Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 2 – 15 czerwca 2024

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 2 – 15 czerwca 2024

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. 18 33 11 660

Kadra:
Cezary Botta, Antoni Buraczewski, Tomasz Cieśla, Justyna Jaworska, Michał Kieza, Tomasz Kobos, Michał Mańka, Korneliusz Obarski, Łukasz Orski, Mateusz Przebieracz, Rafał Pyzik, Krzysztof Salata, Mateusz Scharmach.

Uczestnicy:
Wiktoria Bazan, Igor Grauer, Jeremi Hyska, Adam Jankowski, Grzegorz Kaczmarek, Krzysztof Karwik, Michał Kaźmierczak, Łucja Łyziak, Antoni Mazur, Jan Micyk, Jakub Pieczonka, Magdalena Pudełko, Patryk Rosół, Tadeusz Rylski, Tymon Sidor, Kamil Szmurło, Jakub Świcarz, Szymon Urban, Antoni Wagner, Mateusz Wawrzyniak, Michał Wolny, Rafał Żebruń, Aleksandra Żyniewicz.

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`www.om.sem.edu.pl`
`www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 2 – 15 czerwca 2024 w Mszanie Dolnej, w Ośrodku Sportowo-Rekreacyjnym „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Cezary Botta, Antoni Buraczewski, Tomasz Cieśla, Justyna Jaworska, Michał Kieza, Tomasz Kobos, Michał Mańka, Korneliusz Obarski, Łukasz Orski, Mateusz Przebieracz, Rafał Pyzik, Krzysztof Salata i Mateusz Scharmach.

W dniach 3, 4, 5, 7, 10, 11, 12 i 13 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 6 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 8 i 14 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny ośmiu zadań i trwały od rana do wieczora, a mecze matematyczne — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 192 punkty. Trzy najlepsze wyniki to 133, 131 i 127 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyła się wycieczka: 9 czerwca na Turbacz i Gorc.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z Obozu wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.sem.edu.pl`.

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	23	0	0	0
2.	18	0	1	4
3.	5	0	2	16
4.	4	0	0	19
5.	13	2	1	7
6.	16	0	1	6
7.	2	1	2	18
8.	1	0	0	22
9.	18	0	2	3
10.	3	0	6	14
11.	8	2	2	11
12.	7	1	0	15
13.	16	2	0	5
14.	8	1	1	13
15.	6	0	3	14
16.	1	0	1	21
17.	23	0	0	0
18.	7	3	1	12
19.	2	2	2	17
20.	0	1	0	22
21.	10	4	3	6
22.	6	0	0	17
23.	1	0	2	20
24.	1	0	0	22
25.	20	2	0	1
26.	6	6	5	6
27.	10	0	0	13
28.	1	0	0	22
29.	18	0	0	5
30.	7	0	2	14
31.	0	0	0	23
32.	4	0	0	19

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. W turnieju ping-ponga, w którym każdy zawodnik grał z każdym, uczestniczyli zawodnicy amerykańscy i chińscy. Po zakończeniu turnieju okazało się, że każdy uczestnik połowę uzyskanych punktów zdobył grając z zawodnikami chińskimi (za zwycięstwo zawodnik otrzymuje 1 punkt, za przegraną 0). Udowodnić, że liczba wszystkich uczestników turnieju jest kwadratem liczby naturalnej.

2. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Wykazać, że istnieje $1 \leqslant k \leqslant n$, że

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_k| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_k|.$$

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC < BC$. Okrąg przechodzący przez punkty A i B przecina odcinki AC i BC w punktach A_1 i B_1. Okręgi opisane na trójkątach ABC i A_1B_1C przecinają się w punkcie $P \neq C$. Odcinki AB_1 i A_1B przecinają się w punkcie S. Punkty Q i R to obrazy symetryczne S względem odpowiednio AC i BC. Wykazać, że punkty P, Q, R, C leżą na jednym okręgu.

4. Udowodnić, że istnieje taka stała rzeczywista $c > 0$, że dla dowolnej liczby całkowitej $N > 1$ zachodzi: dowolny podzbiór N-elementowy zbioru $\{1, \ldots, 2N\}$ zawiera dwie liczby, których największy wspólny dzielnik jest większy niż cN.

5. Rozstrzygnąć czy istnieje nieskończenie wiele takich trójek liczb całkowitych dodatnich (m, n, k), że wszystkie dzielniki pierwsze liczby $m! + n! + k!$ są mniejsze niż 2024.

6. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności

$$AB = BC, \quad \sphericalangle ABE + \sphericalangle DBC = \sphericalangle EBD, \quad \sphericalangle AEB + \sphericalangle BDC = 180^\circ.$$

Wykazać, że ortocentrum trójkąta BDE leży na prostej AC.

7. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, że dla każdego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych $G = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ jeżeli zdefiniujemy wielomian H jako $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{f(i)}$ to zbiór składający się z x rzeczywistych spełniających $G(x) = 0$ jest równoliczny ze zbiorem y rzeczywistych spełniających $H(y) = 0$.

8. Znany podróżnik Wojciech podczas jednej ze swoich podróży do Afryki odkrył dzikie plemię, które znało tylko dwa dźwięki — „A” i „B”. Podarowało mu ono instrument, który był grafem o n wierzchołkach połączonych skierowanymi krawędziami. Gra się na nim przesuwając palec od wierzchołka do wierzchołka po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem. Każda krawędź, gdy się jej dotknie, wydaje dźwięk „A” lub „B” (zawsze ten sam). Grę można rozpocząć i zakończyć w dowolnym wierzchołku. Udowodnić, że jeśli na instrumencie można zagrać dowolną dziką melodię złożoną z co najwyżej 2^n dźwięków, to można na nim zagrać dowolną dziką melodię.

Uwaga: Pomiędzy dwoma wierzchołkami może być więcej niż jedna krawędź, w szczególności mogą występować krawędzie o przeciwnym skierowaniu.

9. Wielomian $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$ o nieujemnych rzeczywistych współczynnikach a_i ma n pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że $P(k) \geqslant (k+1)^n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej k.

10. Konstanty napisał na tablicy m ciągów n-elementowych składających się z zer i jedynek. Stwierdził on, że ciąg długości n jest *wybredny* jeżeli składa się tylko z zer i jedynek oraz na tablicy znajdują się dwa różne ciągi różniące się od tego ciągu dokładnie jednym elementem. Postanowił, że codziennie będzie dopisywać do tablicy *wybredny* ciąg którego jeszcze nie ma na tablicy. Po pewnym czasie wypisał wszystkie możliwe ciągi n-elementowe składające się tylko z zer i jedynek. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość m?

11. Dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a_1 i a_2 zadajemy nieskończony ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ poprzez rekurencję $a_n = a_{n-1}a_{n-2} + 1$ dla $n \geqslant 3$. Wykazać, że dla dowolnego $m > 1$ istnieje $n > m$ takie, że a_m^m dzieli a_n^n.

12. Dany jest pięciokąt wypukły $APBCQ$ wpisany w okrąg. Punkt M leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MCA, \quad \sphericalangle MAC = \sphericalangle MBA, \quad \sphericalangle PMB = \sphericalangle QMC.$$

Wykazać, że proste AM, BP, CQ przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

13. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkty M i N są środkami boków AB i AC, a AD jest wysokością tego trójkąta. Punkt K leży na odcinku MN, przy czym $BK = CK$. Półprosta KD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Q. Wykazać, że punkty C, K, N, Q leżą na okręgu.

14. Niech $\theta(k)$ będzie sumą dzielników pierwszych liczby k. Znaleźć wszystkie nieparzyste liczby całkowite dodatnie n spełniające równość $\theta(2^n + 1) = \theta(n)$.

15. Konstanty ma swoje ulubione drzewo T o k krawędziach. Ostatnio dostał na urodziny k-wymiarową hiperkostkę, czyli graf o 2^k wierzchołkach, które odpowiadają ciągom binarnym długości k. Dwa wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się na dokładnie jednej pozycji. Postanowił, że chce podzielić krawędzie tej kostki na rozłączne podzbiory w taki sposób, aby każdy zbiór tworzył kopię jego ulubionego drzewa. Udowodnić, że da się podzielić w taki sposób krawędzie tej kostki.

16. Dwa wielomiany $W, P \in \mathbb{Q}[X]$ są względnie pierwsze, jeśli nie istnieje wielomian $R \in \mathbb{Q}[X]$ o dodatnim stopniu, który dzieli oba te wielomiany. Ponadto wielomian $W \in \mathbb{Q}[X]$ jest bezkwadratowy gdy nie istnieje taki wielomian $R \in \mathbb{Q}[X]$ o dodatnim stopniu, że R^2 dzieli W.
Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ spełniające poniższe warunki:

- dla dowolnych $W, P \in \mathbb{Q}[X]$ $f(W + P) = f(W) + f(P)$,
- dla dowolnego $W \in \mathbb{Q}[X]$ wielomiany W i $f(W)$ są względnie pierwsze dokładnie wtedy, gdy W jest bezkwadratowy.

17. W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD = 90^\circ.$$

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zaś M środkiem krawędzi CD. Wykazać, że proste AB i MO są prostopadłe.

18. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, które dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}_+$ spełniają podzielność

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!).$$

19. Dla wielomianu P o współczynnikach rzeczywistych zdefiniujmy $f(P)$ jako najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\underbrace{P(P(\ldots P}_{n}(x)\ldots)) > 0,$$

przy czym przyjmujemy $f(P) = 0$, gdy takie n nie istnieje. Czy istnieje taki wielomian P stopnia 2024^{2025}, że $f(P) = 2025$?

20. Dany jest zbiór S składający się z n^2 odcinków na płaszczyźnie, z których żadne dwa nie przecinają się ani nie są równoległe. Wykazać, że istnieje taki zbiór T składający się z n punktów nieleżących na tych odcinkach, że dla dowolnych $A, B \in T$ odcinek AB przecina się z którymś z odcinków z S.

21. Tablica $n \times n$ jest narysowana na kartce. Ania narysowała przekątne w niektórych z n^2 kwadratów jednostkowych (jedną lub obie), po czym pocięła kartkę wzdłuż narysowanych przekątnych. Okazało się, że po wykonaniu wszystkich cięć kartka pozostała w jednym kawałku. Udowodnić, że przynajmniej $2n - 1$ kwadratów jednostkowych nie miało żadnej przeciętej przekątnej.

22. Niech AB będzie cięciwą okręgu o, zaś M środkiem krótszego łuku AB. Okrąg ω o środku S jest styczny do odcinka AB i styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie leżącym po przeciwnej stronie prostej AB, co punkt M. Proste przechodzące przez punkt M i prostopadłe do prostych SA i SB przecinają odcinek AB odpowiednio w punktach C i D. Wykazać, że $AB = 2 \cdot CD$.

23. Dana jest taka liczba pierwsza $p > 3$, że p dzieli $a^2 + ab + b^2$, gdzie a i b to pewne liczby całkowite dodatnie. Wykazać, że p^3 dzieli $(a + b)^p - a^p - b^p$.

24. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} \leqslant$$
$$\leqslant a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}.$$

25. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x. \end{cases}$$

26. Na obozie Olimpiady Matematycznej w Mszanie Dolnej jest 23 uczestników. Każdy z nich ma pewną liczbę żetonów do pokera. Co minutę wszyscy uczestnicy, którzy mają co najmniej 22 żetony, jednocześnie oddają po jednym żetonie każdemu innemu uczestnikowi na obozie. Załóżmy, że proces ten zachodzi w nieskończoność (tj. w każdej minucie istnieje uczestnik, który rozdaje żetony). Jaka jest najmniejsza możliwa liczba żetonów na obozie?

27. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC. Okrąg o_B o środku K wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku BC w punkcie E, a okrąg o_C o środku L wpisany w trójkąt ACD jest styczny do boku BC w punkcie F. Odcinki KL i AD przecinają się w punkcie P. Prosta CP przecina dwusieczną kąta ABC w punkcie X, zaś prosta BP przecina dwusieczną kąta BCA w punkcie Y. Wykazać, że proste EX i FY przecinają się na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.

28. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ oraz $p - 2$ liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}$ o tej własności, że p nie dzieli $x_k^{k+1} - x_k$ dla $1 \leqslant k \leqslant p - 2$. Udowodnić, że istnieje taki niepusty podzbiór $A \subseteq \{1, 2, \ldots, p - 2\}$, że

$$\prod_{k \in A} x_k \equiv 2 \pmod{p}.$$

29. Dane są liczby całkowite $a > b > 1$, dla których równanie

$$\frac{a^x - 1}{a - 1} = \frac{b^y - 1}{b - 1}$$

jest spełnione przez przynajmniej dwie różne pary liczb całkowitych (x, y) takich, że $x, y > 1$. Dowieść, że liczby a i b są względnie pierwsze.

30. Dane są liczby rzeczywiste x, y. Wykazać, że jeśli zbiór

$$\{\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

jest skończony, to x, y są wymierne.

31. Dane jest drzewo (to jest nieskierowany graf spójny bez cykli) o n wierzchołkach. Każda krawędź ma przypisaną pewną wagę będącą liczbą naturalną. Zdefiniujmy odległość między dwoma wierzchołkami jako sumę wag krawędzi na najkrótszej ścieżce między nimi. Załóżmy, że zbiór odległości pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków to zbiór wszystkich liczb całkowitych od 1 do $\binom{n}{2}$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb n, $n - 2$ jest kwadratem liczby całkowitej.

32. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω o środku O. Odcinek AD jest średnicą tego okręgu. Punkt E leży na półprostej AD poza odcinkiem AD. Prosta prostopadła do prostej AD przechodząca przez E przecina prostą BC w punkcie T. Prosta styczna do ω przechodząca przez T jest styczna do ω w punkcie P, przy czym punkty P i A leżą po różnych stronach prostej BC. Prosta AP przecina prostą ET w punkcie Q. Punkt M jest środkiem odcinka AQ. Prosta TM przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach X i Y. Udowodnić, że M jest środkiem odcinka XY.

Zawody drużynowe

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x+y)^3 = (x+2y)f(x^2) + (x^2+3xy+y^2)f(f(y))$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Niech $f(x) = x^2 - 2$. Dla danej liczby całkowitej dodatniej n niech A_n oznacza zbiór tych liczb rzeczywistych x, dla których zachodzi nierówność $f^n(x) < -1$, gdzie f^n oznacza n-krotne złożenie funkcji f. Udowodnić, że dla każdego $n > 0$ łączna długość wszystkich przedziałów tworzących A_n przekracza $\frac{4}{3}$.

3. Czy istnieje 777-kąt wypukły taki, że zbiór długości jego boków jest równy $\{1, 2, 3, ..., 777\}$, a wszystkie jego kąty mają równe miary?

4. Na finale Olimpiady Matematycznej okazało się, że k sal nie wystarczyło do rozmieszczenia uczestników tak, aby w każdej sali uczestnicy się parami nie znali. Po usadzeniu w większej liczbie sal, uczestnicy wymyślili sposób, aby rozprzestrzeniać pomiędzy sobą pdf-a "Dwustosunek i biegunowe". Mogą się oni komunikować na dwa sposoby: wysyłając gołębia lub sowę, przy czym każda para znajomych może używać dokładnie jednego rodzaju komunikacji (nieznajomi nie mogą się ze sobą komunikować).

Udowodnić, że przy użyciu jednego rodzaju komunikacji pewien uczestnik może rozdystrybuować ten cenny pdf pomiędzy k innych uczestników (niekoniecznie bezpośrednio).

5. Punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC, a Ω jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg ω_A jest styczny do odcinka AO w K, CO w Z i Ω w M, natomiast ω_B jest styczny do odcinka BO w L, CO w W i Ω w N. Punkt X to przecięcie AC z MK, natomiast Y to przecięcie BC z NL. Udowodnić, że $XWYZ$ jest równoległobokiem.

6. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Niech F będzie punktem leżącym na boku AB takim, że $\Delta ADE \sim \Delta ECF \sim \Delta DBC$. Wykazać, że

$$\frac{AF}{BF} = \left(\frac{EF}{CF}\right)^2.$$

7. Niech m będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wykazać, że dla dowolnego całkowitego $n \geqslant 2$ istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające $a_k \mid m + a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_n$ dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

8. Dany jest wielomian $W(x)$ o współczynnikach wymiernych i stopniu $d \geqslant 2$. Udowodnić, że nie istnieje ciąg parami różnych liczb wymiernych $a_0, a_1, \ldots$ taki, że dla każdego $i \geqslant 1$ zachodzi $W(a_i) = a_{i-1} + i$.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Udowodnić, że dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$(x+y+z)^2 + \sum_{\text{cyk}} \frac{(x+y)(y+z)}{1+|x-z|} \geqslant xy + yz + zx.$$

2. Rozstrzygnąć czy istnieją ograniczone ciągi liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots$ i $b_1, b_2, \ldots$ takie, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $m > n$ zachodzi warunek

$$|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ lub } |b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3. Na tablicy napisano początkowo wielomiany $x^3 - 3x^2 + 5$ oraz $x^2 - 4x$. Jeśli na tablicy są napisane wielomiany $f(x)$ i $g(x)$ to w jednym ruchu można dopisać wielomian $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(g(x))$ lub $cf(x)$ dla pewnej liczby $c \in \mathbb{R}$. Czy w skończonej liczbie ruchów da się napisać na tablicy wielomian $x^n - 1$ dla pewnego $n > 0$?

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Zbiór $\mathcal{S}$ punktów na płaszczyźnie spełnia następujące własności:

- nie da się przykryć wszystkich elementów zbioru $\mathcal{S}$ za pomocą n prostych
- dla dowolnego $A \in \mathcal{S}$, zbiór $\mathcal{S} \setminus \{A\}$ da się pokryć za pomocą n prostych.

Wyznaczyć największą możliwą wartość $|\mathcal{S}|$.

5. Dany jest graf nieskierowany o nieparzystej liczbie wierzchołków. Janusz i Grażyna grają w grę. Najpierw Janusz zamalowuje dowolny wierzchołek. Następnie gracze na przemian zamalowują dowolnego niezamalowanego dotychczas sąsiada ostatnio zamalowanego wierzchołka. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Udowodnić, że Janusz ma strategię wygrywającą.

6. Dany jest n-elementowy zbiór A, którego pewne podzbiory są *ładne*. Jeśli jakiś zbiór zawiera pewien *ładny* podzbiór, to jest on *duży*. Jeśli zbiór jest zawarty w pewnym *ładnym* zbiorze to jest on *mały*. Wykazać, że jeśli *ładnych* zbiorów jest $ł$, *dużych* – d, a *małych* – m, to:

$$2^n \cdot ł \leqslant m \cdot d.$$

7. W Trójmieście pojawiła się na sprzedaż działka w kształcie trójkąta równobocznego o boku 50m. Pięciu deweloperów zamierza wybudować tam luksusowe osiedla. Ponieważ nie mogą oni dojść między sobą do porozumienia, prezydent postanowił podzielić ten trójkąt na pięć przystających działek. Rozstrzygnąć, czy jest to możliwe.

Uwaga: Zgodnie z prawem budowlanym działka musi być (niekoniecznie spójną) sumą skończonej liczby trójkątów. Działki są przystające jeśli istnieje izometria płaszczyzny przekształcająca jedną działkę w drugą.

8. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC, a I środkiem okręgu w niego wpisanego. Punkt K spełnia równości

$$AH + AK = BH + BK = CH + CK.$$

Udowodnić, że punkty H, I, K leżą na jednej prostej.

9. Dobry Jakub narysował na kartce czworokąt wypukły. Okazało się, że można zarówno opisać na nim okrąg o środku w punkcie O, jak i wpisać w niego okrąg o środku w punkcie I. Dobry Jakub dorysował środek M jednej z przekątnych narysowanego czworokąta, po czym Zły Marcin zmazał czworokąt i pozostawił wyłącznie parami różne punkty I, M, O. Zrekonstruować oryginalny czworokąt.

10. Niech a i n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że

- $a^{2^n} - a$ jest podzielne przez n.
- $\sum_{i=1}^{n} i^{2024} a^{2^i}$ nie jest podzielne przez n.

Udowodnić, że n ma dzielnik pierwszy mniejszy niż 2024.

11. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$ oraz liczba pierwsza $p > 6^{n-1}$. Niech S będzie zbiorem n reszt modulo p. Wykazać, że istnieje taka reszta c modulo p, że c da się uzyskać jako wartość $x - y + z$, dla parami różnych $x, y, z \in S$, na dokładnie jeden sposób (z dokładnością do zamiany miejscami x i z).

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $a, b, c, d, e \in [-2, 2]$, które spełniają układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0 \\ a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=10. \end{cases}$$

2. Niech $c > 1$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają równanie

$$f(x+y) = f(x)f(y) - c \sin x \sin y$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

3. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 11.$$

Znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

4. Pewnego wieczora, na pewnym obozie uczestnicy zaczęli wyciągać drzwi z zawiasów i wkładać inne na ich miejsce. Podczas nocnych eksperymentów sprawdzili wszystkie pary drzwi w ośrodku, więc wiedzą, które drzwi można zastąpić innymi. Okazało się, że nie istnieje taki ciąg parami różnych drzwi $A_1, \ldots, A_n$, $n \geqslant 2$, że drzwi A_1 pasują do futryny drzwi A_2, A_2 pasują do futryny A_3, …, A_n pasują do futryny A_1. Drzwi nazywamy *bezużytecznymi*, jeśli nie można nimi zastąpić żadnych innych. Drzwi nazywamy *niezastępowalnymi*, jeśli nie można ich zastąpić przez żadne inne. Wiemy, że istnieje taka liczba $k > 1$, że dla każdego ciągu parami różnych drzwi $B_1, \ldots, B_m$, w którym:

- B_1 są niezastępowalne,
- B_m są bezużyteczne,
- drzwi B_{i+1} można zastąpić przez drzwi B_i dla każdego $1 \leqslant i < m$,

liczba m nie jest podzielna przez k. Wykazać, że wszystkie drzwi z ośrodka można podzielić na k grup w taki sposób, że żadnych drzwi nie można zastąpić innymi z tej samej grupy.

5. Udowodnić, że dowolny okrąg o promieniu $r > 2024$ zawiera mniej niż $2\pi\sqrt[3]{r^2}$ punktów o współrzędnych całkowitych.

6. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg o środku O. Punkty I_B i I_C są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty AOB i AOC. Niech M będzie środkiem łuku BC zawierającego punkt A. Wykazać, że punkty M, A, I_B, I_C leżą na jednym okręgu.

7. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Punkty L_A, L_B, L_C, L_D są punktami przecięcia symedian odpowiednio w trójkątach BCD, CDA, DAB, ABC. Wykazać, że jeśli na czworokącie $L_A L_B L_C L_D$ można opisać okrąg, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

8. Prosta przechodząca przez środek sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ i środek sfery opisanej na tym czworościanie przecina krawędzie AB i CD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że punkty K i L są środkami odcinków AB i CD.

9. Dane są niezerowe liczby całkowite a, b o tej samej parzystości. Wiadomo, że liczba $a^2 - b^2 - 1$ dzieli $a^2 - 1$. Udowodnić, że liczba $|a^2 - b^2 - 1|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

10. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia k taka, że liczba $k \cdot 2^n + 1$ jest złożona dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

11. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia dla $n \geqslant 2$ warunek

$$a_n = \varphi(a_{n-1}) + k,$$

gdzie k jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią, a $\varphi(n)$ to liczba liczb całkowitych dodatnich względnie pierwszych z n i mniejszych równych od n. Wykazać, że ten ciąg jest ograniczony.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. W turnieju ping-ponga, w którym każdy zawodnik grał z każdym, uczestniczyli zawodnicy amerykańscy i chińscy. Po zakończeniu turnieju okazało się, że każdy uczestnik połowę uzyskanych punktów zdobył grając z zawodnikami chińskimi (za zwycięstwo zawodnik otrzymuje 1 punkt, za przegraną 0). Udowodnić, że liczba wszystkich uczestników turnieju jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie:
Niech x będzie liczbą zawodników chińskich, y zaś liczbą zawodników amerykańskich. Chińczycy w spotkaniach między sobą zdobyli łącznie $\frac{1}{2}x(x-1)$ punktów, natomiast Amerykanie zdobyli między sobą $\frac{1}{2}y(y-1)$ punktów. Rozpatrzmy mecze Chińczyków z Amerykanami, których odbyło się xy. Liczba zwycięstw Chińczyków w tych meczach jest taka sama, jak zwycięstw Chińczyków pomiędzy sobą, i analogicznie dla zwycięstw Amerykanów. Otrzymujemy stąd

$$\frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}y(y-1) = xy.$$

Powyższa równość równoważna jest

$$x + y = (x-y)^2,$$

a zatem liczba $x+y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Wykazać, że istnieje $1 \leqslant k \leqslant n$, że

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_k| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_k|.$$

Rozwiązanie:
Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Wykażemy, że zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_1| + \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_1| + \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_n|. \tag{1}$$

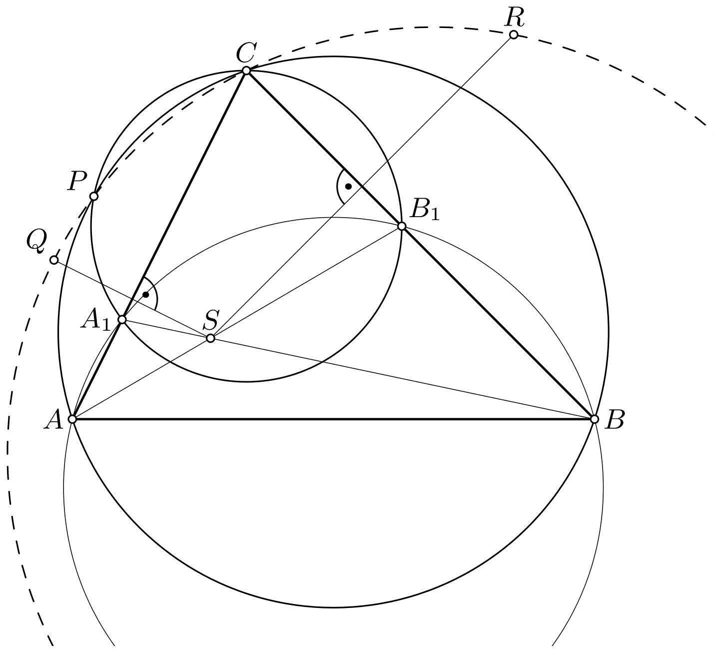
To będzie oznaczało, że dana w tezie nierówność jest prawdziwa dla $k = 1$ lub $k = n$.
Zauważmy, że dla dowolnego i mamy

$$|a_i - a_1| + |a_i - a_n| = a_n - a_1 = |a_n - b_i + b_i - a_1| \leqslant |a_n - b_i| + |b_i - a_1| = |b_i - a_1| + |b_i - a_n|.$$

Dodając stronami powyższe nierówności dla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dostajemy zależność (1), co kończy dowód.

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC < BC$. Okrąg przechodzący przez punkty A i B przecina odcinki AC i BC w punktach A_1 i B_1. Okręgi opisane na trójkątach ABC i A_1B_1C przecinają się w punkcie $P \neq C$. Odcinki AB_1 i A_1B przecinają się w punkcie S. Punkty Q i R to obrazy symetryczne S względem odpowiednio AC i BC. Wykazać, że punkty P, Q, R, C leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:



Skoro A, A_1, B_1, B leżą na jednym okręgu, to trójkąty AA_1S i BB_1S są podobne. Stąd dostajemy $AA_1S \sim BB_1R$ i $AA_1Q \sim BB_1S$. Ponadto z zależności $\sphericalangle PAA_1 = \sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PBB_1$ i $\sphericalangle AA_1P = 180^\circ - \sphericalangle PA_1C = 180^\circ - \sphericalangle PB_1C = \sphericalangle BB_1P$ wnosimy, że trójkąty PAA_1 i PBB_1 są podobne.

Rozważmy przekształcenie będące złożeniem obrotu wokół punktu P o kąt A_1PB_1 z jednokładnością o środku P i skali $\frac{PB_1}{PA_1}$ (tzw. podobieństwo spiralne). Wtedy z wyżej uzyskanych podobieństw trójkątów wynika, że obrazami punktów A_1, A są odpowiednio B_1, B. Ponadto, ponieważ $AA_1Q \sim BB_1S$, obrazem Q jest S i analogicznie obrazem S jest R. Podsumowując, obrazami punktów A_1, Q, A, S są kolejno punkty B_1, S, B, R. Stąd wynikają zależności $\sphericalangle A_1PQ = \sphericalangle B_1PS$ i $\sphericalangle A_1PS = \sphericalangle B_1PR$.

W takim razie

$$\sphericalangle QCR = 2\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle A_1CB_1 = 2\sphericalangle A_1PB_1 = 2\sphericalangle A_1PS + 2\sphericalangle B_1PS = \\ = \sphericalangle A_1PS + \sphericalangle B_1PR + \sphericalangle B_1PS + \sphericalangle A_1PQ = \sphericalangle QPR.$$

Stąd punkty P, Q, R, C leżą na okręgu.

4. Udowodnić, że istnieje taka stała rzeczywista $c > 0$, że dla dowolnej liczby całkowitej $N > 1$ zachodzi: dowolny podzbiór N-elementowy zbioru $\{1, \ldots, 2N\}$ zawiera dwie liczby, których największy wspólny dzielnik jest większy niż cN.

