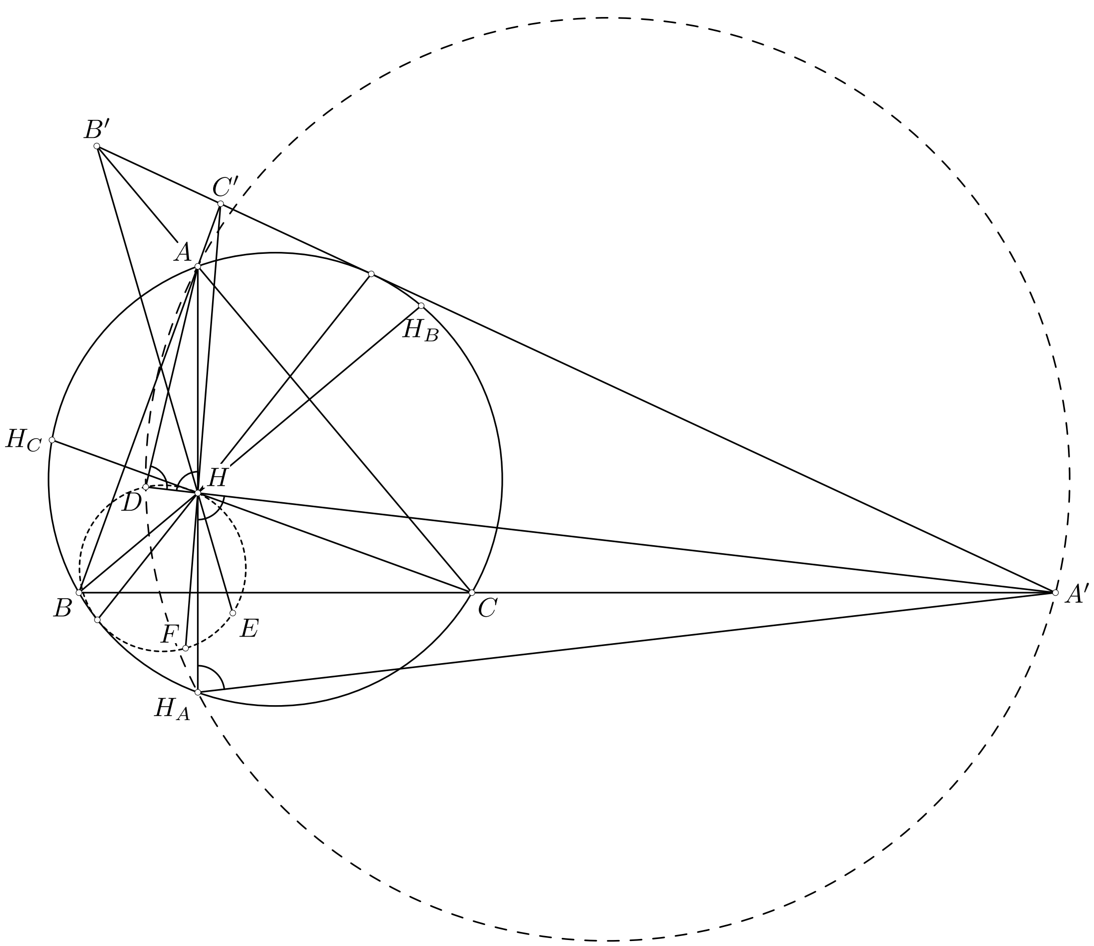
$$\measuredangle ADH = \measuredangle AHD = \measuredangle A'HH_A = \measuredangle A'H_AA,$$

więc punkty A, D, H_A, A' leżą na okręgu Ω_A. Analogicznie udowadniamy, że punkty B, E, H_B, B' oraz C, F, H_C, C' leżą odpowiednio na okręgach Ω_B oraz Ω_C.

Rozważmy przekształcenie będące złożeniem inwersji o środku w punkcie H i promieniu $\sqrt{AH \cdot HH_A}$ z odbiciem względem punktu H. Zauważmy, że w tym przekształceniu punkt A przejdzie na punkt H_A. Z potęgi punktu H względem Ω_A mamy równość $AH \cdot HH_A = DH \cdot HA'$, więc punkt D przejdzie na punkt A'. Z potęgi punktu H względem okręgu opisanego na trójkącie mamy

$$AH \cdot HH_A = BH \cdot HH_B = CH \cdot HH_C,$$

więc analogicznie można udowodnić, że punkt E przejdzie na punkt B', a punkt F na punkt C'. Zatem okrąg opisany na trójkącie DEF przejdzie na prostą $A'B'C'$, która jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Oznacza to, że okrąg opisany na trójkącie DEF też jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC, co kończy dowód.



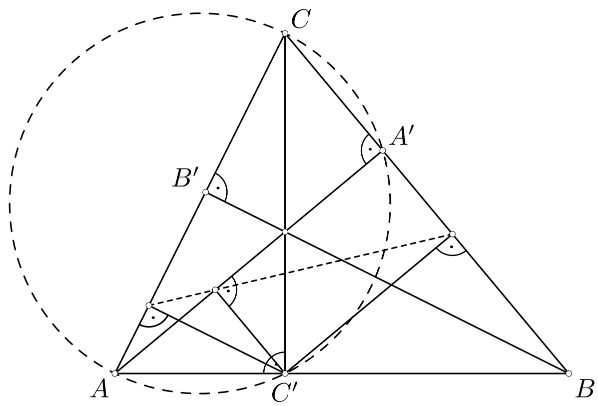
8. Wysokości czworościanu $ABCD$ przecinają się w punkcie H leżącym wewnątrz czworościanu. Punkt D' jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka D, zaś punkt P jest obrazem symetrycznym punktu D' względem H. Dowieść, że jeśli $P \neq D$, to rzuty prostokątne punktu D' na proste AD, BD, CD oraz AP, BP i CP leżą na jednej płaszczyźnie.

Rozwiązanie:

Sposób I

Udowodnimy najpierw

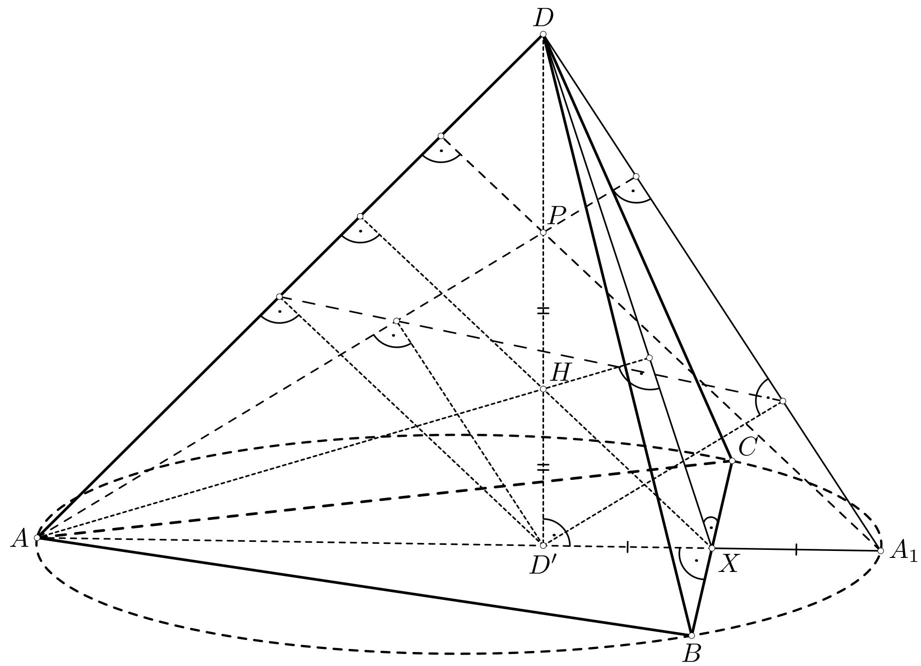
Lemat. Dany jest trójkąt ABC. Wysokości AA', BB' i CC' przecinają się w punkcie H. Wtedy rzuty prostokątne punktu C' na AA', AC i BC leżą na jednej prostej.



Dowód lematu. Punkty A, C', A', C leżą na okręgu o średnicy AC, więc rozważane rzuty leżą na prostej Simsona punktu C' względem trójkąta $AA'C$.

Przechodzimy do dowodzenia tezy zadania. Zauważmy najpierw, że punkt D' jest ortocentrum trójkąta ABC. Istotnie — prosta DH jest prostopadła do płaszczyzny ABC, a więc do krawędzi BC i analogicznie $AH \perp BC$. Płaszczyzna ADH jest więc prostopadła do krawędzi BC, a więc prosta AD' w niej zawarta także. Podobnie uzasadniamy, że BD' jest prostopadła do AC, więc D' jest ortocentrum trójkąta ABC.