Rozwiązanie:

Załóżmy najpierw, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia j, że

$$\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) < \frac{1}{8}$$

gdzie p_i oznacza i-tą liczbę pierwszą. Z chińskiego twierdzenia o resztach wiemy, że spośród kolejnych $M \stackrel{\text{def}}{=} p_2p_3 \cdot \ldots \cdot p_j$ liczb dokładnie $(p_2 - 1)(p_3 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_j - 1)$ nie dzieli się przez żadną z liczb $p_2, p_3, \ldots, p_j$. Na mocy powyższej nierówności jest to mniej niż $M/8$ liczb. Weźmy jakieś małe $c > 0$ (później ustalimy jak małe musi ono być). Niech A będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 2N\}$ o liczności N. Jeśli $N \leqslant 100M$ to wystarczy aby $c < \frac{1}{100M}$, żeby zachodziła nierówność $cN < 1$ i wtedy teza zadania jest spełniona. Rozważmy teraz $N > 100M$. Rozpiszmy $2N = kM + r$ gdzie $0 \leqslant r < M$ jest resztą z dzielenia $2N$ przez M. W szczególności wiemy, że $k \geqslant 200$. Stąd spośród liczb od 1 do $2N$

niepodzielnych przez żadną z liczb $p_2, \ldots, p_j$ jest co najwyżej

$$k \cdot \frac{M}{8} + r \leqslant \frac{2N}{8} + \frac{N}{100} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{100}\right) N.$$

Liczb mniejszych równych cp_jN jest wśród liczb od 1 do $2N$ co najwyżej cp_jN. Z tych dwóch wyników otrzymujemy, że w zbiorze A liczb większych niż cp_jN i podzielnych przez którąś z liczb $p_2, \ldots, p_j$ jest przynajmniej

$$N - cp_jN - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{100}\right) N = \left(1 - cp_j - \frac{1}{4} - \frac{1}{100}\right) N.$$

Jeśli c będzie na tyle małe, że $1 - cp_j - \frac{1}{4} - \frac{1}{100} > \frac{2}{3}$ to wtedy w zbiorze A będzie więcej niż $\frac{2}{3}N$ takich liczb. Podzielmy każdą z tych liczb przez pewien jej dzielnik ze zbioru $p_2, \ldots, p_j$. Otrzymamy więcej niż $\frac{2}{3}N$ ilorazów przy czym każdy z nich wynosi najwyżej $\frac{2}{3}N$ (ponieważ użyty dzielnik jest większy równy $p_2 = 3$) oraz jest większy niż cN (ponieważ dzielimy liczby większe niż cp_jN). W szczególności z zasady szufladkowej Dirichleta pewne dwa ilorazy będą równe. Oznacza to, że w zbiorze A znaleźliśmy dwie liczby, które są podzielne przez jakąś liczbę większą od cN. Zatem dowolne c takie, że $c < \frac{1}{100M}$ oraz $1 - cp_j - \frac{1}{4} - \frac{1}{100} > \frac{2}{3}$ będzie działać.

Pozostaje tylko udowodnić istnienie liczby j. Ponieważ szereg harmoniczny $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ jest rozbieżny, to istnieje takie n, że suma odwrotności liczb od 1 do n jest większa niż 16. Niech teraz j będzie takie, że p_j jest największą liczbą pierwszą mniejszą równą n. Ponieważ każdą liczbę od 1 do n można przedstawić jednoznacznie jako iloczyn liczb pierwszych $\leqslant n$ z wykładnikami $\leqslant n$, więc zachodzą nierówności

$$\prod_{i=1}^{j} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} > \prod_{i=1}^{j} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \ldots + \frac{1}{p_i^n}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 16.$$

Stąd

$$\prod_{i=1}^{j} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) < \frac{1}{16}.$$

Ponieważ $1 - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2}$, więc istnienie liczby j zostało udowodnione.

5. Rozstrzygnąć czy istnieje nieskończenie wiele takich trójek liczb całkowitych dodatnich (m, n, k), że wszystkie dzielniki pierwsze liczby $m! + n! + k!$ są mniejsze niż 2024.

Rozwiązanie:

Niech p będzie liczbą pierwszą większą niż 2024. Rozważamy takie trójki (m, n, k), że $m! + n! + k!$ nie ma dzielników pierwszych większych od 2024. Bez straty ogólności będziemy zakładać $m \leqslant n \leqslant k$. Gdyby $m \geqslant p$ to liczby $m!$, $n!$, $k!$ dzieliłyby się przez p, skąd $p \mid m! + n! + k!$ i sprzeczność. W takim razie $m < p$. Zauważmy teraz, że jeśli $n \geqslant m + 2024$ to dla każdej liczby pierwszej $q < 2024$ zachodzą nierówności $v_q(n!) > v_q(m!)$ i $v_q(k!) > v_q(m!)$ i wtedy $v_q(m! + n! + k!) = v_q(m!)$. Skoro $m! + n! + k!$ nie ma dzielników pierwszych większych od 2024, to oznacza to że $m! + n! + k! = m!$, czyli sprzeczność. Stąd $n < m + 2024 < p + 2024$. Pozostaje udowodnić, że k może przyjąć tylko skończenie wiele wartości. Ponieważ mamy skończenie wiele możliwości na parę (m, n), więc dla każdej liczby pierwszej $q < 2024$ istnieje taka stała A_q, że $v_q(m! + n!) \leqslant A_q$. Ponadto istnieją też stałe B_q takie, że jeśli $k > B_q$ to $v_q(k!) > A_q$. Stąd

$$k \leqslant \max\{B_q \colon q < 2024, q \text{ jest liczbą pierwszą}\},$$

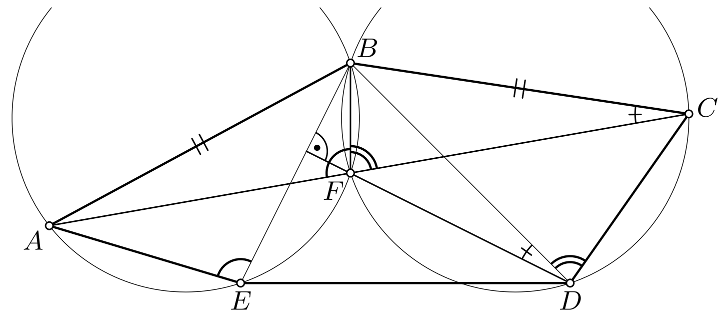
ponieważ w przeciwnym razie dla dowolnej liczby pierwszej $q < 2024$ mielibyśmy $v_q(k!) > v_q(m! + n!)$, skąd $v_q(m! + n! + k!) = v_q(m! + n!)$ dla dowolnej liczby pierwszej $q < 2024$, skąd $m! + n! + k! = m! + n!$ i sprzeczność. Stąd trójek (m, n, k) spełniających warunki zadania jest skończenie wiele.

6. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności

$$AB = BC, \quad \sphericalangle ABE + \sphericalangle DBC = \sphericalangle EBD, \quad \sphericalangle AEB + \sphericalangle BDC = 180^\circ.$$

Wykazać, że ortocentrum trójkąta BDE leży na prostej AC.

Rozwiązanie:



Sposób 1.

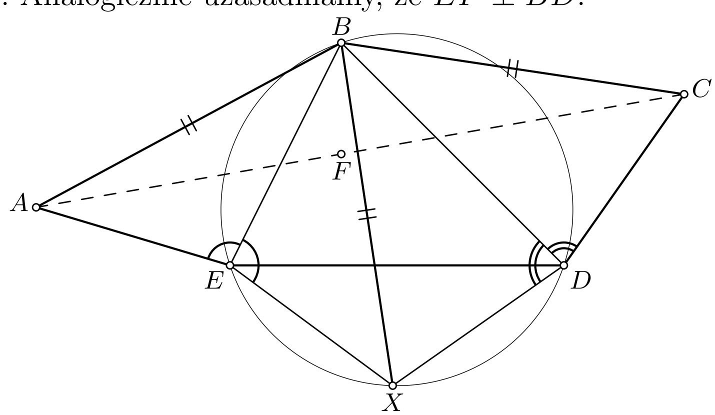
Niech F będzie takim punktem na odcinku AC, że $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AEB$. Wówczas

$$\sphericalangle BFC = 180^\circ - \sphericalangle BFA = 180^\circ - \sphericalangle AEB = \sphericalangle BDC.$$

Punkt F jest więc (różnym od B) punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach AEB i BDC. Stąd i z założeń zadania otrzymujemy

$$\sphericalangle FDB = \sphericalangle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = 90^\circ - \sphericalangle DBE.$$

W takim razie $DF \perp BE$. Analogicznie uzasadniamy, że $EF \perp BD$.



Sposób 2.

Niech X będzie odbiciem A względem prostej BE. Wówczas X jest również odbiciem C względem BD, gdyż $BX = BA = BC$ i

$$\sphericalangle XBD = \sphericalangle EBD - \sphericalangle EBX = \sphericalangle EBD - \sphericalangle ABE = \sphericalangle DBC.$$

Ponieważ $\sphericalangle XEB + \sphericalangle XDB = \sphericalangle AEB + \sphericalangle BDC = 180^\circ$, więc X leży na okręgu BDE. Odbicia punktu X względem boków trójkąta BDE (w tym A i C) leżą na jednej prostej (zwanej prostą Steinera), która przechodzi również przez ortocentrum BDE.

7. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, że dla każdego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych $G = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ jeżeli zdefiniujemy wielomian H jako $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{f(i)}$ to zbiór składający się z x rzeczywistych spełniających $G(x) = 0$ jest równoliczny ze zbiorem y rzeczywistych spełniających $H(y) = 0$.

Rozwiązanie:

Obserwacja: $f(0) = 0$. Spójrzmy na wielomian $G = 1$. Nie ma on pierwiastków, a $x^{f(0)}$ dla dowolnego dodatniego $f(0)$ taki pierwiastek posiada.

Obserwacja: $f(n)$ i n mają tę samą parzystość. Spójrzmy na wielomian $G = x^n + 1$. Jeśli n jest parzyste to nie ma pierwiastków, a jeśli nieparzyste to ma dokładnie jeden pierwiastek (bo jest monotoniczny).

Obserwacja: $f(n) = cn$ dla pewnej nieparzystej liczby całkowitej dodatniej c spełnia warunki zadania. Istotnie, wtedy $H(x) = G(x^c)$. Ponieważ odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \to x^c \in \mathbb{R}$ jest bijekcją, to każdemu x takiemu, że $H(x) = 0$, odpowiada dokładnie jeden y taki, że $G(y) = 0$ (mianowicie $y = x^c$). Wykażemy teraz, że wszystkie funkcje f spełniające warunki zadania są tej postaci.

Sposób 1.

Załóżmy, że $f(1) = c$, oraz, że $2 \mid n$. Rozważmy wielomian $G = x^n + na^{n-1}x + (n-1)a^n + \varepsilon$ dla pewnych $a, \varepsilon > 0$. Nie ma on pierwiastków, bo z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$x^n + (n-1)a^n \geqslant n\sqrt[n]{x^n a^{(n-1)n}} \geqslant nxa^{n-1}$$

Rozważmy $H(x)$ dla $x = -a^{1/c}$:

$$H(x) = x^{f(n)} + na^{n-1}x^c + (n-1)a^n + \varepsilon = (-1)^n a^{f(n)/c} - na^n + (n-1)a^n + \varepsilon = a^{f(n)/c} - a^n + \varepsilon$$

Jeśli $\frac{f(n)}{c} < n$ to wybierając $a > 1$ i odpowiednio małe ε otrzymujemy wartość ujemną, co oznacza że $H(x)$ ma pierwiastek. Jeśli $\frac{f(n)}{c}$ jest większe od n, to bierzemy $a < 1$ i podobnie jak wcześniej otrzymujemy sprzeczność.

Dla nieparzystych n rozważmy wielomian $(x^n + a)^2 + \varepsilon$ dla pewnych $a, \varepsilon > 0$. Oczywiście nie ma on pierwiastków. Rozważmy $H(x)$ dla $x = -a^{1/f(n)}$:

$$H(x) = x^{2nc} + 2ax^{f(n)} + a^2 + \varepsilon = a^{2nc/f(n)} - a^2 + \varepsilon > 0$$

Tak jak wcześniej, dla $f(n) > cn$ dobieramy $a > 1$, w przeciwnym wypadku zaś dobieramy $a < 1$, otrzymując sprzeczność.

Sposób 2.

Obserwacja: $f(n)$ jest funkcją rosnącą. Rozpatrzmy wielomian $G = x^{2k} + x^{2k-1} + C$, gdzie C jest na tyle duże, że ten wielomian nie ma pierwiastków. Zatem $H = x^{f(2k)} + x^{f(2k-1)} + C$ też nie może mieć pierwiastków, a to ciągnie za sobą nierówność $f(2k) > f(2k-1)$ (równość nie może zachodzić, gdyż $2k$ i $2k-1$ są różnej parzystości). Analogicznym argumentem wykazujemy, że $f(2k+1) > f(2k)$.

Wykażemy, że $f(n) = cn$ dla pewnej nieparzystej dodatniej liczby całkowitej $c = f(1)$.

Udowodnimy to najpierw dla n parzystych. Zauważmy, że gdy G ma parzysty stopień i dodatni współczynnik wiodący to wartość minimalna G musi być równa wartości minimalnej H, bo w przeciwnym wypadku moglibyśmy przesunąć je o taką stałą, że jedna z nich byłaby cały czas dodatnia, a druga ujemna, więc jeden z wielomianów miałby miejsce zerowe, a drugi nie. Rozważmy wielomian $x^{2k} + 2kx$. Jego pochodna to $2kx^{2k-1} + 2k$, więc minimum jest osiągane w $x = -1$ i wynosi $1 - 2k$. Wielomian $H = x^{f(2k)} + 2kx^c$ osiąga wartość $1 - 2k$ dla $x = -1$, musi mieć zatem minimum w tym punkcie. Wobec tego pochodna $H' = f(2k)x^{f(2k)-1} + 2kcx^{c-1}$ zeruje się w $x = -1 \implies f(2k) = 2kc$.

Dla n nieparzystych rozważmy $G = x^{2n} + 2x^n + 1$. Jego wartość minimalna wynosi oczywiście 0 dla $x = -1$. Mamy $H = x^{2cn} + 2x^{f(n)} + 1$. Ponieważ $H(-1) = 0$, H musi mieć minimum w -1 i co za tym idzie, $H'(-1) = 2nc \cdot (-1)^{2cn-1} + 2f(n) \cdot (-1)^{f(n)-1} = 0$, co pociąga za sobą $f(n) = cn$.

8. Znany podróżnik Wojciech podczas jednej ze swoich podróży do Afryki odkrył dzikie plemię, które znało tylko dwa dźwięki — „A” i „B”. Podarowało mu ono instrument, który był grafem o n wierzchołkach połączonych skierowanymi krawędziami. Gra się na nim przesuwając palec od wierzchołka do wierzchołka po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem. Każda krawędź, gdy się jej dotknie, wydaje dźwięk „A” lub „B” (zawsze ten sam). Grę można rozpocząć i zakończyć w dowolnym wierzchołku. Udowodnić, że jeśli na instrumencie można zagrać dowolną dziką melodię złożoną z co najwyżej 2^n dźwięków, to można na nim zagrać dowolną dziką melodię.

Uwaga: Pomiędzy dwoma wierzchołkami może być więcej niż jedna krawędź, w szczególności mogą występować krawędzie o przeciwnym skierowaniu.

Rozwiązanie:

Przeprowadzamy rozumowanie nie wprost. Niech N oznacza długość najkrótszej melodii, której nie da się zagrać i niech ta melodia to będzie $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Niech dla $1 \leqslant i \leqslant N$ A_i będzie zbiorem wszystkich wierzchołków takich, że można zagrać melodię $a_1, \ldots, a_i$ kończąc grę w tym wierzchołku. Z definicji zbiór A_N jest pusty. Wiadomo też, że dla $i < N$ zbiór A_i jest niepusty. Ponadto $N > 2^n$. Ponieważ niepustych podzbiorów wierzchołków jest $2^n - 1$ to dla pewnych $0 < i < j < N$ zachodzi $A_i = A_j$. Oznacza to, że jeżeli możemy zagrać melodię $a_1, \ldots, a_i$ kończąc w wierzchołku v to możemy też skończyć w tym wierzchołku zagrawszy melodię $a_1, \ldots, a_j$. Skoro melodia $a_1, \ldots a_i, a_{j+1}, \ldots, a_N$ ma długość mniejszą niż N to z definicji N można ją zagrać. Stąd istnieje taki wierzchołek v, że można zagrać melodię $a_1, \ldots a_i$ kończąc w tym wierzchołku oraz można zagrać melodię $a_{j+1}, \ldots, a_N$ zaczynając w tym wierzchołku. Skoro $A_i = A_j$ to można także zagrać melodię $a_1, \ldots a_j$ kończąc w tym wierzchołku. Stąd da się również zagrać melodię $a_1 \ldots a_j, a_{j+1} \ldots a_N$. Sprzeczność.

9. Wielomian $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$ o nieujemnych rzeczywistych współczynnikach a_i ma n pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że $P(k) \geqslant (k+1)^n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej k.

Rozwiązanie:

Ponieważ wyraz wolny jest równy 1, pozostałe współczynniki zaś nieujemne, to wszystkie pierwiastki wielomianu P są mniejsze od 0. Niech $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n$ będą tymi pierwiastkami.
Sposób 1.

Ze wzorów Viète'a

$$a_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} \alpha_{i_j}.$$

W szczególności $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy

$$a_k \geqslant \binom{n}{k} \sqrt[\binom{n}{k}]{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\binom{n-1}{k-1}}} = \binom{n}{k}.$$

Z drugiej strony $(k+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i$, więc wprost otrzymujemy tezę.
Sposób 2.

Zachodzi

$$P(x) = (x + \alpha_1) \ldots (x + \alpha_n).$$

Wówczas z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy

$$k + \alpha_i = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k} + \alpha_i \geqslant (k+1) \sqrt[k+1]{\alpha_i}.$$

Mnożąc powyższe nierówności stronami dla $i = 1, 2, \ldots, n$ i wykorzystując warunek $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = 1$ dostajemy tezę zadania.

10. Konstanty napisał na tablicy m ciągów n-elementowych składających się z zer i jedynek. Stwierdził on, że ciąg długości n jest *wybredny* jeżeli składa się tylko z zer i jedynek oraz na tablicy znajdują się dwa różne ciągi różniące się od tego ciągu dokładnie jednym elementem. Postanowił, że codziennie będzie dopisywać do tablicy *wybredny* ciąg którego jeszcze nie ma na tablicy. Po pewnym czasie wypisał wszystkie możliwe ciągi n-elementowe składające się tylko z zer i jedynek. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość m?

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że wartość $w_n = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ działa. Ponumerujmy ciągi liczbami od 0 do $w_n - 1$. Niech ciąg o numerze $i > 0$ ma na miejscach $2i-1, 2i$ jedynki, a w pozostałych miejscach zera (o ile takie miejsca istnieją), a ciąg o numerze 0 zawiera same zera.

Oczywiście każdy ciąg z jedną jedynką może zostać narysowany na tablicy, bo znajdują się dwa ciągi różniące się od niego jednym elementem (ciąg 0 oraz ciąg który zawiera jedynkę na odpowiednim miejscu).

Postępujmy teraz indukcyjnie – załóżmy, że mamy wszystkie ciągi zawierające $\leqslant k$ jedynek na tablicy. Wtedy ciąg z $k+1$ jedynkami różni się od $k+1$ ciągów z k jedynkami jedną wartością, czyli możemy go napisać. To kończy dowód kroku indukcji.

Uzasadnimy teraz, że nie da się napisać wszystkich ciągów z mniejszą liczbą ciągów początkowych. Zrobimy to indukcyjnie ze względu na n. Baza indukcji oczywiście działa – ciągów jedno- i dwuelementowych musi być oczywiście dwa.

Wykażemy, że na początku ciągów $k+2$-elementowych musi być przynajmniej $w_k + 1$. Załóżmy nie wprost, że jest ich w_k bądź mniej. Niech ciąg c to będzie pierwszy *wybredny* ciąg napisany na tablicy oraz niech i, j to będą indeksy na których różni się on od swoich dwóch "sąsiadów". Jeśli usuniemy te dwa indeksy w każdym ciągu długości $k+2$, to dostaniemy najwyżej $w_k - 1$ ciągów długości k (przynajmniej 2 się skleją). Co więcej, Kostek będzie mógł, zaczynając od nich, napisać wszystkie ciągi długości k. Istotnie, może on dopisywać ciągi w takiej samej kolejności jak dla ciągów długości $k+2$ omijając indeksy i, j oraz nie wpisując ciągów, które już są na tablicy. To jednak przeczy założeniu indukcyjnemu dla k kończąc dowód.

11. Dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a_1 i a_2 zadajemy nieskończony ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ poprzez rekurencję $a_n = a_{n-1}a_{n-2} + 1$ dla $n \geqslant 3$. Wykazać, że dla dowolnego $m > 1$ istnieje $n > m$ takie, że a_m^m dzieli a_n^n.

Rozwiązanie:

Niech p będzie dzielnikiem pierwszym a_m. Ciąg ($a_i \mod p$) jest od pewnego momentu cykliczny, ponieważ musi istnieć para indeksów x, y takich że $(a_x, a_{x+1}) \equiv (a_y, a_{y+1}) \pmod p$, a wówczas dla dowolnego $i \geqslant 0$, $a_{x+i} \equiv a_{y+i} \pmod p$. Wykażemy, że ($a_i \mod p$) jest cykliczny od miejsca m, czyli że istnieje $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ takie, że dla dowolnego $i \geqslant m$, $a_i \equiv a_{i+t} \pmod p$. Załóżmy nie wprost, że najwcześniejszym miejscem od którego występuje jakiś okres jest $\ell > m$ i że ma on długość t. Wówczas

$$a_\ell a_{\ell-1} \equiv a_{\ell+1} - 1 \equiv a_{\ell+t+1} - 1 \equiv a_{\ell+t}a_{\ell+t-1} \equiv a_\ell a_{\ell+t-1} \pmod p \tag{1}$$

Gdyby $a_\ell \equiv a_{\ell+t} \equiv 0 \pmod p$, to mielibyśmy $(a_\ell, a_{\ell+1}) \equiv (0, 1) \mod p$, a to oznaczałoby, że istnieje wcześniejszy okres, bowiem $(a_m, a_{m+1}) \equiv (0, 1) \mod p$. W takim razie $a_\ell \not\equiv 0 \pmod p$ i wobec tego możemy podzielić równanie (1) obustronnie przez a_ℓ, co daje $a_{\ell-1} \equiv a_{\ell+t-1} \pmod p$ i otrzymujemy sprzeczność ze wcześniejszym założeniem, że ℓ był najwcześniejszym miejscem wystąpienia okresu.

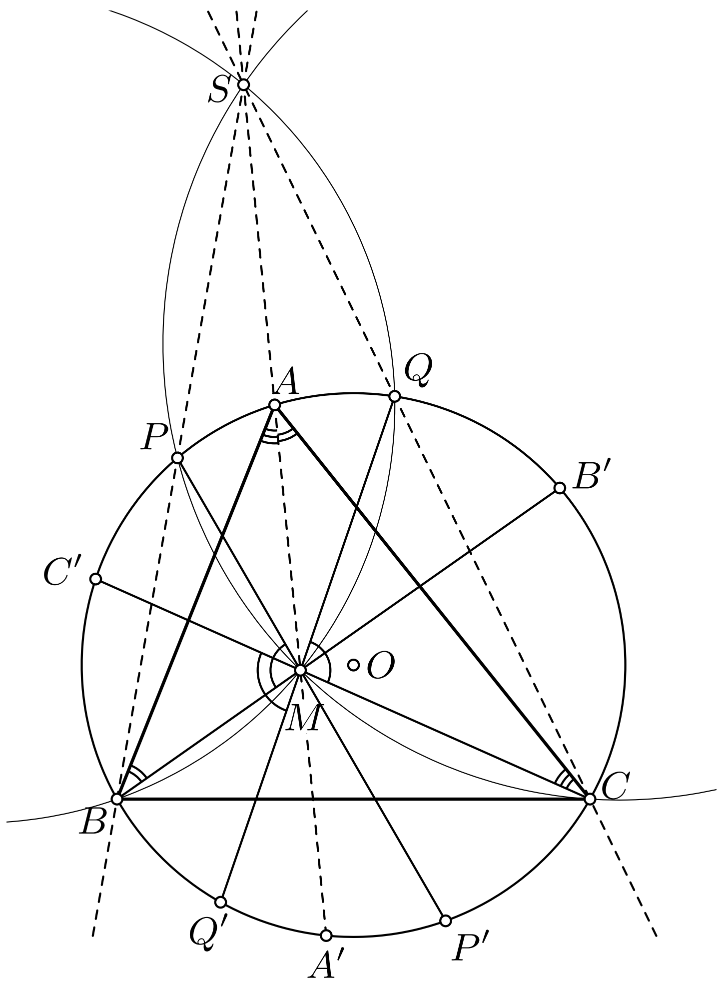
Zatem dla każdego $p \in \mathbb{P}$, $p \mid a_m$, istnieje takie t_p, że $a_i \equiv a_{i+t_p} \pmod p$ dla $i \geqslant m$. Niech teraz $T \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\mathbb{P} \ni p | a_m} t_p$. Niech $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \max_{p\in\mathbb{P}}(v_p(a_m))$ Połóżmy $n \stackrel{\text{def}}{=} m + Tm\beta$. Wtedy $p \mid a_n$ dla każdego $\mathbb{P} \ni p \mid a_m$, czyli $p^n \mid a_n^n$. Ponieważ $n \geqslant mv_p(a_m)$, więc $a_m^m \mid a_n^n$.

12. Dany jest pięciokąt wypukły $APBCQ$ wpisany w okrąg. Punkt M leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MCA, \quad \sphericalangle MAC = \sphericalangle MBA, \quad \sphericalangle PMB = \sphericalangle QMC.$$

Wykazać, że proste AM, BP, CQ przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Rozwiązanie:



Niech proste AM, BM, CM przecinają dany okrąg odpowiednio w punktach A', B', C'. Na mocy równości $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MCA$ łuki BA' i $C'A$ są równe, zaś na mocy równości $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MBA$ łuki CA' i AB' są równe. Cięciwy $C'B$, AA', $B'C$ są więc równoległe oraz mają wspólną symetralną ℓ przechodzącą przez środek O rozważanego okręgu. Na tej symetralnej leży też punkt M przecięcia przekątnych trapezu równoramiennego $C'BCB'$. Niech teraz proste PM i QM przecinają ten okrąg odpowiednio w punktach P' i Q'. Symetria względem prostej ℓ przekształca odcinek BB' na odcinek $C'C$, a z równości $\sphericalangle PMB = \sphericalangle QMC = \sphericalangle Q'MC'$ wnosimy, że obrazem punktu P jest punkt Q'. Podobnie obrazem Q jest P' i stąd odcinek PP' przechodzi w symetrii na odcinek $Q'Q$. Łuk BP' przechodzi więc na łuk $C'Q$, więc $\sphericalangle BPM = \sphericalangle QCM$. Analogicznie dostajemy $\sphericalangle PBM = \sphericalangle CQM$.

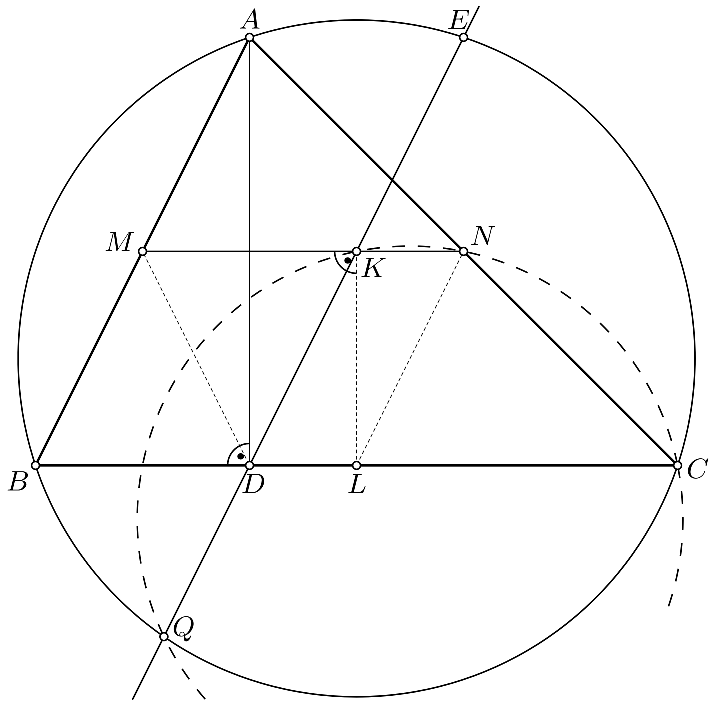
Jeśli $P = C'$, to $Q = B'$ i rozważane proste są równoległe. W przeciwnym przypadku proste BP i CQ przecinają się w punkcie S. Wtedy z zależności $\sphericalangle BPM = \sphericalangle QCM$ i $\sphericalangle PBM = \sphericalangle CQM$ otrzymujemy, że na czworokątach $CMPS$ i $BMQS$ można opisać okręgi. Zauważmy, że

$$\sphericalangle PMS = \sphericalangle PCS = \sphericalangle PCQ = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle SBQ = \sphericalangle SMQ.$$

Ponadto $\sphericalangle PMA = \sphericalangle AMB - \sphericalangle PMB = \sphericalangle AMC - \sphericalangle QMC = \sphericalangle AMQ$, czyli punkty M, A, S leżą na dwusiecznej kąta PMQ, co kończy rozwiązanie.

13. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkty M i N są środkami boków AB i AC, a AD jest wysokością tego trójkąta. Punkt K leży na odcinku MN, przy czym $BK = CK$. Półprosta KD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Q. Wykazać, że punkty C, K, N, Q leżą na okręgu.

Rozwiązanie:



Niech L będzie środkiem boku BC. Zauważmy, że $LN = \frac{1}{2}AB = MD$, więc czworokąt $MNLD$ jest trapezem równoramiennym. Ponadto punkt K leży na symetralnej boku BC przechodzącej przez punkt L, skąd wynika że odcinek KL jest wysokością tego trapezu. Niech teraz E będzie takim punktem, że czworokąt $AECB$ jest trapezem równoramiennym o podstawach AE i BC (oczywiście E leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC). Jednokładność o środku w środku ciężkości trójkąta ABC i skali -2 przekształca punkty M, N, L odpowiednio na punkty C, B, A, a więc punkt D przeprowadza na punkt E. Obrazem punktu K będzie zaś punkt D. W takim razie punkty E, K, D, Q leżą na jednej prostej. Zatem

$$\sphericalangle CQE = \sphericalangle CBE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ANM = 180^\circ - \sphericalangle KNC,$$

czyli punkty C, K, N, Q leżą na jednym okręgu.

14. Niech $\theta(k)$ będzie sumą dzielników pierwszych liczby k. Znaleźć wszystkie nieparzyste liczby całkowite dodatnie n spełniające równość $\theta(2^n + 1) = \theta(n)$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw następujący:

Lemat 1. *Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą. Wówczas $2^p + 1$ ma dzielnik pierwszy $q > p + 5$.*

Dowód. Niech q będzie pewnym dzielnikiem pierwszym $2^p + 1$. Mamy wówczas $2^p \equiv -1 \pmod q$ co daje $2^{2p} \equiv 1 \pmod q$. To oznacza, że rząd 2 modulo q wynosi albo $2p$ (co wobec podzielności $2p \mid q - 1$ daje $q > p + 5$, czyli tezę) lub rząd 2 modulo q wynosi 2, co jest możliwe jedynie dla $q = 3$.

Pozostało zatem wykluczyć przypadek, gdy 3 jest jedynym dzielnikiem $2^p + 1$. Rozważmy równanie $2^p + 1 = 3^k$. Z rozpatrzenia reszt modulo 4 wynika, że k jest parzyste. Dlatego możemy rozpisać $2^p = (3^{\frac{k}{2}} - 1)(3^{\frac{k}{2}} + 1)$. Oczywiście jedynym przypadkiem, gdy zarówno $3^{\frac{k}{2}} - 1$ i $3^{\frac{k}{2}} + 1$ są potęgami dwójki jest przypadek $k = 2 \implies p = 3$, co przeczy naszemu założeniu $p > 3$. □

Powróćmy do rozwiązania. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_s$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi n większymi równymi 5. Skoro n jest nieparzyste to mamy dla dowolnego i przystawania:

$$2^n + 1 \equiv (2^{p_i})^{\frac{n}{p_i}} + 1 \equiv (-1)^{\frac{n}{p_i}} + 1 \equiv 0 \pmod{2^{p_i} + 1}$$

Zachodzi więc podzielność $2^{p_i} + 1 \mid 2^n + 1$. Na mocy Lematu 1 istnieją więc liczby pierwsze $q_i > p_i + 5$ takie, że $q_i \mid 2^{p_i} + 1$, czyli $q_i \mid 2^n + 1$. Wykażemy, że liczby te są parami różne. Załóżmy nie wprost, że dla pewnych $i \neq j$ zachodzi $q = q_i = q_j$. Skoro liczby p_i oraz p_j są względnie pierwsze, to istnieją takie liczby całkowite dodatnie x, y że $xp_i = yp_j + 1$. Skoro $q \mid 2^{p_i} + 1$ oraz $q \mid 2^{p_j} + 1$ to mamy przystawania

$$1 \equiv 2^{2xp_i} \equiv 2^2 \cdot 2^{2yp_j} \equiv 4 \pmod q$$

Takie przystawanie może zachodzić tylko wtedy, gdy $q = 3$, ale z Lematu 1 wynika, że $q > 5$. Udowodniliśmy zatem, że liczby q_i są parami różne. To daje nam

$$\theta(2^n + 1) \geqslant \sum_{i=1}^{s} q_i > \sum_{i=1}^{s} p_i + 5 \geqslant \theta(n) - 3 + 5s$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z tego, że w ciągu $p_1, \ldots, p_s$ znajdują się wszystkie dzielniki pierwsze n poza być może trójką. Widzimy więc, że jeśli $s \geqslant 1$ (czyli n ma jakiś dzielnik pierwszy różny od 3) to $\theta(2^n + 1) \neq \theta(n)$. Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $n = 3^m$ dla jakiegoś całkowitego $m \geqslant 0$. Jeśli $m = 0$ to sprawdzamy, że $\theta(2^1 + 1) = 3 \neq 0 = \theta(1)$. Dla $m > 0$ mamy $\theta(n) = 3$, więc równość $\theta(2^n + 1) = \theta(n)$ jest równoważna temu, że $2^n + 1 = 3^k$ dla pewnego $k > 0$. Ponieważ $n \geqslant 2$ to powtarzając rozumowanie z dowodu Lematu 1 dostajemy, że musi być $n = 3, k = 2$. Stąd łatwo sprawdzamy, że $n = 3$ rzeczywiście jest jedyną liczbą spełniającą równość $\theta(2^n + 1) = \theta(n)$.

15. Konstanty ma swoje ulubione drzewo T o k krawędziach. Ostatnio dostał na urodziny k-wymiarową hiperkostkę, czyli graf o 2^k wierzchołkach, które odpowiadają ciągom binarnym długości k. Dwa wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się na dokładnie jednej pozycji. Postanowił, że chce podzielić krawędzie tej kostki na rozłączne podzbiory w taki sposób, aby każdy zbiór tworzył kopię jego ulubionego drzewa. Udowodnić, że da się podzielić w taki sposób krawędzie tej kostki.

Rozwiązanie:
Sposób 1.

Skonstruujemy poszukiwany podział krawędzi. Zauważmy, że G ma $2^{k-1}k$ krawędzi, więc chcemy je rozciąć na 2^{k-1} kopii T.

Najpierw wyróżnijmy jeden z wierzchołków T jako korzeń i skierujmy wszystkie krawędzie w dół od korzenia. Ponadto ponumerujemy krawędzie T w dowolny sposób liczbami od 1 do k. Teraz rozważmy te wierzchołki G, które odpowiadają ciągom z parzystą liczbą jedynek (jest ich oczywiście 2^{k-1}). Umieścimy korzenie naszych drzew w tych właśnie wierzchołkach. Rozważmy krawędź o numerze i. Jeśli wychodzi ona z korzenia w T, to znamy już jej jeden wierzchołek w hiperkostce, powiedzmy że odpowiada on ciągowi $(b_1 b_2 \ldots b_k)$. Dodajemy wówczas do naszej kopii drzewa krawędź między $(b_1 b_2 \ldots b_k)$ a $(b_1 \ldots b_{i-1}(1 - b_i)b_{i+1} \ldots b_k)$. Dodajemy tak po kolei wszystkie krawędzie, których jeden wierzchołek jest już ustalony. Ponieważ T jest drzewem, to dodamy tak wszystkie krawędzie i ich ułożenie będzie zależeć jedynie od wyboru korzenia w hiperkostce, a nie od kolejności ich dodawania.

Przypisaliśmy w ten sposób $2^{k-1}k$ krawędzi, pozostało więc wykazać, że nie wykorzystaliśmy żadnej krawędzi z G dwukrotnie. Rozważmy dowolną krawędź uv w G. Jeśli ciągi odpowiadające końcom krawędzi różnią się na pozycji i, ta krawędź musiała być wykorzystana jako i-ta krawędź z T. Są dwa przypadki: użyta krawędź mogła być skierowana od u do v w kopii T lub od v do u. Zauważmy, że znając skierowanie krawędzi, korzeń odpowiadającej kopii T jest już jednoznacznie wyznaczony. Ponadto, tylko jedno ze skierowań $u \to v$, $v \to u$ zaprowadzi nas do korzenia o parzystej liczbie jedynek. To dowodzi że każda krawędź G jest przypisana do jednego i dokładnie jednego drzewa.

Sposób 2.

Użyjemy indukcji względem k. Udowodnimy, że:

Da się rozciąć krawędzie G na 2^{k-1} kopii dowolnie ukorzenionego drzewa T tak, aby wierzchołki G odpowiadające korzeniom tych kopii odpowiadały dokładnie ciągom o parzystej liczbie jedynek.

Teza jest spełniona dla $k = 1$. Dla wyższych k postępujemy następująco: Rozważamy T' powstałe z T przez usunięcie liścia. Ponadto ukorzeńmy T' w wierzchołku sąsiadującym z usuniętym liściem. Takim T' da się pokryć graf G' będący hiperkostką na 2^{k-1} wierzchołkach. Stwórzmy dwie kopie G' - kopię G'_0 pokryjemy T' tak by korzenie znajdowały się w wierzchołkach G'_0 z parzystą liczbą jedynek, a G'_1 tak, by korzenie znajdowały się w wierzchołkach z nieparzystą liczbą jedynek (jest to możliwe, wystarczy zamienić wartość pierwszego bitu we wszystkich wierzchołkach). Następnie skonstruujemy G sklejając G'_0 i G'_1 w ten sposób, że wierzchołkom z G'_0 dopisujemy na k-tej pozycji zera, a wierzchołkom z G'_1 - jedynki. Wówczas każda nowa krawędź w G będzie sąsiadowała albo z jakimś korzeniem z G'_0 albo z korzeniem z G'_1, co znaczy, że możemy do tej krawędzi przypisać usunięty liść z T.

16. Dwa wielomiany $W, P \in \mathbb{Q}[X]$ są względnie pierwsze, jeśli nie istnieje wielomian $R \in \mathbb{Q}[X]$ o dodatnim stopniu, który dzieli oba te wielomiany. Ponadto wielomian $W \in \mathbb{Q}[X]$ jest bezkwadratowy gdy nie istnieje taki wielomian $R \in \mathbb{Q}[X]$ o dodatnim stopniu, że R^2 dzieli W.

Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ spełniające poniższe warunki:

- dla dowolnych $W, P \in \mathbb{Q}[X]$ $f(W + P) = f(W) + f(P)$,
- dla dowolnego $W \in \mathbb{Q}[X]$ wielomiany W i $f(W)$ są względnie pierwsze dokładnie wtedy, gdy W jest bezkwadratowy.

Rozwiązanie:

Odnotujmy, że dla dowolnego wielomianu $Q \in \mathbb{Q}[X]$ funkcja f spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia je funkcja $g : \mathbb{Q}[X] \ni P \longmapsto f(P) - P \cdot Q \in \mathbb{Q}[X]$. Wykażemy implikację w jedną stronę. W drugą wystarczy zamienić Q na $-Q$. Dla $P, W \in \mathbb{Q}[X]$ mamy

$$g(P + W) = f(P + W) - (P + W) \cdot Q = f(P) - P \cdot Q + f(W) - W \cdot Q = g(P) + g(W).$$

Druga własność wynika z algorytmu Euklidesa – $P, f(P)$ są względnie pierwsze dokładnie wtedy, gdy $P, f(P) - P \cdot Q$ też są.

W takim razie możemy założyć, że $f(1) = 0$. Wykażemy, że wówczas wszystkie funkcje spełniające założenia są postaci $f(P) = cP'$ dla pewnego $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Odnotujmy, że dzięki pierwszemu warunkowi zachodzi $f(nP) = nf(P)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ i dalej $f(qP) = qf(P)$ dla wszystkich $q \in \mathbb{Q}$. Otrzymujemy, że dla wielomianu $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ zachodzi $f(P) = a_nf(X^n) + \ldots + a_1f(X) + a_0f(1) = a_nf(X^n) + \ldots + a_1f(X)$. W związku z tym wystarczy udowodnić, że $f(X^n) = nX^{n-1}f(X)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $f(X) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Indukcyjnie udowodnimy równość $f(X^n) = nX^{n-1}f(X)$, która jest oczywiście prawdziwa dla $n = 0, 1$. W tym celu rozważmy wielomian $(X - q)^n$ dla pewnego $q \in \mathbb{Q}$, $n \geqslant 2$

$$f((X-q)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(X^k)(-q)^{n-k} = f(X^n) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} kX^{k-1} f(X)(-q)^{n-k} =$$

$$= f(X^n) + f(X)n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} X^{k-1}(-q)^{n-k} = f(X^n) + f(X)n \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} X^k(-q)^{n-1-k} =$$

$$= f(X^n) + f(X)n \left((X-q)^{n-1} - X^{n-1}\right).$$

Stąd

$$f((X-q)^n) - f(X)n(X-q)^{n-1} = f(X^n) - f(X)nX^{n-1}. \tag{1}$$

Zauważmy dalej, że, dzięki drugiemu warunkowi z treści zadania i nierówności $n \geqslant 2$, wielomian $X - q$ dzieli lewą stronę równości (1). W takim razie dzieli też prawą stronę. Jednak skoro $q \in \mathbb{Q}$ możemy wybrać na nieskończenie wiele sposobów, to wielomian po prawej stronie równości (1), niezależny od q, jest wielomianem zerowym. To kończy dowód indukcyjny.

Oznaczmy $Q \overset{\text{def}}{=} f(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Wiemy już, że f jest postaci $f(P) = Q \cdot P'$. Wykażemy, że $Q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Załóżmy nie wprost, że jest przeciwnie. Wówczas istnieje taki wielomian *nierozkładalny* (będziemy przez to zawsze rozumieć wielomian dodatniego stopnia z $\mathbb{Q}[X]$, który nie jest iloczynem dwóch wielomianów dodatniego stopnia z $\mathbb{Q}[X]$) $W \in \mathbb{Q}[X]$, że $W \mid Q$ (jest to prawda także dla $Q = 0$). Otrzymujemy sprzeczność z drugim warunkiem dla wielomianu W, ponieważ wówczas $W \mid f(W) = Q \cdot W'$ pomimo, że W jest bezkwadratowy.

Pozostaje wykazać, że dla $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ funkcja $f(P) = cP'$ spełnia warunki zadania. Skoro dla dowolnych wielomianów P, W zachodzi $(P + W)' = P' + W'$, to pierwszy warunek jest spełniony. Dla dowodu drugiej własności wystarczy udowodnić poniższy:

Lemat. *Niech wielomian nierozkładalny $Q \in \mathbb{Q}[X]$ dzieli wielomian $P \in \mathbb{Q}[X]$. Wówczas $Q \mid P'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Q^2 \mid P$.*

Dowód. Zapiszmy $P = Q \cdot W$. Zachodzi $P' = Q' \cdot W + Q \cdot W'$, co jest podzielne przez Q dokładnie wtedy, gdy $Q \mid Q' \cdot W$. Z definicji wielomian nierozkładalny jest stopnia dodatniego, więc Q nie dzieli Q', który jest niezerowym wielomianem stopnia niższego niż Q. Stąd, jako że Q jest nierozkładalny, Q i Q' muszą być względnie pierwsze. W takim razie $Q \mid Q' \cdot W$ jest równoważne $Q \mid W$, a to oznacza dokładnie $Q^2 \mid P$. □

17. W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD = 90^\circ.$$

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zaś M środkiem krawędzi CD. Wykazać, że proste AB i MO są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Niech D' i M' będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów D i M na płaszczyznę ABC. Jeśli $M' = O$, to prosta MO jest prostopadła do płaszczyzny ABC, więc też do krawędzi AB. W przeciwnym razie na mocy twierdzenia o trzech prostych prostopadłych należy dowieść, że prosta $M'O$ jest prostopadła do prostej AB.

Niech E będzie takim punktem na płaszczyźnie ABC leżącym po przeciwnej stronie prostej AB, co punkt C, że $AE = AD$ i $BE = BC$. Wtedy trójkąty ABE i ABC są przystające. Stąd

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle EAB + \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BAC = 90^\circ$$

oraz

$$\sphericalangle EBC = \sphericalangle EBA + \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ABC = 90^\circ,$$

więc punkty A, E, B, C leżą na okręgu o średnicy EC. Punkt O jest środkiem tej średnicy. Punkty D i E leżą na płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi AB, na tej płaszczyźnie leży także punkt D' jako rzut prostokątny D na płaszczyznę ABC. W takim razie $D'E$ jest prostopadłe do AB. Pozostaje zauważyć, że $M'O$ jest linią środkową w trójkącie $CD'E$, więc jest równoległa do $D'E$, czyli prostopadła do AB.

18. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, które dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}_+$ spełniają podzielność

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!).$$

Rozwiązanie:

Podstawiając $m = n = 1$ dostajemy, że $1 + f(1)! \mid f(1)! + f(1)$, co z kolei daje $1 + f(1)! \mid f(1) - 1$.

Ponieważ $f(1)! \geqslant f(1)$ to $f(1) - 1 < 1 + f(1)!$, co oznacza że $f(1) - 1 = 0$. Zatem $f(1) = 1$. Podstawiając $m = 1$ dostajemy, że $n! + 1 \mid f(n)! + 1$. Musi być zatem $f(n)! \geqslant n!$, czyli $f(n) \geqslant n$ dla dowolnego n.

Rozważmy teraz $n = p - 1$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Z twierdzenia Wilsona $p \mid 1 + (p-1)!$, więc mamy także $p \mid f(p-1)! + 1$. Ta podzielność nie będzie jednak spełniona gdy $f(p-1) \geqslant p$. Mamy zatem $f(p-1) < p$ co w połączeniu z nierównością $f(n) \geqslant n$ dla dowolnego n daje $f(p-1) = p - 1$ dla dowolnej liczby pierwszej p.

Podstawiając teraz do równania z zadania $n = p - 1$ dostajemy, że $(p-1)! + f(m)! \mid (p-1)! + f(m!)$, czyli $(p-1)! + f(m)! \mid f(m!) - f(m)!$. Ponieważ dla ustalonego m $(p-1)!$ może być dowolnie duże, to musi być $f(m!) = f(m)!$. Ostatecznie podstawiając $m = p - 1$ do danego równania mamy

$$n! + (p-1)! \mid f(n)! + f((p-1)!) = f(n)! + f(p-1)! = f(n)! + (p-1)!$$

co daje $n! + (p-1)! \mid f(n)! - n!$. Podobnie jak wcześniej, dla ustalonego n wartość $(p-1)!$ może być dowolnie duża, więc musi być $f(n)! - n! = 0$, co daje $f(n) = n$ dla dowolnego n.

Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(n) \equiv n$ spełnia warunki zadania.

19. Dla wielomianu P o współczynnikach rzeczywistych zdefiniujmy $f(P)$ jako najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\underbrace{P(P(\dots P}_{n}(x)\dots)) > 0,$$

przy czym przyjmujemy $f(P) = 0$, gdy takie n nie istnieje. Czy istnieje taki wielomian P stopnia 2024^{2025}, że $f(P) = 2025$?

Rozwiązanie:

Przyjmijmy

$$g^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{n}$$

dla dowolnej funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Oznaczmy $Q(x) = x^{2k} + x$ oraz $P(x) = Q(x - c) + c$, gdzie $k = \frac{2024^{2025}}{2}$ jest połową stopnia szukanego wielomianu, natomiast $c \in \mathbb{R}$. Wykażemy, że dla pewnej stałej c wielomian P spełnia warunki zadania. Oznaczmy przez a argument, dla którego Q przyjmuje minimum. To minimum jest jedyne, ponieważ pochodna $Q'(x) = 2kx^{2k-1} + 1$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe. Wówczas wielomian Q jest malejący na przedziale $(-\infty, a]$ i rosnący na $[a, \infty)$. Ponadto, $Q(x) \geqslant Q(a) \geqslant a$, co oznacza że $Q([a, \infty)) \subset [a, \infty)$. Stąd $Q^n(x)$ jest rosnący na $[a, \infty)$ dla dowolnego n. Ponieważ $Q((-\infty, a]) \subset [a, \infty)$ to Q^n jest również malejący na przedziale $(-\infty, a]$. Zatem Q^n osiąga swoje minimum w a. Zauważmy teraz, że oznaczając $R(x) = x + c$, mamy $P = R \circ Q \circ R^{-1}$, a zatem

$$P^n = \underbrace{(R \circ Q \circ R^{-1}) \circ (R \circ Q \circ R^{-1}) \circ \ldots \circ (R \circ Q \circ R^{-1})}_{n} = R \circ Q^n \circ R^{-1}.$$

Stąd $\min_{x\in\mathbb{R}}(P^n(x)) = \min_{x\in\mathbb{R}}(Q^n(x - c) + c) = \min_{x\in\mathbb{R}}(Q^n(x)) + c = Q^n(a) + c$. Dla dowolnego $n > 0$ mamy $Q^n(a) > Q^{n-1}(a)$, gdyż Q^{n-1} jest rosnący na $[a, \infty)$ oraz $Q(a) > a$. Stąd dla pewnego c mamy

$$\min_{x\in\mathbb{R}}(P^n(x)) = Q^n(a) + c > 0 > Q^{n-1}(a) + c = \min_{x\in\mathbb{R}}(P^{n-1}(x)) > \min_{x\in\mathbb{R}}(P^{n-2}(x)) > \cdots > \min_{x\in\mathbb{R}}(P(x))$$

Wówczas $f(P) = n$ i dla $n = 2025$ oraz pewnego c dostajemy tezę.

20. Dany jest zbiór S składający się z n^2 odcinków na płaszczyźnie, z których żadne dwa nie przecinają się ani nie są równoległe. Wykazać, że istnieje taki zbiór T składający się z n punktów nieleżących na tych odcinkach, że dla dowolnych $A, B \in T$ odcinek AB przecina się z którymś z odcinków z S.

Rozwiązanie:

Na początku udowodnimy poniższe

Twierdzenie. *(Erdős–Szekeres) Dany jest ciąg parami różnych liczb rzeczywistych długości co najmniej $(r-1)(s-1)+1$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich r, s. Wtedy istnieje w tym ciągu podciąg rosnący długości r lub podciąg malejący długości s.*

Dowód. Niech nasz ciąg to $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Przyporządkujmy elementowi x_i parę (a_i, b_i), gdzie a_i oznacza długość najdłuższego podciągu rosnącego, a b_i – długość najdłuższego podciągu malejącego, kończącego się na tym elemencie. Jeśli założymy nie wprost, że teza nie jest prawdziwa, to wartości a_i są mniejsze niż r, a wartości b_i są mniejsze niż s. Zatem przyporządkowane pary mogą mieć jedynie $(r-1)(s-1)$ różnych wartości, ale skoro jest ich co najmniej $(r-1)(s-1)+1$ to pewne dwie będą równe. Niech będą to pary (a_i, b_i) i (a_j, b_j) dla $i < j$.

Zauważmy, że jeśli $x_i < x_j$ to możemy znaleźć podciąg rosnący długości $a_i + 1$, który kończy się na x_j, ponieważ możemy przedłużyć najdłuższy podciąg rosnący kończący się na x_i o element x_j. Podobnie, jeśli $x_i > x_j$ to możemy znaleźć podciąg malejący długości $b_i + 1$, który kończy się na x_j. Implikuje to, że $a_i \neq a_j$ lub $b_i \neq b_j$, co przeczy temu, że pary $(a_i, b_i), (a_j, b_j)$ były równe. □

Niech $S = \{S_1, \ldots, S_{n^2}\}$. Na początku ustalmy taki układ współrzędnych, żeby żaden odcinek nie był równoległy do którejś z jego osi. Wybierzmy na każdym odcinku S_i punkt P_i w taki sposób, że każde dwa punkty mają różną współrzędną x. Bez straty ogólności możemy założyć, że odcinki $S_1, S_2, \ldots, S_{n^2}$ tworzą taki ciąg, że współrzędne x wybranych punktów P_i są posortowane rosnąco. Niech θ_i będzie *kątem nachylenia* odcinka S_i. Definiujemy go jako jako jedyny kąt z przedziału $[0°, 180°)$ taki, że odcinek o końcach $(0,0)$ i $(0,1)$ po obróceniu o kąt θ_i zgodnie z ruchem wskazówek zegara będzie równoległy do S_i

Z twierdzenia Erdősa–Szekeresa znajdziemy podciąg n odcinków o rosnącym kącie nachylenia lub malejącym kącie nachylenia. Załóżmy, że mamy podciąg n odcinków o rosnącym kącie nachylenia, wyróżnijmy te odcinki. Niech Q_i będzie punktem znajdującym się nad punktem P_i w odległości ε, gdzie ε to pewna bardzo mała liczba dodatnia wspólna dla wszystkich Q_i. Wykażemy, że punkty Q_i wyróżnionych odcinków spełniają warunki zadania. Załóżmy przeciwnie, że dla pewnych $i < j$ odcinek Q_iQ_j nie przecina żadnego odcinka z S. W szczególności nie przecina odcinków S_i ani S_j. Niech α to kąt nachylenia odcinka Q_iQ_j (zauważmy, że nie zależy on od wyboru ε). Wiemy, że punkt Q_i ma mniejszą współrzędną x niż punkt Q_j. Skoro Q_iQ_j nie przecina S_i to $\alpha \leqslant \theta_i$ (inaczej przecięłyby się one dla odpowiednio małych wartości ε). Podobnie, ponieważ Q_iQ_j nie przecina S_j to $\alpha \geqslant \theta_j$. Zatem $\theta_i \geqslant \theta_j$ – otrzymaliśmy sprzeczność z faktem, że kąty nachylenia wyróżnionych odcinków były rosnące. Przypadek, gdy mamy podciąg n odcinków o malejącym kącie nachylenia, rozpatrujemy analogicznie wybierając punkty Q_i pod punktami P_i.

21. Tablica $n \times n$ jest narysowana na kartce. Ania narysowała przekątne w niektórych z n^2 kwadratów jednostkowych (jedną lub obie), po czym pocięła kartkę wzdłuż narysowanych przekątnych. Okazało się, że po wykonaniu wszystkich cięć kartka pozostała w jednym kawałku. Udowodnić, że przynajmniej $2n-1$ kwadratów jednostkowych nie miało żadnej przeciętej przekątnej.

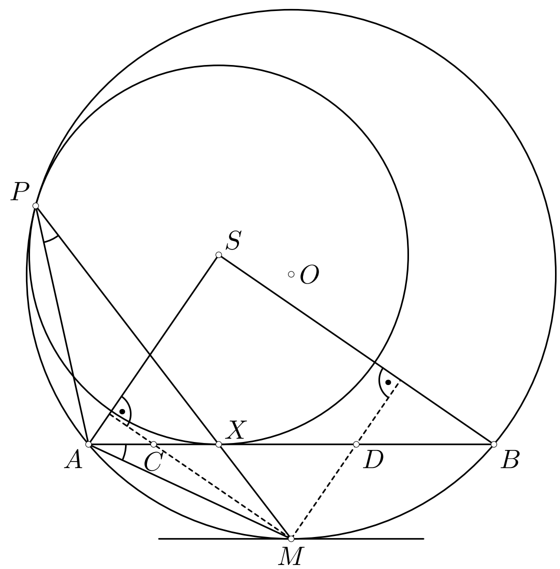
Rozwiązanie:

Rozważmy graf, w którym wierzchołkami są punkty kratowe tablicy $n \times n$ nieznajdujące się na brzegu kartki oraz dodatkowy wierzchołek B reprezentujący brzeg kartki. Krawędź między dwoma wierzchołkami innymi niż B istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy leżą one na dwóch końcach narysowanej przekątnej pewnego kwadratu jednostkowego. Krawędź między B a innym wierzchołkiem istnieje zaś wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołek ten jest połączony przekątną kwadratu jednostkowego z punktem na brzegu kwadratu $n \times n$. Nie może istnieć przekątna łącząca wierzchołek brzegowy z innym brzegowym (kartka nie byłaby w jednym kawałku), więc każda pocięta przekątna odpowiada krawędzi w zdefiniowanym grafie. Łatwo zauważyć, że jeśli w tak zdefiniowanym grafie istnieje cykl, to po wykonaniu cięć kartka papieru będzie miała przynajmniej 2 kawałki. Stąd w naszym grafie nie może znajdować się cykl, czyli może mieć on co najwyżej $v-1$ krawędzi, gdzie v to liczba jego wierzchołków. Zatem graf ten może mieć co najwyżej $((n-1)^2+1)-1 = n^2-2n+1$ krawędzi. Jako że krawędzie w grafie odpowiadają narysowanym przekątnym, to Ania narysowała co najwyżej n^2-2n+1 przekątnych. Stąd co najwyżej n^2-2n+1 kwadratów jednostkowych ma przeciętą co najmniej jedną przekątną, więc co najmniej $n^2-(n^2-2n+1) = 2n-1$ kwadratów nie zostało przeciętych, co kończy dowód.

22. Niech AB będzie cięciwą okręgu o, zaś M środkiem krótszego łuku AB. Okrąg ω o środku S jest styczny do odcinka AB i styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie leżącym po przeciwnej stronie prostej AB, co punkt M. Proste przechodzące przez punkt M i prostopadłe do prostych SA i SB przecinają odcinek AB odpowiednio w punktach C i D. Wykazać, że $AB = 2 \cdot CD$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że okrąg ω jest styczny od okręgu o w punkcie P, a do odcinka AB w punkcie X. Wykażemy, że punkt C jest środkiem odcinka AX. Podobnie udowodnimy, że punkt D jest środkiem odcinka BX, skąd wyniknie teza zadania.



Jednokładność o środku P przekształcająca okrąg ω na okrąg o przeprowadza prostą AB na prostą styczną do okręgu o równoległą do AB, a więc przechodzącą przez punkt M. Obrazem punktu X jest właśnie punkt M, więc punkty P, X, M leżą na jednej prostej. Ponadto $\sphericalangle MAX = \sphericalangle APM$, więc trójkąty AMX i PMA mające dodatkowo wspólny kąt przy wierzchołku M są podobne. Stąd dostaniemy $AM^2 = MX \cdot MP$. Punkt M leży więc na osi potęgowej okręgu ω i punktu A, która jest prostopadła do prostej SA. W takim razie punkt C leżący także na tej osi potęgowej ma jednakową potęgę względem okręgu ω i punktu A, zatem $AC = CX$. Podobnie dowodzimy $BD = DX$. To kończy rozwiązanie zadania.