Niech proste AD', BD', CD' przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach A_1, B_1, C_1. Rozpatrzmy płaszczyznę $AD'D$. Niech X będzie punktem przecięcia prostych AD' i BC. Wtedy $D'X = XA_1$, więc z twierdzenia Talesa $XH \parallel A_1P$. Ponieważ prosta BH jest prostopadła do płaszczyzny ADC, więc także do krawędzi AD i analogicznie $CH \perp AD$, więc płaszczyzna BCH jest prostopadła do krawędzi AD, skąd $XH \perp AD$. Stąd wnosimy, że $A_1P \perp AD$ — innymi słowy DD', A_1P oraz AP są wysokościami w trójkącie AA_1D. Z lematu wnosimy, że rzuty prostokątne punktu D' na proste AD, AP i A_1D leżą na jednej prostej. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla punktów B_1, C_1 otrzymamy, że wystarczy dowieść, że rzuty prostokątne punktu D' na proste AD, BD, CD i A_1D, B_1D i C_1D leżą na płaszczyźnie.



Rzut stereograficzny sfery o średnicy DD' na płaszczyznę ABC przeprowadza rozważane w poprzednim zdaniu rzuty odpowiednio na punkty A, B, C, A_1, B_1, C_1, które leżą na okręgu. Ich przeciwobrazy także muszą zatem leżeć na okręgu (rzut stereograficzny jest inwersją obciętą do sfery, więc ma jej własności), więc w szczególności na jednej płaszczyźnie.

Sposób II

Zaczniemy od wykazania następującego lematu.

Lemat. Dany jest trójkąt ABC. Odcinki AD, BE, CF są wysokościami tego trójkąta. Wtedy odbicie punktu D względem AB leży na prostej EF.

Dowód lematu. Niech X będzie punktem symetrycznym do D względem AB. Wtedy $\sphericalangle XFB = \sphericalangle BFD = \sphericalangle ACB = \sphericalangle EFA$, co kończy dowód.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Wystarczy wykazać, że odbicia punktu D' względem prostych AD, BD, CD, AP, BP, CP są współpłaszczyznowe. Oznaczmy okrąg opisany na ścianie ABC przez Ω. Wykażemy, że rozważane punkty leżą na płaszczyźnie potęgowej sfery o średnicy DP i sfery o równiku Ω.

Podobnie jak w sposobie I definiujemy punkt A_1 i dowodzimy, że P jest ortocentrum trójkąta ADA_1, a także że DD' jest jego wysokością. Niech AA_2 i A_1A_3 będą pozostałymi wysokościami trójkąta ADA_1. Punkt X będący odbiciem D' względem AD leży na prostej A_2A_3 na mocy lematu. Oczywiście A_2 i A_3 leżą na sferze o średnicy DP. Leżą też na sferze o równiku Ω. Rzeczywiście, gdy M jest środkiem AA_1, a O środkiem Ω, to prosta OM jest prostopadła do płaszczyzny ADA_1, więc z równości $AM = A_1M = A_2M = A_3M$ wynika, że $AO = A_1O = A_2O = A_3O$. Widzimy zatem, że X leży na płaszczyźnie potęgowej tych dwóch sfer. Odbicie D' względem AP też na niej leży — D jest ortocentrum trójkąta APA_1, a PD', AA_3, A_1A_2 są jego wysokościami, więc można powtórzyć powyższe rozumowanie. Analogicznie dowodzimy, że odbicia D' względem prostych BD, BP, CD, CP leżą na rozważanej płaszczyźnie potęgowej.

9. Okrąg wpisany w trójkąt ABC o środku w punkcie I jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Niech P będzie rzutem punktu D na prostą EF. Półproste AP oraz IP przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach G i Q. Niech M będzie środkiem odcinka BC. Wykazać, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt GQM.

Rozwiązanie:

Niech X będzie przecięciem prostych EF i BC. Czwórka $BCDX$ jest harmoniczna, a kąt XPD jest prosty, więc PX i PD są dwusiecznymi kątów wyznaczonych przez proste PB i PC. W szczególności $\sphericalangle FPB = \sphericalangle CPE$. Ponadto $\sphericalangle BFP = \sphericalangle FEC$. Trójkąty BFP i CEP są więc podobne. Stąd $\frac{FP}{EP} =$

$\frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$.

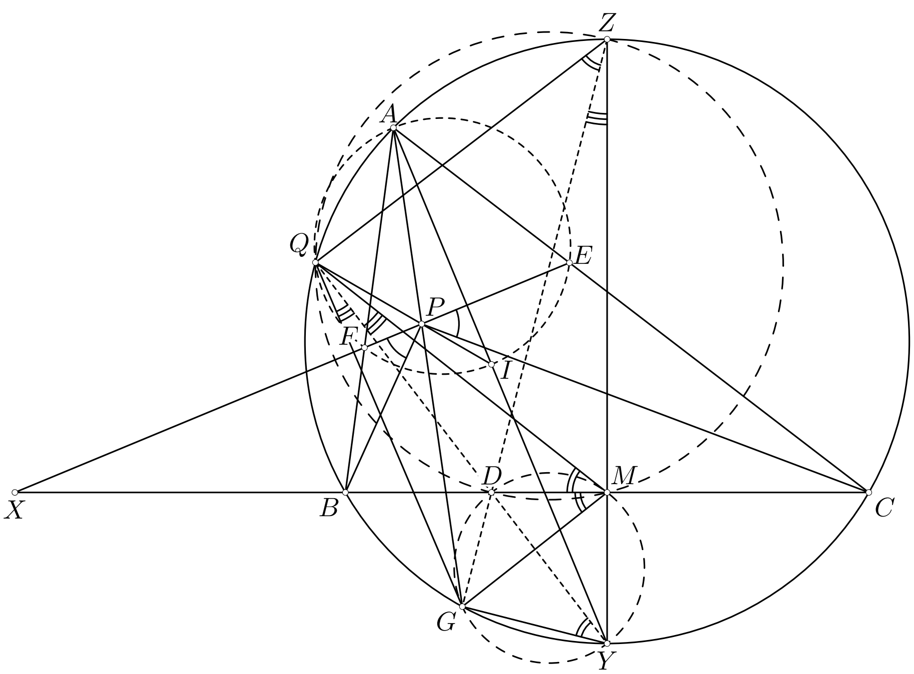
Niech ω i Ω będą okręgami opisanymi na trójkątach AEF i ABC. Oznaczmy przez $Q' \neq A$ drugi punkt przecięcia okręgów ω i Ω. Punkt Q' jest środkiem podobieństwa spiralnego przeprowadzającego punkt F na B i E na C , więc trójkąty $Q'FB$ i $Q'EC$ są podobne. Stąd $\frac{FQ'}{EQ'} = \frac{FB}{EC} = \frac{FP}{EP}$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwusiecznej wynika, że $Q'P$ jest dwusieczną kąta $FQ'E$. Oczywiście punkt I jest środkiem krótszego łuku FE okręgu ω, więc I leży na $Q'P$. Wnioskujemy stąd, że $Q' = Q$.

Niech Y i Z będą środkami krótszego łuku BC i dłuższego łuku BC okręgu Ω. Deltoidy $AFIE$ i $ZBYC$ są podobne, więc wspomniane podobieństwo spiralne przekształca A na Z i I na Y. Punkt P dzieli odcinek FE w takim samym stosunku co D dzieli BC, więc to podobieństwo spiralne przekształca P na D. Wynika stąd w szczególności, że:

- Q, D, Y są współliniowe, co daje $\sphericalangle DQZ = 90° = \sphericalangle ZMD$ i współokręgowość punktów Q, D, M, Z;
- $\sphericalangle PAI = \sphericalangle DZY$, co wobec $\sphericalangle GZY = \sphericalangle GAY$ daje współliniowość punktów G, D, Z.

Widzimy, że $\sphericalangle YGD = 90° = \sphericalangle DMY$, więc punkty D, M, Y, G leżą na jednym okręgu.

Mamy $\sphericalangle GQD = \sphericalangle GZY = \sphericalangle DQM$, więc QD jest dwusieczną kąta GQM. Ponadto $\sphericalangle QMD = \sphericalangle QZD = \sphericalangle QYG = \sphericalangle DMG$, więc MD jest dwusieczną kąta QMG. Stąd D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt QMG.



10. Wykazać, że liczba $n^3 - n - 3$ nie jest kwadratem liczby całkowitej dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n.