23. Dana jest taka liczba pierwsza $p > 3$, że p dzieli a^2+ab+b^2, gdzie a i b to pewne liczby całkowite dodatnie. Wykazać, że p^3 dzieli $(a+b)^p - a^p - b^p$.

Rozwiązanie:

Jeśli $p \mid a$ lub $p \mid b$ to wtedy p musi dzielić obie liczby a, b i podzielność $p^3 \mid (a+b)^p - a^p - b^p$ oczywiście zachodzi. Odtąd rozważamy przypadek, gdy p nie dzieli żadnej z liczb a, b. Niech c będzie taką liczbą całkowitą, że $bc \equiv 1 \pmod{p^3}$. Skoro b i p są względnie pierwsze, to taka liczba na pewno istnieje. Możemy teraz przekształcić założenia i tezę:

$$p \mid a^2+ab+b^2 \iff p \mid (ac)^2+ac+1$$
$$p^3 \mid (a+b)^p - a^p - b^p \iff p^3 \mid (ac+1)^p - (ac)^p - 1$$

Podstawiając $d = ac$ mamy równoważnie, że podzielność $p \mid d^2+d+1$ daje $p^3 \mid (d+1)^p - d^p - 1$. Używając wzoru dwumianowego Newtona rozpisujemy

$$(d+1)^p - d^p - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} d^k$$

Ponieważ $p \mid \binom{p}{k}$ dla $0 < k < p$, to wystarczy udowodnić, że istnieje taki wielomian $W(x)$ o współczynnikach wymiernych, że

$$(x+1)^p - x^p - 1 = W(x)(x^2+x+1)^2 \tag{1}$$

Istotnie, skoro wielomian $\frac{1}{p}((x+1)^p - x^p - 1)$ ma współczynniki całkowite, a wielomian $(x^2+x+1)^2$ ma współczynniki całkowite i jest unormowany, to z algorytmu dzielenia wielomianów wynika, że wielomian $\frac{1}{p}W(x)$ musi mieć współczynniki całkowite. Stąd $p \mid W(d)$, a ponieważ $p \mid d^2+d+1$ to dostajemy $p^3 \mid (d+1)^p - d^p - 1$. Zauważmy, że $p = 3k+1$ dla pewnego k całkowitego. Wynika to z tego, że $p \mid d^3 - 1 = (d-1)(d^2+d+1)$, więc rząd reszty d modulo p wynosi 1 lub 3. Nie może on jednak wynosić 1, bo wtedy byłoby $d \equiv 1 \pmod 3$ co oznaczałoby, że $p \mid 1^2+1+1 = 3$. Zatem musi być $3 \mid p-1$. Wykażemy teraz podzielność wielomianów $(x^2+x+1) \mid (x+1)^p - x^p - 1$. Skoro $x^3 \equiv 1 \pmod{x^2+x+1}$ to:

$$(x+1)^p - x^p - 1 \equiv (-x^2)^p - x^p - 1 \equiv -x^{6k+2} - x^{3k+1} - 1 \equiv -x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{x^2+x+1}$$

Mamy zatem dla pewnego wielomianu $Q(x)$ o współczynnikach wymiernych równość

$$(x+1)^p - x^p - 1 = (x^2+x+1)Q(x).$$

Różniczkując tę równość obustronnie dostajemy, że

$$p(x+1)^{p-1} - px^{p-1} = (x^2+x+1)Q'(x) + (2x+1)Q(x).$$

Jeśli udowodnimy, że $x^2+x+1 \mid p(x+1)^{p-1} - px^{p-1}$ to dostaniemy także podzielność $x^2+x+1 \mid Q(x)$ (gdyż $2x+1$ i x^2+x+1 są względnie pierwsze). To z kolei da nam żądaną podzielność (1). Rozpiszmy:

$$p(x+1)^{p-1} - px^{p-1} \equiv px^{2(p-1)} - px^{p-1} \equiv px^{6k} - px^{3k} \equiv 0 \pmod{x^2+x+1}$$

Niniejszym dowód jest zakończony.

24. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

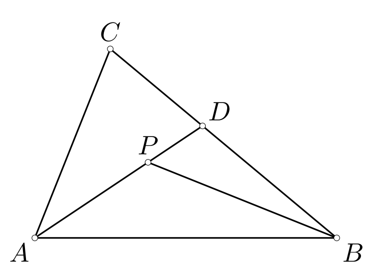
$$\sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2} + \sqrt{c^2-ca+a^2} \leqslant$$
$$\leqslant a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}.$$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy własności figur geometrycznych, które w niektórych przypadkach mogą być zdegenerowane. Udowodnimy najpierw następujący:

Lemat. *Dany jest trójkąt ABC i punkt P znajdujący się w jego wnętrzu lub na brzegu. Wówczas*

$$AP + BP \leqslant AC + BC.$$



Dowód. Niech AP przecina odcinek BC w punkcie D. Wykorzystując dwukrotnie nierówność trójkąta dostajemy

$$AP + BP \leqslant AP + PD + BD = AD + BD \leqslant AC + CD + BD = AC + BC.$$

$\square$

Przechodzimy do dowodzenia tezy zadania. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a \leqslant b \leqslant c$ i rozważmy trójkąt równoboczny ABC o boku długości c. Niech punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i BC, przy czym $AD = a$ i $EC = b$. Niech ponadto $DE = d$. Stosując twierdzenie kosinusów dla trójkąta DBE dostajemy

$$d^2 = (c-a)^2 + (c-b)^2 - 2(c-a)(c-b) \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= c^2 - 2ac + a^2 + c^2 - 2bc + b^2 - c^2 + ca + cb - ab = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

Niech dodatkowo

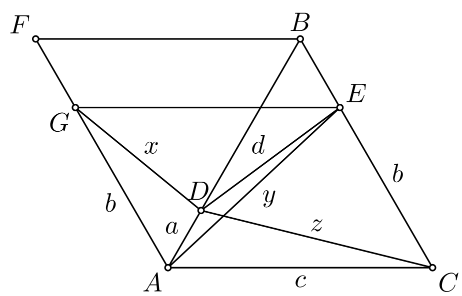
$$x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}, \quad y = \sqrt{b^2 - bc + c^2}, \quad z = \sqrt{c^2 - ca + a^2}.$$

Nierówność z zadania możemy przepisać w postaci

$$x + y + z \leqslant a + b + c + d.$$

Niech F będzie punktem leżącym po przeciwnej stronie prostej AB, co punkt C takim, że trójkąt ABF jest równoboczny. Niech ponadto G będzie takim punktem na odcinku AF, że $AG = EC = b$. Z twierdzenia kosinusów dla trójkątów ADC, ACE i ADG dostajemy

$$CD = \sqrt{c^2 - ca + a^2} = z, \quad AE = \sqrt{b^2 - bc + c^2} = y, \quad DG = \sqrt{a^2 - ab + b^2} = x.$$



Czworokąt $AGEC$ jest równoległobokiem, a z założenia $a \leqslant b$ wynika, że punkt D leży w jego wnętrzu lub na brzegu. Innymi słowy punkt D leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta AGC lub wewnątrz lub na brzegu trójkąta GEC — przyjmijmy bez straty ogólności, że jest to AGC. Wykorzystując Lemat otrzymujemy

$$x + z = DG + DC \leqslant AG + AC = c + b.$$

Ponadto z nierówności trójkąta dla ADE dostajemy

$$y \leqslant a + d.$$

Dodając te dwie nierówności stronami dostajemy tezę zadania.

25. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $1^2+1-1=1$, zatem jeśli któraś z liczb x,y,z jest równa 1, to wszystkie są równe 1. Podobnie, $(-1)^2+(-1)-1=-1$, więc jeśli któraś z liczb x,y,z jest równa -1, to wszystkie są równe -1. Obie trójki $(x,y,z)=(1,1,1)$ i $(x,y,z)=(-1,-1,-1)$ spełniają dany układ równań. Od teraz zakładamy, że żadna z liczb x,y,z nie jest równa ani 1, ani -1. Równania można przepisać w postaci

$$\begin{cases} x(x+1)=y+1, \\ y(y+1)=z+1, \\ z(z+1)=x+1. \end{cases}$$

Wymnażając te równania stronami i skracając przez $(x+1)(y+1)(z+1)\neq 0$ otrzymujemy $xyz=1$. Układ równań można przepisać też w postaci

$$\begin{cases} (x+2)(x-1)=y-1, \\ (y+2)(y-1)=z-1, \\ (z+2)(z-1)=x-1. \end{cases}$$

Wymnażając stronami i skracając przez $(x-1)(y-1)(z-1)\neq 0$ otrzymujemy $(x+2)(y+2)(z+2)=1$. Zatem $xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8=1$, skąd $2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8=0$.

Dodając wyjściowe równania stronami dostajemy po redukcji $x^2+y^2+z^2=3$. Dodając to stronami do poprzedniej równości otrzymujemy

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8=3,$$

skąd $(x+y+z+2)^2+1=0$, co jest sprzecznością.

Ostatecznie, jedyne trójki spełniające układ równań to $(x,y,z)=(1,1,1)$ i $(x,y,z)=(-1,-1,-1)$.

26. Na obozie Olimpiady Matematycznej w Mszanie Dolnej jest 23 uczestników. Każdy z nich ma pewną liczbę żetonów do pokera. Co minutę wszyscy uczestnicy, którzy mają co najmniej 22 żetony, jednocześnie oddają po jednym żetonie każdemu innemu uczestnikowi na obozie. Załóżmy, że proces ten zachodzi w nieskończoność (tj. w każdej minucie istnieje uczestnik, który rozdaje żetony). Jaka jest najmniejsza możliwa liczba żetonów na obozie?

Rozwiązanie:

Odpowiedzią jest $253=\binom{23}{2}$. Jeśli początkowo uczestnicy mają kolejno $22,21,\ldots,1,0$ żetonów, to w każdej minucie dokładnie jeden uczestnik odda wszystkie swoje żetony innym, więc rozkład żetonów pozostanie taki sam. Teraz wykażemy, że uczestnicy mają w sumie co najmniej 253 żetony.

Sposób 1.

Jeśli w pewnej minucie więcej niż jedna osoba oddaje żetony to możemy założyć, że nie robią tego jednocześnie, tylko pojedynczo po sobie. Takie oddanie żetonów jednej osoby będziemy nazywać ruchem. Zauważmy, że suma kwadratów liczb żetonów, które mają uczestnicy, nie może zmniejszać się po każdym ruchu. Rozważmy więc ruch, po którym suma kwadratów się nie zmniejszyła. Niech $z_1,\ldots,z_{23}$ to liczby żetonów, jakie mają uczestnicy przed tym ruchem, a ruch wykonuje uczestnik z z_1 żetonami. Oznaczmy jeszcze przez S łączną liczbę żetonów na obozie. Otrzymujemy następujące nierówności:

$$\begin{gathered} (z_1-22)^2+(z_2+1)^2+\ldots+(z_{23}+1)^2\geqslant z_1^2+z_2^2+\ldots+z_{23}^2, \\ -44z_1+2z_2+\ldots+2z_{23}+506\geqslant 0, \\ 2S-46z_1\geqslant -506, \\ S\geqslant 23z_1-253\geqslant 23\cdot 22-253=253, \end{gathered}$$

przy czym ostatnia nierówność wynika z tego, że osoba, która oddaje żetony, ma ich co najmniej 22.
Sposób 2.

Zauważmy, że każdy uczestnik będzie rozdawał żetony nieskończenie wiele razy. Istotnie, w każdej minucie w której nie rozdaje żetonów dostaje przynajmniej jeden, więc po pewnej liczbie minut będzie miał co najmniej 22. Zakładamy również, jak w poprzednim sposobie, że uczestnicy nie rozdają żetonów jednocześnie.

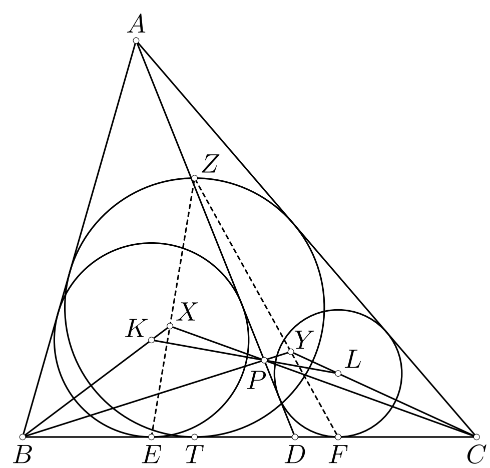
Jeśli żeton jest przekazywany pomiędzy uczestnikami a i b to nadajemy mu etykietę będącą zbiorem $\{a, b\}$. Początkowo żetony nie mają nadanych etykiet. W momencie, gdy uczestnik a rozdaje żetony i posiada żeton z etykietą $\{a, b\}$ to, w pierwszej kolejności, przekazuje go uczestnikowi b. W przeciwnym przypadku, jeśli nie ma już żetonów spełniających poprzedni warunek, przekazuje uczestnikowi b dowolny żeton i nadaje mu odpowiednią etykietę.

Zauważmy, że jeśli powstanie żeton z etykietą $\{a, b\}$ to w każdym następnym momencie będzie istniał co najmniej jeden żeton z etykietą $\{a, b\}$. Takie żetony mogą być w posiadaniu tylko uczestnika a lub b i jeśli któryś z nich rozdaje żetony to po jego ruchu zostanie co najmniej jeden taki żeton. Skoro każdy uczestnik będzie rozdawał żetony to będziemy mieli żetony z wszystkimi możliwymi etykietami, czyli będzie ich co najmniej $\binom{23}{2} = 253$.

27. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC. Okrąg o_B o środku K wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku BC w punkcie E, a okrąg o_C o środku L wpisany w trójkąt ACD jest styczny do boku BC w punkcie F. Odcinki KL i AD przecinają się w punkcie P. Prosta CP przecina dwusieczną kąta ABC w punkcie X, zaś prosta BP przecina dwusieczną kąta BCA w punkcie Y. Wykazać, że proste EX i FY przecinają się na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.

Rozwiązanie:

Niech T będzie punktem styczności z prostą BC okręgu o wpisanego w trójkąt ABC, a Z obrazem symetrycznym T względem środka okręgu o. Punkt P jest środkiem jednokładności o skali ujemnej przekształcającej okrąg o_B na o_C. Jednokładność j o skali ujemnej przekształcająca okrąg o_B na okrąg o jest złożeniem jednokładności o środku P i skali ujemnej przekształcającej okrąg o_B na o_C z jednokładnością o środku C i skali dodatniej przekształcającą okrąg o_C na okrąg o. Z twierdzenia o złożeniu jednokładności wynika, że jej środek leży na prostej CP, a z drugiej strony musi leżeć na dwusiecznej kąta ABC zawierającej środki okręgów o_B i o, czyli musi to być punkt X. Jednakże obrazem punktu E w jednokładności j jest punkt Z, skąd wniosek, że punkty E, X, Z leżą na jednej prostej. Analogicznie dowodzimy, że punkty F, Y, Z leżą na jednej prostej, co oznacza, że punkt Z jest szukanym punktem wspólnym prostych EX i FY.



28. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ oraz $p - 2$ liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}$ o tej własności, że p nie dzieli $x_k^{k+1} - x_k$ dla $1 \leqslant k \leqslant p - 2$. Udowodnić, że istnieje taki niepusty podzbiór $A \subseteq \{1, 2, \ldots, p - 2\}$, że

$$\prod_{k\in A} x_k \equiv 2 \pmod p.$$

Rozwiązanie:

Niech I_m dla $1 \leqslant m \leqslant p-2$ oznacza zbiór tych reszt modulo p, które przystają do iloczynu postaci $\prod_{k\in A} x_k$ dla pewnego podzbioru $A \subseteq \{1,2,\ldots m\}$. Przyjmijmy dodatkowo $I_0 = \{1\}$. Wykażemy teraz, że $|I_m| \geqslant m+1$ dla dowolnego $0 \leqslant m \leqslant p-2$. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. Niech k będzie najmniejszym indeksem takim, że $|I_k| < k+1$. Oczywiście $k \neq 0$ oraz $I_{k-1} \subseteq I_k$, więc $k \leqslant |I_{k-1}| \leqslant |I_k|$. Stąd $|I_{k-1}| = |I_k| = k$, czyli $I_{k-1} = I_k$. Ponieważ dla każdego $a \in I_{k-1}$ mamy $ax_k \in I_k$, to wówczas $ax_k \in I_{k-1}$. Skoro $x_k \not\equiv 0 \pmod p$, to jeśli $a, b \in I_{k-1}$ oraz $a \not\equiv b \pmod p$, to również $ax_k \not\equiv bx_k \pmod p$. W konsekwencji otrzymujemy, że zbiory I_{k-1} oraz $\{ax_k : \ a \in I_{k-1}\}$ są równe modulo p. Zatem

$$\prod_{a\in I_{k-1}} a \equiv \prod_{a\in I_{k-1}} ax_k \equiv x_k^k \prod_{a\in I_{k-1}} a \pmod p$$

Ponieważ w zbiorze I_{k-1} nie ma reszty 0, to powyższe przystawanie daje nam $x_k^k \equiv 1 \pmod p$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem zadania. Uzyskana sprzeczność kończy dowód nie wprost i w efekcie dostajemy, że $|I_m| \geqslant m+1$ dla dowolnego $0 \leqslant m \leqslant p-2$. W szczególności zbiór I_{p-2} zawiera wszystkie z $p-1$ niezerowych reszt modulo p. Zatem $2 \in I_{p-2}$ i rozwiązanie jest zakończone.

29. Dane są liczby całkowite $a > b > 1$, dla których równanie

$$\frac{a^x-1}{a-1} = \frac{b^y-1}{b-1}$$

jest spełnione przez przynajmniej dwie różne pary liczb całkowitych (x, y) takich, że $x, y > 1$. Dowieść, że liczby a i b są względnie pierwsze.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że równanie dane w treści jest spełnione dla pewnych liczb całkowitych $x, y > 1$. Z warunku $a > b$ wynika nierówność $y > x$. Co więcej, dane równanie możemy przepisać w postaci

$$a^{x-1} + a^{x-2} + \ldots + a = b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b$$

lub też

$$\sum_{k=1}^{x-1}(a^k - b^k) = \sum_{k=x}^{y-1} b^k.$$

Załóżmy teraz, że istnieje liczba pierwsza p taka, że $p \mid a$ oraz $p \mid b$. Przez $\alpha = v_p(a)$ i $\beta = v_p(b)$ oznaczmy odpowiednio największe wykładniki, dla których $p^\alpha \mid a$ oraz $p^\beta \mid b$. Zauważmy, że jeśli $k > 1$, to w równości

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

drugi czynnik jest podzielny przez p. A zatem, biorąc pod uwagę $k = 1$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{x-1} a^k - b^k = (a-b)(pn+1)$$

dla pewnej liczby całkowitej n. W szczególności mamy

$$v_p\left(\sum_{k=1}^{x-1} a^k - b^k\right) = v_p(b-a).$$

Jednocześnie jasne jest, że

$$v_p\left(\sum_{k=x}^{y-1} b^k\right) = v_p(b^x) = xv_p(b).$$

Ponieważ $v_p(b) > 0$, otrzymaliśmy w ten sposób równość $x = \frac{v_p(b-a)}{v_p(b)}$. Zatem w parze (x, y), dla której spełnione jest równanie dane w treści, liczba x jest wyznaczona jednoznacznie. Oczywiste jest jednak, że dla danej liczby x może istnieć co najwyżej jedna liczba y, która spełnia dane równanie. Wykazaliśmy w ten sposób, że jeżeli liczby a i b nie są względnie pierwsze, to istnieje co najwyżej jedna para (x, y) o danej własności i rozwiązanie zadania jest zakończone.

30. Dane są liczby rzeczywiste x, y. Wykazać, że jeśli zbiór

$$\{\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

jest skończony, to x, y są wymierne.

Rozwiązanie:

Niech $a_n = \cos n\pi x)$ i $b_n = \cos(n\pi y)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 = 2(a_n^2 + b_n^2) = 2 + (a_{2n} + b_{2n}).$$

Zbiory $\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{a_{2n} + b_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ są skończone, skąd wynika że zbiór $\{a_n - b_n : n \in \mathbb{N}\}$ także jest skończony. Ponieważ

$$a_n = \frac{1}{2}\left((a_n + b_n) + (a_n - b_n)\right) \quad \text{i} \quad b_n = \frac{1}{2}\left((a_n + b_n) - (a_n - b_n)\right),$$

więc zbiory $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ są skończone. W szczególności $a_m = a_n$ dla pewnych liczb naturalnych $m < n$, więc $(n - m)\pi x$ lub $(n + m)\pi x$ musi być całkowitą wielokrotnością π. To zaś oznacza, że x jest liczbą wymierną. Analogicznie uzasadniamy, że y jest liczbą wymierną.

31. Dane jest drzewo (to jest nieskierowany graf spójny bez cykli) o n wierzchołkach. Każda krawędź ma przypisaną pewną wagę będącą liczbą naturalną. Zdefiniujmy odległość między dwoma wierzchołkami jako sumę wag krawędzi na najkrótszej ścieżce między nimi. Załóżmy, że zbiór odległości pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków to zbiór wszystkich liczb całkowitych od 1 do $\binom{n}{2}$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb n, $n - 2$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Ustalmy korzeń r drzewa. Zauważmy, że parzystość odległości między parą wierzchołków jest taka sama jak suma parzystości ich odległości do korzenia. Rzeczywiście, jeśli oznaczymy przez u, v dwa wierzchołki, przez w najbliższy korzeniowi wierzchołek leżący na ścieżce między u i v, a przez $d(x, y)$ odległość między x i y to dostajemy:

$$d(u, v) = d(u, w) + d(w, v) = (d(u, r) - d(w, r)) + (d(v, r) - d(w, r)) = d(u, r) + d(v, r) - 2d(r, w).$$

Oznaczmy teraz przez k liczbę wierzchołków w nieparzystej odległości od korzenia. Liczba par wierzchołków w nieparzystej odległości od siebie wynosi wtedy $k(n - k)$. Z drugiej strony, z założeń zadania wynika, że jest to $\left\lceil \frac{n(n-1)}{4} \right\rceil$. Rozważmy dwa przypadki:

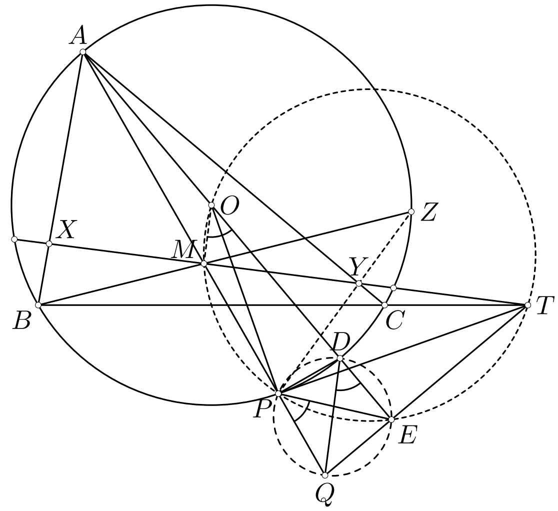
- $2 \mid \binom{n}{2}$. Wtedy po przekształceniach $4k^2 - 4nk + n^2 = n$, $(2k - n)^2 = n$ i n jest kwadratem.
- $2 \nmid \binom{n}{2}$. Wtedy po przekształceniach $4k^2 - 4nk + n^2 = n - 2$, $(2k - n)^2 = n - 2$ i $n - 2$ jest kwadratem.

32. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω o środku O. Odcinek AD jest średnicą tego okręgu. Punkt E leży na półprostej AD poza odcinkiem AD. Prosta prostopadła do prostej AD przechodząca przez E przecina prostą BC w punkcie T. Prosta styczna do ω przechodząca przez T jest styczna do ω w punkcie P, przy czym punkty P i A leżą po różnych stronach prostej BC. Prosta AP przecina prostą ET w punkcie Q. Punkt M jest środkiem odcinka AQ. Prosta TM przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach X i Y. Udowodnić, że M jest środkiem odcinka XY.

Rozwiązanie:

Niech $Z \neq B$ będzie drugim punktem przecięcia prostej BM z okręgiem ω. Z twierdzenia Pascala dla zdegenerowanego sześciokąta $BZPPAC$ otrzymujemy, że punkty M (przecięcie BZ i PA), przecięcie ZP z AC i T (przecięcie stycznej do ω w P i CB) są współliniowe. To oznacza, że proste ZP, AC i MT przecinają się w jednym punkcie. Zatem PZ przechodzi przez Y.

Kąty DPA i TPO są proste, więc czworokąty $QPDE$ i $TEPO$ można wpisać w okrąg. Mamy $\sphericalangle QPE = \sphericalangle QDE = \sphericalangle MOE$, przy czym druga równość wynika z tego, że $OM \parallel DQ$ (linia środkowa w trójkącie ADQ). Zatem czworokąt $OMPE$ można wpisać w okrąg. Piątka punktów T, E, P, M, O leży zatem na jednym okręgu, skąd $\sphericalangle TMO = \sphericalangle TEO = 90°$.



Ponieważ $\sphericalangle TMO = 90°$, więc M jest środkiem cięciwy okręgu ω wyciętej przez prostą XY. Z twierdzenia o motylku wynika, że M jest środkiem odcinka XY.

Zawody drużynowe

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x+y)^3 = (x+2y)f(x^2) + (x^2+3xy+y^2)f(f(y))$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że f jest stale równa 0 lub jest identycznością.

Wstawmy $x, y = 0$, aby otrzymać $f(0)^3 = 0$, czyli $f(0) = 0$. Następnie, kładąc $y = 0$, otrzymujemy $f(x)^3 = xf(x^2) + x^2 f(f(0)) = xf(x^2)$. Z kolei podstawienie $x = 0$ pociąga za sobą $f(y)^3 = y^2 f(f(y))$. Łącząc te dwie tożsamości otrzymujemy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $xf(x^2) = f(x)^3 = x^2 f(f(x))$. To z kolei pociąga za sobą $f(x^2) = xf(f(x))$. Istotnie, dla $x \neq 0$ wystarczy podzielić skrajne strony powyższej równości przez x. Dla $x = 0$ równość także zachodzi, jako że $f(0) = 0$.

Wstawmy otrzymaną tożsamość do oryginalnej równości

$$f(x+y)^3 = (x^2+2xy)f(f(x)) + (x^2+3xy+y^2)f(f(y)). \tag{1}$$

Zamieniając x i y miejscami dostajemy

$$f(x+y)^3 = (x^2+3xy+y^2)f(f(x)) + (2xy+y^2)f(f(y)).$$

Po porównaniu prawych stron i redukcji otrzymujemy

$$f(f(y))(x+y)x = f(f(x))(x+y)y.$$

Oznaczmy teraz $c \stackrel{\text{def}}{=} f(f(1))$. Kładąc w powyższej tożsamości $y = 1$, mamy $f(f(x))(x+1) = cx(x+1)$, czyli dla $x \neq -1$ zachodzi $f(f(x)) = cx$.

Wstawiając to do równości (1) dostajemy

$$f(x+y)^3 = (x^2+2xy)cx + (x^2+3xy+y^2)cy = c(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) = c(x+y)^3$$

dla $x, y \neq -1$. Stąd $f(x+y) = \sqrt[3]{c}(x+y)$. W takim razie dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy $f(t) = \sqrt[3]{c}t$.

Pozostaje znaleźć możliwe wartości c. W tym celu wracamy do początkowo uzyskanej tożsamości $f(x^2) = xf(f(x))$. Wstawiając, dostajemy $\sqrt[3]{c}x^2 = \sqrt[3]{c^2}x^2$. W szczególności, dla $x = 1$, $\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{c^2}$. Stąd $\sqrt[3]{c} \in \{0, 1\}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że otrzymane funkcje spełniają tożsamość z zadania.

2. Niech $f(x) = x^2 - 2$. Dla danej liczby całkowitej dodatniej n niech A_n oznacza zbiór tych liczb rzeczywistych x, dla których zachodzi nierówność $f^n(x) < -1$, gdzie f^n oznacza n-krotne złożenie funkcji f. Udowodnić, że dla każdego $n > 0$ łączna długość wszystkich przedziałów tworzących A_n przekracza $\frac{4}{3}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $f([2,\infty)) = [2,\infty)$ oraz $f((-\infty,-2]) = [2,\infty)$. Wynika stąd, że dla $n > 0$ i każdego $x \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$ zachodzi $f^{(n)}(x) \geqslant 2$. Stąd $A_n \subset (-2,2)$. Zauważmy teraz, że dla $x \in (-2,2)$ istnieje dokładnie jedna liczba $\alpha \in (0,\pi)$ taka, że $x = 2\cos\alpha$. Wtedy $f(x) = 4\cos^2\alpha - 2 = 2\cos 2\alpha$. Stąd $f^{(n)}(x) < -1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos 2^n\alpha < -\frac{1}{2}$. Skoro $\alpha \in (0,\pi)$ to jest to równoważne temu, że $2^n\alpha \in (2k\pi + 2\pi/3, 2k\pi + 4\pi/3)$ dla pewnego $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1\}$. Stąd łączna długość przedziałów tworzących zbiór A_n wynosi

$$2\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(\frac{2k\pi + 2\pi/3}{2^n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi + 4\pi/3}{2^n}\right) = -4\sin\left(-\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right)\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)$$

gdzie skorzystaliśmy z równości $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. Używając tego wzoru można także udowodnić

$$\cos(0) - \cos(\pi) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi + 2\pi}{2^n}\right) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2^n}\right)\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)$$

Z tego wynika, że

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

Zatem łączna długość wszystkich odcinków tworzących zbiór A_n wynosi

$$4\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right)\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right) = \frac{4\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

Ponieważ sinus jest funkcją wklęsłą na przedziale $[0, \pi/2]$ to zachodzi nierówność $\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right) \geqslant \frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Stąd łączna długość odcinków tworzących zbiór A_n jest większa równa $4/3$ dla $n > 0$.