Rozwiązanie:

Niech $n^3 - n - 3 = k^2$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k. Rozpatrzmy dwa przypadki:

Przypadek 1. n jest nieparzyste. Zauważmy, że liczba $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ jest podzielna przez 8, ponieważ obydwie z liczb $n-1, n+1$ są parzyste i jedna z nich jest podzielna przez 4. Z drugiej strony k też musi być nieparzyste, więc $n^3 - n \equiv 3 + k^2 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \pmod 8$, czyli otrzymaliśmy sprzeczność.

Przypadek 2. n jest parzyste. Z wyjściowego równania łatwo sprawdzić, że $n \equiv 4 \pmod 8$, czyli $n + 2 \equiv 6 \pmod 8$, zatem liczba $n + 2$ musi mieć dzielnik pierwszy p przystający do 3 modulo 4. Zauważmy, że możemy przekształcić równanie $n^3 - n - 3 = k^2$ do postaci $(n+2)(n^2 - 2n + 3) = k^2 + 3^2$. Skoro $p \mid n + 2$, to $p \mid k^2 + 3^2$. Oznacza to, że -9 jest resztą kwadratową modulo p, co jest możliwe tylko dla $p = 3$ (dla liczb pierwszych postaci $4k + 3$). Zatem $n \equiv 1 \pmod 3$, więc $n^2 - 2n + 3 \equiv 2 \pmod 3$. Zauważmy, że skoro $3 \mid k^2 + 9$ to również $3 \mid k$, czyli $9 \mid k^2 + 9$. Zapiszmy $k = 3m$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m. Otrzymujemy $(n+2)(n^2-2n+3)=9(m^2+1)$. Ale $n^2-2n+3 \equiv 3 \pmod 8$, więc liczba n^2-2n+3 musi mieć dzielnik pierwszy q przystający do 3 modulo 4 i różny od 3. Oznacza to, że $q \mid m^2+1$, co nie może być spełnione, bo -1 nie jest resztą kwadratową modulo q. Ta sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

11. Udowodnić, że jeśli dla pewnych liczb całkowitych dodatnich a, b liczby $ab+1$ oraz $ab+a+1$ są kwadratami pewnych liczb całkowitych, to $8(2b+1) \mid a$.

Rozwiązanie:

Niech $ab+1=n^2$ oraz $ab+a+1=m^2$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich $m>n$. Odejmując te równości dostajemy $a=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$. Niech $s=m-n, t=m+n$, przy czym $s<t$. Oczywiście $a=st$. Ustalmy b. Udowodnimy indukcyjnie po s, że jeśli dla pary (s,t) istnieją liczby spełniające założenia zadania to $8(2b+1) \mid st$, $2 \mid s$ oraz $2 \mid t$. Bazą indukcji będzie $s=1$ i $s=2$.

Jeśli $s=1$ to $m-n=1$, więc $a=2n+1$. Z równania $ab+1=n^2$ obliczamy $b=\frac{n^2-1}{2n+1}$, co implikuje $2n+1 \mid (n-1)(n+1)$. Ale $\mathrm{NWD}(2n+1, n+1)=1$, więc musimy mieć $2n+1 \mid n-1$, co może być spełnione tylko dla $n=1$, gdzie teraz otrzymujemy sprzeczność z równania $ab+1=n^2=1$. Czyli dla $s=1$ nie istnieją liczby spełniające założenia.

Rozpatrzmy teraz przypadek $s=2$. Uzyskujemy $m=n+2$, więc $a=4n+4$ oraz $b=\frac{n^2-1}{4n+4}=\frac{n-1}{4}$. Zatem $n=4b+1$. Zauważmy, że s i t są parzyste, ponieważ $s=2$ oraz $t=\frac{a}{s}=2n+2$. Podzielność też zachodzi, bo $a=4n+4=16b+8=8(2b+1)$.

Załóżmy teraz, że $s \geqslant 3$. Łatwo dostrzec, że $n=\frac{t-s}{2}$. Równanie $ab+1=n^2$ przyjmuje teraz postać

$$stb+1=\left(\frac{t-s}{2}\right)^2. \tag{5}$$

Równoważnie

$$4stb+4=t^2-2ts+s^2$$

$$t^2-2s(2b+1)t+s^2-4=0.$$

Zastosujemy teraz technikę Vieta jumping[2]. Rozpatrzmy równanie kwadratowe zmiennej x

$$x^2-2s(2b+1)x+s^2-4=0.$$

Wiemy już, że jednym z jego pierwiastków jest t. Niech drugi to t'. Ze wzorów Viete'a spełnione są równości

$$t+t'=2s(2b+1) \quad \text{oraz} \quad tt'=s^2-4.$$

Zauważmy, że z pierwszego równania dostajemy, że t' jest całkowite, a z drugiego $t'=\frac{s^2-4}{t}<\frac{s^2}{s}=s$. Równanie (5) jest symetryczne ze względu na s i t, więc para (t', s) jest jego rozwiązaniem. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy $8(2b+1) \mid t's$ oraz $2 \mid s$, $2 \mid t'$.

Łatwo dostrzec, że $2 \mid s$ oraz $2 \mid 2s(2b+1)-t'=t$. Wystarczy jeszcze wykazać, że $8(2b+1) \mid st$. Pozostaje teraz zauważyć, że

$$st=s(2s(2b+1)-t')=2s^2(2b+1)-st'.$$

Wiemy jednak, że $8(2b+1) \mid st'$ oraz $8 \mid 2s^2$. Zatem żądana podzielność jest spełniona, co kończy rozwiązanie zadania.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Vieta_jumping

Drugi Mecz Matematyczny

1. Dany jest wielościan wypukły P. W każdy jego wierzchołek wpisano liczbę nieujemną tak, że suma wszystkich wpisanych liczb wynosi 1. Następnie na każdej krawędzi P napisano liczbę będącą iloczynem liczb wpisanych w wierzchołkach będących końcami tej krawędzi. Udowodnić, że suma liczb napisanych na krawędziach jest nie większa niż $0,375$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i E odpowiednio zbiór wierzchołków i krawędzi wielościanu P, ponadto niech $f(v_i)$ oznacza liczbę wpisaną w wierzchołek v_i. Chcemy wykazać, że wyrażenie

$$S(f) = \sum_{v_i v_j \in E} f(v_i) f(v_j)$$

jest nie większe niż $3/8$, jeżeli $f : V \to [0,1]$ oraz $\sum_{v \in V} f(v) = 1$.

Udowodnimy, że dla każdego wpisania liczb w wierzchołki można uzyskać nie mniejszą wartość wyrażenia $S(f)$, wpisując niezerowe liczby jedynie w co najwyżej cztery wierzchołki.

Rozważmy dwa wierzchołki v_a, v_b nie połączone krawędzią takie, że $f(v_a), f(v_b) > 0$. Definiujemy f_ε jako

$$f_\varepsilon(v_i) = \begin{cases} f(v_a) + \varepsilon & \text{jeśli } i = a \\ f(v_b) - \varepsilon & \text{jeśli } i = b \\ f(v_i) & \text{jeśli } i \neq a, b \end{cases}$$

dla takich ε, żeby f_ε spełniała warunki zadania. Niech $g(\varepsilon) = S(f_\varepsilon)$. Wtedy g jest **liniowa**, więc przyjmuje największą wartość na jednym z krańców przedziału, na którym jest określona (nieformalnie, gdy „wyzerujemy” jeden wierzchołek).

Stąd, z każdego wpisania liczb f w wierzchołki możemy uzyskać inne wpisanie liczb f_1 takie, że $S(f_1) \geqslant S(f)$ oraz każde dwa wierzchołki, w które przy f_1 są wpisane niezerowe liczby, są połączone krawędzią. Mianowicie, dopóki istnieją dwa wierzchołki niepołączone krawędzią z wpisanymi niezerowymi liczbami, możemy w sposób opisany powyżej zamienić jedną z nich na zero. W ten sposób liczba wierzchołków z wpisaną niezerową liczbą maleje, więc po skończenie wielu operacjach otrzymamy żądane f_1. Ponieważ P, jako wielościan wypukły, jest grafem planarnym, to takich wierzchołków po wykonaniu wszystkich operacji może być co najwyżej cztery.

Pozostało wykazać nierówność dla dowolnego wpisania liczb w wierzchołki czworościanu. Równoważnie, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c, d takich, że $a + b + c + d = 1$ zachodzi nierówność $ab + bc + cd + ac + bd + ad \leqslant 3/8$.

Zaiste:

$$ab + bc + cd + ac + bd + ad = \frac{1}{2}\left((a + b + c + d)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(a + b + c + d)^2 = 3/8,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową.

2. Dany jest skończony zbiór dodatnich liczb całkowitych S. Udowodnić, że istnieje liczba N o następującej własności. Dla dowolnych (niekoniecznie różnych) liczb $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell \in S$, jeżeli $k, \ell > N$ oraz

$$\prod_{i=1}^{k} a_i = \prod_{i=1}^{\ell} b_i,$$

to istnieją niepuste podzbiory właściwe $A \subset \{1, \ldots, k\}$ i $B \subset \{1, \ldots, \ell\}$, dla których

$$\prod_{i \in A} a_i = \prod_{i \in B} b_i.$$

Rozwiązanie:

Każdym $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell \in S$, dla których odpowiednie iloczyny są równe, możemy jednoznacznie przyporządkować ciąg $2|S|$ nieujemnych liczb całkowitych, gdzie dla $1 \leqslant m \leqslant |S|$ na miejscu m w tym ciągu jest liczba wystąpień m-tej liczby ze zbioru S wśród liczb $a_1, \ldots, a_k$, a na miejscu $m + |S|$ w tym ciągu jest liczba wystąpień m-tej liczby ze zbioru S wśród liczb $b_1, \ldots, b_\ell$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich ciągów przez $\mathcal{S}$.

Zauważmy, że jeżeli dla ciągu $c \in \mathcal{S}$ istnieje taki ciąg $c' \in \mathcal{S}$, że $c' \neq c$ oraz na każdej pozycji wartość z c jest nie mniejsza niż wartość na tej pozycji w c', to c' reprezentuje szukane „skrócenie" równości reprezentowanej przez ciąg c. Niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem tych ciągów $c \in \mathcal{S}$, dla których przed chwilą opisany ciąg c' nie istnieje. Wykażemy, że zbiór $\mathcal{T}$ jest skończony. Tym samym zakończymy rozwiązanie zadania, gdyż wtedy N zdefiniowane jako

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{2|S|} c[i] \colon c \in \mathcal{T}\right\}.$$

spełnia warunki zadania. Wynika to z poniższego lematu.

Lemat (Lemat Dicksona)**.** *Niech d będzie dodatnią liczbą całkowitą. Dla ciągów $c, c' \in \mathbb{N}^d$, niech $c \leqslant c'$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $1 \leqslant i \leqslant d$ zachodzi $c[i] \leqslant c'[i]$. Niech $x_1, x_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem elementów $\mathbb{N}^d$. Wtedy istnieją $i < j$, dla których $x_i \leqslant x_j$.*

Dowód. Lemat udowodnimy przez indukcję po d. Dla $d = 1$ lemat jest oczywisty. Załóżmy, że teza zachodzi dla d, udowodnimy ją dla $d + 1$.

Rozważmy $d + 1$-współrzędną elementów ciągu. Mamy dwie możliwości: albo jest ona ograniczona, i wtedy możemy wybrać nieskończony podciąg, który ma taką samą wartość na tej współrzędnej, albo jest ona nieograniczona, i wtedy możemy wybrać nieskończony podciąg, na którym ostatnia współrzędna rośnie. W obu przypadkach, możemy bez straty ogólności założyć, że jeśli $i < j$, to $x_i[d + 1] \leqslant x_j[d + 1]$.

Z drugiej strony, jeżeli ograniczymy się do pierwszych d współrzędnych, to z założenia indukcyjnego wiemy, że muszą istnieć $i < j$, dla których x_i jest mniejsze bądź równe x_j na d pierwszych współrzędnych. Jednakże jak założyliśmy wcześniej, również $x_i[d+1] \leqslant x_j[d+1]$, więc $x_i \leqslant x_j$. Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód nie wprost. □

3. W przedszkolu jest $4n$ dzieci podzielonych na n czteroosobowych grupek przyjaciół. Pani kazała wszystkim dzieciom złapać się za ręce tworząc zbiór kółek. Okazało się, że każde kółko jest złożone z parzystej liczby dzieci. Udowodnić, że każdemu dziecku da się przyporządkować liczbę od 1 do 4 w taki sposób, że żadna para dzieci z jednej grupki ani para, która trzyma się za ręce nie dostała tego samego numeru.

Rozwiązanie:

W języku teorii grafów mamy udowodnić, że jeżeli graf jest sumą n rozłącznych czteroelementowych klik oraz cykli o parzystych długościach (gdzie każdy wierzchołek grafu należy do dokładnie jednego), to jest on czterokolorowalny.

Zacznijmy od przytoczenia dwóch prostych faktów.

Lemat 1. *Jeżeli graf składa się z parzystych cykli, to jest dwukolorowalny.*

Lemat 2. *Jeżeli graf $G_1 = (V, E_1)$ jest a-kolorowalny, a $G_2 = (V, E_2)$ jest b-kolorowalny, to wtedy graf $G = (V, E_1 \cup E_2)$ jest ab-kolorowalny.*

Lemat 2 wynika z konstrukcji produktowej. To znaczy, jeżeli wierzchołek v miał kolor i w kolorowaniu grafu G_1 oraz j w kolorowaniu grafu G_2, to w kolorowaniu grafu G możemy mu przyporządkować kolor (i, j) (liczba takich możliwych par oczywiście nie przekracza ab).

Zbiór parzystych cykli oznaczmy przez C. Podzielmy jego krawędzie na zbiory C_1 oraz C_2, gdzie do C_1 bierzemy co drugą krawędź z każdego cyklu (możemy to zrobić ponieważ te cykle mają parzystą długość), a do C_2 bierzemy resztę. Zauważmy, że zarówno C_1 jak i C_2 są tak zwanymi *pełnymi skojarzeniami*, tzn. zbiorami krawędzi, w których z każdego wierzchołka wychodzi dokładnie jedna krawędź.

Następnie w obrębie każdej czteroelementowej kliki wyróżnijmy dowolne dwie krawędzie o rozłącznych wierzchołkach i tak otrzymany zbiór nazwijmy M_1, który także jest pełnym skojarzeniem.

Zdefiniujmy teraz graf G_1 jako sumę grafów C_1 oraz M_1. Skoro zarówno C_1 i M_1 są pełnymi skojarzeniami, to w ich sumie z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie dwie krawędzie, zatem owa suma jest zbiorem parzystych cykli. Zatem na mocy lematu 1 tak otrzymany graf jest 2-kolorowalny i ustalmy jego pewne 2-kolorowanie. Skupmy się teraz na pewnej klice (a, b, c, d) i ustalmy, że to krawędzie ab oraz cd zostały wybrane do M_1. Zatem a i b uzyskały różne kolory w opisanym 2-kolorowaniu (podobnie c i d). Bez straty ogólności załóżmy, że a i c otrzymały te same kolory (zatem b i d też). Zauważmy, że w takim razie a otrzymał inny kolor niż d, a b inny niż c. Stwórzmy teraz zbiór krawędzi M_2, do którego będą należeć krawędzie ad oraz bc i krawędzie zdefiniowane w analogiczny sposób dla pozostałych klik. Widzimy, że w takim razie uzyskane kolorowanie jest poprawnym dwukolorowaniem nie tylko grafu $G_1 = (V, C_1 \cup M_1)$, ale także $G_1' = (V, C_1 \cup M_1 \cup M_2)$.

Stwórzmy teraz kolejne skojarzenie w obrębie tej kliki stworzone z krawędzi ac oraz bd i powtórzmy analogiczną procedurę dla każdej innej kliki i sumę tak zdefiniowanych skojarzeń oznaczmy przez M_3.

Jako kolejny krok weźmy graf $G_2 = (V, C_2 \cup M_3)$. Tak stworzony graf ponownie jest sumą cykli o parzystych długościach i można mu wybrać pewne dwukolorowanie. Weźmy teraz kolorowanie produktowe opisane w dowodzie Lematu 2 dla grafów G_1' oraz G_2. Jest ono poprawnym czterokolorowaniem grafu $(V, C_1 \cup C_2 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3)$, jednak ten graf jest właśnie naszym oryginalnym grafem, co kończy dowód zadania.

4. Na płaszczyźnie danych jest n niebieskich i n czerwonych punktów. Żadne trzy z tych $2n$ punktów nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że istnieje takie parowanie punktów, w którym w każdej parze jest jeden czerwony i jeden niebieski punkt i jeżeli dla każdej pary narysujemy koło, którego owa para jest średnicą, to wszystkie tak narysowane koła będą miały niepuste przecięcie.