3. Czy istnieje 777-kąt wypukły taki, że zbiór długości jego boków jest równy $\{1, 2, 3, ..., 777\}$, a wszystkie jego kąty mają równe miary?

Rozwiązanie:

Tak. Niech ξ_k to k-ty pierwiastek pierwotny ($e^{2\pi i/k}$) z jedynki. Zauważmy, że teza jest równoważna znalezieniu takiej permutacji σ zbioru $\{1, 2, ..., n\}$ (dla $n = 777$), że:

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma(j)\xi_n^j = 0 \tag{1}$$

Niech kotek porusza się po kolei wektorami $\sigma(j)e^{2\pi ij/n}$. Wtedy po przeiterowaniu się po całej sumie kotek wróci do punktu startowego, zataczając poszukiwany wielokąt.

Lemat. *Dla $p > 1$ zachodzi $\sum_{j=1}^{p} \xi_p^j = 0$.*

Dowód. Rozpatrzmy wielomian $x^p - 1$. Elementy tej sumy to oczywiście pierwiastki tego wielomianu. Ze wzoru Viète'a otrzymujemy tezę. □

Wykażemy, że jeśli $n = p \cdot q$ dla pewnych $p, q > 1$ względnie pierwszych, to taki wielokąt istnieje. Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że każdej liczbie $j \in \{1, ..., n\}$ odpowiada dokładnie jedna para $(x, y) \in \{0, \dots, q-1\} \times \{0, \dots, p-1\}$ taka, że $j \equiv px + qy \pmod{n}$. Przypisując $\sigma(j) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + x + qy$ dla każdego takiego j dostajemy, że σ jest permutacją zbioru $\{1, \dots, n\}$. Gdyby tak nie było, to dla pewnych par $(x, y) \neq (x', y')$ zachodziłoby $1 + x + qy = 1 + x' + qy'$. Stąd mielibyśmy $q \mid x - x'$, co wobec $x, x' \in \{1, \dots, q\}$ daje $x = x'$ i dalej $qy = qy' \Rightarrow y = y'$. Sprzeczność. Pozostaje wykazać, że σ spełnia równość (1). Rozpiszmy:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \sigma(j)\xi_n^j &= \sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{p-1}(1 + x + qy)\xi_n^{px+qy} = \sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{p-1}(1 + x + qy)\xi_q^x\xi_p^y = \\ &= \left(\sum_{x=0}^{q-1}\xi_q^x\right)\left(\sum_{y=0}^{p-1}\xi_p^y\right) + \left(\sum_{x=0}^{q-1}x\xi_q^x\right)\left(\sum_{y=0}^{p-1}\xi_p^y\right) + \left(\sum_{x=0}^{q-1}\xi_q^x\right)\left(\sum_{y=0}^{p-1}qy\xi_p^y\right) = 0.\end{aligned}$$

Najpierw skorzystaliśmy z równości $\xi_n^p = \xi_q$ oraz $\xi_n^q = \xi_p$, by potem używając Lematu zauważyć, że przynajmniej jedna suma w każdym składniku wyrażenia na dole się zeruje. Teraz pozostaje zauważyć, że $777 = 21 \cdot 37$, przy czym 21 i 37 są względnie pierwsze.

4. Na finale Olimpiady Matematycznej okazało się, że k sal nie wystarczyło do rozmieszczenia uczestników tak, aby w każdej sali uczestnicy się parami nie znali. Po usadzeniu w większej liczbie sal, uczestnicy wymyślili sposób, aby rozprzestrzeniać pomiędzy sobą pdf-a "Dwustosunek i biegunowe". Mogą się oni komunikować na dwa sposoby: wysyłając gołębia lub sowę, przy czym każda para znajomych może używać dokładnie jednego rodzaju komunikacji (nieznajomi nie mogą się ze sobą komunikować).

Udowodnić, że przy użyciu jednego rodzaju komunikacji pewien uczestnik może rozdystrybuować ten cenny pdf pomiędzy k innych uczestników (niekoniecznie bezpośrednio).

Rozwiązanie:

Rozważmy graf, w którym wierzchołkami są uczniowie, krawędzie zaś znajdują się pomiędzy wierzchołkom odpowiadającym parze znajomych. Ponadto krawędź taka ma kolor niebieski jeśli dana para może porozumiewać się za pomocą gołębia i kolor czerwony jeśli może porozumiewać się za pomocą sowy. Niech nasz graf ma v wierzchołków oraz e krawędzi.

Rozdzielmy ten graf na dwa grafy, jeden tylko z niebieskimi krawędziami, a drugi tylko z czerwonymi. Popatrzmy na spójne składowe tych grafów oraz upewnijmy się że składowych obu kolorów jest tyle samo, być może dodając kilka pustych składowych (tu "pusta składowa" oznacza zbiór o 0 wierzchołkach, do której wierzchołki dodamy później). Jeśli któraś z nich ma przynajmniej k wierzchołków, to biorąc jej drzewo rozpinające mamy tezę. Załóżmy więc nie wprost, że nie ma tak dużej składowej.

Niech spójnych składowych w każdym z tych grafów jest m. Dodajmy teraz $(k-1)m - v$ wierzchołków do każdego z nich, przy czym każdemu z nowych wierzchołków w grafie niebieskim będzie odpowiadać dokładnie jeden wierzchołek w grafie czerwonym, tak samo jako odpowiadają sobie wierzchołki z oryginalnego grafu. Połączmy nowe wierzchołki ze składowymi tak, aby teraz każda z nich miała $k-1$ wierzchołków.

Teraz udowodnimy indukcyjnie następującą obserwację: Mamy graf podzielony na m składowych czerwonych i m niebieskich, z których każda ma $\ell = k-1$ wierzchołków. Możemy wtedy pokolorować wierzchołki tego grafu na ℓ kolorów w taki sposób, że wierzchołki tego samego koloru nie są połączone krawędzią (ani niebieską, ani czerwoną).

Jeśli $\ell = 1$ to teza jest oczywista, bo graf nie ma krawędzi. Postarajmy się teraz znaleźć taki zbiór m wierzchołków, że każda niebieska i czerwona składowa zawiera dokładnie jeden spośród wybranych wierzchołków.

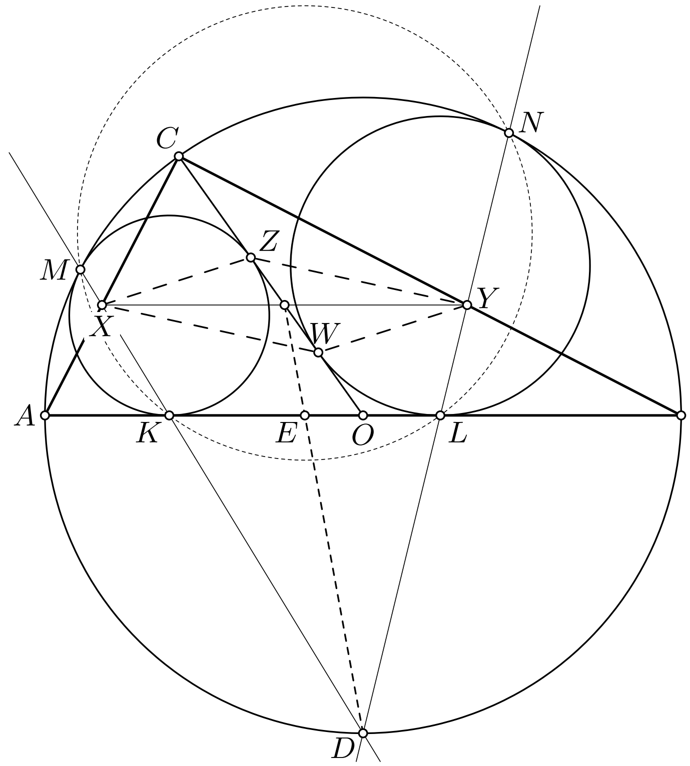
Stwórzmy graf dwudzielny spójnych składowych (czerwonych i niebieskich), łącząc dwie składowe różnych kolorów, jeśli mają wspólny wierzchołek. Szukamy w tym grafie skojarzenia doskonałego, bo każda krawędź w nim odpowiada (przynajmniej jednemu) wierzchołkowi w oryginalnym grafie. Założenia twierdzenia Halla są spełnione — każdy zbiór składowych czerwonych o liczności r ma przynajmniej r sąsiadów w grafie dwudzielnym, bo gdyby tak nie było to $r \cdot \ell$ wierzchołków byłoby pokryte mniej niż r zbiorami o ℓ wierzchołkach, co jest niemożliwe.

Kolorujemy teraz wybrane wierzchołki na jeden kolor. Graf złożony z pozostałych wierzchołków możemy na mocy indukcji pokolorować $\ell - 1$ innymi kolorami, co łącznie daje poprawne kolorowanie całego grafu ℓ kolorami.

Jako że umiemy pokolorować powiększony graf na $k-1$ kolorów, to to kolorowanie można zawęzić do poprawnego kolorowania grafu przed rozszerzeniem. Oznaczałoby to jednak, że uczestników można usadzić w $k-1$ salach tak, aby w jednej sali nie znalazła się żadna para znajomych, co jest sprzeczne z warunkami zadania.

5. Punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC, a Ω jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg ω_A jest styczny do odcinka AO w K, CO w Z i Ω w M, natomiast ω_B jest styczny do odcinka BO w L, CO w W i Ω w N. Punkt X to przecięcie AC z MK, natomiast Y to przecięcie BC z NL. Udowodnić, że $XWYZ$ jest równoległobokiem.

Rozwiązanie:



Zauważmy, że jednokładność w M przerzucająca ω_A na Ω przerzuca też K na środek D łuku AB. Analogicznie jednokładność w N przerzucająca ω_B na Ω przerzuca L na D. Punkty M i N to także środki łuków (odpowiednio AC i BC), więc korzystając z twierdzenia o dwusiecznej w ΔADC i ΔBDC otrzymujemy:

$$\frac{AX}{XC} = \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DC} = \frac{BY}{YC} \implies XY \parallel AB.$$

Zauważmy, że $\sphericalangle KLD = \sphericalangle NMD$ (ponieważ suma łuków AD i BN równa się łukowi DN), więc mamy $\Delta DLK \sim \Delta DMN$. Stąd na czworokącie $MNLK$ można opisać okrąg.

Korzystając z potęgi punktu względem ω_A i ω_B otrzymujemy, że DE to ich oś potęgowa, gdzie E to środek KL. Wynika stąd, że środek WZ leży na prostej DE. Ponadto środek XY także leży na DE, ponieważ wiemy, że $XY \parallel AB$.

Zauważmy, że środek XY musi leżeć na prostej CO, skoro na tej prostej leży środek AB. Zatem proste CO, DE, XY przecinają się w jednym punkcie i jest to środek odcinków XY i ZW, stąd teza.

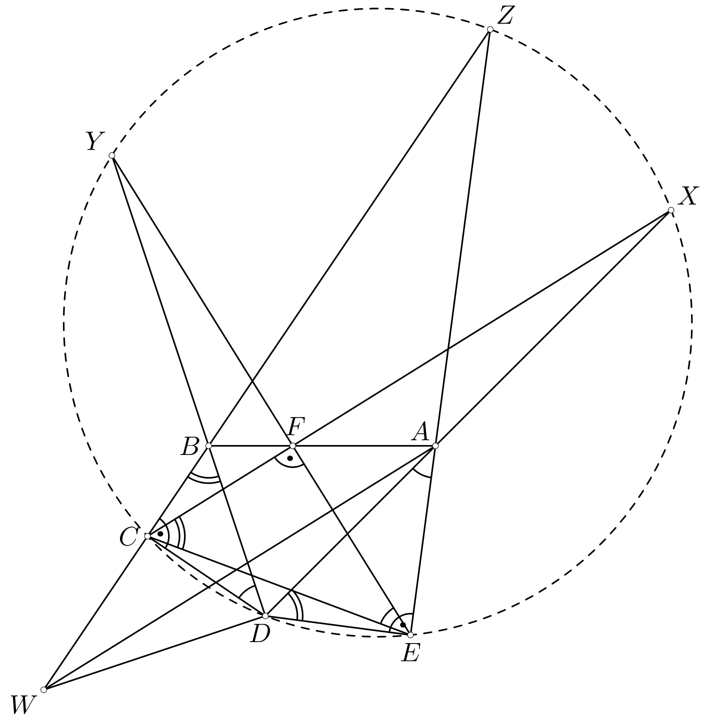
6. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Niech F będzie punktem leżącym na boku AB takim, że $\Delta ADE \sim \Delta ECF \sim \Delta DBC$. Wykazać, że

$$\frac{AF}{BF} = \left(\frac{EF}{CF}\right)^2.$$

Rozwiązanie:
Sposób 1.

Niech proste AD i CF przecinają się w punkcie X, proste BD i EF — w punkcie Y, zaś proste BC i AE — w punkcie Z. Z równości $\sphericalangle EDX = \sphericalangle EDA = \sphericalangle ECF = \sphericalangle ECX$ wynika, że punkty E, D, C, X leżą na jednym okręgu, a z równości $\sphericalangle CDY = \sphericalangle CDB = \sphericalangle CEF = \sphericalangle CEY$ wynika, że punkty C, D, E, Y leżą na jednym okręgu. W takim razie punkty C, D, E, X, Y leżą na jednym okręgu. Punkty A, B, F leżą na jednej prostej, więc z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pascala dla sześciokąta $XDYEZC$

otrzymujemy, że punkty X, D, Y, E, Z, C leżą na jednej stożkowej. Stożkową tą jest okrąg przechodzący przez punkty C, D, E, X, Y — innymi słowy punkt Z także leży na tym okręgu.



Kąty BCD i AED są równe oraz sumują się do $180°$, więc są proste. Niech W będzie takim punktem na półprostej BC, że $DCW \sim DEA$. Wtedy podobieństwo spiralne o środku D przekształcające E na A przeprowadza C na W oraz EC na AW. Stąd $\sphericalangle(AW, EC) = \sphericalangle EDA = \sphericalangle ECF$, więc $AW \parallel CF$. Zatem korzystając z twierdzenia Talesa oraz podobieństwa trójkątów BCD, DCW i CFE dostajemy

$$\frac{AF}{BF} = \frac{CW}{BC} = \frac{CW}{CD} \cdot \frac{CD}{BC} = \left(\frac{EF}{CF}\right)^2.$$

Sposób 2.

Umieśćmy rysunek na płaszczyźnie zespolonej i bez straty ogólności przyjmijmy, że $F = 0$. Ponieważ trójkąty ADE, ECF, DBC są podobne, przy czym orientacja trójkąta ECF jest przeciwna do orientacji trójkątów ADE i DBC, więc

$$\lambda = \frac{A - E}{D - E} = \frac{D - C}{B - C}, \quad \text{oraz} \quad \overline{\lambda} = \frac{E - F}{C - F} = \frac{E}{C}$$

dla pewnej liczby zespolonej $\lambda \neq 1$. Stąd obliczamy

$$E = \frac{A - \lambda D}{1 - \lambda}, \quad C = \frac{D - \lambda B}{1 - \lambda}.$$

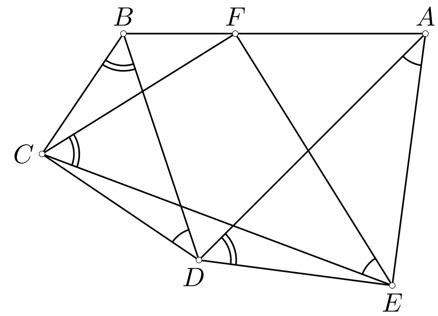
Podstawiając to do równości $\overline{\lambda}C = E$ otrzymujemy

$$\overline{\lambda}(D - \lambda B) = A - \lambda D \implies A + |\lambda|^2 B = 2\mathrm{Re}(\lambda) D.$$

Z założeń wynika, że punkty A, F, B leżą na jednej prostej, na której punkt D nie leży. Powyższa równość może więc zajść wyłącznie wtedy, gdy obie strony tej równości są równe zero. Stąd wnioskujemy, że $A = -|\lambda|^2 B$, skąd

$$\frac{|A - F|}{|B - F|} = \frac{|A|}{|B|} = |\lambda|^2 = \frac{|E - F|^2}{|C - F|^2},$$

co było do wykazania.



Uwaga: Z tego rozwiązania wynika również, że $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, tj. λ jest czysto urojona, co oznacza że trzy trójkąty podobne z treści zadania są prostokątne.

7. Niech m będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wykazać, że dla dowolnego całkowitego $n \geqslant 2$ istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające $a_k \mid m + a_1a_2 \ldots a_{k-1}a_{k+1} \ldots a_n$ dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy indukcyjnie, że istnieje ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, którego każdy co najmniej dwuelementowy prefiks spełnia warunek zadania. To pociągnie za sobą tezę.

Dla $n = 2$ weźmy $a_1 = m, a_2 = 2m$, co oczywiście spełnia założenia.

Rozważmy zatem $n > 2$. Przypuśćmy, że ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ spełnia założenie. Połóżmy

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} a_2a_3 \ldots a_{n-1} + 1.$$

Skoro mamy $a_n \equiv 1 \pmod{a_k}$ dla $1 \leqslant k \leqslant n-1$, to na mocy założenia indukcyjnego zachodzi

$$m + a_1a_2 \ldots a_{k-1}a_{k+1} \ldots a_n \equiv m + a_1a_2 \ldots a_{k-1}a_{k+1} \ldots a_{n-1} \equiv 0 \pmod{a_k}.$$

Mamy także $m + a_1a_2 \ldots a_{n-1} = m(1 + a_2a_3 \ldots a_{n-1}) = ma_n \equiv 0 \pmod{a_n}$, co kończy dowód.

8. Dany jest wielomian $W(x)$ o współczynnikach wymiernych i stopniu $d \geqslant 2$. Udowodnić, że nie istnieje ciąg parami różnych liczb wymiernych $a_0, a_1, \ldots$ taki, że dla każdego $i \geqslant 1$ zachodzi $W(a_i) = a_{i-1} + i$.

Rozwiązanie:

Załóżmy nie wprost, że taki ciąg istnieje. Najpierw udowodnimy, że istnieje taka liczba całkowita $N \neq 0$, że Na_i jest liczbą całkowitą dla dowolnego i. Dla liczby całkowitej $a \neq 0$ i liczby pierwszej p niech $v_p(a)$ oznacza *wykładnik p-adyczny a*, czyli potęgę w jakiej p pojawia się w rozkładzie a na czynniki pierwsze. Zapiszmy wielomian $W(x)$ w postaci

$$W(x) = \frac{w_d}{M}x^d + \frac{w_{d-1}}{M}x^{d-1} + \ldots + \frac{w_1}{M}x + \frac{w_0}{M}$$

gdzie liczby w_i oraz M są całkowite. Rozważmy liczbę pierwszą p. Niech $\frac{x}{y}$ będzie zapisem liczby wymiernej w postaci nieskracalnej. Mamy

$$W\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{My^d}\sum_{i=0}^{d} w_iy^{d-i}x^i.$$

Jeśli $v_p(y) > v_p(w_d)$, to wtedy $v_p\left(\sum_{i=0}^{d} w_iy^{d-i}x^i\right) = v_p(w_dx^d) = v_p(w_d)$, gdyż wszystkie wyrazy dla $i < d$ są podzielne przez $p^{v_p(y)}$, ale w_dx^d nie jest. Oznacza to, że wykładnik p-adyczny mianownika $W\left(\frac{x}{y}\right)$ w postaci nieskracalnej wynosi przynajmniej $v_p(My^d) - v_p(w_d) \geqslant dv_p(y) - v_p(w_d)$. Zapiszmy teraz każdą liczbę wymierną z ciągu a_i w postaci nieskracalnej jako $\frac{x_i}{y_i}$. Jeśli dla jakiejś liczby pierwszej $p \in \mathbb{P}$ zachodzi $v_p(w_d) = 0$ to wtedy mianownik ułamka $P(a_i)$ w postaci nieskracalnej ma wykładnik p-adyczny przynajmniej $dv_p(y_i)$. Z drugiej strony ułamek $a_{i-1}+i$ ma w postaci nieskracalnej mianownik y_{i-1}. Stąd $v_p(y_{i-1}) \geqslant dv_p(y_i)$. To już oznacza, że $v_p(y_0) \geqslant v_p(y_1) \geqslant v_p(y_2) \geqslant \ldots$. Pozostaje rozważyć liczby pierwsze p dzielące w_d. Jest ich oczywiście skończenie wiele. Jeśli $v_p(y_i) > v_p(w_d)$ to podobnie jak wcześniej dostajemy nierówność $v_p(y_{i-1}) \geqslant dv_p(y_i) - v_p(w_d) \geqslant v_p(y_i)$. W ogólności możemy zatem napisać, że $\max(v_p(y_{i-1}), v_p(w_d)) \geqslant \max(v_p(y_i), v_p(w_d))$. Stąd podobnie jak wcześniej wynika, że dla każdego i $v_p(y_i) \leqslant \max(v_p(y_0), v_p(w_d))$. Ostatecznie dla każdej liczby pierwszej p i dowolnego indeksu i dostajemy, że $v_p(y_i) \leqslant v_p(y_0) + v_p(w_d)$, co oznacza że $y_i \mid y_0 w_d$, czyli można przyjąć $N = y_0 w_d$.

Teraz udowodnimy, że ciąg $|a_i|$ wolno rośnie. Wykażemy najpierw, że istnieje takie m_0, że dla każdego $i > m_0$ zachodzi $|a_i| \leqslant i$. Niech c_0 będzie taką liczbą rzeczywistą, że jeśli $|x| > c_0$ to $|W(x)| > 2|x|$. Załóżmy nie wprost, że dla nieskończenie wielu i zachodzi $|a_i| > i$. Wtedy istnieje takie najmniejsze $i_0 \geqslant 1$, że $|a_{i_0}| > \max(i_0, c_0, |a_0|)$. Oczywiście $i_0 \neq 0$. Z drugiej strony jeśli $|a_{i_0}| > c_0$ to możemy zapisać

$$|a_{i_0-1}| \geqslant |W(a_{i_0})| - i_0 \geqslant 2|a_{i_0}| - i_0 > |a_{i_0}|.$$

To jednak oznacza, że $|a_{i_0-1}| > \max(i_0-1, c_0, |a_0|)$ i przeczy minimalności i_0. Stąd istnieje tylko skończenie wiele i takich, że $|a_i| > i$.

Wiadomym faktem dla wielomianów stopnia d jest, że istnieją takie stałe $c_1, c_2 > 0$, że dla $|x| > c_1$ zachodzi $|W(x)| > c_2|x|^d$. Zauważmy też, że skoro wyrazy ciągu a_i są parami różne i wszystkie są postaci $\frac{k}{N}$ dla jakiegoś k całkowitego, to musi istnieć takie m_1, że $|a_i| > c_1$ dla $i > m_1$. Rozważmy dowolne $i > m_3$, gdzie $m_3 \stackrel{\text{def}}{=} \max(m_1, m_0+1)$. Dostajemy ciąg nierówności

$$2i - 1 \geqslant |a_{i-1}| + i \geqslant |W(a_i)| \geqslant c_2|a_i|^d. \tag{1}$$

Rozważmy teraz zbiór $\{a_{m_3+1}, a_{m_3+2}, \ldots, a_i\}$ dla pewnego i. Mamy $i - m_3$ liczb postaci $\frac{k}{N}$ dla jakiegoś k całkowitego. Skoro są one parami różne to z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że któraś z nich ma wartość bezwzględną przynajmniej $\frac{i-m_3-1}{2N}$. Z drugiej strony na mocy (1) dla każdego $m_3 < j \leqslant i$ zachodzi oczacowanie $|a_j|^d \leqslant \frac{2j}{c_2} \leqslant \frac{2i}{c_2}$. Otrzymujemy zatem, że dla dowolnego $i > m_3$ musi zachodzić nierówność

$$\left(\frac{i - m_3 - 1}{2N}\right)^d \leqslant |a_j|^d \leqslant \frac{2i}{c_2}.$$

To nie może być jednak prawda, gdyż lewa strona nierówności jest wielomianem od i o dodatnim współczynniku wiodącym stopnia większego niż prawa strona.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Udowodnić, że dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$(x+y+z)^2 + \sum_{\text{cyk}} \frac{(x+y)(y+z)}{1+|x-z|} \geqslant xy + yz + zx.$$

Rozwiązanie:

Zastosujmy podstawienie $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$. Wtedy nierówność z zadania po przemnożeniu przez 2 i odjęciu prawej strony od lewej przyjmie postać

$$a^2 + b^2 + c^2 + \sum_{\text{cyk}} \frac{2ab}{1+|a-b|} \geqslant 0$$

Ponieważ lewa strona powyższej nierówności przyjmuje taką samą wartość dla trójek (a, b, c) i $(-a, -b, -c)$ to możemy założyć, że przynajmniej dwie z liczb a, b, c są nieujemne. Ponadto ze względu na symetryczność wyrażenia możemy założyć, że $a \geqslant b \geqslant c$. Oznaczywszy teraz $n \stackrel{\text{def}}{=} |a-b|$ oraz $k \stackrel{\text{def}}{=} |b-c|$ mamy $|a-c| = k+n$. Musimy udowodnić, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2ab}{1+n} + \frac{2bc}{1+k} + \frac{2ac}{1+k+n} \geqslant 0.$$

Rozpatrując lewą stronę powyższej nierówności jako wielomian drugiego stopnia zmiennej c, możemy policzyć jego wyróżnik. Należy udowodnić, że jest on niedodatni.

$$\Delta = \left(\frac{2b}{1+k} + \frac{2a}{1+k+n}\right)^2 - 4\left(a^2 + b^2 + \frac{2ab}{1+n}\right)$$

Ponieważ $a, b, n, k \geqslant 0$, mamy oczywiste nierówności

$$\left(\frac{2b}{1+k}\right)^2 \leqslant 4b^2,$$
$$\left(\frac{2a}{1+k+n}\right)^2 \leqslant 4a^2,$$
$$2 \cdot \frac{2b}{1+k} \cdot \frac{2a}{1+k+n} \leqslant \frac{8ab}{1+n}.$$

Dodając je stronami otrzymujemy $\Delta \leqslant 0$, co dowodzi nierówności.

2. Rozstrzygnąć czy istnieją ograniczone ciągi liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots$ i $b_1, b_2, \ldots$ takie, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $m > n$ zachodzi warunek

$$|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ lub } |b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Rozwiązanie:

Jeśli warunek z zadania jest spełniony to spełniony jest także warunek

$$|2a_m - 2a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ lub } |2b_m - 2b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Oznacza to, że jeśli dla każdego $n > 0$ narysujemy na płaszczyźnie kwadrat o wierzchołkach w punktach $(2a_n \pm \frac{1}{\sqrt{n}}, 2b_n \pm \frac{1}{\sqrt{n}})$, to te kwadraty będą parami rozłączne. Jeśli ciągi a_n i b_n są ograniczone to wtedy wszystkie te kwadraty znajdują się w pewnym ograniczonym obszarze na płaszczyźnie. Oznacza to w szczególności, że ich łączne pole powierzchni musi być skończone. Jest to jednak nieprawda, gdyż wyraża się ono szeregiem rozbieżnym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} = \infty$$

Zatem nie istnieją ciągi ograniczone $a_1, a_2, \ldots$ oraz $b_1, b_2, \ldots$ spełniające warunki zadania.

3. Na tablicy napisano początkowo wielomiany $x^3 - 3x^2 + 5$ oraz $x^2 - 4x$. Jeśli na tablicy są napisane wielomiany $f(x)$ i $g(x)$ to w jednym ruchu można dopisać wielomian $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(g(x))$ lub $cf(x)$ dla pewnej liczby $c \in \mathbb{R}$. Czy w skończonej liczbie ruchów da się napisać na tablicy wielomian $x^n - 1$ dla pewnego $n > 0$?

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeśli $f'(2) = 0$ oraz $g'(2) = 0$ to wtedy $(f+g)'(2) = 0$, $(f-g)'(2) = 0$, $cf'(2) = 0$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ oraz $g'(2)f'(g(2)) = 0$. Ponieważ $f(g(x))' = g'(x)f'(g(x))$ oraz pochodne początkowych wielomianów ($3x^2 - 6x$ i $2x - 4$) mają miejsce zerowe w 2, to na tablicy mogą pojawić się wyłącznie wielomiany, których pochodna ma miejsce zerowe w 2. Dla $n > 0$ wielomian $(x^n - 1)' = nx^{n-1}$ nie ma miejsca zerowego w 2, więc żaden wielomian postaci $x^n - 1$ nie może się pojawić na tablicy.

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Zbiór $\mathcal{S}$ punktów na płaszczyźnie spełnia następujące własności:

- nie da się przykryć wszystkich elementów zbioru $\mathcal{S}$ za pomocą n prostych
- dla dowolnego $A \in \mathcal{S}$, zbiór $\mathcal{S} \setminus \{A\}$ da się pokryć za pomocą n prostych.

Wyznaczyć największą możliwą wartość $|\mathcal{S}|$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Naszą płaszczyznę utożsamiamy z $\mathbb{R}^2$. Rozważmy dowolny punkt $A \in \mathcal{S}$. Wiemy, że $\mathcal{S} \setminus A$ da się pokryć za pomocą n prostych, niech równaniem i-tej prostej będzie $a_i x + b_i y + c = 0$. Wówczas:

$$P_A = \prod_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y + c)$$

Jest wielomianem od x i y, stopnia co najwyżej n, który przyjmuje wartość 0 na $\mathcal{S} \setminus A$ i wartość niezerową na A.

Z tego wynika, że zbiór $\{P_A : A \in \mathcal{S}\}$ jest liniowo niezależny, czyli jego rozmiar nie może być większy od wymiaru przestrzeni wielomianów z $\mathbb{R}[x, y]$ stopnia najwyżej n. Ten wymiar wynosi zaś $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (kanoniczną bazą jest $\{x^i y^j : i + j \leqslant n\}$). To dowodzi, że $|\mathcal{S}| \leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Nietrudno przekonać się zaś, że zbiór $\mathcal{S}_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0} : x + y \leqslant n\}$ liczebności $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ spełnia warunki zadania dla n. Rzeczywiście, gdy usuniemy punkt (i, j), resztę punktów możemy pokryć n prostymi o równaniach $\{x = i' : 0 \leqslant i' < i\}$, $\{y = j' : 0 \leqslant j' < j\}$ oraz $\{x + y = t : i + j < t \leqslant n\}$.

$\mathcal{S}_n$ nie da się pokryć za pomocą n prostych. Można to udowodnić za pomocą indukcji po n. Baza $n = 1$ jest oczywista. Załóżmy teraz, że S_n da się jednak pokryć n prostymi. Każda z tych prostych musi przechodzić przez co najmniej jeden punkt $S_{n-1} \subset S_n$ z założenia indukcyjnego, bo gdyby nie przechodziła przez żaden z tych punktów, to pozostałe $n - 1$ prostych pokrywałyby S_{n-1}. Taka prosta może przechodzić przez co najwyżej jeden punkt z $S_n \setminus S_{n-1} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : x + y = n\}$ co oznacza, że co najmniej jeden z tych $n + 1$ punktów nie będzie pokryty przy użyciu n prostych.

5. Dany jest graf nieskierowany o nieparzystej liczbie wierzchołków. Janusz i Grażyna grają w grę. Najpierw Janusz zamalowuje dowolny wierzchołek. Następnie gracze na przemian zamalowują dowolnego niezamalowanego dotychczas sąsiada ostatnio zamalowanego wierzchołka. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Udowodnić, że Janusz ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:
Niech k oznacza największą taką liczbę, że istnieją parami różne wierzchołki $A_1, B_1, \ldots, A_k, B_k$ takie, że A_i i B_i są połączone krawędzią. Niech pozostałe wierzchołki to będą $C_1, \ldots, C_\ell$. Ponieważ $l + 2k$ jest nieparzyste, C_1 musi istnieć. Rozważmy strategię, w której Janusz najpierw wybiera wierzchołek C_1. W kolejnych ruchach jeśli Grażyna ruszy się do A_i (lub B_i), to Janusz rusza się do B_i (lub A_i). Dzięki temu zawsze może wykonać ruch. Grażyna nie może ruszyć się do żadnego C_j, ponieważ istnienie ścieżki parami różnych wierzchołków $C_1 - X_1 - Y_2 - \ldots - X_s - Y_s - C_j$, gdzie $(X_m, Y_m) = (A_{i_m}, B_{i_m})$ lub $(X_m, Y_m) = (B_{i_m}, A_{i_m})$, przeczyłoby maksymalności k, gdyż moglibyśmy zastąpić s sparowań $A_{i_m} - B_{i_m}$ $s + 1$ sparowaniami $C_1 - X_1, Y_1 - X_2, \ldots, Y_{s-1} - X_s, Y_s - C_j$.

6. Dany jest n-elementowy zbiór A, którego pewne podzbiory są *ładne*. Jeśli jakiś zbiór zawiera pewien *ładny* podzbiór, to jest on *duży*. Jeśli zbiór jest zawarty w pewnym *ładnym* zbiorze to jest on *mały*. Wykazać, że jeśli *ładnych* zbiorów jest $ł$, *dużych* – d, a *małych* – m, to:

$$2^n \cdot ł \leqslant m \cdot d.$$

Rozwiązanie:
Dowód będzie indukcyjny po n. Dla $n = 1$ łatwo sprawdzić, że teza zachodzi.

Niech teraz $n \geqslant 2$. Oznaczmy rodziny ładnych, małych i dużych podzbiorów A odpowiednio przez $\mathcal{Ł}$, $\mathcal{M}$ i $\mathcal{D}$. Wyróżnijmy jeden element $a \in A$ i zdefiniujmy:

$$\begin{aligned} \mathcal{Ł}_0 &= \{Ł \in \mathcal{Ł} : a \notin Ł\} & \mathcal{Ł}_1 &= \{Ł \in \mathcal{Ł} : a \in Ł\} \\ \mathcal{M}_0 &= \{M \in \mathcal{M} : a \notin M\} & \mathcal{M}_1 &= \{M \in \mathcal{M} : a \in M\} \\ \mathcal{D}_0 &= \{D \in \mathcal{D} : a \notin D\} & \mathcal{D}_1 &= \{D \in \mathcal{D} : a \in D\} \end{aligned}$$

Ponadto oznaczmy $ł_0 = |\mathcal{Ł}_0|$, $ł_1 = |\mathcal{Ł}_1|$ i analogicznie m_0, m_1, d_0, d_1. Zauważmy, że $d_1 \geqslant d_0$, gdyż każdy element $\mathcal{D}_0$ z dodanym elementem a należy do $\mathcal{D}_1$. Analogicznie $m_0 \geqslant m_1$.

Możemy teraz zapisać szereg nierówności wynikających z założenia indukcyjnego:

$$\begin{aligned} 2^{n-1} ł_0 &\leqslant m_0 d_0 && \text{z założenia indukcyjnego} \\ 2^{n-1} ł_0 &\leqslant m_0 d_1 && \text{ponieważ } d_1 \geqslant d_0 \\ 2^{n-1} ł_1 &\leqslant m_1 d_1 && \text{dowód poniżej} \\ 2^{n-1} ł_1 &\leqslant m_0 d_1 && \text{gdyż } m_0 \geqslant m_1 \end{aligned}$$

Trzecia nierówność zachodzi, ponieważ rozpatrując zbiór $A \setminus \{a\}$ ze zbiorami ładnymi zadanymi poprzez $\mathcal{Ł}_1' \stackrel{\text{def}}{=} \{Ł \setminus \{a\} : Ł \in \mathcal{Ł}_1\}$ zauważamy, że każdy zbiór mały względem $\mathcal{Ł}_1'$ będzie, po dodaniu do niego a, elementem $\mathcal{M}_1$. Podobnie każy zbiór duży względem $\mathcal{Ł}_1'$ będzie elementem $\mathcal{D}_1$ po dodaniu do niego a.

Gdyby $m_0 d_1 \leqslant m_1 d_0$, to dodanie stronami tych czterech nierówności dawałoby tezę. Od teraz zakładamy $m_0 d_1 > m_1 d_0$, w szczególności $m_0, d_1 \neq 0$. To pozwala napisać:

$$(m_0 + m_1)(d_0 + d_1) \geqslant \left(m_0 + \frac{2^{n-1} ł_1}{d_1}\right)\left(\frac{2^{n-1} ł_0}{m_0} + d_1\right) = 2^{n-1}(ł_0 + ł_1) + m_0 d_1 + \frac{2^{2n-2} ł_0 ł_1}{m_0 d_1}$$

Wystarczy wykazać, że $m_0 d_1 + \frac{2^{2n-2} ł_0 ł_1}{m_0 d_1} \geqslant 2^{n-1}(ł_0 + ł_1)$. To jest równoważne z nierównością

$$0 \leqslant (m_0 d_1)^2 - 2^{n-1}(ł_0 + ł_1) m_0 d_1 + 2^{2n-2} ł_0 ł_1 = (m_0 d_1 - 2^{n-1} ł_0)(m_0 d_1 - 2^{n-1} ł_1),$$

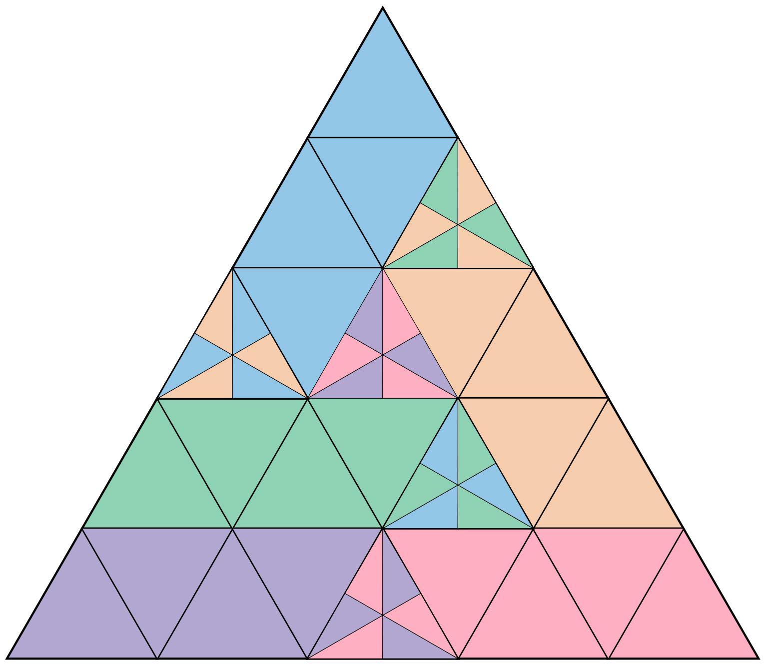
która wynika bezpośrednio z napisanych wcześniej nierówności.

7. W Trójmieście pojawiła się na sprzedaż działka w kształcie trójkąta równobocznego o boku 50m. Pięciu deweloperów zamierza wybudować tam luksusowe osiedla. Ponieważ nie mogą oni dojść między sobą do porozumienia, prezydent postanowił podzielić ten trójkąt na pięć przystających działek. Rozstrzygnąć, czy jest to możliwe.

Uwaga: Zgodnie z prawem budowlanym działka musi być (niekoniecznie spójną) sumą skończonej liczby trójkątów. Działki są przystające jeśli istnieje izometria płaszczyzny przekształcająca jedną działkę w drugą.

Rozwiązanie:

Tak, patrz przykład poniżej:

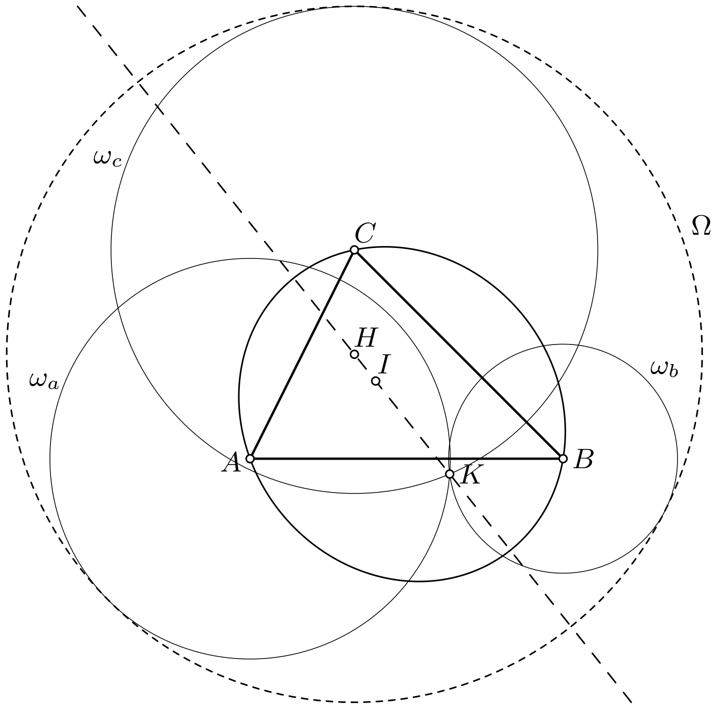


8. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC, a I środkiem okręgu w niego wpisanego. Punkt K spełnia równości

$$AH + AK = BH + BK = CH + CK.$$

Udowodnić, że punkty H, I, K leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:



Niech $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ będą okręgami o środkach odpowiednio A, B, C przechodzącymi przez K. Wówczas okrąg Ω o środku H i promieniu $R = AH + AK$ jest styczny wewnętrznie do tych okręgów. Oznaczmy punkty styczności tych okręgów odpowiednio przez D, E, F. Wspólne styczne par (Ω, ω_A), (Ω, ω_B) i (Ω, ω_C) w punktach D, E, F wyznaczają trójkąt $A'B'C'$. Jest on jednokładny z trójkątem ABC, bo $B'C' \perp AA' \perp BC$, więc $B'C' \parallel BC$ i analogicznie pozostałe pary boków tych trójkątów są równoległe. Punkt A' ma jednakową potęgę względem okręgów ω_B i ω_C, bo $A'E = A'F$ (równość odcinków stycznych do okręgu). Punkt K leży na okręgach ω_B i ω_C, więc jego potęga względem obu okręgów wynosi 0. Prosta $A'K$ jest więc osią potęgową ω_B i ω_C, zatem $A'K \perp BC$. Skoro zaś $BC \parallel B'C'$, to $A'K \perp B'C'$. Analogicznie dowodzimy, że $B'K \perp C'A'$, zatem K jest ortocentrum trójkąta $A'B'C'$. Jednocześnie H jest środkiem Ω, czyli okręgu wpisanego w $A'B'C'$. Wobec tego jednokładność przekształcająca ABC na $A'B'C'$ przekształca I na H i H na K, skąd $IH \parallel HK$, czyli punkty H, I, K są współliniowe.

9. Dobry Jakub narysował na kartce czworokąt wypukły. Okazało się, że można zarówno opisać na nim okrąg o środku w punkcie O, jak i wpisać w niego okrąg o środku w punkcie I. Dobry Jakub dorysował środek M jednej z przekątnych narysowanego czworokąta, po czym Zły Marcin zmazał czworokąt i pozostawił wyłącznie parami różne punkty I, M, O. Zrekonstruować oryginalny czworokąt.

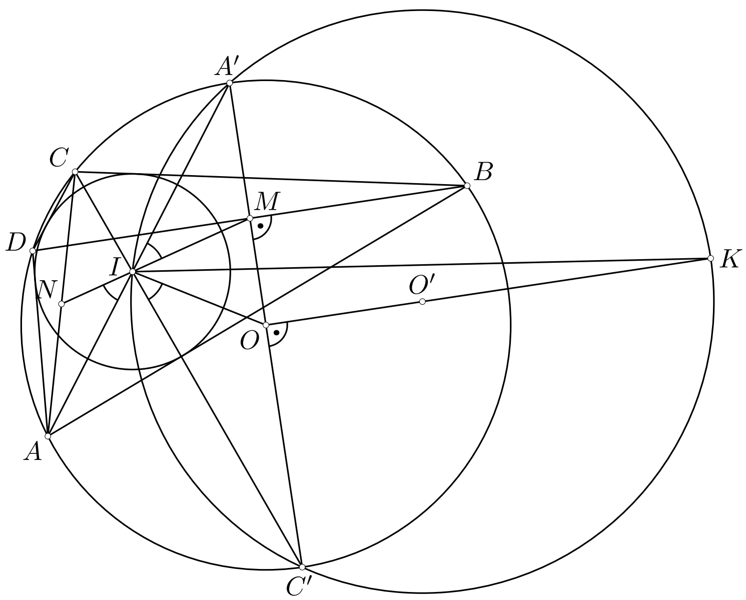
Rozwiązanie:

Jako pierwsze rozwiązanie prezentujemy elegancką konstrukcję wymyśloną przez uczestników.

Sposób 1.

Dobremu Jakubowi udało się ukryć przed Złym Marcinem obserwacje dotyczące narysowanej konfiguracji. Zaczynamy od sparafrazowania ich.

Niech $ABCD$ będzie rozważanym czworokątem przy czym M jest środkiem BD. Oznaczmy przez A', C' przecięcia odpowiednio AI, CI z okręgiem Ω opisanym na $ABCD$. Zauważmy, że punkty A', M, O, C' leżą na symetralnej odcinka BD. Niech dalej N będzie środkiem odcinka AC. Z twierdzenia Newtona wiemy, że punkty M, I, N są współliniowe. W szczególności $\sphericalangle AIN = \sphericalangle A'IM$. Ponadto trójkąty $A'IC'$, CIA są podobne. W takim razie także trójkąty $AIN, C'IO$ również. Stąd $\sphericalangle C'IO = \sphericalangle AIN = \sphericalangle A'IM$, czyli IM jest I-symedianą $A'IC'$. W szczególności dwusieczna MIO pokrywa się z dwusieczną $A'IC'$, czyli przecina się z symetralną odcinka $A'C'$ w punkcie K leżącym na okręgu opisanym na $A'IC'$.



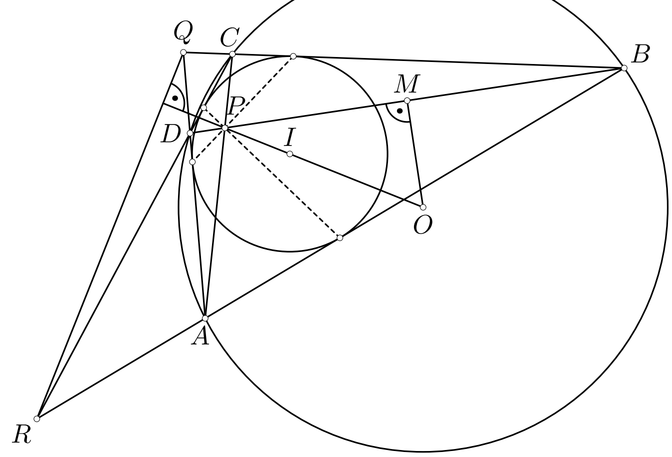
Z pomocą powyższych obserwacji wykonamy konstrukcję. Możemy wyznaczyć punkt K, gdyż jest to punkt na dwusiecznej kąta MIO taki, że $KO \perp OM$. Wiemy, że środek okręgu opisanego na $A'IC'K$ leży na KO, więc w celu jego wyznaczenia wystarczy przeciąć KO z symetralną odcinka KI. Narysujmy okrąg o środku w otrzymanym punkcie i przechodzący przez I. Przecinając ten okrąg z prostą OM otrzymujemy punkty A', C'. W szczególności możemy już naszkicować okrąg Ω i punkty A, C jako przecięcia prostych $A'I$, $C'I$ z Ω. Punkty $B, D \in \Omega$ leżą na prostej prostopadłej do OM przechodzącej przez M, więc także możemy je wyznaczyć. To kończy rekonstrukcję rysunku Dobrego Jakuba.

Sposób 2.

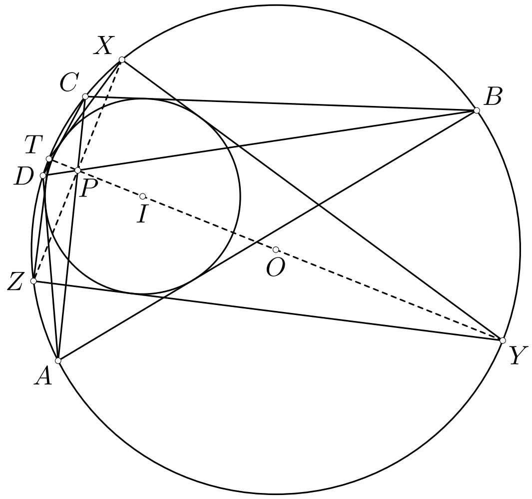
Dobry Jakub przezornie spisał także inne obserwacje. Zanotował między innymi poniższy

Lemat 1. *Niech Ω i ω będą odpowiednio okręgiem opisanym i wpisanym w pewien czworokąt wypukły. Wówczas obrazy punktu przecięcia przekątnych tego czworokąta w inwersjach względem Ω i ω się pokrywają.*

Dowód. Niech $ABCD$ będzie rozważanym czworokątem, $P \stackrel{\text{def}}{=} AC \cap BD$ oraz O, I to środki odpowiednio Ω, ω. Rozważmy punkty $Q \stackrel{\text{def}}{=} AD \cap BC, R \stackrel{\text{def}}{=} AB \cap CD$. Wówczas RQ jest biegunową P względem okręgu opisanego Ω. Z twierdzenia Brianchona wiemy, że P leży także na biegunowych punktów R, Q względem okręgu wpisanego ω, więc z twierdzenia La Hire'a RQ jest biegunową P względem tegoż okręgu. Otrzymaliśmy, że biegunowe punktu P względem Ω, ω pokrywają się, co implikuje tezę, jako że obraz w inwersji jest rzutem punktu na jego biegunową. $\square$



Z Lematu 1 wynika w szczególności, że punkt P przecięcia przekątnych czworokąta leży na prostej OI. Zachodzi także $PM \perp MO$, więc możemy skonstruować odpowiedni punkt $P \in OI$.

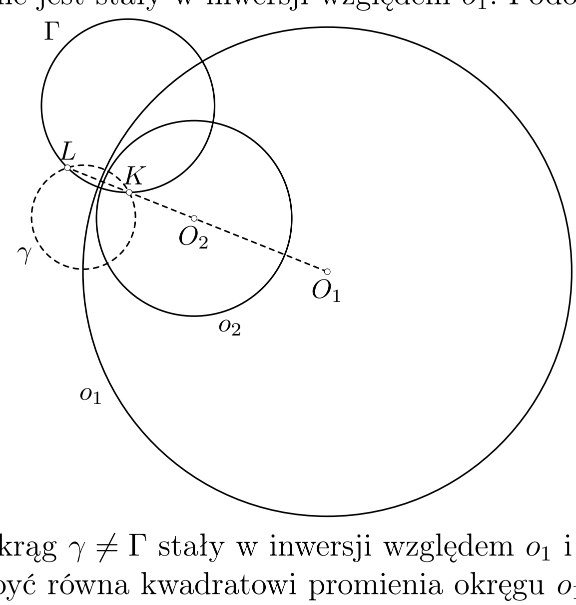


Oznaczmy okrąg opisany Ω, a okrąg wpisany ω. Na mocy twierdzenia Ponceleta istnieje czworokąt wpisany w Ω i opisany na ω, którego jeden z wierzchołków leży na prostej OI. Nazwijmy taki czworokąt $XYZT$ przy czym $Y \in OI$. Taki czworokąt musi być symetryczny względem OI, czyli $\sphericalangle TXY = \sphericalangle YZT$, co implikuje $\sphericalangle TXY = \sphericalangle YZT = 90°$. Twierdzimy, że $P = XZ \cap YT$. Do dowodu tego faktu wykorzystamy poniższy

Lemat 2. *Niech o_1, o_2 będą rozłącznymi niewspółśrodkowymi okręgami. Wówczas istnieje co najwyżej jedna taka para punktów K, L, że przy inwersjach względem o_1, o_2 punkt L jest obrazem K.*

Dowód. Jeżeli taka para nie istnieje to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym wypadku ustalmy punkty K, L o własności opisanej w lemacie. Odnotujmy, że $K \neq L$, ponieważ $o_1 \cap o_2 = \varnothing$. Udowodnimy, że dowolny okrąg jest stały w inwersji względem zarówno o_1 jak i o_2 wtedy i tylko wtedy gdy przechodzi on przez K, L. To pociągnie za sobą tezę. Istotnie, gdyby istniała także pewna inna para K', L' spełniająca założenia lematu, to dla niej także prawdziwa byłaby powyższa własność. Jednakże nie każdy okrąg przechodzący przez K, L musiałby przechodzić przez K', L', sprzeczność.

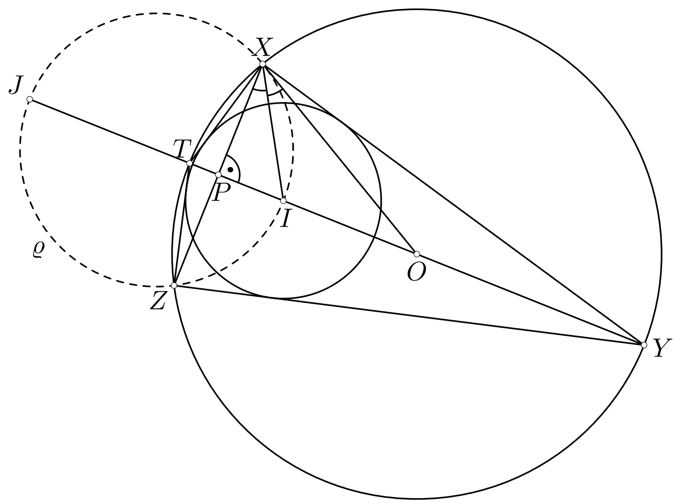
Przechodząc do dowodu postulowanej własności, rozważmy najpierw pewien okrąg Γ przechodzący przez punkty K, L. Udowodnimy, że jest on stały w inwersji względem o_1. Istotnie, potęga środka O_1 okręgu o_1 względem Γ wynosi $O_1K \cdot O_1L$ co jest równe kwadratowi promienia okręgu o_1. Jako że potęga nie zależy od siecznej, Γ istotnie jest stały w inwersji względem o_1. Podobnie dla inwersji względem o_2.



Wybierzmy teraz pewien okrąg $\gamma \neq \Gamma$ stały w inwersji względem o_1 i o_2. Podobnie jak wyżej, potęga punktu O_1 względem γ musi być równa kwadratowi promienia okręgu o_1. To oznacza, że O_1 leży na osi potęgowej pary okręgów Γ, γ. Podobnie środek O_2 okręgu o_2, czyli prosta O_1O_2 jest tą osią potęgową. Skoro

$O_1, O_2 \in KL$ to zachodzi $K, L \in O_1O_2$. Potęgi K, L względem Γ wynoszą 0, więc ich potęga względem γ również wynosi 0, czyli $K, L \in \gamma$, co kończy dowód lematu. $\square$

Powyższy lemat w rozważanej konfiguracji oznacza, że P jest unikalnym punktem wewnątrz Ω, którego obraz w inwersji względem Ω pokrywa się z obrazem w inwersji względem ω. Z Lematu 1 wiemy, że punkt przecięcia przekątnych czworokąta $XYZT$ ma te same własności, więc jest równy P. Zachodzi także $XZ \perp YT$, więc XP jest wysokością w trójkącie prostokątnym TXY. Prosta XO łączy wierzchołek trójkąta TXY ze środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, więc proste XP i XO są symetryczne względem dwusiecznej kąta TXY, czyli względem prostej XI. Ta własność pozwoli nam wyznaczyć parę punktów X, Z.



Najpierw konstruujemy okrąg Apoloniusza dla punktów P, O i stosunku $\frac{PI}{IO}$, który oznaczymy przez ϱ. Jego średnicą jest odcinek IJ, gdzie J jest punktem leżącym na przedłużeniu odcinka PO spełniającym równość $\frac{PI}{IO} = \frac{PJ}{JO}$. Następnie przecinamy prostą prostopadłą do OI przechodzącą przez P z ϱ, uzyskując punkty X, Z. W ten sposób wyznaczyliśmy okrąg Ω, jego promień wynosi $OX = OZ$. Punkty Y, T są przecięciami Ω z OI. Następnie konstruujemy okrąg ω jako okrąg wpisany w deltoid $XYZT$. Jeżeli $M = P$, to $XYZT$ jest szukanym czworokątem. W przeciwnym wypadku dwa wierzchołki wyjściowego czworokąta możemy wyznaczyć przecinając prostą PM z Ω. Pozostałe dwa wierzchołki odzyskujemy rysując styczne do ω i przecinając je z Ω.

10. Niech a i n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że

- $a^{2^n} - a$ jest podzielne przez n.
- $\sum\limits_{i=1}^{n} i^{2024} a^{2^i}$ nie jest podzielne przez n.

Udowodnić, że n ma dzielnik pierwszy mniejszy niż 2024.

Rozwiązanie:

Dla ustalonej liczby n całkowitą liczbę dodatnią a nazwiemy dobrą jeżeli $n \mid a^{2^n} - a$. Niech $d_n(a) = d$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że $a^{2^d} \equiv a \pmod{n}$. Wtedy dla każdej liczby całkowitej k zachodzi $a^{2^{d+k}} \equiv a^{2^k} \pmod{n}$. Wynika z tego, że wartości $a^{2^k} \pmod{n}$ są okresowe z okresem d. Co więcej, z minimalności d wynika, że jest to najmniejszy możliwy okres tych wartości, więc $d \mid n$. Skoro $n \mid a^{2^d} - a$, to musi być także $d \mid a^{2^d} - a$. W takim razie jeżeli a jest liczbą dobrą dla n to jest też dla $d_n(a)$.

Zauważmy ponadto, że jeśli $a^{2^i} \equiv a^{2^{i+x}} \pmod{n}$ dla jakiegoś $x > 0$, to wtedy $d \mid x$. Istotnie, z tego przystawania wynika, że $a^{2^j} \equiv a^{2^{j+x}} \pmod{n}$ dla dowolnego $j \geqslant i$. Oznaczmy $y \overset{\text{def}}{=} x \bmod d$. Biorąc $j \geqslant i$, które jest wielokrotnością d, dostajemy

$$a \equiv a^{2^j} \equiv a^{2^{j+x}} \equiv a^{2^y} \pmod{n}.$$

Z minimalności d mamy zatem, że musi być $y = 0$.

Wynik ten oznacza w szczególności, że reszty a^{2^i} mod n są parami różne dla $0 \leqslant i < d$. Zauważmy, że jeżeli $\mathrm{NWD}(a, n) > 1$ to wśród tych reszt nie mogą wystąpić wszystkie możliwe reszty modulo n. Z drugiej strony, jeżeli $\mathrm{NWD}(a, n) = 1$ to a^{2^i} nigdy nie przyjmuje wartości 0 modulo n. W takim razie $d = d_n(a)$ musi być mniejsze niż n.