Rozwiązanie:

Narysujmy układ współrzędnych i podzielmy punkty na cztery grupy w zależności od tego do której ćwiartki należą (jeżeli pewien punkt leży na którejś z osi, to przyporządkujmy go do którejkolwiek z ćwiartek na brzegu której leży). Niech teraz B_i oraz R_i oznaczają odpowiednio liczby niebieskich i czerwonych punktów w i-tej ćwiartce dla $i = 1, 2, 3, 4$ (dla wygody zapisu uznajemy, że $B_i = B_{i+4}$). Zauważmy teraz, że jeżeli sparujemy ze sobą dowolny czerwony punkt X należący do pierwszej ćwiartki oraz niebieski punkt Y należący do trzeciej ćwiartki, to kąt XOY, gdzie O jest początkiem układu współrzędnych, będzie prosty lub rozwarty, zatem będzie należał do koła o średnicy XY. Podobnie ma się sprawa dla parowania punktów różnych kolorów z ćwiartek i oraz $i + 2$. Widzimy zatem, że jeżeli $B_1 = R_3, B_2 = R_4, B_3 = R_1$ oraz $B_4 = R_2$, to szukane parowanie istnieje. Oczywiście trzeba jeszcze wykazać, że taka sytuacja może zajść, ale zauważmy, że mamy sporą swobodę w wyborze układu odniesienia, to znaczy nasz układ współrzędnych możemy obracać oraz przesuwać i wystarczy nam, jeżeli kiedykolwiek uzyskamy wspomniane równości.

Zauważmy, że aby wspomniane równości miały szansę zachodzić, to obie osie muszą dzielić punkty na połowy, zatem dobrym tropem będzie badanie prostych dzielących je w taki sposób. Łatwo zauważyć, że musi istnieć pozioma prosta dzieląca punkty na połowy (w przypadku punktów leżących dokładnie na prostej mamy dowolność w przyporządkowaniu ich do połowy). Analogicznie, dla dowolnego nachylenia $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ do poziomu będzie istniała prosta o takim nachyleniu do poziomu dzieląca punkty na połowy.

Nazwijmy ją $f(\alpha)$. Możemy dodatkowo założyć, że $f(\alpha) = f(\alpha + \pi)$ dla $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, przy czym będziemy myśleć, że o ile $f(\alpha)$ i $f(\alpha + \pi)$ to ta sama prosta, to mają one przeciwne zwroty przy traktowaniu ich jako osie układów współrzędnych.

Rozważmy teraz parę prostych $f(\alpha)$ oraz $f(\alpha + \frac{\pi}{2})$, gdzie traktujemy je jakie osie OX oraz OY w kontekście bycia kandydatem na układ odniesienia spełniający nasz warunek. Zdefiniujmy teraz funkcję $b(\alpha) = R_1 - B_3$, gdzie R_1 oraz B_3 są takie jak opisane na początku rozwiązania dla opisanego układu odniesienia. Pokażemy, że jeżeli $b(\alpha) = 0$, to nasza nadzieja się ziści. Zauważmy, że jeżeli oznaczymy $A_i = R_i + B_i$, to na mocy definicji $f(\alpha)$ mamy $A_1 + A_4 = A_2 + A_4 = n$, a na mocy definicji $f(\alpha + \frac{\pi}{2})$ mamy $A_1 + A_2 = A_3 + A_4 = n$. Widzimy zatem, że $A_1 = A_3$ oraz $A_2 = A_4$. W szczególności skoro $R_1 + B_1 = R_3 + B_3$ oraz $R_1 = B_3$, to także $R_3 = B_1$. Ale skoro $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = n = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$, to mamy także $R_2 + R_4 = B_2 + B_4$. Skoro jednak $A_2 = A_4$, to $R_2 + B_2 = R_4 + B_2$, zatem mamy także $B_2 = R_4$ i $R_2 = B_4$, co pokazuje że nasz warunek jest spełniony.

Wystarczy zatem udowodnić, że istnieje takie α, że $b(\alpha) = 0$. Można jednak zauważyć, że skoro układy odniesienia stworzone dla $\alpha = 0$ oraz $\alpha = \pi$ to ten sam układ tylko z przeciwnie zwróconymi osiami, to $b(0) = -b(\pi)$, ponieważ pierwsza i trzecia ćwiartka zostały względem siebie zamienione (pamiętamy, że $R_1 - B_3 = -R_3 + B_1$). Kluczową obserwacją jest to że przy stopniowym zwiększaniu wartości α, wartości funkcji b nie mogą się zmieniać o więcej niż jeden (wyobrażamy sobie proces „kręcenia” naszym układem współrzędnych), to znaczy, jeżeli $f(\alpha_1) + 2 \leqslant f(\alpha_2)$ dla pewnych $\alpha_1 < \alpha_2$, to istnieje pewne β takie że $f(\alpha_1) < f(\beta) < f(\alpha_2)$ oraz $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$ (oraz analogicznie jeżeli zwroty nierówności pomiędzy $f(\alpha_1)$ i $f(\alpha_2)$ są przeciwne). Taka własność jest swoistym dyskretnym odpowiednikiem własności Darboux dla funkcji ciągłych. Łącząc ową własność z faktem że $b(0) = -b(\pi)$ otrzymujemy jako prosty wniosek istnienie takiego α, że $b(\alpha) = 0$, co kończy dowód zadania.

5. W przestrzeni trójwymiarowej danych jest n punktów $A_1, \ldots, A_n$ i n wektorów $v_1, \ldots, v_n$. Udowodnić, że istnieje taka permutacja σ zbioru $\{1, \ldots, n\}$, że dla każdych $1 \leqslant i, j \leqslant n$ odległość między punktami $A_i + v_{\sigma(i)}$ oraz $A_j + v_{\sigma(j)}$ jest nie mniejsza niż odległość między punktami A_i oraz A_j.

Rozwiązanie:

Niech a_i oznacza wektor odpowiadający punktowi A_i. Teraz dany warunek można zapisać używając iloczynu skalarnego (oznaczanego przez $\circ$):

$$|a_i + v_{\sigma(i)} - a_j - v_{\sigma(j)}| \geqslant |a_i - a_j|$$

$$|a_i + v_{\sigma(i)} - a_j - v_{\sigma(j)}|^2 \geqslant |a_i - a_j|^2$$

$$(a_i - a_j) \circ (a_i - a_j) + 2(a_i - a_j) \circ (v_\sigma(i) - v_\sigma(j)) + (v_\sigma(i) - v_\sigma(j)) \circ (v_\sigma(i) - v_\sigma(j)) \geqslant (a_i - a_j) \circ (a_i - a_j)$$

$$2(a_i - a_j) \circ (v_\sigma(i) - v_\sigma(j)) + (v_\sigma(i) - v_\sigma(j)) \circ (v_\sigma(i) - v_\sigma(j)) \geqslant 0$$

Ponieważ $(v_\sigma(i) - v_\sigma(j)) \circ (v_\sigma(i) - v_\sigma(j)) = |v_{\sigma(i)} - v_{\sigma(j)}|^2 \geqslant 0$, to wystarczy znaleźć takie σ, że dla każdej pary $i \neq j$ zachodzi

$$(a_i - a_j) \circ (v_\sigma(i) - v_\sigma(j)) \geqslant 0$$

lub równoważnie

$$a_i \circ v_{\sigma(i)} + a_j \circ v_{\sigma(j)} \geqslant a_i \circ v_{\sigma(j)} + a_j \circ v_{\sigma(i)}$$

Udowodnimy, że permutacja, dla której wartość

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \circ v_{\sigma(i)}$$

jest największa, spełnia ten warunek. Jeżeli zamienimy miejscami wektor $v_{\sigma(i)}$ oraz $v_{\sigma(j)}$, to uzyskamy inną permutację wektorów, czyli wartość powyższej sumy się nie zwiększy. Z drugiej strony jedynie dwa składniki tejże sumy ulegną zmianie. Otrzymujemy zatem, że

$$a_i \circ v_{\sigma(i)} + a_j \circ v_{\sigma(j)} \geqslant a_i \circ v_{\sigma(j)} + a_j \circ v_{\sigma(i)}$$

dla dowolnych $i \neq j$.

6. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $f(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla których dla każdej nieparzystej liczby pierwszej p zachodzi podzielność $f(p) \mid 2^p - 2$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że istnieje liczba pierwsza $q > 3$ oraz taka liczba r niepodzielna przez q, że $q \mid f(r)$. Wtedy dla każdego a zachodzi również $q \mid f(aq + r)$. Niech d będzie rzędem 2 modulo q (istnieje, gdyż q nieparzysta). Rozważmy układ kongruencji

$$\begin{cases} x \equiv r \pmod{q}, \\ x \equiv -1 \pmod{d}. \end{cases}$$

Skoro $d \mid q - 1$, to w szczególności $\mathrm{NWD}(d, q) = 1$, i z chińskiego twierdzenia o resztach powyższy układ kongruencji ma rozwiązania postaci $x = x_0 + adq$, z dowolnym $a \in \mathbb{Z}$, dla pewnego $x_0 \in \mathbb{Z}$. Ponadto, ponieważ $\mathrm{NWD}(x_0, q) = \mathrm{NWD}(r, q) = 1$ oraz $\mathrm{NWD}(x_0, d) = \mathrm{NWD}(-1, d) = 1$, to $\mathrm{NWD}(x_0, dq) = 1$. Zatem z twierdzenia Dirichleta możemy znaleźć liczbę pierwszą p postaci $x_0 + adq$.

Wtedy otrzymujemy, że $q \mid f(r) \equiv f(p) \pmod{q}$, zatem $q \mid f(p) \mid 2^p - 2 \mid 2^{p+1} - 4$. Jednocześnie $p \equiv -1 \pmod{d}$, więc $d \mid p + 1$, czyli $2^{p+1} - 4 \equiv 1 - 4 = -3 \pmod{q}$. Stąd $q \mid -3$, co jednak jest niemożliwe, jako iż $q > 3$.

Tak więc jeśli $q > 3$ i $q \mid f(x)$, to również $q \mid x$.

Załóżmy, że $f(0) \neq 0$, i zapiszmy

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0.$$

Wstawiając $x = 6c_0^2 y$, dostajemy

$$f(6c_0 y) = c_0(6^n c_n c_0^{2n-1} y^n + 6^{n-1} c_{n-1} c_0^{2n-3} y^{n-1} + \ldots + 6c_1 y c_0 + 1).$$

Wyrażenie w nawiasie jest względnie pierwsze z $6c_0 y$. Jednocześnie, jeśli miałoby jakiś dzielnik pierwszy q, to dostajemy $q \neq 2, 3$, więc z udowodnionej przez nas wcześniej własności wynika $q \mid x = 6c_0 y$ – to zaś zachodzić nie może. Zatem wyrażenie w nawiasie jest równe ± 1 niezależnie od y, co implikuje, że $f(x)$ jest stały.

W ogólnym przypadku, gdy nie musi zachodzić $f(0) \neq 0$, możemy zapisać $f(x) = x^m g(x)$ dla pewnego m naturalnego, z $g(0) \neq 0$. Wtedy $g(x) \mid f(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}$, więc $g(x)$ też spełnia warunki zadania, zatem z udowodnionego przez nas przed chwilą faktu, jest on stały.

Ostatecznie więc jedynymi pozostałymi nam kandydatami na rozwiązanie są wielomiany postaci $f(x) = cx^m$. Wstawiając $x = 3$ otrzymujemy $c3^m \mid 2^3 - 2 = 6$, co oznacza $m = 1$ i $c \mid 2$ albo $m = 0$ i $c \mid 6$. Twierdzimy, że takie wielomiany spełniają warunek zadania. W pierwszym przypadku $f(p) \mid 2p$. Liczba $2^p - 2$ jest oczywiście parzysta, a do tego podzielna przez p z małego twierdzenia Fermata, przy czym oczywiście p jest nieparzysta, więc możemy połączyć te dwie podzielności w jedną: $2p \mid 2^p - 2$, więc także $f(p) \mid 2^p - 2$. Jeśli zaś f miałaby być stała, to chcemy udowodnić $6 \mid 2^p - 2$. Jednak podzielność przez 2 jest oczywista, zaś podzielność przez 3 wynika z nieparzystości p (gdyż $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$).

Ostatecznie więc wielomianami f spełniającymi warunek zadania są: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm x$, $\pm 2x$.

7. Niech $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Wykazać, że istnieje taka bijekcja $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, że dla każdych liczb $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n).$$

Rozwiązanie:

Niech

$$A = \{3x + 1,\ x = 0, 1, 2, \ldots\}, \quad B = \{4x + 1,\ x = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Dane w treści zadania równanie możemy przepisać w postaci

$$4f\left(\frac{(3m+1)(3n+1)-1}{3}\right)+1=(4f(m)+1)(4f(n)+1).$$

Zdefiniujmy funkcję $g : A \to B$ wzorem $g(x) = 4f(\frac{x-1}{3}) + 1$. Powyższe równanie przyjmuje postać

$$g(xy) = g(x)g(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in A.$$

Na odwrót — jeśli znajdziemy bijekcję g spełniającą powyższe równanie, to funkcja $f(x) = \frac{g(3x+1)-1}{4}$ spełnia równanie dane w treści zadania i jest bijekcją.

Niech P_1, P_2, Q_1, Q_2 będą zbiorami wszystkich liczb pierwszych odpowiednio postaci $3k+1$, $3k+2$, $4k+1$, $4k+3$. Wiadomo, że każdy z tych zbiorów jest nieskończony. Niech h będzie dowolną bijekcją ze zbioru $P_1 \cup P_2$ w zbiór $Q_1 \cup Q_2$ odwzorowującą zbiór P_1 bijektywnie na Q_1, zaś zbiór P_2 bijektywnie na Q_2. Niech teraz $g(1) = 1$ oraz dla $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ (p_i nie muszą być parami różne) niech $g(n) = h(p_1)h(p_2)\ldots h(p_m)$. Zauważmy teraz, że jeśli $n \in A$, to w rozkładzie n występuje parzysta liczba liczb pierwszych postaci $3k+2$ i pewna liczba liczb pierwszych postaci $3k+1$. W takim razie parzysta liczba spośród liczb $h(p_i)$ jest postaci $4k+3$ oraz pewna liczba z nich jest postaci $4k+1$. W takim razie iloczyn $h(p_1)h(p_2)\ldots h(p_m)$ jest liczbą postaci $4k+1$, więc funkcja g jest dobrze zdefiniowana. Jest jasne, że funkcja g jest multyplikatywna i jest bijekcją, co kończy rozwiązanie.

8. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, niech $\sigma(n)$ oznacza sumę dodatnich dzielników n. Niech a i b będą takimi dwiema dodatnimi liczbami całkowitymi, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi $\sigma(a^n) \mid \sigma(b^n)$. Udowodnić, że jeśli p jest liczbą pierwszą i $p^k \mid a$ oraz $p^{k+1} \nmid a$, to istnieje taka liczba pierwsza q, że $q^k \mid b$ oraz $q^{k+1} \nmid b$.

Rozwiązanie:

Niech rozkładami na czynniki pierwsze a i b będą odpowiednio

$$a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \qquad b = q_1^{\beta_1} \ldots q_m^{\beta_m}.$$

Chcemy udowodnić, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant l$ istnieje $1 \leqslant j \leqslant m$, dla którego $\beta_j = \alpha_i$

Z warunku z treści zadania otrzymujemy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi

$$\prod_{i=1}^{l} \frac{p_i^{n\alpha_i+1}-1}{p_i-1} \mid \prod_{j=1}^{m} \frac{q_i^{n\beta_j+1}-1}{q_j-1}$$

czyli

$$\prod_{i=1}^{l}(p_i^{n\alpha_i+1}-1) \mid \prod_{j=1}^{m}(q_j^{n\beta_j+1}-1).$$

Intuicyjnie, w rozwiązaniu wykażemy, że dla każdego i istnieje j, że dla odpowiednio dobranych n liczby $n\alpha_i+1$ oraz $n\beta_j+1$ są obie podzielne przez dowolnie duże liczby y_n. Jednak wtedy $\mathrm{NWD}(y_n, n) = 1$ oraz

$$y_n \mid (n\alpha_i+1)-(n\beta_j+1) = n(\alpha_i-\beta_j),$$

a to znaczy, że $y_n \mid \alpha_i - \beta_j$. Stąd, jeśli y_n mogą być dowolnie duże, to otrzymamy $\alpha_i = \beta_j$.

Ustalmy i. Wybierzemy dwie liczby pierwsze s i r, które są względnie pierwsze z α_i oraz rząd p_i mod r jest równy s.

Niech s będzie liczbą pierwszą większą od p_i i α_i oraz niech r będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $\frac{p_i^s-1}{p_i-1}$. Gdyby $r \mid p_i - 1$, to wtedy również

$$0 \equiv \sum_{k=0}^{s-1} p_i^k \equiv s \cdot 1,$$

więc $s = r$, jednak $p_i - 1 < s \mid p_i - 1$, co jest absurdem. W takim razie $r \nmid p_i - 1$, stąd s jest rzędem p_i mod q, w szczególności $s \mid r - 1$, więc $r > s > \alpha_i$, stąd $\mathrm{NWD}(r, \alpha_i) = \mathrm{NWD}(s, \alpha_i) = 1$.

Niech x będzie pewną dodatnią liczbą całkowitą. Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że znajdziemy dodatnią liczbę całkowitą d_x spełniającą

$$\begin{aligned} d_x &\equiv 1 \pmod{\alpha_i} \\ d_x &\equiv 0 \pmod{r^{mx}} \\ d_x &\equiv 0 \pmod{s}. \end{aligned}$$

Zapiszmy $d_x = n_x\alpha_i + 1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n.

Dla liczby pierwszej p, niech $v_p(z)$ oznacza taką liczbę k, że $p^k \mid z$ oraz $p^{k+1} \nmid z$. Wykorzystamy następujący, znany lemat.

Lemat (Lifting The Exponent Lemma)**.** *Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, m, że $x \neq y$, $m > 0$, $p \mid x - y$ oraz $p \nmid xy$. Wówczas*

$$v_p(x^m - y^m) = v_p(x - y) + v_p(m).$$

Korzystając z lematu, otrzymujemy

$$v_r(p_i^{n_x\alpha_i+1} - 1) = v_r(p_i^{s\cdot(n_x\alpha_i+1)/s} - 1) = v_r(p_i^s - 1) + v_r((n_x\alpha_i + 1)/s) \geqslant mx + 1.$$

Korzystając z założenia z zadania oraz zasady szufladkowej otrzymujemy, że istnieje $1 \leqslant j \leqslant m$, dla którego

$$v_r(q_j^{n_x\beta_j+1} - 1) \geqslant x + 1.$$

Ustalmy to j i niech t będzie rzędem q_j mod r. Wtedy

$$x + 1 \leqslant v_r(q_j^{n_x\beta_j+1} - 1) = v_r(q_j^{t\cdot(n_x\beta_j+1)/t} - 1) = \underbrace{v_r(q_j^t - 1)}_{c} + v_r((n_x\beta_j + 1)/t).$$

Zatem

$$v_r(n_x\beta_j + 1), v_r(n_x\alpha_i + 1) > x - c.$$

Oczywiście $\mathrm{NWD}(n_x, r) = 1$, stąd

$$v_r(\beta_j - \alpha_i) > x - c$$

dla każdego x, stąd $\alpha_i = \beta_j$, co kończy dowód.

9. W trójkącie ABC odcinki BE i CF są dwusiecznymi i przecinają się w punkcie I. Punkt $N \neq A$ leży na okręgu opisanym na trójkącie AEF, przy czym $\sphericalangle IAN = 90°$. Prosta NI przecina okrąg opisany na AEF po raz drugi w punkcie $L \neq I$. Udowodnić, że środek okręgu opisanego na trójkącie AIL leży na prostej BC.

Rozwiązanie:

Niech φ będzie inwersją o środku w punkcie A o promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ złożoną z symetrią względem dwusiecznej kąta BAC i niech $X' = \varphi(X)$. Wtedy $B' = C, C' = B, I' = J$, gdzie J jest środkiem okręgu dopisanego. Okrąg AEF przechodzi na prostą $E'F'$, a prosta NI na okrąg AJN', który ma średnicę JN'. Stąd L' to rzut J na prostą $E'F'$. Środek okręgu AIL przechodzi na punkt symetryczny do A względem prostej JL', chcemy udowodnić że ten punkt leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Jest to równoważne temu, że prosta JL' przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Innymi słowy, jeżeli oznaczymy ten środek przez O, to chcemy udowodnić, że $OJ \perp E'F'$.

Zauważmy, że

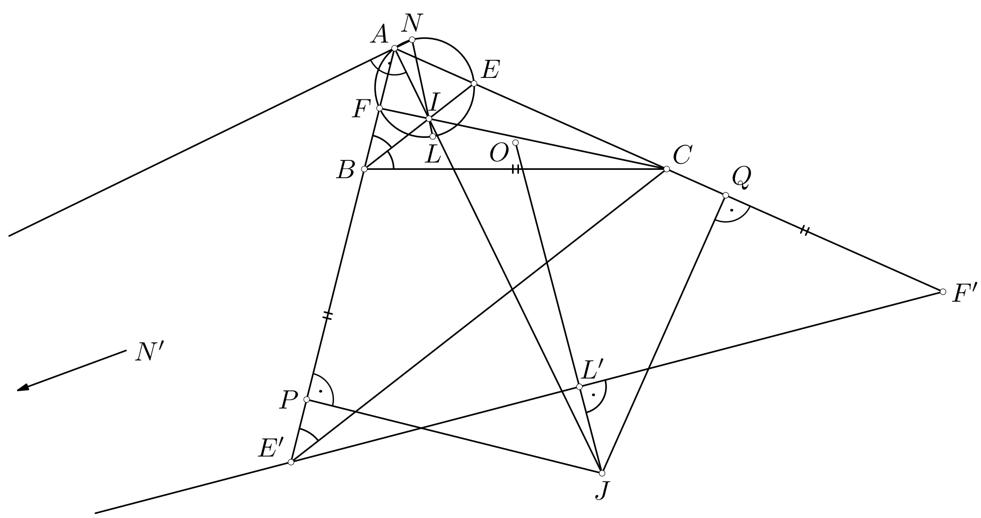
$$\sphericalangle AE'C = \sphericalangle ABE = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle E'BC),$$

więc trójkąt $BE'C$ jest równoramienny i $BE' = BC$. Analogicznie $CF' = BC$.

Wystarczy udowodnić, że $OE'^2 - JE'^2 = OF'^2 - JF'^2$. Niech P, Q będą rzutami J na AB i AC, $a = BC, b = AC, c = AB$, R i r promień okręgu opisanego i dopisanego. Wtedy

$$\begin{aligned}
& OE'^2 - JE'^2 - OF'^2 + JF'^2 \\
=& E'B \cdot E'A + R^2 - E'P^2 - r^2 - F'C \cdot F'A - R^2 + F'Q^2 + r^2 \\
=& a(a+c) - \left(a + c - \frac{1}{2}(a+b+c)\right)^2 - a(a+b) - \left(a + b - \frac{1}{2}(a+b+c)\right)^2 \\
=& a(c-b) - \frac{1}{4}\left((a+c-b)^2 - (a+b-c)^2\right) \\
=& a(c-b) - a(c-b) = 0,
\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie.



10. Niech AA_1, BB_1, CC_1 będą wysokościami trójkąta ostrokątnego różnobocznego ABC. Załóżmy, że A_2, B_2, C_2 są punktami styczności odpowiednio z bokami BC, CA, AB odpowiednich okręgów dopisanych. Wiadomo, że prosta B_1C_1 jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wykazać, że punkt A_1 leży na okręgu opisanym na trójkącie $A_2B_2C_2$.

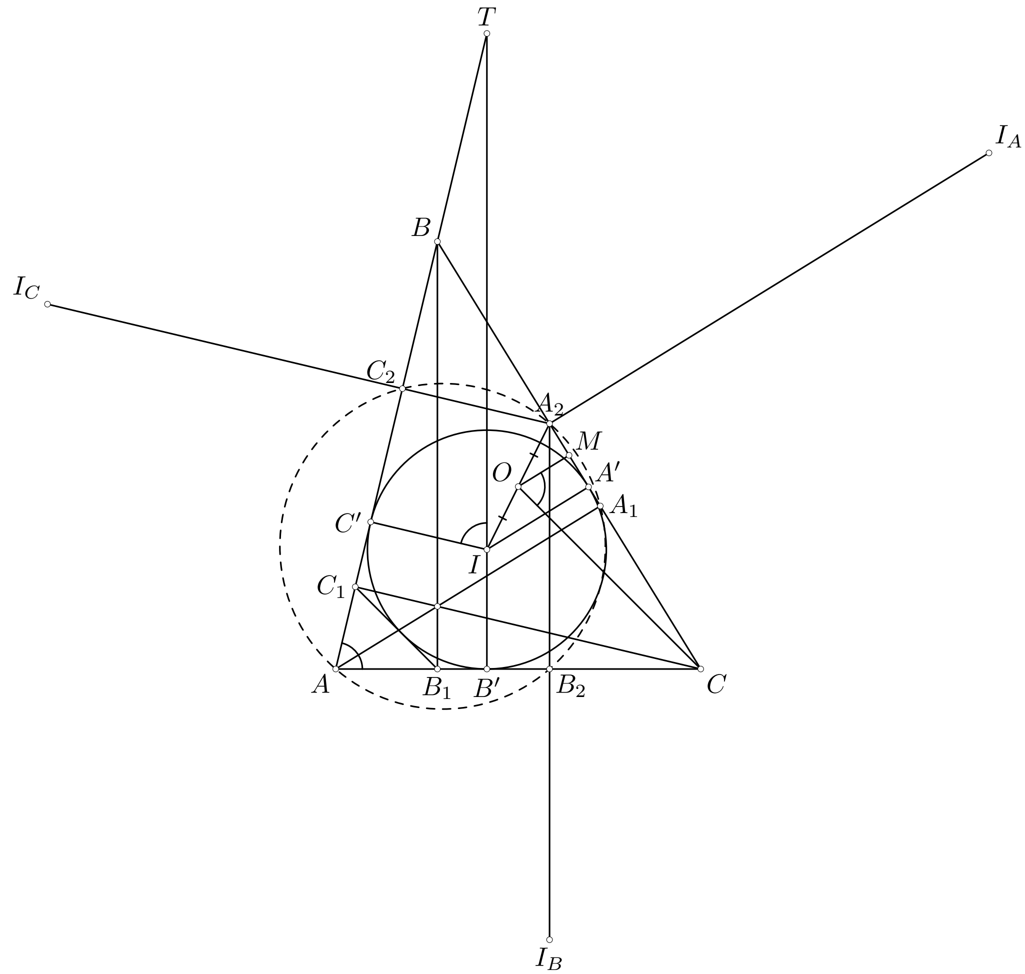
Rozwiązanie:

Niech I i O będą odpowiednio środkiem okręgu wpisanego ω o promieniu r oraz środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech ponadto okrąg ω będzie styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach A', B', C'. Wreszcie niech I_A, I_B, I_C będą środkami okręgów dopisanych do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołków A, B, C, zaś M środkiem boku BC.

Trójkąty AB_1C_1 i ABC są podobne, zaś okrąg ω jest okręgiem dopisanym naprzeciwko punktu A w pierwszym z nich. Rozważmy przekształcenie φ będące złożeniem jednokładności o skali $\frac{AB}{AB_1}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta BAC. Punkty B_1 i C_1 przechodzą odpowiednio na punkty B i C, więc okrąg ω przechodzi na okrąg ω_A styczny do boku BC w punkcie A_2. Punkt T styczności tego okręgu z prostą AB jest obrazem punktu B'. Zatem $\frac{AT}{AB'} = \frac{AB}{AB_1}$, skąd wniosek, że $TB' \parallel BB_1$, więc $TB' \perp AC$, czyli punkt I leży na prostej TB'. Zauważmy, że $\sphericalangle TIC' = \sphericalangle BAC = \sphericalangle COM$, więc trójkąty prostokątne $TC'I$ i CMO są podobne. Ponadto $TC' = TB + BC' = BA_2 + CA_2 = BC = 2CM$, skąd wniosek, że skala podobieństwa wynosi 2, więc $OM = \frac{IC'}{2} = \frac{r}{2}$.

Ponieważ $A_2M = MA'$, więc równość $OM = \frac{r}{2}$ prowadzi do wniosku, że O jest środkiem odcinka A_2I. Skoro punkt C' i C_2 są symetryczne względem symetralnej odcinka AB zawierającej punkt O, to otrzymujemy, że symetria względem O przeprowadza prostą IC' na prostą I_CC_2. Analogicznie dostajemy, że ta symetria przeprowadza prostą IB' na prostą I_BB_2, zaś punkt I oczywiście przechodzi na punkt

A_2. To zaś oznacza, że proste $I_C C_2$ i $I_B B_2$ przecinają się w punkcie A_2. Stąd wniosek, że $\sphericalangle A_2B_2A = \sphericalangle A_2C_2A = 90^\circ = \sphericalangle AA_1B$. W takim razie punkty A, A_2, B_2, C_2, A_1 leżą na okręgu o średnicy AA_2.

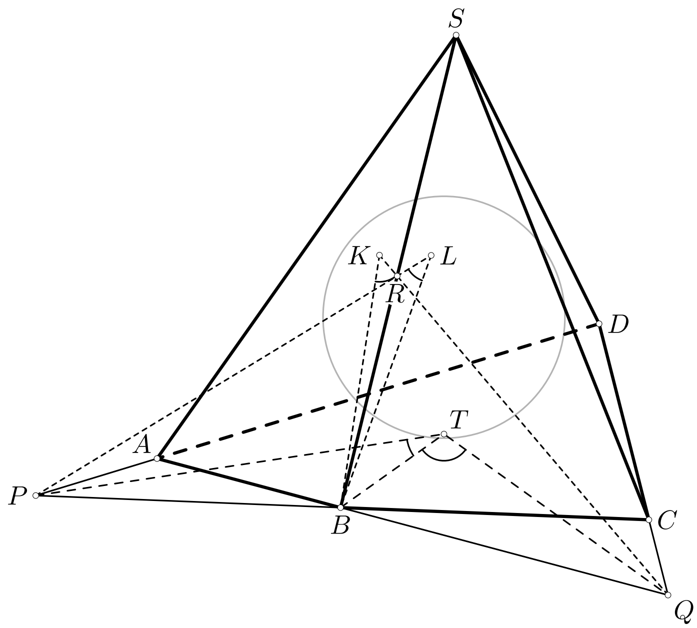


11. Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o wierzchołku S, w który można wpisać sferę s. Półproste CB i DA przecinają się w punkcie P, zaś półproste AB i DC przecinają się w punkcie Q. Sfera s jest styczna do ścian ABS i BCS odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że jeśli proste PK i QL leżą na płaszczyźnie, to punkt styczności sfery s z podstawą leży na odcinku BD.

Rozwiązanie:

Niech R będzie punktem przecięcia odcinków QK i BS. Punkt R należy do płaszczyzny wyznaczonej przez proste PK i QL. Skoro płaszczyzna ta przecina się z płaszczyzną BCS wzdłuż prostej PL, to punkt R leży także na odcinku PL.

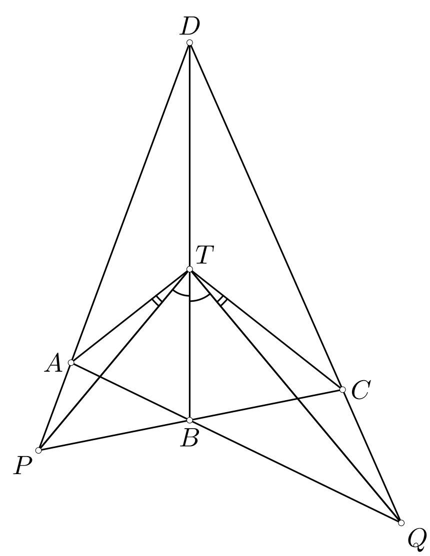
Niech T będzie punktem styczności sfery s z podstawą $ABCD$. Ponieważ $BK = BT$ i $QK = QT$, więc trójkąty QBK i QBT mające wspólny bok QB są przystające. Analogicznie uzasadniamy, że trójkąty PBL i PBT są przystające. Ponadto z równości $RK = RL$ i $BK = BL$ wnosimy, że trójkąty RKB i RLB są przystające. W takim razie $\sphericalangle QTB = \sphericalangle QKB = \sphericalangle PLB = \sphericalangle PTB = \alpha$.



Wiadomo, że punkt T jest jednym z ognisk elipsy wpisanej w czworokąt $ABCD$. Z lematów 1 i 2 w rozwiązaniu zadania 9 z pierwszego meczu z obozu w Mszanie w 2013 roku wnosimy, że $\sphericalangle ATP = \sphericalangle CTQ = \beta$ oraz $\sphericalangle ATB + \sphericalangle CTD = 180°$. W takim razie

$$\sphericalangle CTD + \sphericalangle BTC = 180° - \sphericalangle ATB + \sphericalangle BTC = 180° - \alpha - \beta + \alpha + \beta = 180°,$$

co kończy rozwiązanie.



Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Jeśli zawodnik zostaje wybrany do referowania po raz n-ty, przystępuje do referowania z prawdopodobieństwem $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-n+m}$, gdzie m oznacza minimum liczby zakończonych referowań spośród wszystkich zawodników drużyny referującej. W przeciwnym wypadku Kapitan drużyny referującej wyznacza osobę do referowania zgodnie z punktem **7**.
9. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
10. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7–9**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
11. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.
12. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
13. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**. W tym przypadku, jeżeli przedstawione rozwiązanie nie zostanie uznane przez Jury za poprawne, drużyna otrzymuje -10 punktów i opuszcza się punkt 14.

14. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

15. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
16. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

17. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań lub gdy różnica pomiędzy wynikami obu drużyn jest większa niż 40 punktów. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
18. Po 3 godzinach meczu czas na referowanie zadania zostaje skrócony do 5 minut, a wszystkie punkty ujemne liczą się dwukrotnie.
19. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
20. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści

Treści zadań **5**

Zawody indywidualne 5
Zawody drużynowe 9
Pierwszy Mecz Matematyczny 10
Drugi Mecz Matematyczny 11

Rozwiązania **13**

Zawody indywidualne 13
Zawody drużynowe 38
Pierwszy Mecz Matematyczny 45
Drugi Mecz Matematyczny 54

Regulamin Meczu Matematycznego **64**