Udowodnimy teraz indukcyjnie (ze względu na n), że jeżeli a jest liczbą dobrą dla n to zachodzi

$$\{(a^{2^1} + 1) \bmod n, (a^{2^2} + 2) \bmod n, \ldots, (a^{2^n} + 3) \bmod n\} = \{0, 1, \ldots, n - 1\}.$$

Przypadek bazowy $n = 1$ jest oczywisty. Niech teraz $n > 1$ będzie liczbą całkowitą oraz niech nasza teza zachodzi dla wszystkich liczb mniejszych od niej. Załóżmy nie wprost, że istnieją takie różne liczby $0 < i, j \leqslant n$, że $a^{2^i} + i \equiv a^{2^j} + j \pmod n$. Oznaczmy $i' \stackrel{\text{def}}{=} i \bmod d_n(a)$ oraz $j' \stackrel{\text{def}}{=} j \bmod d_n(a)$. Z definicji $d_n(a)$ dostajemy, że

$$a^{2^{i'}} + i' \equiv a^{2^i} + i \equiv a^{2^j} + j \equiv a^{2^{j'}} + j' \pmod{d_n(a)}.$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że $i' = j'$, czyli $i \equiv j \pmod{d_n(a)}$, ale wtedy $a^{2^i} \equiv a^{2^j} \pmod n$, więc $i \equiv j \pmod n$ co jest sprzeczne z założeniem, że $0 < i, j \leqslant n$

Zauważmy, że jeżeli a jest dobre dla n to a^t też jest dobre, ponieważ $a^{2^n} - a \mid a^{t2^n} - a^t$. Udowodnimy teraz tezę zadania. Załóżmy nie wprost, że każdy dzielnik pierwszy n jest większy od 2024. Przeprowadzimy indukcję po i dowodząc, że liczba $\sum_{k=1}^{n} k^i a^{2^k}$ jest podzielna przez n dla każdego dobrego a oraz $i \leqslant 2024$. Dla $i = 0$ zauważmy, że

$$\sum_{k=1}^{n} a^{2^k} + k \equiv \sum_{k=1}^{n} k \pmod n, \text{ więc } \sum_{k=1}^{n} a^{2^k} \equiv 0 \pmod n.$$

Niech teraz $2024 \geqslant i > 0$ i dla wszystkich mniejszych i teza zachodzi. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{n} (a^{2^k} + k)^{i+1} \equiv \sum_{k=1}^{n} k^{i+1} \pmod n \implies \sum_{l=1}^{i+1} \binom{i+1}{l} \sum_{k=1}^{n} a^{2^k l} k^{i+1-l} \equiv 0 \pmod n.$$

Z założenia indukcyjnego oraz z faktu, że a^l też jest dobre wnioskujemy, że $n \,\Big|\, \binom{i+1}{l} \sum_{k=1}^{n} a^{2^k l} k^i$. Skoro $i + 1 \leqslant 2025$, to wszystkie dzielniki pierwsze $\binom{i+1}{l}$ są mniejsze niż 2024, więc $\mathrm{NWD}\big(n, \binom{i+1}{l}\big) = 1$. W takim razie $n \,\Big|\, \sum_{k=1}^{n} a^{2^k} k^i$. Z tej indukcji wynika, że $n \,\Big|\, \sum_{k=1}^{n} a^{2^k} k^{2024}$, co jest sprzeczne z założeniami zadania. W takim razie musi istnieć dzielnik pierwszy n mniejszy niż 2024.

11. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$ oraz liczba pierwsza $p > 6^{n-1}$. Niech S będzie zbiorem n reszt modulo p. Wykazać, że istnieje taka reszta c modulo p, że c da się uzyskać jako wartość $x - y + z$, dla parami różnych $x, y, z \in S$, na dokładnie jeden sposób (z dokładnością do zamiany miejscami x i z).

Rozwiązanie:

Obserwacja. Dla $1 \leqslant a < p$, $0 \leqslant b < p$, przekształcenie $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$ jest bijekcją na $\mathbb{Z}_p$. Ponadto, $f(x - y + z) = f(x) - f(y) + f(z)$, więc teza zachodzi dla zbioru S wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dla $S' = \{ax + b : x \in S\}$.

Wykażemy, że zbiór S da się przekształcić w ten sposób do takiego zbioru S'', że wszystkie jego elementy są w przedziale $[0, \lfloor \frac{p}{3} \rfloor]$. To będzie oznaczało koniec zadania, bowiem jeśli $S'' = \{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$ i $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$, to sumę $y_{n-1} + y_{n-2} - y_0$ da się uzyskać na tylko jeden istotnie różny sposób.

Niech $S = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ i $x_0 < \ldots < x_{n-1}$. Połóżmy najpierw $b_0 = -x_0$. Wtedy $S' = \{x + b_0 : x \in S\}$ ma postać $x'_0 = 0 < x'_1 < \ldots < x'_{n-1}$.

Rozważymy teraz wszystkie możliwe $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ oraz odpowiadające im $S'_a = \{ax' : x' \in S'\}$. Podzielmy najpierw reszty modulo p na sześć równych przedziałów:

$$\left[0, \frac{p}{6}\right), \left[\frac{p}{6}, \frac{2p}{6}\right), \ldots, \left[\frac{5p}{6}, p\right)$$

Teraz dla dowolnego a, zdefiniujemy ciąg $(t_1^a, t_2^a, \ldots, t_{n-1}^a)$, gdzie t_i^a definiujemy jako numer przedziału do którego trafiła wartość ax'_i (oczywiście dla dowolnego a, $ax'_0 = 0$ znajduje się w pierwszym przedziale).

Ponieważ różnych wartości a jest przynajmniej 6^{n-1}, zachodzi jeden z dwóch przypadków:

- Dla pewnego a, $(t_1^a, t_2^a, \ldots, t_{n-1}^a) = (1, 1, \ldots, 1)$
  To oznacza, że zbiór $S'' = \{a(x + b_0) : x \in S\}$ zawiera tylko reszty z przedziału $[0, \lfloor \frac{p}{6} \rfloor]$, co kończy rozwiązanie.

- Dla pewnych u, v, $(t_1^u, t_2^u, \ldots, t_{n-1}^u) = (t_1^v, t_2^v, \ldots, t_{n-1}^v)$
  Wówczas dla $a = u - v$, wartości $\{a(x + b_0) : x \in S\}$ znajdują się w przedziale $[-\lfloor \frac{p}{6} \rfloor, \lfloor \frac{p}{6} \rfloor]$. Ostatecznie możemy położyć $S'' = \{a(x + b_0) + \lfloor \frac{p}{6} \rfloor : x \in S\}$.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $a, b, c, d, e \in [-2, 2]$, które spełniają układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0 \\ a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=10. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że dla dowolnego $x \in [-2, 2]$ zachodzi nierówność $x^5 \leqslant 5x^3 - 5x + 2$. Rzeczywiście,

$$-x^5 + 5x^3 - 5x + 2 = (2-x)(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1) = (2-x)(x^2 + x - 1)^2 \geqslant 0.$$

Zauważmy, że równość zachodzi wyłącznie dla $x = 2$ i pierwiastków wielomianu $f(t) = t^2 + t - 1$, które są równe $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Zapisując nierówności pomocnicze dla $x = a, b, c, d, e$, a następnie dodając je stronami otrzymujemy

$$10 = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 \leqslant 5(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) - 5(a+b+c+d+e) + 10 = 10,$$

skąd wniosek, że we wszystkich pięciu nierównościach pomocniczych musi zajść równość. To znaczy, że $a, b, c, d, e \in \left\{2, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. Nietrudno przekonać się, że liczba $a+b+c+d+e$ jest równa 0 wyłącznie, gdy wśród liczb a, b, c, d, e liczba 2 występuje jednokrotnie, a liczby $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ dwukrotnie. Łatwo też obliczyć, że wówczas $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 0$.

Odpowiedź: Jedyne rozwiązania układu to piątka $\left(2, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ oraz jej permutacje.

2. Niech $c > 1$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają równanie

$$f(x+y) = f(x)f(y) - c \sin x \sin y$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

Rozwiązanie:

Mamy dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f(x)f(y+z) - c\sin x \sin(y+z) = f(x)(f(y)f(z) - c \sin y \sin z) - c \sin x \sin(y+z) \\ &= f(x)f(y)f(z) - cf(x)\sin y \sin z - c \sin x \sin(y+z). \end{aligned}$$

Zamieniając role x i y w powyższym rachunku otrzymujemy

$$f(x+y+z) = f(x)f(y)f(z) - cf(y)\sin x \sin z - c \sin y \sin(x+z).$$

Po odjęciu stronami powyższych dwóch zależności dostajemy

$$0 = cf(y)\sin x \sin z + c \sin y \sin(x+z) - cf(x) \sin y \sin z - c \sin x \sin(y+z).$$

Mamy

$$\begin{aligned}\sin y \sin(x+z) - \sin x \sin(y+z) &= \sin y(\sin x \cos z + \cos x \sin z) - \sin x(\sin y \cos z + \cos y \sin z)\\ &= \sin z(\cos x \sin y - \sin x \cos y),\end{aligned}$$

więc podstawiając to do poprzedniej równości uzyskujemy

$$0 = c \sin z(f(y)\sin x - f(x)\sin y + \cos x \sin y - \sin x \cos y).$$

Załóżmy, że x, y, z są takie, że liczby $\sin x, \sin y, \sin z$ są niezerowe. Dzieląc powyższą równość przez niezerową liczbę $c \sin x \sin y \sin z$ otrzymujemy

$$0 = \frac{f(y)}{\sin y} - \frac{f(x)}{\sin x} + \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y,$$

skąd wniosek, że wyrażenie $\dfrac{f(x)}{\sin x} - \operatorname{ctg} x$ przyjmuje tę samą wartość dla wszystkich x spełniających $\sin x \neq 0$, czyli dla x niebędących postaci $n\pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Oznaczmy tę wartość przez A. Wtedy dla wszystkich x jak wyżej mamy

$$f(x) = A \sin x + \cos x.$$

Rozważmy teraz dowolną liczbę rzeczywistą x i przedstawmy ją w postaci $x = y + z$ dla liczb y, z niebędących postaci $n\pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$\begin{aligned}f(x) = f(y+z) &= f(y)f(z) - c \sin y \sin z = (A \sin y + \cos y)(A \sin z + \cos z) - c \sin y \sin z\\ &= A^2 \sin y \sin z + A(\sin y \cos z + \cos y \sin z) + \cos y \cos z - c \sin y \sin z\\ &= (A^2 - c)\sin y \sin z + \cos y \cos z + A \sin(y+z)\\ &= A \sin(y+z) + \cos(y+z) + (A^2 - c + 1)\sin y \sin z = A \sin x + \cos x + (A^2 - c + 1)\sin y \sin z.\end{aligned}$$

W szczególności dla $x = 2$, $y = z = 1$ liczby $f(2)$ i $A \sin 2 + \cos 2$ się redukują i z otrzymanej równości wynika, że $A^2 = c - 1$, tj. $A = \pm\sqrt{c-1}$. Poprzednia równość redukuje się zatem do $f(x) = A \sin x + \cos x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ (również dla x postaci $n\pi$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$).

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcje $f(x) = \sqrt{c-1}\sin x + \cos x$ i $f(x) = -\sqrt{c-1}\sin x + \cos x$ spełniają warunki zadania:

$$\begin{aligned}f(x+y) &= A \sin(x+y) + \cos(x+y) = A(\sin x \cos y + \sin y \cos x) + \cos x \cos y - \sin x \sin y =\\ &= (A \sin x + \cos x)(A \sin y + \cos y) - (A^2 + 1)\sin x \sin y = f(x)f(y) - c \sin x \sin y\end{aligned}$$

3. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 11.$$

Znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Rozwiązanie:

Podstawmy $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$. Wówczas $xyz = 1$. Oznaczmy

$$A = x + y + z, \quad B = xy + yz + zx = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Mamy

$$11 = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3 + A + B,$$

skąd $B = 8 - A$. Oznaczmy wyrażenie, którego najmniejszej wartości szukamy przez T. Mamy

$$x^2 + y^2 + z^2 = A^2 - 2B = A^2 + 2A - 16$$

oraz

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} &= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)\\ &= B^2 - 2A = (8-A)^2 - 2A = A^2 - 18A + 64.\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}T &= 3 + x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} = 3 + A^2 + 2A - 16 + A^2 - 18A + 64\\ &= 2A^2 - 16A + 51 = 2(A-4)^2 + 19 \geqslant 19.\end{aligned}$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi dla $a = b = 1$ i $c = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Odpowiedź: 19.

4. Pewnego wieczora, na pewnym obozie uczestnicy zaczęli wyciągać drzwi z zawiasów i wkładać inne na ich miejsce. Podczas nocnych eksperymentów sprawdzili wszystkie pary drzwi w ośrodku, więc wiedzą, które drzwi można zastąpić innymi. Okazało się, że nie istnieje taki ciąg parami różnych drzwi $A_1, \ldots, A_n$, $n \geqslant 2$, że drzwi A_1 pasują do futryny drzwi A_2, A_2 pasują do futryny A_3, …, A_n pasują do futryny A_1. Drzwi nazywamy *bezużytecznymi*, jeśli nie można nimi zastąpić żadnych innych. Drzwi nazywamy *niezastępowalnymi*, jeśli nie można ich zastąpić przez żadne inne. Wiemy, że istnieje taka liczba $k > 1$, że dla każdego ciągu parami różnych drzwi $B_1, \ldots, B_m$, w którym:

- B_1 są niezastępowalne,
- B_m są bezużyteczne,
- drzwi B_{i+1} można zastąpić przez drzwi B_i dla każdego $1 \leqslant i < m$,

liczba m nie jest podzielna przez k. Wykazać, że wszystkie drzwi z ośrodka można podzielić na k grup w taki sposób, że żadnych drzwi nie można zastąpić innymi z tej samej grupy.

Rozwiązanie:

Rozważmy graf skierowany $G = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem drzwi, a krawędź z $u \in V$ do $v \in V$ występuje, jeśli drzwi v można zastąpić poprzez drzwi u oraz $v \neq u$. Udowodnimy, że istnieje funkcja $c : V \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k-1\}$ o poniższych dwóch własnościach

- jeśli $uv \in E$, to $c(u) \neq c(v)$,
- dla każdego $u \in V$ istnieje taka ścieżka $v_1, \ldots, v_\ell = u$, że $\ell \equiv c(u) \pmod{k}$ oraz do v_1 nie wchodzą żadne krawędzie, czyli v_1 jest niezastępowalny.

Funkcję c spełniającą pierwszą własność z powyższych nazywamy k-kolorowaniem grafu G i mówimy, że $v \in V$ jest koloru $c(v)$. Do wskazania postulowanego kolorowania wykorzystamy następujący

Lemat. *Jeśli graf skierowany jest acykliczny, czyli nie występuje w nim skierowany cykl, to istnieje taka kolejność $v_1, \ldots, v_n$ wierzchołków grafu, że dla krawędzi z v_i do v_j, zachodzi $i < j$. Takie uporządkowanie nazywamy* sortowaniem topologicznym grafu.

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny po liczbie wierzchołków w grafie. Jeśli graf nie ma wierzchołków to trywialnie teza zachodzi. Rozważmy teraz graf acykliczny na $n+1$ wierzchołkach i załóżmy, że dla dowolnego grafu acyklicznego na n wierzchołkach istnieje sortowanie topologiczne. Wykażemy, że w rozważanym grafie istnieje wierzchołek v, z którego nie wychodzi żadna krawędź. To pociągnie za sobą tezę. Istotnie, graf powstały poprzez usunięcie v, który naturalnie także jest acykliczny, dopuszcza sortowanie topologiczne. Wystarczy teraz ustawić v na końcu tego porządku.

Załóżmy nie wprost, że z każdego wierzchołka grafu wychodzi pewna krawędź. Rozważmy maksymalną ścieżkę $u_1, \ldots, u_\ell$. Z u_ℓ wychodzi pewna krawędź i z maksymalności jej koniec musi być pewnym wierzchołkiem u_m ze ścieżki. Otrzymujemy sprzeczność, gdyż wówczas $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_\ell$ tworzą cykl. To kończy dowód lematu. □

Z założeń zadania graf G jest acykliczny, więc z Lematu wynika istnienie sortowania topologicznego wierzchołków grafu, ustalmy jedno z nich. Rekurencyjnie skonstruujemy kolorowanie c przydzielając kolejnym wierzchołkom w topologicznym porządku odpowiednie kolory.

Ustalmy wierzchołek v i załóżmy, że wszystkie wierzchołki poprzedzające v w porządku topologicznym zostały już pokolorowane. Rozważmy zbiór $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{c(u) : uv \in E\}$. Udowodnimy, że $\mathcal{C} \neq \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Załóżmy nie wprost, że jest inaczej. Rozważmy maksymalną ścieżkę $v = v_1, \ldots, v_m$. Odnotujmy, że z v_m nie wychodzi żadna krawędź, to znaczy v_m odpowiada bezużytecznym drzwiom. Istotnie, z maksymalności krawędź z v_m mogłaby wychodzić jedynie do pewnego wierzchołka na ścieżce, jednakże z definicji sortowania topologicznego v_m jest ostatni spośród wierzchołków ścieżki w tym porządku. W takim razie taka krawędź rzeczywiście istnieć nie może.

Z założenia nie wprost dla pewnego $\ell \in \mathcal{C}$ zachodzi $k \mid \ell + m$. Wybierzmy takie u, z którego wychodzi krawędź do v, że $c(u) = \ell$. Wówczas, z definicji $c(u)$, istnieje taka ścieżka $u_1, \ldots, u_n = u$, że $n \equiv \ell \pmod k$ oraz u_1 jest wierzchołkiem odpowiadającym drzwiom niezastępowalnym. Pozostaje odnotować, że $u_i \neq v_j$ dla dowolnych i, j, więc $u_1, \ldots, u_n = u, v = v_1, \ldots, v_m$ jest ciągiem parami różnych wierzchołków długości podzielnej przez k przeczącym założeniom zadania. Istotnie, zachodzi $u_i \neq v_j$, gdyż wierzchołki v_j występują po v w sortowaniu topologicznym, a wierzchołki u_i występują przed v.

Otrzymaliśmy, że zachodzi $\mathcal{C} \subsetneq \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Oznacza to, że dla pewnego $\ell \notin \mathcal{C}$ zachodzi $(\ell - 1 \mod k) \in \mathcal{C}$. Możemy położyć $c(v) \stackrel{\text{def}}{=} \ell$. W istocie, dla pewnego u, z którego wychodzi krawędź do v zachodzi $c(u) \equiv \ell - 1 \pmod k$ i ścieżkę świadczącą $c(u)$ można przedłużyć o wierzchołek v, otrzymując odpowiednią ścieżkę o ℓ wierzchołkach.

Tym samym rekurencyjnie skonstruowaliśmy k-kolorowanie c grafu G. Wynika stąd teza, jako że zbiory wierzchołków pokolorowanych na ten sam kolor tworzą szukane zbiory bez krawędzi.

5. Udowodnić, że dowolny okrąg o promieniu $r > 2024$ zawiera mniej niż $2\pi\sqrt[3]{r^2}$ punktów o współrzędnych całkowitych.

Rozwiązanie:

Zauważmy na początku, że pole dowolnego niezdegenerowanego trójkąta o współrzędnych w punktach kratowych jest nie mniejsze od $\frac{1}{2}$. Istotnie, jeśli wierzchołkami trójkąta są punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), to jego pole jest równe

$$\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3|.$$

Widzimy teraz, że jeżeli liczby x_i, y_i są całkowite, zaś trójkąt jest niezdegenerowany, to powyższa wartość bezwzględna jest nie mniejsza niż 1, a zatem pole jest nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$.

Załóżmy, że okrąg o promieniu $r > 2024$ zawiera dokładnie n punktów o współrzędnych całkowitych. Jeśli $n \leqslant 3$, to teza zadania jest spełniona w oczywisty sposób. Załóżmy zatem, że $n \geqslant 4$ i oznaczmy dane punkty kolejno (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) jako $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Ponieważ łuki $P_1P_3, P_2P_4, \ldots P_nP_2$ (wybieramy ten łuk P_iP_{i+2}, który powstaje poprzez poruszanie się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara z P_i do P_{i+2}) okrywają cały okrąg dwukrotnie, to suma kątów środkowych wyznaczonych przez te łuki jest równa 4π. A zatem, pewien łuk wyznacza kąt środkowy o mierze nie większej niż $\frac{4\pi}{n}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że jest to łuk P_1P_3. Ponieważ $n \geqslant 4$, to $\frac{4\pi}{n} \leqslant \pi$, a więc ten łuk jest zawarty w pewnym półokręgu.

Łatwo teraz, zauważyć, że pole trójkąta $P_1P_2P_3$ jest największe wówczas, gdy P_2 jest środkiem łuku P_1P_3, gdyż jest to punkt o największej możliwej odległości do prostej P_1P_3 wśród punktów leżących na tym łuku. Jeżeli w takiej sytuacji $\alpha \leqslant \frac{4\pi}{n}$ jest kątem środkowym opartym na łuku P_1P_3, to z twierdzenia sinusów mamy $|P_1P_3| = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $|P_2P_1| = |P_2P_3| = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ oraz pole trójkąta $P_1P_2P_3$ jest równe

$$\frac{|P_1P_2||P_2P_3||P_3P_1|}{4r} = \frac{8r^3\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4r} = 2r^2\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant 2r^2\cdot\frac{\alpha^2}{16}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{r^2\alpha^3}{16},$$

gdzie w szacowaniu wykorzystaliśmy nierówność $\sin x \leqslant x$ prawdziwą dla dowolnego $x \geqslant 0$ (łatwą do zweryfikowania z użyciem pochodnej). Pozostaje zauważyć, że skoro trójkąt $P_1P_2P_3$ ma wierzchołki o punktach we współrzędnych całkowitych, to z początkowej obserwacji oraz nierówności $\alpha \leqslant \frac{4\pi}{n}$ wynika teraz, że

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{r^2\alpha^3}{16} \leqslant \frac{4r^2\pi^3}{n^3},$$

co po przekształceniu daje nam $n \leqslant 2\pi\sqrt[3]{r^2}$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

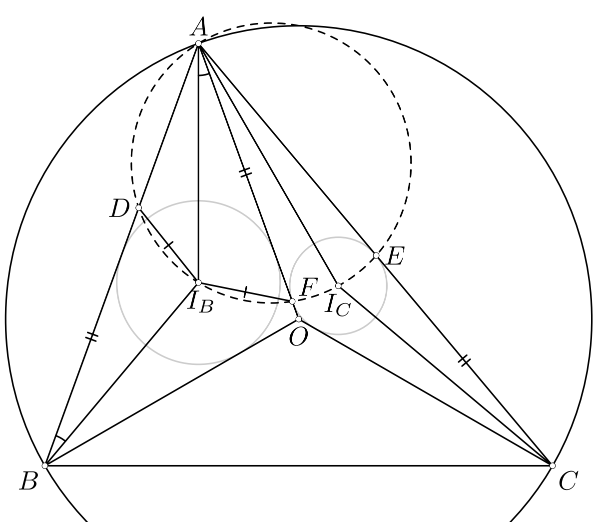
6. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg o środku O. Punkty I_B i I_C są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty AOB i AOC. Niech M będzie środkiem łuku BC zawierającego punkt A. Wykazać, że punkty M, A, I_B, I_C leżą na jednym okręgu.

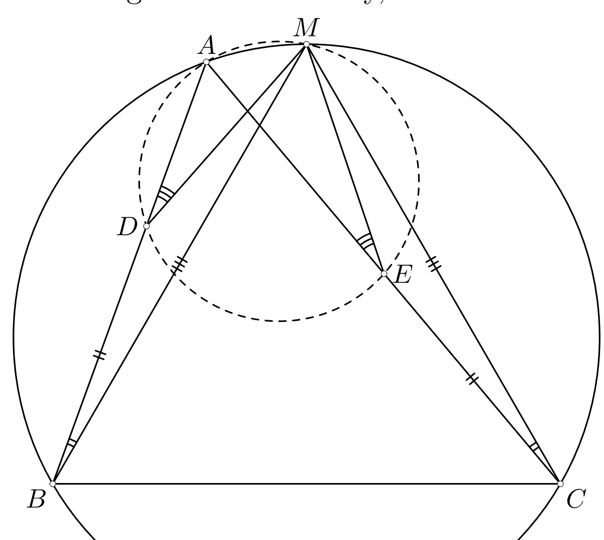
Rozwiązanie:
Sposób 1.

Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie AI_BI_C przez ω. Oznaczmy różne od A punkty przecięcia prostych AB, AC, AO z ω odpowiednio przez D, E, F. Wówczas $I_BD = I_BF$, gdyż kąty oparte na łukach I_BD i I_BF okręgu ω są równe. Ponadto $I_BB = I_BA$, bo I_B jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny AOB. Także $\sphericalangle I_BBD = \frac{1}{2}\sphericalangle OBD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAO = \sphericalangle I_BAF$, więc

$$\sphericalangle DI_BB = 180^\circ - \sphericalangle BDI_B - \sphericalangle I_BBD = 180^\circ - \sphericalangle AFI_B - \sphericalangle I_BAF = \sphericalangle FI_BA.$$

Zatem $\triangle DI_BB \equiv \triangle FI_BA$ (bok-kąt-bok). Stąd $BD = AF$. Analogicznie dowodzimy, że $CE = AF$.





Ponieważ M jest środkiem łuku BC zawierającego punkt A na okręgu opisanym na trójkącie ABC, więc $MB = MC$. Mamy też równość kątów $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MCE$, bo są oparte na tym samym łuku. Zatem

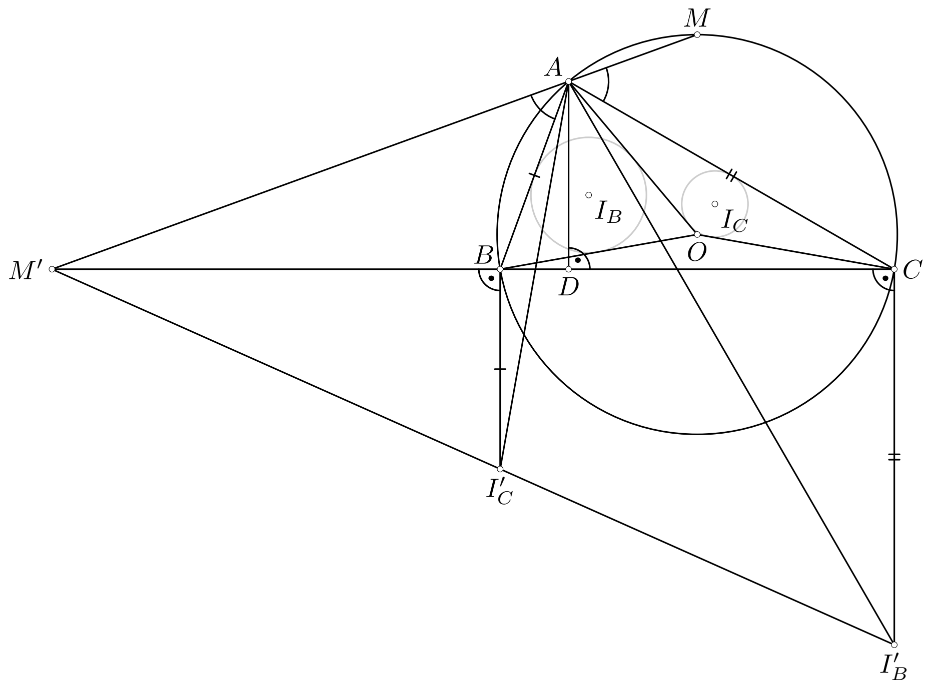
$\triangle BDM \equiv \triangle CEM$ (bok-kąt-bok). Stąd $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MEA$, skąd punkty A, M, D, E leżą na okręgu. Ale ten okrąg to ω, skąd otrzymujemy tezę.

Sposób 2.

Przez D oznaczmy spodek wysokości z punktu A w trójkącie ABC. Rozważmy przekształcenie φ będące złożeniem inwersji w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ z odbiciem względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$. Dla punktu P będziemy oznaczać $\varphi(P)$ przez P'. Zauważmy najpierw, że $B' = C$ oraz $C' = B$. Obrazem okręgu opisanego na trójkącie ABC jest prosta BC. Prosta AM jest dwusieczną zewnętrzną kąta $\sphericalangle BAC$, więc M' będzie punktem przecięcia tej dwusiecznej z prostą BC. Obrazem prostej AO będzie prosta AD, ponieważ są one izogonalnie sprzężone w kącie $\sphericalangle BAC$. Punkt I_B' będzie leżał na dwusiecznej kąta $\sphericalangle CAD$ oraz będzie spełniał równość kątów $\sphericalangle AI_B'C = \sphericalangle ABI_B$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle ABI_B = \sphericalangle BAI_B = \frac{1}{2}\sphericalangle BAO = \frac{1}{2}\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAI_B' = \sphericalangle I_B'AC,$$

zatem trójkąt ACI_B' jest równoramienny i $CI_B' \parallel AD$. Analogicznie trójkąt $I_C'BA$ jest równoramienny i $BI_C' \parallel AD$. Teza jest równoważna współliniowości punktów $M'I_C'I_B'$.



Przez M'' oznaczmy przecięcie prostej $I_C'I_B'$ z prostą BC. Odcinki BI_C' i CI_B' są równoległe, więc z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{M''B}{M''C} = \frac{BI_C'}{CI_B'} = \frac{AB}{AC}.$$

Z twierdzenia o dwusiecznej zewnętrznej w trójkącie ABC mamy równość

$$\frac{M'B}{M'C} = \frac{AB}{AC}.$$

Łącząc poprzednie równości otrzymujemy

$$\frac{M''B}{M''C} = \frac{M'B}{M'C}.$$

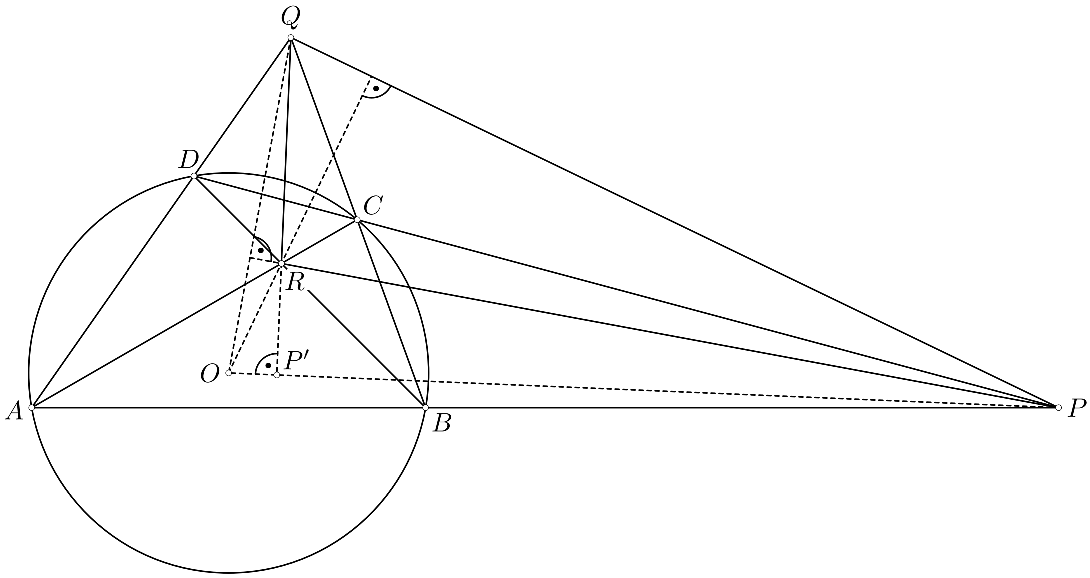
Skoro oba punkty M', M'' leżą poza odcinkiem BC to muszą być równe, co jest równoważne tezie.

7. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Punkty L_A, L_B, L_C, L_D są punktami przecięcia symedian odpowiednio w trójkątach BCD, CDA, DAB, ABC. Wykazać, że jeśli na czworokącie $L_AL_BL_CL_D$ można opisać okrąg, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Rozwiązanie:
Najpierw udowodnimy następujący

Lemat. *Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg Γ o środku O i promieniu ρ. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P, proste BC i DA przecinają się w punkcie Q, a proste AC i BD przecinają się w punkcie R. Wówczas O jest ortocentrum trójkąta PQR i $\rho^2 = OP \cdot OQ \cdot \cos\sphericalangle POQ$.*

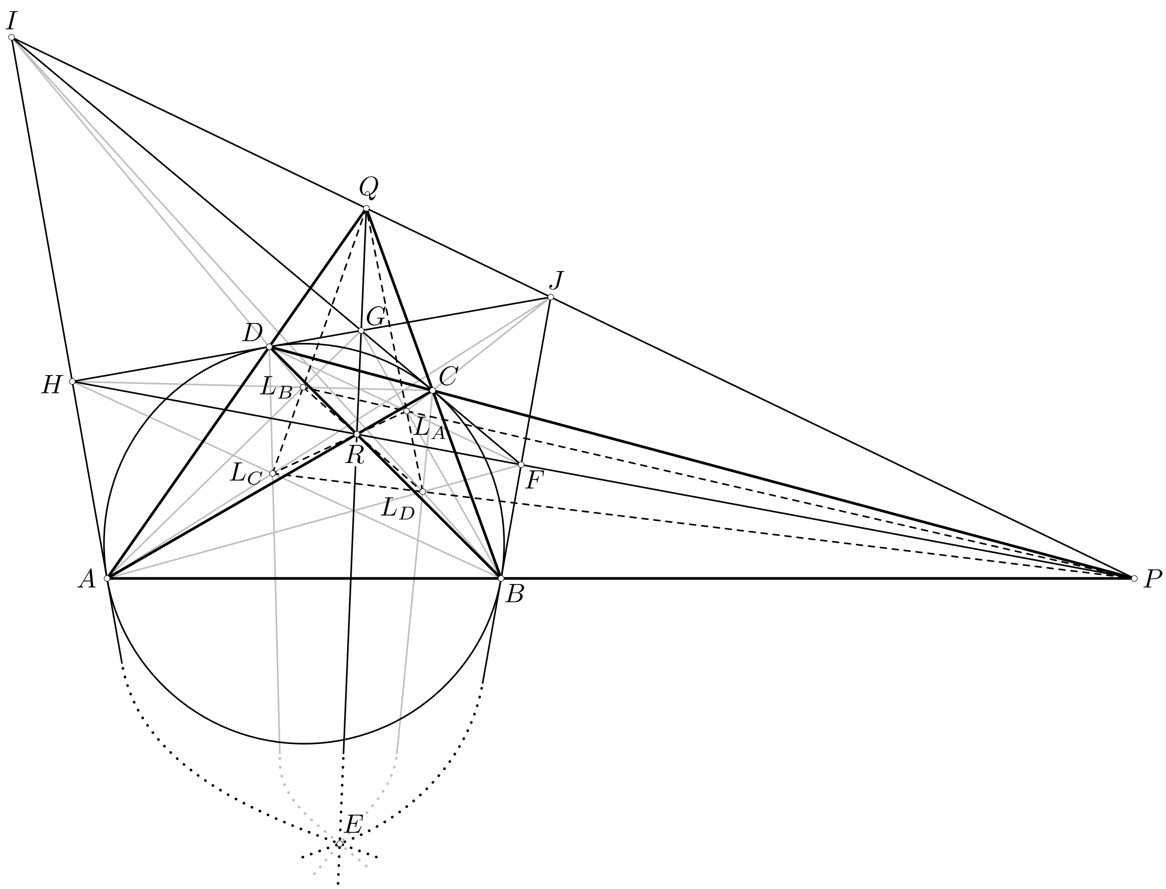
Dowód. Z własności biegunowych wynika, że prosta PQ jest biegunową punktu R względem Γ, prosta PR biegunową punktu Q względem Γ, a prosta QR biegunową punktu P względem Γ. W szczególności $PQ \perp RO$, $PR \perp QO$ i $QR \perp PO$. Stąd O jest ortocentrum PQR.



Rzut punktu P na swoją biegunową względem Γ jest swoim obrazem w inwersji względem Γ. Oznaczmy ten punkt przez P'. Wtedy
$$\rho^2 = OP \cdot OP' = OP \cdot OQ \cdot \cos\sphericalangle POQ. \qquad \square$$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Załóżmy, że czworokąt $ABCD$ nie jest trapezem. Oznaczmy okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ przez Ω. Niech ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D będą prostymi stycznymi do Ω odpowiednio w punktach A, B, C, D. Oznaczmy punkt przecięcia prostych ℓ_A, ℓ_B przez E, punkt przecięcia prostych ℓ_B, ℓ_C przez F, punkt przecięcia prostych ℓ_C, ℓ_D przez G, punkt przecięcia prostych ℓ_D, ℓ_A przez H, punkt przecięcia prostych ℓ_A, ℓ_C przez I, punkt przecięcia prostych ℓ_B, ℓ_D przez J, punkt przecięcia prostych AB, CD przez P, punkt przecięcia prostych BC, DA przez Q oraz punkt przecięcia prostych AC i BD przez R.

Punkt L_A jest przecięciem prostych BG, CJ, DF. Punkt L_B jest przecięciem prostych AG, CH, DI. Punkt L_C jest przecięciem prostych AJ, BH, DE. Punkt L_D jest przecięciem prostych AF, BI, CE.



Z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanych sześciokątów $AEFCGH$ i $BFGDHE$ wynika, że proste AC, BD, EG, FH przecinają się w punkcie R. Z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanych sześciokątów $FBJHAI$ i $FCIJDH$ wynika, że proste AB, CD, FH, IJ przecinają się w punkcie P. Z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanych sześciokątów $JBEICG$ i $IAEJDG$ wynika, że proste BC, AD, EG, IJ przecinają się w punkcie Q.

Z twierdzenia Pappusa dla sześciokąta $BGEDFH$ wynika, że punkty L_A, L_C i R są współliniowe. Z twierdzenia Pappusa dla sześciokąta $CHFAGE$ wynika, że punkty L_B, L_D i R są współliniowe. Z twierdzenia Pappusa dla sześciokąta $CHFDIJ$ wynika, że punkty L_A, L_B i P są wspóliniowe. Z twierdzenia Pappusa dla sześciokąta $AJIBHF$ wynika, że punkty L_C, L_D i P są współliniowe. Z twierdzenia Pappusa dla sześciokąta $AGEDIJ$ wynika, że punkty L_B, L_C, Q są współliniowe Z twierdzenia Pappusa dla sześciokąta $BGECJI$ wynika, że punkty L_D, L_A, Q są współliniowe.

Załóżmy, że czworokąt $L_AL_BL_CL_D$ można wpisać w okrąg ω. Ponieważ L_AL_B i L_CL_D przecinają się w punkcie P, L_BL_C i L_DL_A przecinają się w punkcie Q, a L_AL_C i L_BL_D przecinają się w punkcie R, więc z Lematu otrzymujemy, że środkiem ω jest ortocentrum trójkąta PQR, które oznaczymy przez O, a promieniem jest $r = \sqrt{OP \cdot OQ \cdot \cos\sphericalangle POQ}$. Jednocześnie z tego samego lematu dla czworokąta $ABCD$ wynika, że Ω ma środek O i promień r, tj. okręgi Ω i ω pokrywają się. To jest jednak niemożliwe, bo punkt L_A leży wewnątrz trójkąta BCD, tym samym nie leży na okręgu Ω — sprzeczność.

8. Prosta przechodząca przez środek sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ i środek sfery opisanej na tym czworościanie przecina krawędzie AB i CD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że punkty K i L są środkami odcinków AB i CD.

Rozwiązanie:

Płaszczyzna ABL zawiera środek sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, a więc jest płaszczyzną dwusieczną kąta dwuściennego przy krawędzi AB. Niech S będzie środkiem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$, zaś P i Q rzutami prostokątnymi punktu S odpowiednio na płaszczyzny ABC i ABD. Oczywiście punkty P i Q są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD. Skoro S leży na prostej KL, to leży też na płaszczyźnie ABL, więc $SP = SQ$. W takim razie

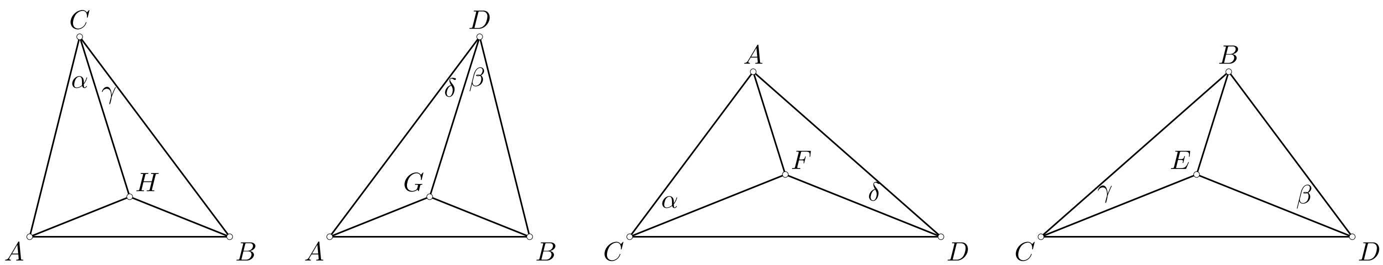
$$AP^2 = AS^2 - PS^2 = AS^2 - SQ^2 = AQ^2 \quad \text{oraz} \quad BP^2 = BS^2 - BS^2 = BS^2 - SQ^2 = BQ^2.$$

Trójkąty ABP i ABQ są więc przystające, skąd dostajemy

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle APB = \frac{1}{2}\sphericalangle AQB = \sphericalangle ADB.$$

Analogicznie rozważając tym razem płaszczyznę CDK uzasadniamy, że $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$.

Wykażemy, że zachodzą równości $AC = BD$ i $AD = BC$. Oznaczmy punkty styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ ze ścianami BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio przez E, F, G, H. Ponieważ odcinki styczne poprowadzone z punktu do sfery są równe, dostajemy przystawania $\triangle ABG \equiv \triangle ABH$, $\triangle CDE \equiv \triangle CDF$, $\triangle ACF \equiv \triangle ACH$, $\triangle BDE \equiv \triangle BDG$, $\triangle ADF \equiv \triangle ADG$ oraz $\triangle BCE \equiv \triangle BCH$. Wprowadźmy oznaczenia kątów: $\alpha = \sphericalangle ACF = \sphericalangle ACH$, $\beta = \sphericalangle ADF = \sphericalangle ADG$, $\gamma = \sphericalangle BCE = \sphericalangle BCH$, $\delta = \sphericalangle BDE = \sphericalangle BDG$.



Z równości $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ mamy $\alpha + \gamma = \delta + \beta$. Ponadto

$$\sphericalangle CFD = \sphericalangle FCA + \sphericalangle CAD + \sphericalangle ADF = \alpha + \sphericalangle CAD + \delta$$
$$\sphericalangle CED = \sphericalangle ECB + \sphericalangle CBD + \sphericalangle BDE = \gamma + \sphericalangle CAD + \beta.$$

Ale $\sphericalangle CFD = \sphericalangle CED$, więc $\alpha + \delta = \gamma + \beta$. Wraz z równością $\alpha + \gamma = \delta + \beta$ oznacza to, że $\alpha = \beta$ i $\gamma = \delta$.

Analogiczny argument wykazuje, że $\sphericalangle HAC = \sphericalangle GBD$ i $\sphericalangle GAD = \sphericalangle HBC$. Zatem $\triangle ACH \sim \triangle BDG$ i $\triangle BCH \sim \triangle ADG$ (cecha kąt-kąt). W konsekwencji czworokąty $ACBH$ i $BDAG$ są podobne, w szczególności $\triangle ACB \sim \triangle BDA$. Ponieważ jednak te dwa trójkąty mają odpowiadający bok AB ten sam, więc te trójkąty są w istocie przystające. Zatem $AC = BD$ i $AD = BC$.

Niech teraz punkty M i N będą odpowiednio środkami krawędzi AB i CD w czworościanie $ABCD$. Trójkąty BDC i ACD są przystające. Wobec tego odcinki BN i AN, będące odpowiednio środkowymi w tych trójkątach, mają równe długości. Innymi słowy $AN = BN$, zatem w trójkącie równoramiennym ANB środkowa NM jest prostopadła do boku AB. Analogicznie rozpatrując trójkąt CMD dowodzimy, że $MN \perp CD$. Obrót o $180°$ wokół prostej MN przeprowadza punkt A na punkt B, punkt C zaś na punkt D, zatem czworościan $ABCD$ przechodzi na siebie. Środki sfer wpisanej i opisanej na czworościanie muszą także przejść na siebie, a to oznacza, że leżą na prostej łączącej środki krawędzi AB i CD. To kończy rozwiązanie.

Uwaga: Równości $AC = BD$ i $AD = BC$ można uzyskać w inny sposób, korzystając z twierdzenia kosinusów. Kładziemy ścianę ABD na płaszczyźnie ABC otrzymując punkt E leżący po tej samej stronie prostej AB, co punkt C — trójkąty ABD i ABE są oczywiście przystające. Z równości $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB$ wnosimy, że punkty A, B, C, E leżą na okręgu, skąd $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CBE$. Zauważmy, że $CD \neq CE$, gdyż w przeciwnym razie czworościan $ABCD$ i "zdegenerowany czworościan" $ABCE$ miałyby wszystkie odpowiednie krawędzie równe, więc musiałyby być przystające, co jest niemożliwe. Zapisując twierdzenie kosinusów dla trójkątów ACD i BCD otrzymamy

$$\frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot BD} = \cos\sphericalangle CBD = \cos\sphericalangle CAD = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2 \cdot AC \cdot AD},$$

skąd

$$(BC^2 + BD^2) \cdot AC \cdot AD - (AC^2 + AD^2) \cdot BC \cdot BD = CD^2(AC \cdot AD - BC \cdot BD).$$

Analogicznie stosując twierdzenie kosinusów dla trójkątów ACE i BCE dostaniemy

$$\frac{BC^2 + BE^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot BE} = \cos\sphericalangle CBE = \cos\sphericalangle CAE = \frac{AC^2 + AE^2 - CE^2}{2 \cdot AC \cdot AE},$$

skąd

$$(BC^2 + BE^2) \cdot AC \cdot AE - (AC^2 + AE^2) \cdot BC \cdot BE = CE^2(AC \cdot AE - BC \cdot BE).$$

Ponieważ $AD = AE$ i $BD = BE$, więc lewe strony powyższych równości są równe, zatem prawe również. Skoro jednak $CE \neq CD$, to wyrażenia w nawiasach (które są oczywiście jednakowe) muszą wynosić 0. Stąd $AC \cdot AD = BC \cdot BD$. Analogicznie kładąc ścianę BCD na płaszczyznę ACD dostaniemy $BC \cdot AC = BD \cdot AD$. W takim razie

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC}{AD} = \frac{BD}{AC}.$$

W takim razie $AC = BD$ i w związku z tym również $AD = BC$.

9. Dane są niezerowe liczby całkowite a, b o tej samej parzystości. Wiadomo, że liczba $a^2 - b^2 - 1$ dzieli $a^2 - 1$. Udowodnić, że liczba $|a^2 - b^2 - 1|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności liczby a i b są dodatnie. Jeśli $a = b$ to teza jest oczywista, więc możemy założyć że $a \neq b$. Jeśli $a > b$ to stosujemy podstawienie $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$. Zachodzi $x, y \in \mathbb{Z}$, jako że a, b są tej samej parzystości. Wówczas $a = x + y$ oraz $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 4xy$, więc dostajemy równość

$$(x + y)^2 - 1 = k(4xy - 1) \tag{1}$$

dla x, y, k będących liczbami całkowitymi dodatnimi. Jeśli zaś $a < b$ to stosujemy podstawienie $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{b-a}{2}$. Skoro $-4xy - 1 = a^2 - b^2 - 1$ dzieli $a^2 - 1$ to dzieli także $(x + y)^2 = b^2$. Dlatego mamy równość

$$(x + y)^2 = k(4xy + 1) \tag{2}$$

dla pewnych liczb całkowitych dodatnich x, y, k. Wykażemy teraz, że równanie (1) nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich x, y, k, równanie (2) ma zaś rozwiązanie tylko wtedy, gdy k jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej. Ponieważ w drugim przypadku otrzymujemy, że

$$b^2 = (x + y)^2 = k(4xy + 1) = -k(a^2 - b^2 - 1)$$

to jeśli k jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej, to $|a^2 - b^2 - 1|$ także.

Przypadek $a > b$. Ze względu na symetrię równania możemy założyć $x \geqslant y > 0$. Załóżmy ponadto, że $x + y$ jest najmniejsze możliwe (przy ustalonym k). Potraktujmy (1) jako równanie kwadratowe na zmienną x. Ze wzorów Viète'a możemy wyznaczyć pierwiastek x' tego równania:

$$x' = 4ky - 2y - x = \frac{y^2 + k - 1}{x}$$

Widać, że jest to liczba całkowita $(4ky - 2y - x \in \mathbb{Z})$ i dodatnia $(y^2 + k - 1 > 0)$. Skoro suma $x + y$ jest najmniejsza możliwa to musi być $x' + y \geqslant x + y$, czyli $x' \geqslant x$. Obliczmy $(x' - x)^2$:

$$(x' - x)^2 = (x' + x)^2 - 4x'x = (4ky - 2y)^2 - 4(y^2 + k - 1) = 16k^2y^2 - 16ky^2 - 4k + 4 = 4(k - 1)(16ky^2 - 1)$$

Oczywistym jest, że $16ky^2 - 1 \geqslant k - 1$ i stąd $x' - x \geqslant 2(k - 1)$. Skoro $x \neq y$ (ponieważ $b = x - y \neq 0$) to $x \geqslant y + 1$ oraz $x' \geqslant y + 2k - 1$. To oznacza, że

$$x'x \geqslant (y + 1)(y + 2k - 1) = y^2 + 2ky + 2k - 1 > y^2 + k - 1 = x'x$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód przypadku $a > b$.

Przypadek $b > a$. Podobnie jak wcześniej możemy bez straty ogólności założyć, że $x \geqslant y > 0$ oraz $x + y$ jest najmniejsze możliwe (przy ustalonym k). Jeśli potraktujemy (2) jako równanie kwadratowe w zależności od x, to ze wzorów Viète'a możemy wyznaczyć pierwiastek x' tego równania ze wzorów

$$x' = 4ky - 2y - x = \frac{y^2 - k}{x}$$

Podobnie jak poprzednio jasnym jest, że $x' \in \mathbb{Z}$. Jeśli $y^2 - k > 0$ to wtedy także $x' > 0$ i ponieważ $x'x = y^2 - k < y^2 \leqslant x^2$ to $x' < x$ i $x' + y < x + y$ co przeczy minimalności $x + y$. Dlatego możemy założyć, że $y^2 \leqslant k$ oraz $x > 0 \geqslant x'$. Podobnie jak wcześniej obliczamy

$$(x' - x)^2 = (x' + x)^2 - 4x'x = (4ky - 2y)^2 - 4(y^2 - k) = 16k^2y^2 - 16ky^2 + 4k = k(16ky^2 - 16y^2 + 4)$$

Jeśli $y = 1$ to z równania (2) wynika $4x + 1 \mid (x + 1)^2$, czyli $4x + 1 \mid 16(x + 1)^2 - (4x + 7)(4x + 1) = 9$, co oznacza $x = 2$ i $k = 1 = 1^2$. Rozważmy zatem przypadek $y, k > 1$. Wtedy $16ky^2 - 16y^2 + 4 > 4k$ i stąd $(x' - x)^2 > 4k^2$, czyli $|x' - x| > 2k$. Jeśli $y^2 < k$ to z równości $x'x = y^2 - k$ dostajemy, że $x' \neq 0$, więc $|x'|, |x| \geqslant 1$. Ponadto jeśli $|x' - x| > 2k$ to $|x'| > k$ lub $|x| > k$, co oznacza, że $|x'x| > k$. Skoro jednak $y^2 - k = x'x$ to musielibyśmy mieć $|y^2 - k| = k - y^2 > k$ co jest oczywiście niemożliwe. W ten sposób wykluczamy możliwość $y^2 < k$. Pozostaje jedynie przypadek $y^2 = k$, ale jak stwierdziliśmy wcześniej, wynika z niego że $|a^2 - b^2 - 1|$ jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.

Uwaga: Przypadek $b > a$ można również rozwiązać równaniem w stylu Pella. Przyjmując oznaczenie $k = \frac{b^2}{a^2 - b^2 - 1} < 0$ dostajemy, że $|a^2 - b^2 - 1|$ jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy $-k$ jest. Możemy wówczas zapisać $ka^2 - (k + 1)b^2 = k$ i równoważnie

$$\left(a + b\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) \cdot \left(a - b\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = 1.$$

Oznaczając przez (a_1, b_1) rozwiązanie podstawowe (tj. takie w którym wartość $a + b\sqrt{\frac{k+1}{k}}$ jest większa od 1 i możliwie najmniejsza lub równoważnie takie $a, b > 0$, że wartość b jest możliwie najmniejsza) tego równania oraz

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{\frac{k+1}{k}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(a_n + b_n\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) \cdot \left(a_1 + b_1\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right)$$

dostajemy

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(a_n \cdot a_1 + \frac{k+1}{k} \cdot b_n b_1, a_n \cdot b_1 + b_n \cdot a_1\right).$$

Można wykazać, że mimo dzielenia przez k wszystkie liczby pozostaną całkowite (ponieważ $k^2 | (k+1)^2 b_1^2 b_n^2$, więc $k | b_1 b_n$). Zauważmy ponadto, że para $(2k + 1, 2k)$ jest rozwiązaniem tego równania. Zastanówmy się jeszcze, dla jakich k rozwiązanie podstawowe jest mniejsze. Z prostych przyczyn, $b_1^2 \geqslant k$ i stąd $a_1^2 \geqslant k + 1$. Zatem jeśli $(2k + 1, 2k) = (a_\ell, b_\ell)$ to musimy mieć $\ell = 2$ – po podstawieniu do wzoru dostajemy $a_1 = b_1 = \sqrt{-k}$ i $-k$ jest kwadratem. Co więcej, w ten sposób scharakteryzowaliśmy wszystkie rozwiązania naszego równania. Analiza parzystości doprowadza nas do tego, że w rozwiązaniach dla $-k$ niebędącego kwadratem, a i b są różnej parzystości, natomiast dla $-k$ będącego kwadratem, a_ℓ i b_ℓ są tej samej parzystości dla ℓ nieparzystego i różnej dla ℓ parzystego.

10. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia k taka, że liczba $k \cdot 2^n + 1$ jest złożona dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

Rozwiązanie:

Wskażemy parami różne liczby pierwsze p_i dla $i \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ wraz z resztami r_i takimi, że jeśli dla każdego i liczba k spełnia warunek $k \equiv r_i \pmod{p_i}$, to dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ istnieje $0 \leqslant i \leqslant 6$ takie, że $p_i \mid k \cdot 2^n + 1$. Dla danych liczb p_i istnienie takiej liczby całkowitej k wynika z chińskiego twierdzenia o resztach. Ponieważ możemy również przyjąć, że $k > p_i$ dla dowolnego i, to stąd będzie wynikać bezpośrednio teza zadania, gdyż liczba $k \cdot 2^n + 1$ będzie złożona dla dowolnego n.

Wybierzemy parami względnie pierwsze p_i w taki sposób by $p_i \mid 2^{2^i} + 1$ dla $i \leqslant 4$ oraz $p_5, p_6 \mid 2^{2^5} + 1$. Na przykład weźmy $p_i = 2^{2^i} + 1$ dla $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $p_5 = 641$ oraz $p_6 = \frac{2^{2^5}+1}{641}$ (chociaż liczba p_6 istotnie jest pierwsza, to wystarczy jedynie wiedzieć, że jest względnie pierwsza z liczbami p_i dla $0 \leqslant i \leqslant 5$ co łatwo sprawdzić). Dodatkowo, niech reszty r_i będą takie, że

- $r_i \equiv 1 \pmod{p_i}$ dla $0 \leqslant i \leqslant 5$,
- $r_6 \equiv -1 \pmod{p_6}$.

Rozważmy teraz dowolną liczbę całkowitą dodatnią n i zapiszmy ją w postaci $n = 2^i \cdot \ell$ dla $i \geqslant 0$ oraz pewnej liczby nieparzystej ℓ. Jeśli teraz $0 \leqslant i \leqslant 5$, to

$$k \cdot 2^n \equiv r_i \cdot 2^{\ell \cdot 2^i} \equiv (-1)^\ell \equiv -1 \pmod{p_i}.$$

Oznacza to, że $p_i \mid 2^n \cdot k + 1$. Dalej dla $i \geqslant 6$, jako że mamy $2^{2^5} \equiv -1 \pmod{p_6}$, czyli $2^{2^6} \equiv 1 \pmod{p_6}$,

$$2^n \equiv (2^{2^6})^{2^{i-6} \cdot \ell} \equiv 1^{2^{i-6} \cdot \ell} \equiv 1 \pmod{p_6},$$

skąd otrzymujemy, że

$$k \cdot 2^n \equiv r_6 \equiv -1 \pmod{p_6}.$$

Zatem dla dowolnego $n \geqslant 1$ jedna z liczb p_i dzieli $k \cdot 2^n + 1$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

11. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia dla $n \geqslant 2$ warunek

$$a_n = \varphi(a_{n-1}) + k,$$

gdzie k jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią, a $\varphi(n)$ to liczba liczb całkowitych dodatnich względnie pierwszych z n i mniejszych równych od n. Wykazać, że ten ciąg jest ograniczony.

Rozwiązanie:

Niech $N = \max(a_1, k + 1)$. Wykażemy przez indukcję, że $a_n \leqslant N! + k + 1$ dla dowolnego $n = 1, 2, 3, \ldots$, tym samym dowodząc tezy zadania.

Baza indukcji jest oczywista, bo $a_1 \leqslant N \leqslant N! + k + 1$. Załóżmy teraz, że $a_n \leqslant N! + k + 1$ dla pewnego $n \geqslant 1$. Wykażemy, że $a_{n+1} \leqslant N! + k + 1$. Jeśli $a_n \leqslant N! + 1$, to

$$a_{n+1} = \varphi(a_n) + k \leqslant a_n + k \leqslant N! + k + 1.$$

Jeśli zaś $a_n \geqslant N! + 2$, to $a_n = N! + m$ dla pewnego $m \in [2, k + 1]$. Zauważmy, że liczby

$$m, 2m, 3m, \ldots, \left(\frac{N!}{m} + 1\right) m$$

nie są względnie pierwsze z a_n, bo ich wspólnym dzielnikiem jest m. Wobec tego

$$\varphi(a_n) \leqslant a_n - \left(\frac{N!}{m} + 1\right) = N! + m - \frac{N!}{m} - 1 \leqslant N! + k + 1 - \frac{(k+1)k}{k+1} - 1 = N!,$$

więc $a_{n+1} = \varphi(a_n) + k \leqslant N! + k \leqslant N! + k + 1$.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Jeśli zawodnik zostaje wybrany do referowania po raz n-ty, przystępuje do referowania z prawdopodobieństwem $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-n+m}$, gdzie m oznacza minimum liczby zakończonych referowań spośród wszystkich zawodników drużyny referującej. W przeciwnym wypadku Kapitan drużyny referującej wyznacza osobę do referowania zgodnie z punktem **7**.
9. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
10. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7–9**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
11. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.
12. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
13. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**. W tym przypadku, jeżeli przedstawione rozwiązanie nie zostanie uznane przez Jury za poprawne, drużyna otrzymuje -10 punktów i opuszcza się punkt 14.

14. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

15. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
16. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

17. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań lub gdy różnica pomiędzy wynikami obu drużyn jest większa niż 40 punktów. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
18. Po 3 godzinach meczu czas na referowanie zadania zostaje skrócony do 5 minut, a wszystkie punkty ujemne liczą się dwukrotnie.
19. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
20. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści