

# Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej



Mszana Dolna, 1 – 14 czerwca 2025

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej  
Mszana Dolna, 1 – 14 czerwca 2025

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”  
ul. Słoneczna 2A  
34-730 Mszana Dolna  
tel. 18 33 11 660

Kadra:

Jacek Jakimiuk, Michał Kieza, Filip Konieczny, Michał Mańka, Łukasz Orski, Mateusz Przebieracz, Rafał Pyzik, Łukasz Skiba, Szymon Tobiasz.

Uczestnicy:

Maksymilian Czyżewski, Michał Fronczek, Maria Janyska, Stanisław Kozłowski, Julian Kuryłłowicz-Kaźmierczak, Daria Lobas, Antoni Mazur, Jan Micyk, Mateusz Miernik, Aleksander Misterski, Stanisław Mocny, Zuzanna Mosionek, Antoni Nowosielski, Robert Rończak, Tadeusz Rylski, Jakub Świcz, Bartłomiej Tomasz, Jakub Wasilewski, Mateusz Wawrzyniak, Michał Wolny.

Olimpiada Matematyczna w internecie:  
[om.sem.edu.pl](http://om.sem.edu.pl)  
[www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna](https://www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna)

# Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 1 – 14 czerwca 2025 w Mszanie Dolnej, w Ośrodku Sportowo-Rekreacyjnym „Słoneczny”. Kadre obozu stanowili: Jacek Jakimiuk, Michał Kieza, Filip Konieczny, Michał Mańka, Łukasz Orski, Mateusz Przebieracz, Rafał Pyzik, Łukasz Skiba i Szymon Tobiasz.

W dniach 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11 i 12 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 5 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 7 i 13 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkusobowe drużyny ośmiu zadań i trwały od rana do wieczora, a mecze matematyczne — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 192 punkty. Trzy najlepsze wyniki to 150, 131 i 127 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyła się wycieczka: 10 czerwca na Mogielicę i Ćwilin.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z Obozu wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: [om.sem.edu.pl](http://om.sem.edu.pl).

| Zadanie | Liczba prac<br>na 6 punktów | Liczba prac<br>na 5 punktów | Liczba prac<br>na 2 punkty | Liczba prac<br>na 0 punktów |
|---------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 1.      | 13                          | 3                           | 0                          | 3                           |
| 2.      | 11                          | 3                           | 1                          | 4                           |
| 3.      | 9                           | 3                           | 0                          | 7                           |
| 4.      | 2                           | 1                           | 0                          | 16                          |
| 5.      | 12                          | 3                           | 2                          | 3                           |
| 6.      | 12                          | 0                           | 0                          | 8                           |
| 7.      | 1                           | 0                           | 0                          | 19                          |
| 8.      | 1                           | 0                           | 0                          | 19                          |
| 9.      | 18                          | 1                           | 0                          | 1                           |
| 10.     | 9                           | 1                           | 0                          | 10                          |
| 11.     | 2                           | 0                           | 2                          | 16                          |
| 12.     | 2                           | 0                           | 0                          | 18                          |
| 13.     | 8                           | 7                           | 1                          | 4                           |
| 14.     | 5                           | 3                           | 0                          | 12                          |
| 15.     | 8                           | 2                           | 0                          | 10                          |
| 16.     | 1                           | 0                           | 0                          | 19                          |
| 17.     | 13                          | 0                           | 0                          | 5                           |
| 18.     | 6                           | 2                           | 0                          | 10                          |
| 19.     | 5                           | 3                           | 0                          | 10                          |
| 20.     | 1                           | 0                           | 0                          | 17                          |
| 21.     | 12                          | 2                           | 1                          | 4                           |
| 22.     | 9                           | 3                           | 1                          | 6                           |
| 23.     | 4                           | 1                           | 1                          | 13                          |
| 24.     | 0                           | 0                           | 0                          | 19                          |
| 25.     | 13                          | 3                           | 2                          | 1                           |
| 26.     | 10                          | 0                           | 0                          | 9                           |
| 27.     | 10                          | 0                           | 1                          | 8                           |
| 28.     | 0                           | 0                           | 0                          | 19                          |
| 29.     | 14                          | 1                           | 1                          | 3                           |
| 30.     | 4                           | 0                           | 1                          | 14                          |
| 31.     | 7                           | 1                           | 0                          | 11                          |
| 32.     | 0                           | 1                           | 0                          | 18                          |

# Treści zadań

## Zawody indywidualne

1. Dana jest liczba całkowita  $n \geq 1$ . Wykazać, że

$$\prod_{k=1}^n (k^4 + k^2 + 1)$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Dany jest wypukły wielokąt  $P$ . Dla trójkąta  $T$  o wierzchołkach będących wierzchołkami  $P$  efektem  $T$  nazwiemy zbiór 0, 1, 2 lub 3 wielokątów, jakie powstają po usunięciu  $T$  z  $P$ . Triangulacją  $P$  nazwiemy dowolny podział  $P$  na trójkąty za pomocą parami nieprzecinających się przekątnych. Triangulację  $\mathcal{T}$  nazwiemy *perfekcyjną*, gdy efekt każdego jej trójkąta zawiera dokładnie jeden wielokąt o nieparzystej liczbie wierzchołków. Udowodnić, że triangulacja  $\mathcal{T}$  wielokąta  $P$  jest perfekcyjna wtedy i tylko wtedy, gdy można usunąć część jej przekątnych tak, by wszystkie obszary, na które  $P$  jest podzielony przez pozostałe przekątne, były czworokątami.

3. W czworokącie wypukłym  $ABCD$  półproste  $AB$  i  $DC$  przecinają się w punkcie  $P$ , zaś półproste  $AD$  i  $BC$  przecinają się w punkcie  $Q$ . Okręgi wpisane w trójkąty  $BCP$  i  $CDQ$  są styczne do boków  $BC$  i  $CD$  odpowiednio w punktach  $L$  i  $M$ . Okręgi dopisane do trójkątów  $ADP$  i  $ABQ$  są styczne do boków  $AD$  i  $AB$  odpowiednio w punktach  $N$  i  $K$ . Wykazać, że punkty  $N, L, P$  są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty  $K, M, Q$  są współliniowe.

4. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste  $x > 1$  o tej własności, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi równość

$$\left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor = n - \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor + \dots,$$

gdzie  $\lfloor a \rfloor$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $a$ .

5. Czworokąt wypukły  $ABCD$  jest wpisany w pewien okrąg i opisany na okręgu o środku  $I$ . Prosta przechodząca przez punkt  $I$  i równoległa do  $AB$  przecina boki  $BC$  i  $AD$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Wykazać, że długość odcinka  $KL$  jest równa  $\frac{1}{4}$  obwodu czworokąta  $ABCD$ .

6. Dane są niezerowe liczby rzeczywiste  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq -1$  spełniające  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ . Udowodnić, że

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

7. Dany jest graf dwudzielny o  $m$  krawędziach. Udowodnić, że można wybrać co najmniej  $\frac{3}{4}m^{\frac{2}{3}}$  krawędzi w taki sposób, by żadne cztery spośród nich nie tworzyły cyklu.

8. Wielomian  $W(x)$  o współczynnikach wymiernych nazwiemy *leksmarkowym* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby całkowitej  $a$  istnieje takie całkowite dodatnie  $n$ , że  $W^n(a) \in \mathbb{Z}$ , gdzie  $W^n$  oznacza  $n$ -krotne złożenie  $W$ , czyli

$$W^n(a) = \underbrace{W(W(\dots W(W(a)) \dots))}_n.$$

Orzec, czy dla dowolnego wielomianu leksmarkowego  $W(x)$  istnieje liczba całkowita dodatnia  $N$  taka, że dla dowolnego  $a \in \mathbb{Z}$  istnieje  $0 < n < N$  takie, że  $W^n(a) \in \mathbb{Z}$ .

**9.** Dana jest dodatnia liczba całkowita  $n$ . Liczby  $0, 1, \dots, 2n$  są w tej kolejności napisane na okręgu i niektóre z nich zostały oznaczone. Dla  $0 \leq k \leq 2n$  niech  $I_k = \{k, k+1, \dots, k+n\}$ , gdzie liczby bierzemy modulo  $2n+1$ . Zbiór  $I_k$  nazwiemy *wesołym*, gdy zawiera ściśle więcej niż połowę oznaczonych liczb. Udowodnić, że następujące stwierdzenia są równoważne:

- a) Co najmniej  $n+1$  zbiorów spośród  $I_0, I_1, \dots, I_{2n}$  jest wesołych.
- b) Liczba oznaczonych liczb jest nieparzysta.

**10.** Znaleźć największą liczbę całkowitą dodatnią  $k$  taką, że istnieje liczba całkowita  $n > 1$ , dla której każda z liczb  $n, n^2, \dots, n^k$  daje się przedstawić w postaci  $x^2 + y^2 + 1$  dla pewnych liczb całkowitych  $x, y$ .

**11.** Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  spełniających warunek  $a+b+c=1$  zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{25}{1+48abc}.$$

**12.** Punkt  $P$  leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego  $ABC$ , przy czym

$$AC + AP = BC + BP.$$

Prosta  $AP$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $X$ , a prosta  $BP$  przecina bok  $AC$  w punkcie  $Y$ . Wykazać, że jeśli okręgi wpisane w trójkąty  $CPX$  i  $CPY$  nie są przystające, to ich wspólne styczne zewnętrzne przecinają się na prostej  $AB$ .

**13.** Wyznaczyć wszystkie ściśle rosnące funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające równość

$$f(1-x) = 1 - f(f(x))$$

dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

**14.** Punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym  $ABC$ , zaś  $H$  jego ortocentrum. Na półprostej  $HC$  leży taki punkt  $D$ , że  $HD = AO$ . Symetralna odcinka  $OD$  przecina boki  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Punkt  $E$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $CKL$ . Wykazać, że punkty  $K, O, L, E$  leżą na jednym okręgu.

**15.** Dane są liczby całkowite dodatnie  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  spełniające  $a_j - a_i \mid a_i$  dla dowolnych  $1 \leq i < j \leq n$ . Udowodnić, że zachodzi

$$ia_j \leq ja_i \quad \text{dla dowolnych } 1 \leq i < j \leq n.$$

**16.** Na okręgu zaznaczono  $2^{500}$  punktów i przypisano im liczby całkowite  $1, 2, \dots, 2^{500}$ , każdą dokładnie raz. *Wartością* cięciwy o końcach w dwóch zaznaczonych punktach nazywamy sumę liczb przypisanych tym punktom. Udowodnić, że istnieje zbiór 100 parami nieprzecinających się cięciw o tej samej wartości.

**17.** Niech  $BE$  i  $CF$  będą wysokościami trójkąta ostrokątnego  $ABC$ . Prosta  $EF$  przecina okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  w punktach  $X$  oraz  $Y$ , przy czym punkt  $X$  leży na łuku  $AB$  niezawierającym punktu  $C$ , a punkt  $Y$  na łuku  $AC$  niezawierającym punktu  $B$ . Punkty  $P$  oraz  $Q$  są obrazami punktów  $X$  i  $Y$  w symetrii względem prostych  $AB$  i  $AC$ , odpowiednio. Udowodnić, że  $PQ \parallel BC$ .

**18.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej  $n \geq 2$  istnieje taki  $n$ -elementowy zbiór  $S$  liczb całkowitych, że dla dowolnych, różnych od siebie  $a, b \in S$ , zachodzi podzielność  $(a-b)^2 \mid ab$ .

**19.** Dane są skończone zbiory  $A_1, A_2, \dots, A_n$  takie, że dowolne przecięcie pewnej (dodatniej) ich liczby ma parzystą liczbę elementów, za wyjątkiem przecięcia ich wszystkich, które ma nieparzystą liczbę elementów.

elementów. Znaleźć – w zależności od  $n$  – najmniejszą możliwą liczbę elementów sumy  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ .

**20.** Dany jest wielomian  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$ , gdzie  $a_0, \dots, a_{k-1}$  to liczby nieparzyste. Ponadto stopień  $k$  tego wielomianu jest parzysty oraz zachodzi  $P(x) \mid (x+1)^n - 1$  dla pewnego  $n$  całkowitego dodatniego. Udowodnić, że  $k+1 \mid n$ .

**21.** Dla grafu  $G$  i jego wierzchołka  $w$  definiujemy operację *inwersji* wierzchołka  $w$  następująco: dla dowolnego wierzchołka  $v$  różnego od  $w$ , jeśli nie ma między nimi krawędzi to ją dodajemy, natomiast jeśli jest między nimi krawędź to ją usuwamy. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną  $M$ , dla której każdy graf  $G$  o 2025 wierzchołkach można doprowadzić do grafu o co najwyżej  $M$  krawędziach za pomocą ciągu operacji inwersji.

**22.** Dla danej liczby rzeczywistej  $x$  zdefiniujemy

$$F(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}_+ \\ 2 \mid \lfloor nx \rfloor}} \frac{1}{2^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą  $C$  taką, że  $F(x) \geq C$  zachodzi dla  $x \in (0, 1)$ .

**23.** Dla danej liczby całkowitej  $n \geq 4$  znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą  $f(n)$  o tej własności, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $m$ , wśród dowolnych  $f(n)$  elementów zbioru  $\{m, m+1, \dots, m+n-1\}$  istnieją co najmniej trzy liczby parami względnie pierwsze.

**24.** Dany jest trójkąt  $ABC$  oraz punkty  $P$  i  $Q$  w jego wnętrzu spełniające zależności

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCA = 90^\circ,$$

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAQ, \quad \sphericalangle PBA = \sphericalangle CBQ.$$

Wykazać, że prosta  $PQ$  przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

**25.** Znaleźć wszystkie takie pary  $(x, y)$  liczb całkowitych dodatnich, że zarówno  $x+y$ , jak i  $xy+1$  są potęgami dwójki.

**26.** Dany jest ostrosłup trójkątny  $ABCS$  o podstawie trójkąta  $ABC$ . Okrąg o środku  $I$  wpisany w ten trójkąt jest styczny do krawędzi  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  odpowiednio w punktach  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , zaś odcinek  $SI$  jest wysokością danego ostrosłupa. Punkty  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  leżą odpowiednio na krawędziach  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$ , przy czym  $AA' = AF$ ,  $BB' = BD$ ,  $CC' = CE$ , zaś punkt  $S'$  jest obrazem symetrycznym do punktu  $S$  względem środka sfery opisanej na ostrosłupie  $ABCS$ . Wykazać, że  $A'S' = B'S' = C'S'$ .

**27.** Dany jest nieskończony ciąg liczb dodatnich  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  oraz taka stała  $K$ , że

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^2 < K \lambda_n^2 \text{ dla } n = 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że istnieje stała  $K'$  spełniająca warunek

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k < K' \lambda_n \text{ dla } n = 1, 2, \dots$$

**28.** W obozie matematycznym w Mszanie Dolnej uczestniczy  $2^n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) osób — uczniowie i kadra. Pewnego wieczora zorganizowano turniej picia wody na czas systemem każdy z każdym (zakładamy, że w żadnym pojedynku nie padł remis). Wygrał kierownik obozu. Uczestników turnieju, którzy pokonali

kierownika obozu nazwiemy *zuchwałymi*. Właściciele ośrodka planują zorganizowanie turnieju systemem pucharowym, przy czym okaże się, że każdy pojedynek między dwoma uczestnikami zakończy się takim samym wynikiem, jak wcześniej podczas turnieju rozgrywanego systemem każdy z każdym. Wykazać, że można tak ułożyć harmonogram rozgrywek, aby kierownik obozu znów zwyciężył, a wszyscy zuchwali uczestnicy odpadli w pierwszych dwóch rundach.

**29.** Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste  $c$ , dla których istnieje ciąg  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  liczb dodatnich spełniający dla  $n \geq 1$  równanie

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}}$$

oraz  $x_{2025} - x_1 = c\sqrt{4x_1 + 1}$ .

**30.** Niech  $S$  będzie niepustym zbiorem skończonym oraz  $\mathcal{F}$  będzie rodziną podzbiorów  $S$  spełniającą następujące warunki:

- (a)  $S$  nie jest jedynym elementem rodziny  $\mathcal{F}$ ;
- (b) Jeśli  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ , to  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$  oraz  $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ .

Udowodnić, że istnieje element  $a \in S$  należący do co najwyżej połowy elementów rodziny  $\mathcal{F}$ .

**31.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Okrąg  $\omega$  przechodzący przez punkty  $B$  i  $C$  przecina odcinki  $AB$  i  $AC$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ . Odcinki  $BE$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $P$ . Punkty  $M$  i  $N$  są środkami okręgów wpisanych w trójkąty  $ADE$  i  $PDE$ . Punkt  $K$  jest środkiem łuku  $DE$  okręgu  $\omega$  niezawierającego punktów  $B$  i  $C$ . Wykazać, że punkt  $K$  leży na prostej  $MN$ .

**32.** Bezkwadratową dodatnią liczbę całkowitą  $n$  nazwiemy *prawie pierwszą*, gdy dla każdej liczby całkowitej  $x$  zachodzi podzielność

$$n \mid x^{d_1} + x^{d_2} + \dots + x^{d_k} - kx,$$

gdzie  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$  są wszystkimi dodatnimi dzielnikami  $n$ . Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą postaci  $2^{2^m} + 1$  dla nieujemnej liczby całkowitej  $m$  i niech  $n$  będzie liczbą prawie pierwszą mającą dzielnik pierwszy  $r$  dający resztę 1 z dzielenia przez  $p$ . Udowodnić, że dla każdego  $i = 1, 2, \dots, k$  zachodzi  $p \mid d_i - 1$ .

## Zawody drużynowe

1. Udowodnić, że istnieje stała  $c < 1$  o następującej własności: dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  z przedziału domkniętego  $[0, 1]$  istnieje nieskończenie wiele par indeksów  $m > n$  spełniających warunek  $|x_m - x_n| \leq \frac{c}{m}$ .

*Uwaga:* Rozwiązanie zadania dla każdej liczby  $c > 1$  nagradzane będzie dodatnią liczbą punktów.

2. Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które spełniają równanie

$$f(xf(y) + yf(z) + zf(x)) = yf(x) + zf(y) + xf(z)$$

dla dowolnych  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

3. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w który można wpisać okrąg. Proste  $AB$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $P$ , a proste  $BC$  i  $AD$  przecinają się w punkcie  $Q$ . Punkt  $H$  jest rzutem prostokątnym punktu  $D$  na prostą  $PQ$ . Wykazać, że kąt między stycznymi z punktu  $H$  poprowadzonymi do okręgu wpisanego w trójkąt  $ADP$  jest równy kątowi między stycznymi z punktu  $H$  poprowadzonymi do okręgu wpisanego w trójkąt  $CDQ$ .

4. Dany jest sześciokąt wypukły  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ . Częścią wspólną trójkątów  $A_1A_3A_5$  i  $A_2A_4A_6$  jest sześciokąt wypukły  $s$ , którego główne przekątne przecinają się w jednym punkcie. Niech  $S_i$  oznacza pole trójkąta (rozłącznego z wnętrzem sześciokąta  $s$ ) o wierzchołku  $A_i$  i boku będącym jednocześnie bokiem sześciokąta  $s$ . Niech ponadto  $S_{135}$  i  $S_{246}$  będą odpowiednio polami trójkątów  $A_1A_3A_5$  i  $A_2A_4A_6$ . Wykazać, że

$$\frac{S_1 \cdot S_3 \cdot S_5}{S_{135}} = \frac{S_2 \cdot S_4 \cdot S_6}{S_{246}}.$$

5. Makka Pakka i Igipigiel grają w grę na dwóch stosach składających się z dodatniej liczby kamieni  $n$  i  $m$  odpowiednio. Ruch polega na wybraniu jednego ze stosów (oznaczymy jego rozmiar przez  $k$ ) i zabranii z niego  $0 < d < k$  kamieni, gdzie  $d$  dzieli  $k$ . Bohaterowie wykonują ruchy na zmianę. Jeśli na początku tury danego gracza na obu stosach znajduje się dokładnie jeden kamień, to ten gracz przegrywa. Zaczyna Makka Pakka. Wyznaczyć, w zależności od  $n$  i  $m$ , który gracz ma strategię wygrywającą.

6. Niech  $S$  będzie niepustym zbiorem parzyście wielu punktów na płaszczyźnie, spośród których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnić, że istnieje podział  $S_1 \cup S_2 = S$ ,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ , dla którego otoczki wypukłe zbiorów  $S_1$  i  $S_2$  mają taką samą liczbę wierzchołków.

*Uwaga:* Otoczka wypukła skończonego zbioru punktów to wielokąt wypukły o najmniejszym polu zawierający ten zbiór.

7. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite dodatnie  $n$ , że  $3^n + 61$  jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą postaci  $8n + 1$ , gdzie  $n$  jest całkowite dodatnie. Udowodnić, że zbiór liczb  $P = \{1, 2, \dots, p - 1\}$  można podzielić na dwa rozłączne, równoliczne zbiory  $A, B$  spełniające

$$\prod_{a \in A} a \equiv \prod_{b \in B} b \pmod{p^3}.$$

# Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Znaleźć wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , które spełniają równanie

$$f(x + yf(x)) + f(f(x)) = f(xy) + 2x$$

dla dowolnych  $x, y > 0$ .

2. Dany jest wielomian  $W(x)$  stopnia  $n$  o współczynnikach ze zbioru  $\{-1, 0, 1\}$ . Ponadto dana jest liczba całkowita  $k > 0$  taka, że  $(x-1)^k \mid W(x)$  oraz liczba pierwsza  $p$  spełniająca  $(n+1)^p < p^k$ . Wykazać, że zachodzi podzielność wielomianów

$$x^p - 1 \mid W(x).$$

3. Dane są nieujemne liczby rzeczywiste  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , gdzie  $N > 1$ . Ponadto  $a_1 + a_2 + \dots + a_N \leq 500$ . Wykazać, że istnieją liczby całkowite  $k \geq 1$  oraz  $1 = n_0 < n_1 < \dots < n_k = N$  takie, że

$$\sum_{i=0}^{k-1} n_{i+1} a_{n_i} < 2025.$$

4. Dane są dwa prostopadłościany, pierwszy w całości zawarty w drugim. Pierwszy z nich ma wymiary  $a \times b \times c$ , a drugi  $A \times B \times C$ . Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$a + b + c \leq A + B + C.$$

5. Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą, a  $S$  zbiorem  $3p$  punktów kratowych na płaszczyźnie takim, że środek ciężkości tego zbioru jest punktem kratowym. Wykazać, że istnieje  $p$ -elementowy podzbiór zbioru  $S$ , którego środek ciężkości jest punktem kratowym.

6. Rozważmy dwudziestościan foremny z rozróżnialnymi krawędziami ponumerowanymi liczbami  $1, 2, \dots, 30$ . Wyznaczyć liczbę kolorowań krawędzi na 3 kolory takich, że każda ściana ma krawędzie w dokładnie dwóch kolorach.

7. Dla liczby całkowitej dodatniej  $n$  niech  $f(n)$  oznacza iloczyn jej niezerowych cyfr w zapisie dziesiętnym. Definiujemy ciąg liczb całkowitych dodatnich  $(a_i)_{i=1}^{\infty}$  poprzez rekurencję  $a_{i+1} = a_i + f(a_i)$  dla  $i \geq 1$ . Wykazać, że niezależnie od wyboru wyrazu początkowego  $a_1 \in \mathbb{Z}_+$ , istnieje liczba całkowita dodatnia  $m$  taka, że  $m = f(a_i)$  dla nieskończenie wielu  $i$ .

8. Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne, które można zapisać w postaci

$$\frac{(a_1^3 - 1)(a_2^3 - 1) \dots (a_n^3 - 1)}{(b_1^3 - 1)(b_2^3 - 1) \dots (b_m^3 - 1)}$$

dla pewnych liczb całkowitych dodatnich  $n, m$  oraz ciągów  $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^m$  liczb całkowitych większych od 1.

9. Dany jest trójkąt różnoboczny  $ABC$  wpisany w okrąg  $o$ . Punkt  $M$  jest środkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka  $A$ . Okrąg  $\omega$  dopisany do boku  $BC$  trójkąta  $ABC$  jest styczny do boku  $BC$  w punkcie  $D$ . Okręgi  $o$  i  $\omega$  przecinają się w punktach  $P$  i  $Q$ . Udowodnić, że proste styczne do okręgu  $\omega$  w punktach  $P$  i  $Q$  przecinają się w punkcie na prostej  $DM$ .

10. Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ . Punkt  $X$  leży na łuku  $AB$  okręgu  $o_1$  i znajduje się wewnątrz okręgu  $o_2$ . Niech  $r_1$  będzie promieniem okręgu stycznego do odcinków  $AX$  i  $BX$  oraz

wewnętrznie stycznego do okręgu  $o_2$ , zaś  $r_2$  — promieniem okręgu stycznego do odcinków  $AX$  i  $BX$  oraz wewnętrznie stycznego do okręgu  $o_1$ . Wykazać, że stosunek promieni  $r_1$  i  $r_2$  nie zależy od wyboru punktu  $X$ .

**11.** Dana jest kula  $\Omega$  i ustalony punkt  $P$  znajdujący się wewnątrz niej, który nie jest jej środkiem. Przez punkt  $P$  narysowano trzy parymi prostopadłe cięciwy  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  i  $C_1C_2$ . Punkty  $X_1$  i  $X_2$  są rzutami prostokątnymi punktu  $P$  na płaszczyzny  $A_1B_1C_1$  i  $A_2B_2C_2$  odpowiednio. Udowodnić, że istnieje punkt  $Y$  taki, że niezależnie od wyboru cięciw  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$ , punkty  $Y, X_1, X_2$  leżą na jednej prostej.

## Drugi Mecz Matematyczny

1. Dany jest skończony zbiór  $A \subset \mathbb{R}$  oraz  $n > 0$ . Wykazać, że istnieje wielomian  $f \in \mathbb{R}[x]$  stopnia  $n$ , który ma  $n$  pierwiastków rzeczywistych oraz spełnia  $\sum_{a \in A} f(a)g(a) = 0$  dla dowolnego  $g \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\deg g < n$ .

2. Udowodnić, że wśród dowolnych  $2n + 1$  liczb niewymiernych istnieje  $n + 1$  takich liczb, że dla dowolnego  $k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$  suma dowolnych  $k$  z nich jest niewymierna.

3. Dane są dodatnie liczby całkowite  $m, n$ . Niech  $A_1, \dots, A_m$  będą podzbiorami zbioru mocy  $n$ . Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_i| \cdot |A_i \cap A_j| \geq \frac{1}{mn} \left( \sum_{i=1}^m |A_i| \right)^3.$$

4. Maks i Antek grają w następującą grę: najpierw Maks ustala pewną permutację  $\sigma$  liczb od 1 do  $n$ . W swoim ruchu Antek podaje pewną permutację  $\tau$  liczb od 1 do  $n$ . Jeśli  $\tau = \sigma$ , to Antek wygrywa. W przeciwnym razie Maks odpowiada mu, czy istnieje takie  $1 \leq i \leq n$ , że  $\tau(i) = \sigma(i)$ . Wykazać, że Antek może wygrać w co najwyżej  $n \log_2 n + 2025n$  ruchach.

5. Pewne schronisko dla kotów zapewnia schronienie dla  $m$  spośród tych zwierząt. Kotki w schronisku zaczęły zapadać na tajemniczą chorobę, przez którą eksplodują. Szalony naukowiec Dexter podjął próbę wyleczenia tej choroby. Opracował on dwa typy sznurów - konopne i azbestowe, po czym każde dwa kotki związał ze sobą sznurem jednego z tych typów. W jednym zabiegu Dexter potrafi wyleczyć dowolne trzy kotki, z których każde dwa są połączone tym samym typem sznura. Po udanym zabiegu Dexter odwiązuje wyleczone kotki od wszystkich pozostałych i kontynuuje wykonywanie zabiegów.

Powiemy, że dwa zabiegi są tego samego typu, gdy są przeprowadzone na kotkach związanych tym samym typem sznura. Niech  $f(n)$  oznacza najmniejszą liczbę  $m$ , dla której Dexter może przeprowadzić  $n$  zabiegów tego samego typu. Udowodnić, że istnieją takie liczby całkowite  $N, a, b$ , że  $f(n) = an + b$  dla dowolnego  $n > N$  oraz wyznaczyć wartość  $a$ .

6. Podzbiór  $U$  zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  nazwiemy *n-bytomskim*, jeśli dla dowolnych dwóch różnych  $a, b \in U$  zachodzi  $a \mid \binom{a}{b}$ . Udowodnić, że istnieje taka stała  $C > 0$ , że dla  $n \geq 2$  moc zbioru *n-bytomskiego* wynosi nie więcej niż  $\frac{Cn}{\ln n}$ .

7. Dana jest liczba pierwsza  $p = 24k + 11$ . Wykazać, że istnieje takie  $r$  całkowite, że dla żadnego  $x$  liczba  $x^3 - 2x - r$  nie dzieli się przez  $p$ .

8. Wyznaczyć najmniejszą liczbę dodatnią  $C$ , dla której nierówność

$$\text{NWD}(n, \lfloor n\sqrt{2} \rfloor) < C\sqrt{n}$$

jest spełniona dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$ .

9. Okrąg wpisany w trójkąt ostrokątny  $ABC$  jest styczny do boków  $BC, CA$  i  $AB$  odpowiednio w punktach  $D, E$  i  $F$ . Okręgi dopisane do tego trójkąta są styczne do boków  $BC, CA$  i  $AB$  odpowiednio w punktach  $K, L$  i  $M$ . Dowieść, że z odcinków  $DM, EK$  i  $FL$  można zbudować trójkąt.

10. Przekątne  $AC$  i  $BD$  czworokąta wypukłego  $ABCD$  wpisanego w okrąg  $o$  przecinają się w punkcie  $P$ . Okrąg  $o_1$  jest styczny do odcinków  $AP$  i  $DP$  oraz styczny wewnętrznie do okręgu  $o$ , zaś okrąg  $o_2$  jest styczny do odcinków  $BP$  i  $CP$  oraz styczny wewnętrznie do okręgu  $o$ . Wykazać, że wspólna styczna zewnętrzna okręgów  $o_1$  i  $o_2$  (bliżej prostej  $AB$ ) jest równoległa do prostej  $AB$ .

11. Dany jest sześciokąt wypukły  $ABCDEF$ . Odcinki  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $G$ , a półproste  $AB$  i  $DC$  przecinają się w punkcie  $H$ , przy czym w czworokąt  $BHCG$  można wpisać okrąg. Załóżmy, że istnieje okrąg o środku  $I$  styczny do półprostych  $AC, CD, ED, AE$  poza odcinkami odpowiednio  $AC,$

$CD$ ,  $ED$ ,  $AE$  oraz istnieje okrąg o środku  $J$  styczny do półprostych  $DB$ ,  $DF$ ,  $BA$ ,  $FA$  poza odcinkami odpowiednio  $DB$ ,  $DF$ ,  $BA$ ,  $FA$ . Wykazać, że proste  $BE$ ,  $CF$  oraz  $IJ$  mają punkt wspólny.

# Rozwiązania

## Zawody indywidualne

1. Dana jest liczba całkowita  $n \geq 1$ . Wykazać, że

$$\prod_{k=1}^n (k^4 + k^2 + 1)$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że

$$k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1) = (k^2 + k + 1)((k - 1)^2 + (k - 1) + 1) = f(k)f(k - 1).$$

Każda z liczb  $f(k)$  dla  $k = 2, 3, \dots, n-1$  występuje w danym iloczynie dwukrotnie, więc zadanie sprowadza się do sprawdzenia, czy liczba  $1 \cdot (n^2 + n + 1)$  jest kwadratem liczby naturalnej. Pozostaje zauważyć, że dla  $n \geq 1$  zachodzą równości

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2,$$

które dowodzą, że liczba  $n^2 + n + 1$  nie jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Dany jest wypukły wielokąt  $P$ . Dla trójkąta  $T$  o wierzchołkach będących wierzchołkami  $P$  efektem  $T$  nazwiemy zbiór 0, 1, 2 lub 3 wielokątów, jakie powstają po usunięciu  $T$  z  $P$ . Triangulacją  $P$  nazwiemy dowolny podział  $P$  na trójkąty za pomocą parami nieprzecinających się przekątnych. Triangulację  $\mathcal{T}$  nazwiemy *perfekcyjną*, gdy efekt każdego jej trójkąta zawiera dokładnie jeden wielokąt o nieparzystej liczbie wierzchołków. Udowodnić, że triangulacja  $\mathcal{T}$  wielokąta  $P$  jest perfekcyjna wtedy i tylko wtedy, gdy można usunąć część jej przekątnych tak, by wszystkie obszary, na które  $P$  jest podzielony przez pozostałe przekątne, były czworokątami.

*Rozwiązanie:*

Triangulacji  $\mathcal{T}$  można przyporządkować graf  $G$ , którego wierzchołkami są trójkąty  $\mathcal{T}$ , a krawędź łączy dwa trójkąty wtedy i tylko wtedy, gdy mają one wspólną krawędź. Odnajdujemy teraz następujące własności  $G$ :

- $G$  jest drzewem. Istotnie, w oczywisty sposób  $G$  jest spójny, ponadto cykl w  $G$  odpowiadał by krzywej zamkniętej łączącej środki okręgów wpisanych trójkątów z cyklu, która równocześnie byłaby zawarta w  $P$  i otaczałaby jego wierzchołek, co jest niemożliwe.
- $\mathcal{T}$  jest perfekcyjna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wierzchołka  $v \in G$  graf  $G \setminus \{v\}$  ma dokładnie jedną spójną składową o nieparzystej liczbie wierzchołków.
- Z  $\mathcal{T}$  można usunąć część jej przekątnych tak, by wszystkie obszary, na które  $P$  jest podzielony przez pozostałe przekątne, były czworokątami, wtedy i tylko wtedy, gdy w  $G$  istnieje skojarzenie. Implikacja w lewo jest oczywista, bo usuwając wspólny bok dwóch trójkątów dostaniemy czworokąt. Dla implikacji w prawo wystarczy zauważyć, że dzięki wypukłości usuwając przekątną będącą wspólnym bokiem  $k$ -kąta i  $l$ -kąta połączymy je w  $(k + l - 2)$ -ką, więc jedynym sposobem na uzyskanie czworokąta jest połączenie dwóch trójkątów i nie ruszanie powstałego w ten sposób czworokąta.

Musimy więc jedynie udowodnić, że w  $G$  istnieje skojarzenie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka  $v \in G$  graf  $G \setminus \{v\}$  ma dokładnie jedną nieparzystą spójną składową.

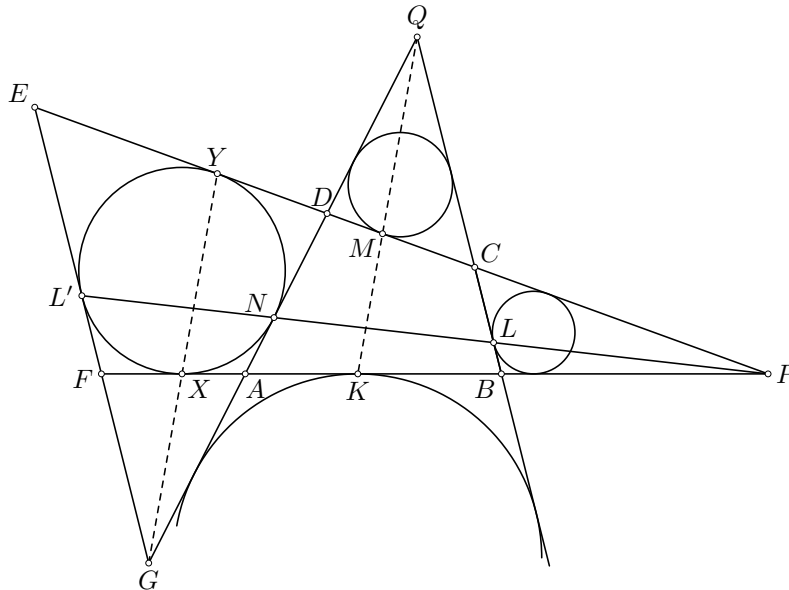
$\Rightarrow$  Weźmy wierzchołek  $v$  i krawędź  $vw$  należącą do skojarzenia. Wówczas spójna składowa  $G \setminus \{v\}$  zawierająca  $w$  składa się z  $w$  i iluś skojarzonych par, więc jest nieparzysta, a pozostałe spójne składowe są sumami skojarzonych par, więc są parzyste.

$\Leftarrow$  Skonstruujemy skojarzenie  $G$ . Weźmy liść  $u$  i połączony z nim wierzchołek  $v$ . Graf  $G \setminus \{v\}$  ma dokładnie jedną nieparzystą spójną składową i jest nią  $\{u\}$ , więc wszystkie spójne składowe  $G \setminus \{u, v\}$  są parzyste. Niech  $H$  będzie jedną z tych spójnych składowych i niech  $w \in H$ . Ponieważ  $G \setminus H$  jest połączony z jedną spójną składową  $H \setminus \{w\}$  i ma parzyście wiele wierzchołków, to parzystość spójnych składowych  $H \setminus \{w\}$  jest taka sama jak  $G \setminus \{w\}$ . Dzięki temu prostą indukcją możemy skonstruować skojarzenie każdej spójnej składowej  $G \setminus \{u, v\}$ , co razem z krawędzią  $uv$  daje skojarzenie  $G$ .

**3.** W czworokącie wypukłym  $ABCD$  półproste  $AB$  i  $DC$  przecinają się w punkcie  $P$ , zaś półproste  $AD$  i  $BC$  przecinają się w punkcie  $Q$ . Okręgi wpisane w trójkąty  $BCP$  i  $CDQ$  są styczne do boków  $BC$  i  $CD$  odpowiednio w punktach  $L$  i  $M$ . Okręgi dopisane do trójkątów  $ADP$  i  $ABQ$  są styczne do boków  $AD$  i  $AB$  odpowiednio w punktach  $N$  i  $K$ . Wykazać, że punkty  $N, L, P$  są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty  $K, M, Q$  są współliniowe.

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy przez  $o_2$  i  $o_3$  okręgi wpisane odpowiednio w trójkąty  $BCP$  i  $CDQ$ , zaś przez  $o_4$  i  $o_1$  — rozważane w treści okręgi dopisane odpowiednio do trójkątów  $ADP$  i  $ABQ$ . Załóżmy, że punkty  $N, L, P$  są współliniowe. Jednokładność o środku  $P$  przekształcającą okrąg  $o_2$  na okrąg  $o_4$  przeprowadza punkt  $L$  na pewien punkt  $L'$ , zaś prostą  $BC$ , na styczną do okręgu  $o_4$  w punkcie  $L'$ . Przyjmijmy, że ta styczna przecina proste  $CD, AB, AD$  odpowiednio w punktach  $E, F, G$ . Niech ponadto  $X$  i  $Y$  będą punktami styczności okręgu  $o_4$  odpowiednio z prostymi  $AB$  i  $CD$ . Wówczas punkty  $P, L, N, L'$  leżą na jednej prostej, która jest biegunową punktu  $G$  względem okręgu  $o_4$ . Z twierdzenia La Hire o wzajemności biegunowych otrzymujemy, że punkt  $G$  leży na biegunowej  $XY$  punktu  $P$  względem okręgu  $o_4$  (gdzie  $X \in AB$ , a  $Y \in CD$ ).



Jednokładność o środku  $D$  przekształcającą trójkąt  $DEG$  na trójkąt  $DCQ$  przeprowadza okrąg  $o_4$  wpisany w trójkąt  $DEG$  na okrąg  $o_3$  wpisany w trójkąt  $DCQ$ , zaś punkt  $Y$  na punkt  $M$ , skąd wniosek, że prosta  $GY$  jest równoległa do swojego obrazu  $QM$ . Jednokładność o środku  $A$  przekształcającą trójkąt  $AFG$  na trójkąt  $ABQ$  przeprowadza okrąg  $o_4$  dopisany do trójkąta  $AFG$  na okrąg  $o_1$  dopisany do trójkąta  $ABQ$ , zaś punkt  $X$  na punkt  $K$ , skąd wniosek, że prosta  $GX$  jest równoległa do swojego obrazu  $QK$ . Ponieważ punkty  $G, X, Y$  leżą na jednej prostej, to punkty  $Q, M, K$  także leżą na jednej prostej.

Dowód w drugą stronę jest analogiczny.

**4.** Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste  $x > 1$  o tej własności, że dla dowolnej liczby całkowitej

dotadniej  $n$  zachodzi równość

$$\left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor = n - \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor + \dots,$$

gdzie  $\lfloor a \rfloor$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $a$ .

*Rozwiązanie:*

Wpierw zauważmy, że skoro  $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor < n$  to wszystkie nieskończone sumy w zadaniu są w istocie skończone. Bez straty ogólności możemy rozważać  $n \geq 0$  zamiast  $n > 0$ . Zauważmy teraz, że własność z zadania, czyli

$$\left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor = n - \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor + \dots \quad (1)$$

jest równoważna własności

$$\left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor = n - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor + 1}{x} \right\rfloor \quad (2)$$

dla dowolnego  $n \geq 0$ . Istotnie, rozpisując  $\left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor$  oraz  $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor + 1}{x} \right\rfloor$  z tożsamości 1 dla  $n$  i  $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$  dostajemy, że 2 musi zachodzić. Aby uzyskać wynikanie 1 z 2 przeprowadzamy dowód indukcyjny ze względu na  $n$ . Załóżmy, że 2 zachodzi dla dowolnego  $n \geq 0$ . Chcemy wykazać, że 1 zachodzi dla  $n \geq 0$ . Dla  $n = 0$  jest to oczywiście spełnione. Rozważmy teraz  $n > 0$  i załóżmy na mocy indukcji, że 1 zachodzi dla wszystkich  $0 \leq m < n$ . Ponieważ  $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor < n$ , to korzystając z 2 mamy

$$\left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor = n - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor + 1}{x} \right\rfloor = n - \left( \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor + \dots \right)$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego i tym samym równoważności 1 i 2.

Wykażemy teraz, że 2 może zachodzić tylko dla  $x = \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Z nierówności  $|a - \lfloor a \rfloor| < 1$  wynika, że dla dowolnego  $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \left| \left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor - \frac{n+1}{x} \right| &\leq 1 \\ \left| \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor + 1}{x} \right\rfloor - \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor + 1}{x} \right| &\leq 1 \\ \left| \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor + 1}{x} - \frac{n+1}{x} \right| &\leq \frac{1}{x} \leq 1 \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta dostajemy zatem, że

$$\left| \left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor + 1}{x} \right\rfloor - \frac{n+1}{x} - \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor + 1}{x} \right| \leq 3.$$

Stąd na mocy 2 dostajemy dla dowolnych  $n \geq 0$ , że

$$\left| n - \frac{n+1}{x} - \frac{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor + 1}{x} \right| \leq 3.$$

Jeśli wartość bezwzględna funkcji liniowej jest ograniczona dla dowolnie dużych  $n \geq 0$ , to oznacza to, że ta funkcja jest stała. Stąd musi być

$$1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Uzyskane równanie kwadratowe ma tylko jeden pierwiastek większy od 1, więc musi być  $x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Wykażemy teraz, że  $x = \varphi$  spełnia warunek 2 dla dowolnego  $n \geq 0$ . Ustalmy  $n$  i oznaczmy  $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{\varphi} - \left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + 1}{\varphi} &= \frac{n}{\varphi^2} + \frac{1-\varepsilon}{\varphi} = n \left( 1 - \frac{1}{\varphi} \right) + \frac{1-\varepsilon}{\varphi} = n - \left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + \frac{1-\varepsilon-\varepsilon\varphi}{\varphi} \\ \frac{n+1}{\varphi} &= \left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + \frac{1+\varepsilon\varphi}{\varphi} \end{aligned}$$

Stąd

$$\left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + 1}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+\varepsilon\varphi}{\varphi} \right\rfloor + n - \left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1-\varepsilon-\varepsilon\varphi}{\varphi} \right\rfloor$$

Ponieważ  $\varepsilon \in [0, 1)$  to możemy napisać

$$\left\lfloor \frac{1+\varepsilon\varphi}{\varphi} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & 0 \leq \varepsilon < 1 - \frac{1}{\varphi} \\ 1 & 1 - \frac{1}{\varphi} \leq \varepsilon < 1 \end{cases}$$

$$\left\lfloor \frac{1-\varepsilon-\varepsilon\varphi}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\varphi} - \varepsilon \right\rfloor = \begin{cases} 0 & 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\varphi^2} \\ -1 & \frac{1}{\varphi^2} < \varepsilon < 1 \end{cases}$$

Zauważmy, że  $\frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi}$  oraz nie jest możliwe, by  $\varepsilon = 1 - \frac{1}{\varphi}$  (ponieważ  $\varepsilon = \frac{n}{\varphi} - \left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor = 1 - \frac{1}{\varphi}$  wymusza  $\varphi \left( \left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + 1 \right) = n + 1$ , co wobec niewymierności  $\varphi$  wymuszałoby  $n + 1 = 0$ ). Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{1+\varepsilon\varphi}{\varphi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1-\varepsilon-\varepsilon\varphi}{\varphi} \right\rfloor &= 0 \\ \left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + 1}{\varphi} \right\rfloor &= n \end{aligned}$$

Zatem  $x = \varphi$  spełnia własność 2.

*Odpowiedź:* Jedynie  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  spełnia warunki zadania.

**5.** Czworokąt wypukły  $ABCD$  jest wpisany w pewien okrąg i opisany na okręgu o środku  $I$ . Prosta przechodząca przez punkt  $I$  i równoległa do  $AB$  przecina boki  $BC$  i  $AD$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Wykazać, że długość odcinka  $KL$  jest równa  $\frac{1}{4}$  obwodu czworokąta  $ABCD$ .

*Rozwiązanie:*

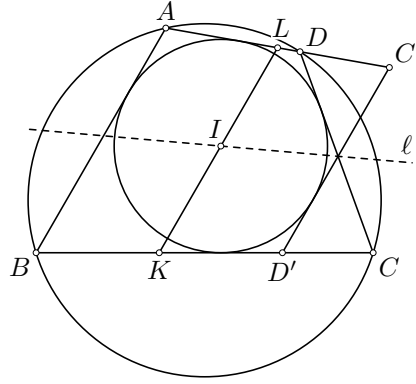
Niech  $\ell$  będzie dwusieczną kąta wyznaczonego przez proste  $AD$  i  $BC$  w przypadku, gdy te proste się przecinają, zaś jeśli te proste są równoległe, to przez  $\ell$  oznaczmy prostą do nich równoległą i jednakowo od nich odległą. Symetria względem prostej  $\ell$  przeprowadza punkty  $C$  i  $D$  odpowiednio na punkty  $C' \in AD$  i  $D' \in BC$ , zaś okrąg wpisany w czworokąt  $ABCD$  na siebie. Odcinek  $C'D'$  jest więc styczny do tego okręgu, zaś z równości

$$\sphericalangle AC'D' = \sphericalangle BCD = 180^\circ - \sphericalangle BAD = 180^\circ - \sphericalangle BAC'$$

wynika, że proste  $AB$  i  $C'D'$  są równoległe. Ponadto zachodzą równości  $CD = C'D'$  oraz  $CD' = C'D$ . Czworokąt  $ABD'C'$  jest więc trapezem opisanym na okręgu o środku  $I$  o takim samym obwodzie, co czworokąt  $ABCD$ . Z twierdzenia o linii środkowej w trapezie oraz równości  $AB + C'D' = BD' + AC'$  dostajemy

$$KL = \frac{1}{2}(AB + C'D') = \frac{1}{4}(AB + BD' + C'D' + AC') = \frac{1}{4}(AB + BC + CD + DA),$$

co kończy rozwiązanie.



6. Dane są niezerowe liczby rzeczywiste  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq -1$  spełniające  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ . Udowodnić, że

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

*Rozwiązanie:*

Przekształcając równoważnie mamy:

$$\sum \frac{1}{a_i^2} - \frac{1}{a_i} = \sum \frac{1}{a_i^2} - \frac{1}{a_i} + a_i - 1 = \sum \frac{1 - a_i + a_i^3 - a_i^2}{a_i^2} = \sum \frac{(a_i^2 - 1)(a_i - 1)}{a_i^2} \geq 0,$$

gdzie pierwsza równość wynika z warunku  $\sum a_i = n$ , a ostatnia nierówność z faktu, że dla  $x \geq -1$  liczby  $(x^2 - 1)$  oraz  $(x - 1)$  mają ten sam znak.

7. Dany jest graf dwudzielny o  $m$  krawędziach. Udowodnić, że można wybrać co najmniej  $\frac{3}{4}m^{\frac{2}{3}}$  krawędzi w taki sposób, by żadne cztery spośród nich nie tworzyły cyklu.

*Rozwiązanie:*

Rozważmy następujący eksperyment losowy: usuwamy losowo krawędzie, każdą krawędź zachowujemy z prawdopodobieństwem  $p$ . Następnie, w powstałym grafie, dla każdego cyklu na czterech krawędziach, usuwamy dowolną z nich. Oszacujemy wartość oczekiwaną pozostałych krawędzi  $X$ . Niech  $C$  będzie zmienną losową oznaczającą liczbę cykli  $C_4$  pozostałych po pierwszym kroku. Mamy:

$$E[X] \geq pm - E[C] \geq pm - \frac{1}{2} \binom{m}{2} p^4,$$

gdzie ostatnie szacowanie wynika z tego, że w początkowym grafie jest maksymalnie  $\frac{1}{2} \binom{m}{2}$  cykli na czterech wierzchołkach (każdy cykl wyznacza dwie pary krawędzi o rozłącznych końcach, a tych jest co najwyżej  $\binom{m}{2}$ ). Każdy cykl "przeżywa" pierwszą fazę z prawdopodobieństwem równym  $p^4$ . Wybierając  $p = m^{-\frac{1}{3}} < 1$  i korzystając z  $\binom{m}{2} \leq \frac{m^2}{2}$  mamy:

$$pm - \frac{1}{2} \binom{m}{2} p^4 \geq m^{\frac{2}{3}} - \frac{m^2}{4} m^{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} m^{\frac{2}{3}},$$

czyli istnieje wybór krawędzi o takiej liczności spełniający warunki zadania.

8. Wielomian  $W(x)$  o współczynnikach wymiernych nazwiemy *leksmarkowym* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby całkowitej  $a$  istnieje takie całkowite dodatnie  $n$ , że  $W^n(a) \in \mathbb{Z}$ , gdzie  $W^n$  oznacza  $n$ -krotne złożenie  $W$ , czyli

$$W^n(a) = \underbrace{W(W(\dots W(W(a)) \dots))}_n.$$

Orzec, czy dla dowolnego wielomianu leksmarkowego  $W(x)$  istnieje liczba całkowita dodatnia  $N$  taka, że dla dowolnego  $a \in \mathbb{Z}$  istnieje  $0 < n < N$  takie, że  $W^n(a) \in \mathbb{Z}$ .

*Rozwiązanie:*

Rozważmy wielomian  $P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x(x^3+5)}{2}$ . Zauważmy, że ma on następujące własności:

1.  $P(x) \neq 0$  dla  $x \in \mathbb{Z} - \{0\}$ : jest to prosty wniosek z tego, że  $\sqrt[3]{-5} \notin \mathbb{Q}$ .
2. Jeśli  $x$  jest liczbą nieparzystą to  $P(x) \in \mathbb{Z}$ .
3. Jeśli  $x$  jest niezerową liczbą parzystą to  $v_2(P(x)) = v_2(x) - 1$ , gdzie  $v_2(y)$  oznacza wykładnik dwójki w rozkładzie  $y$  na czynniki pierwsze.
4. Dla dowolnego  $m > 0$  istnieje liczba nieparzysta  $b$  taka, że  $v_2(P(b)) \geq m$ . Taką liczbą jest  $b = (-5)^{(2^{2m+1}+1)/3}$ . Na mocy twierdzenia Eulera mamy bowiem

$$b^3 + 5 \equiv (-5)^{2^{2m+1}+1} + 5 \equiv (-5)^1 + 5 \equiv 0 \pmod{2^{2m+2}}.$$

$$\text{Stąd } v_2(P(b)) \geq v_2\left(\frac{b^3+5}{2}\right) \geq 2m+1 \geq m.$$

Zdefiniujmy teraz wielomian  $W(x)$  jako  $W(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(2x+1)-1}{2}$ . Łatwo wykazać indukcyjnie, że dla dowolnego  $n \geq 1$  zachodzi  $W^n(x) = \frac{P^n(2x+1)-1}{2}$ . Stąd  $W^n(x) \in \mathbb{Z}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $P^n(2x+1)$  jest liczbą nieparzystą.

Wykażemy, że  $W(x)$  jest wielomianem leksmarkowym. Załóżmy nie wprost, że istnieje taka liczba całkowita  $a$ , że  $W^n(a) \notin \mathbb{Z}$  dla dowolnego  $n > 0$ , czyli równoważnie  $P^n(2a+1)$  jest liczbą parzystą dla dowolnego  $n > 0$ . Wobec własności (3) oznacza to, że dla dowolnego  $n > 0$  mamy  $0 < v_2(P^{n+1}(2a+1)) = v_2(P^n(2a+1)) - 1$ , czyli  $v_2(P^n(2a+1))$  to nieskończony malejący ciąg liczb dodatnich. Sprzeczność.

Teraz udowodnimy, że nie istnieje takie  $N > 0$ , że dla dowolnego  $a \in \mathbb{Z}$  istnieje  $0 < n < N$  takie, że  $W^n(a) \in \mathbb{Z}$ . Załóżmy nie wprost, że takie  $N$  istnieje. Na podstawie własności (4) znajdziemy takie  $b \in \mathbb{Z}$ , że  $v_2(P(2b+1)) > N$ . Używając własności (3) łatwo wykazać indukcyjnie, że dla  $0 < n < N$  zachodzi szacowanie  $v_2(P^n(2b+1)) > N - n + 1$ . Skoro zaś  $2 \mid P^n(2b+1)$  dla  $0 < n < N$ , to  $W^n(b) \notin \mathbb{Z}$  dla  $0 < n < N$ . Sprzeczność kończy dowód.

*Odpowiedź:* Istnieje taki wielomian leksmarkowy  $W(x)$  dla którego nie istnieje liczba  $N$  opisana w zadaniu.

**9.** Dana jest dodatnia liczba całkowita  $n$ . Liczby  $0, 1, \dots, 2n$  są w tej kolejności napisane na okręgu i niektóre z nich zostały oznaczone. Dla  $0 \leq k \leq 2n$  niech  $I_k = \{k, k+1, \dots, k+n\}$ , gdzie liczby bierzemy modulo  $2n+1$ . Zbiór  $I_k$  nazwiemy *wesołym*, gdy zawiera ściśle więcej niż połowę oznaczonych liczb. Udowodnić, że następujące stwierdzenia są równoważne:

- a) Co najmniej  $n+1$  zbiorów spośród  $I_0, I_1, \dots, I_{2n}$  jest wesołych.
- b) Liczba oznaczonych liczb jest nieparzysta.

*Rozwiązanie:*

Niech  $i_j \in \{0, \dots, 2n\}$  będzie takie, że  $i_j \equiv 1 + n(j-1) \pmod{2n+1}$ . Ponieważ liczby  $n$  oraz  $2n+1$  są względnie pierwsze, to liczby  $i_1, \dots, i_{2n+1}$  są permutacją zbioru  $\{0, \dots, 2n\}$ . Jeśli co najmniej  $n+1$  spośród naszych zbiorów jest wesołych, to istnieje takie  $j$ , że zbiory  $I_{i_j}$  oraz  $I_{i_{j+1}}$  są oba wesołe (oczywiście  $j+1$  bierzemy modulo  $2n+1$ ). Zauważmy, że  $I_{i_j} \cup I_{i_{j+1}} = \{0, \dots, 2n\}$  oraz  $|I_{i_j} \cap I_{i_{j+1}}| = 1$ . Teraz gdyby liczba oznaczonych liczb była równa  $2m$  dla pewnego  $m$  całkowitego nieujemnego, to oba zbiory  $I_{i_j}, I_{i_{j+1}}$  miałyby po co najmniej  $m+1$  oznaczonych liczb, uwzględniając maksymalnie jedno powtórzenie ich suma miałyby co najmniej  $2m+1$  oznaczonych liczb, sprzeczność.

Podobnie jeśli co najwyżej  $n$  spośród naszych zbiorów jest wesołych, to istnieje takie  $j$ , że zbiory  $I_{i_j}$  oraz  $I_{i_{j+1}}$  są oba niewesołe. Gdyby liczba oznaczonych liczb była równa  $2m+1$  dla pewnego  $m$  całkowitego nieujemnego, to oba zbiory  $I_{i_j}, I_{i_{j+1}}$  miałyby po co najwyżej  $m$  oznaczonych liczb i ich suma miałaby co najwyżej  $2m$  oznaczonych liczb, znowu sprzeczność.

**10.** Znaleźć największą liczbę całkowitą dodatnią  $k$  taką, że istnieje liczba całkowita  $n > 1$ , dla której każda z liczb  $n, n^2, \dots, n^k$  daje się przedstawić w postaci  $x^2 + y^2 + 1$  dla pewnych liczb całkowitych  $x, y$ .

*Rozwiązanie:*

*Lemat:* Każdą niezerową liczbę całkowitą postaci  $a^2 + b^2$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{Z}$  da się przedstawić w postaci  $4^t(8u + v)$ , gdzie  $t, u \geq 0$  oraz  $v = 1, 2$  lub  $5$ .

*Dowód:* Niech  $a = 2^s c$ ,  $b = 2^r d$ , gdzie  $c, d$  są nieparzyste. Bez straty ogólności przyjmijmy  $s < r$ . Wówczas  $a^2 + b^2 = 4^s(c^2 + 4^{r-s}d^2)$ . Wystarczy pokazać, że reszta z dzielenia  $c^2 + 4^{r-s}d^2$  przez 8 jest równa 1, 2 lub 5. Jako, że  $c, d$  są nieparzyste to  $c^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{8}$ . To z kolei pociąga za sobą, że możliwe reszty z dzielenia przez 8 liczby  $4^{r-s}d^2$  to 0, 1 lub 4. Po dodaniu  $c^2$  dostaniemy tezę.

Pokażemy, że  $k < 6$ . Aby to udowodnić wystarczy pokazać, że dla  $n > 1$  układ równań

$$\begin{cases} n^2 - 1 = x^2 + y^2, \\ n^6 - 1 = z^2 + t^2 \end{cases}$$

nie ma rozwiązań całkowitych.

Przypuśćmy nie wprost, że układ ma rozwiązania. Z pierwszego równania układu mamy, że  $n$  jest nieparzyste (ponieważ  $x^2 + y^2 \not\equiv 3 \pmod{4}$ , a  $n^2 - 1 \equiv 3 \pmod{4}$  gdy  $n$  jest parzyste). Zatem:

$$(x^2 + y^2)(n^4 + n^2 + 1) = z^2 + t^2.$$

Drugi czynnik lewej strony daje resztę 3 przy dzieleniu przez 8. Z pomocą lematu mamy:

$$(8u_1 + v_1)(8u_2 + 3) = 8u_3 + v_2,$$

gdzie każde z  $v_1, v_2$  należy do zbioru  $\{1, 2, 5\}$ . Nietrudno zauważyć, że taka równość jest niemożliwa (bo iloczyn nie może mieć reszty 1, 2 ani 5 modulo 8).

Na zakończenie wystarczy zauważyć, że:

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1, \quad 3^2 = 2^2 + 2^2 + 1, \quad 3^3 = 5^2 + 1^2 + 1, \quad 3^4 = 8^2 + 4^2 + 1, \quad 3^5 = 11^2 + 1^2 + 1.$$

Czyli największe takie  $k$  to 5.

**11.** Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  spełniających warunek  $a+b+c = 1$  zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{25}{1 + 48abc}.$$

*Rozwiązanie:*

Założmy bez straty dla ogólności  $a \leq b \leq c$ . Niech  $a < b$  i rozważmy wielomian  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ . Wymnażając nawiasy i biorąc pod uwagę, że  $a+b+c = 1$  otrzymujemy  $P(x) = x^3 - x^2 + px - q$ , gdzie  $p = ab + bc + ca$  i  $q = abc$ . Nierówność z treści zadania można zapisać w postaci

$$p \geq \frac{25q}{1 + 48q} = \frac{25}{\frac{1}{q} + 48}.$$

Ustalmy  $p$  i zauważmy, że wyrażenie po prawej stronie jest funkcją rosnącą ze względu na  $q$  dla  $q > 0$ . Zauważmy ponadto, że wielomian  $P(x)$  w przedziale  $(a, b)$  przyjmuje wartość największą w pewnym

punkcie  $t$  (jest to mniejszy z pierwiastków wielomianu  $P'(x)$ ). Jeśli teraz rozważymy wielomian  $Q(x) = P(x) - P(t) = x^3 - x^2 + px - (q + P(t))$ , to widzimy, że ma on pierwiastek podwójny w punkcie  $t$  i trzeci pierwiastek w pewnym punkcie  $r > c$ . Inaczej mówiąc  $Q(x) = (x - t)(x - t)(x - r)$ . Dla trójki liczb  $t, t, r$  zachodzą więc zależności:  $t + t + r = 1 = a + b + c$ ,  $t \cdot t + t \cdot r + r \cdot t = p = ab + bc + ca$  oraz  $t \cdot t \cdot r = q + P(t) > q = abc$ . Jeśli zatem nierówność z treści zadania jest prawdziwa dla trójki  $t, t, r$ , to jest to również prawdą dla trójki  $a, b, c$ .

Wystarczy zatem rozwiązać zadanie w przypadku, gdy  $a = b \leq c$ . Wówczas  $c = 1 - 2a$ . Po sprawdzeniu lewej strony do wspólnego mianownika, pomnożeniu obu stron przez iloczyn obu mianowników i przeniesieniu wszystkich wyrażeni na lewą stronę dostajemy do udowodnienia, że

$$(1 + 48a^2(1 - 2a))(a^2 + 2(1 - 2a)a) - 25a^2(1 - 2a) \geq 0.$$

Ponieważ dla  $a = \frac{1}{3}$  zachodzi równość, więc ta liczba powinna być pierwiastkiem podwójnym wielomianu znajdującego się po lewej stronie nierówności, skąd uzyskujemy rozkład

$$(3a - 1)^2(16a^3 - 16a^2 + a) \geq 0$$

albo

$$(3a - 1)^2(4a - 1)^2a \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co kończy dowód.

**12.** Punkt  $P$  leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego  $ABC$ , przy czym

$$AC + AP = BC + BP.$$

Prosta  $AP$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $X$ , a prosta  $BP$  przecina bok  $AC$  w punkcie  $Y$ . Wykazać, że jeśli okręgi wpisane w trójkąty  $CPX$  i  $CPY$  nie są przystające, to ich wspólne styczne zewnętrzne przecinają się na prostej  $AB$ .

*Rozwiązanie:*

Niech  $\omega_1$  i  $\omega_2$  będą okręgami wpisanymi odpowiednio w trójkąty  $CPY$  i  $CPX$ . Niech ponadto  $\omega_1$  będzie okręgiem dopisanym do trójkąta  $APC$  stycznym do boku  $AP$ , a  $\omega_2$  będzie okręgiem dopisanym do trójkąta  $BPC$  stycznym do boku  $BP$ . Z równości  $AC + AP = BC + BP$  wynika, że istnieje okrąg  $\omega$  dopisany do czworokąta  $CYPX$ , czyli okrąg styczny do odcinków  $AP$  i  $BP$ , styczny do półprostej  $CA^\rightarrow$  w punkcie leżącym poza odcinkiem  $CA$  i styczny do półprostej  $CB^\rightarrow$  w punkcie leżącym poza odcinkiem  $CB$ . Dalsze rozumowanie prowadzimy dwoma sposobami.

*Sposób I.*

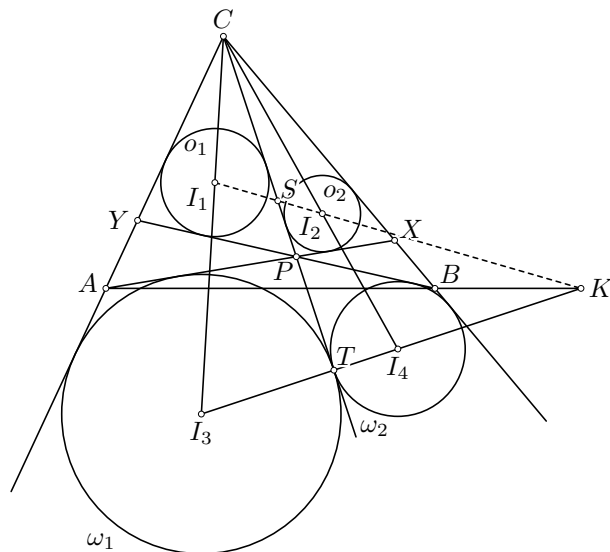
Niech  $K$  będzie środkiem jednokładności  $j_1$  o skali dodatniej przekształcającej okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega_2$ ,  $L$  — środkiem jednokładności o skali dodatniej przekształcającej okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega_2$ , zaś  $M$  — środkiem jednokładności o skali ujemnej przekształcającej okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega_1$ .

Zauważmy, że jednokładność  $j_1$  jest złożeniem jednokładności o środku  $A$  i skali dodatniej przekształcającej okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega$  z jednokładnością o środku  $B$  i skali dodatniej przekształcającą okrąg  $\omega$  na okrąg  $\omega_2$ . Z twierdzenia o złożeniu jednokładności wynika, że punkt  $K$  leży na prostej  $AB$ . Z drugiej strony jednokładność  $j_1$  jest złożeniem jednokładności o środku  $L$  i skali dodatniej przekształcającej okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega_2$  z jednokładnością o środku  $C$  i skali dodatniej przekształcającą okrąg  $\omega_2$  na okrąg  $\omega_2$ . Z twierdzenia o złożeniu jednokładności wynika, że punkty  $C, K, L$  leżą na jednej prostej. Wreszcie zauważmy, że jednokładność  $j_1$  jest złożeniem jednokładności o środku  $M$  i skali ujemnej przekształcającej okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega_1$  z jednokładnością o środku  $P$  i skali ujemnej przekształcającą okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega_2$ . Z twierdzenia o złożeniu jednokładności wnioskujemy, że punkt  $K$  leży na prostej  $MP$ .

Wykażemy teraz, że punkt  $K$  jest środkiem jednokładności  $j_2$  o skali dodatniej przekształcającej okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega_2$ , co będzie oznaczało, że wspólne styczne zewnętrzne okręgów  $\omega_1$  i  $\omega_2$  przecinają się

Skorzystamy z następującego lematu (jego uzasadnienie można znaleźć w *Dwustosunek i biegunowe* Dominika Burka, lemat 2.27):

Niech  $I_1$  i  $I_2$  będą odpowiednio środkami okręgów  $o_1$  i  $o_2$ , zaś  $J_1$  i  $J_2$  będą odpowiednio środkami okręgów  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Tak, jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że środek  $K$  jednokładności o skali dodatniej przekształcającej okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega_2$  leży na prostej  $AB$ . Zauważmy ponadto, że długość odcinka stycznego z punktu  $C$  do okręgu  $\omega_1$  jest równa połowie obwodu trójkąta  $ACP$ , zaś długość odcinka stycznego z punktu  $C$  do okręgu  $\omega_2$  jest równa połowie obwodu trójkąta  $BCP$ . Odcinek  $CP$  dla obu trójkątów jest wspólny, więc z założenia  $AC + AP = BC + BP$  danego w treści zadania wynika, że odcinki styczne z punktu  $C$  do okręgów  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są równe, a zatem okręgi te są styczne do prostej  $CP$  w tym samym punkcie  $T$ . Punkt  $T$  jest oczywiście środkiem jednokładności o skali ujemnej przekształcającej okrąg  $\omega_1$  na okrąg  $\omega_2$ . Jeśli teraz oznaczymy przez  $r_1$  i  $r_2$  promienie okręgów  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , to  $\frac{J_1T}{J_2T} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{J_1K}{J_2K}$ , skąd wynika, że  $(J_1, J_2; T, K) = 1$ . Niech  $S$  będzie punktem przecięcia prostej  $I_1I_2$  z prostą  $CP$ . Proste  $I_1J_1$  i  $I_2J_2$  przecinają się w punkcie  $C$ , a proste  $I_1J_2$  i  $I_2J_1$  przecinają się w punkcie  $P$  leżącym na prostej  $CT$ . Stąd i z tego, że  $(J_1, J_2; T, K) = 1$  wynika, że punkt  $K$  leży na prostej  $I_1I_2$  (na mocy przytoczonego lematu). Stosując jeszcze raz ten lemat widzimy, że  $(I_1, I_2; S, K) = 1$ . Niech teraz  $R_1$  i  $R_2$  będą odpowiednio promieniami okręgów  $o_1$  i  $o_2$ . Skoro  $S$  jest środkiem jednokładności o skali ujemnej przekształcającej okrąg  $o_1$  na  $o_2$ , to  $\frac{I_1S}{I_2S} = \frac{R_1}{R_2}$ . Stąd i z tego, że punkty  $I_1, I_2, S, K$  tworzą czwórkę harmoniczną widzimy, że  $\frac{I_1K}{I_2K} = \frac{R_1}{R_2}$ , skąd wniosek, że punkt  $K$  jest środkiem jednokładności o skali dodatniej przekształcającej okrąg  $o_1$  na  $o_2$  — innymi słowy punkt  $K$  jest szukanym punktem przecięcia wspólnych stycznych zewnętrznych obu okręgów.



13. Wyznaczyć wszystkie ściśle rosnące funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające równość

$$f(1 - x) = 1 - f(f(x))$$

dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

*Rozwiązanie:*

Podstawiając w danym równaniu  $1 - f(x)$  w miejsce  $x$  dostajemy

$$f(f(x)) = 1 - f(f(1 - f(x))).$$

Stąd

$$1 - f(f(1 - f(x))) = f(f(x)) = 1 - f(1 - x),$$

co prowadzi do wniosku, że

$$f(f(1 - f(x))) = f(1 - x).$$

Skoro funkcja  $f$  jest ściśle rosnąca, to w szczególności jest różnowartościowa. To oznacza, że

$$f(1 - f(x)) = 1 - x.$$

Podstawiając teraz w danym równaniu  $f(x)$  w miejsce  $x$  otrzymujemy

$$f(1 - f(x)) = 1 - f(f(f(x))),$$

a stąd dostajemy

$$f(f(f(x))) = x$$

dla każdego  $x$ .

Gdyby dla pewnego  $x \in \mathbb{R}$  zachodziło  $f(x) > x$ , to wykorzystując to, że  $f$  jest funkcją ściśle rosnącą mielibyśmy

$$f(f(x)) > f(x) > x \quad \text{oraz} \quad f(f(f(x))) > f(f(x)) > f(x) > x,$$

co jest niemożliwe. Analogicznie wykluczamy przypadek  $f(x) < x$ . To zaś prowadzi do jedynej rozwiązania  $f(x) = x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Bezpośrednio sprawdzamy, że spełnia ono dane równanie.

14. Punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym  $ABC$ , zaś  $H$  jego ortocentrum. Na półprostej  $HC$  leży taki punkt  $D$ , że  $HD = AO$ . Symetralna odcinka  $OD$  przecina boki  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Punkt  $E$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $CKL$ . Wykazać, że punkty  $K$ ,  $O$ ,  $L$ ,  $E$  leżą na jednym okręgu.

*Rozwiązanie:*

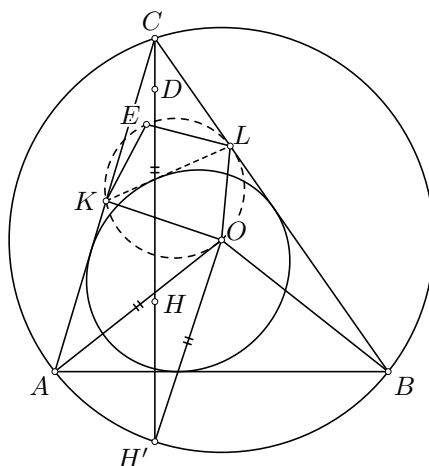
W rozwiązaniu zadania wykorzystamy następujący znany fakt (którego dowód można znaleźć np. w Delcie 10/2010 w artykule *O robaku i elipsach*):

Dana jest elipsa o ogniskach  $F$  i  $G$  oraz osi wielkiej  $a$ . Wówczas zbiorem obrazów symetrycznych punktu  $F$  względem wszystkich stycznych do tej elipsy jest okrąg o środku  $G$  i promieniu  $a$ .

Ponieważ punkty  $O$  i  $H$  są izogonalnie sprzężone w trójkącie  $ABC$ , więc istnieje elipsa o ogniskach  $O$  i  $H$  wpisana w trójkąt  $ABC$ . Obraz symetryczny  $H'$  punktu  $H$  względem prostej  $AB$  leży na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ , więc na mocy przytoczonego lematu oś wielka rozważanej elipsy jest równa  $OH'$ , czyli  $AO$ . Ponieważ  $HD = AO$ , to punkt  $D$  jest obrazem symetrycznym punktu  $O$  względem pewnej stycznej do tej elipsy, a dokładniej symetralnej odcinka  $OD$ , czyli prostej  $KL$ . Innymi słowy dana elipsa jest wpisana w czworokąt  $ABLK$ . W takim razie

$$180^\circ - \sphericalangle KOL = \sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle KCL = \sphericalangle KEL,$$

co kończy dowód.



**15.** Dane są liczby całkowite dodatnie  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  spełniające  $a_j - a_i \mid a_i$  dla dowolnych  $1 \leq i < j \leq n$ . Udowodnić, że zachodzi

$$ia_j \leq ja_i \text{ dla dowolnych } 1 \leq i < j \leq n.$$

*Rozwiązanie:*

Ustalmy  $s \in \{2, \dots, n\}$ . Dla każdego  $1 \leq i < s$  zdefiniujmy

$$k_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_i}{a_s - a_i} = \frac{a_s}{a_s - a_i} - 1.$$

Z założeń wynika, że wszystkie  $k_i$  są liczbami całkowitymi dodatnimi. Skoro

$$a_s - a_1 > a_s - a_2 > \dots > a_s - a_{s-1}$$

to

$$\frac{a_s}{a_s - a_1} < \frac{a_s}{a_s - a_2} < \dots < \frac{a_s}{a_s - a_{s-1}}.$$

Zatem  $k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1}$ . Oznacza to, że  $k_{s-1} \geq s - 1$ . Otrzymujemy, że

$$\frac{a_{s-1}}{a_s - a_{s-1}} \geq s - 1,$$

co jest równoważne nierówności

$$\frac{a_s}{a_{s-1}} \leq \frac{s}{s-1}.$$

Aby zakończyć rozwiązanie zadania pozostaje zauważyć, że

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{a_j}{a_{j-1}} \cdot \frac{a_{j-1}}{a_{j-2}} \dots \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \frac{j}{j-1} \cdot \frac{j-1}{j-2} \dots \frac{i+1}{i} = \frac{j}{i},$$

co jest równoważne tezie.

**16.** Na okręgu zaznaczono  $2^{500}$  punktów i przypisano im liczby całkowite  $1, 2, \dots, 2^{500}$ , każdą dokładnie raz. *Wartością* cięciwy o końcach w dwóch zaznaczonych punktach nazywamy sumę liczb przypisanych tym punktom. Udowodnić, że istnieje zbiór 100 parami nieprzecinających się cięciw o tej samej wartości.

*Rozwiązanie:*

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego lematu:

**Lemat.** Dany jest graf  $G$ , w którym wierzchołki mają stopnie  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Wtedy istnieje w grafie zbiór  $\alpha$  wierzchołków, które są parami niepołączone krawędzią, gdzie  $\alpha$  spełnia

$$\alpha \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i + 1}.$$

*Dowód.* Wybierzmy losową permutację wierzchołków  $v_1, v_2, \dots, v_n$  i ustawmy je od lewej do prawej. Zdefiniujemy  $S$  jako zbiór wierzchołków, które wszystkich sąsiadów mają na prawo. Łatwo widać, że w zbiorze  $S$  nie ma dwóch sąsiadujących wierzchołków. Dodatkowo, wierzchołek o stopniu  $d_i$  ma prawdopodobieństwo trafienia do zbioru  $S$  równe  $\frac{1}{d_i+1}$ , ponieważ taką ma szansę na bycie pierwszym w losowej permutacji siebie i swoich sąsiadów.

Otrzymujemy, że wartość oczekiwana rozmiaru zbioru  $S$  wynosi

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i + 1},$$

co kończy dowód lematu. □

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Oznaczmy  $n = 500$  i  $2N = 2^n$ . Możliwe wartości cięciw wynoszą  $3, 4, \dots, 4N - 1$ . Dla każdej wartości  $i$  rozważmy graf  $G_i$  zbudowany z cięciw, których wartość wynosi  $i$ . Dwie cięciwy łączymy krawędzią wtedy i tylko wtedy gdy się przecinają.

Jeśli przez *długość* cięciwy oznaczmy liczbę wierzchołków na krótszym łuku tej cięciwy, to każda cięciwa ma długość od 2 do  $N + 1$ . Dodatkowo, dla każdego  $2 \leq l \leq N + 1$  istnieje dokładnie  $2N$  łuków o długości  $l$ . Ponieważ każda wartość punktu występuje na okręgu dokładnie raz, to łuk długości  $l$  przecina się z co najwyżej  $l - 2$  łukami o tej samej wartości.

Oznaczmy przez  $\alpha_i$  rozmiar największego zbioru cięciw o wartości  $i$ , które się parami nie przecinają. Z Lematu zastosowanego dla grafów  $G_i$  oraz powyższych obserwacji mamy następujący ciąg nierówności

$$\sum_{i=3}^{4N-1} \alpha_i \geq 2N \sum_{l=2}^{N+1} \frac{1}{(l-2)+1} = 2N \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = 2N \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{k} \geq 2N \frac{n+1}{2},$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z nierówności  $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$ , którą łatwo można udowodnić przez indukcję.

Mamy  $4N - 3 \leq 4N$  grafów, więc w pewnym z nich musi istnieć zbiór parami rozłącznych cięciw rozmiaru co najmniej

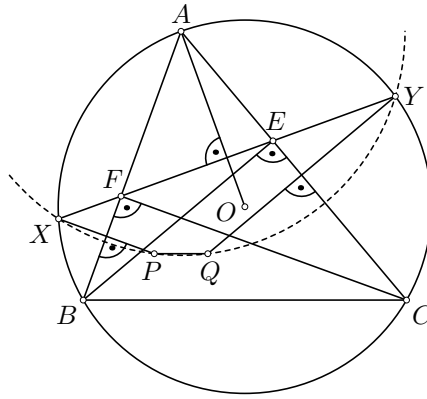
$$\frac{2N}{4N} \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{4} = \frac{501}{4} > 100,$$

co kończy dowód.

**17.** Niech  $BE$  i  $CF$  będą wysokościami trójkąta ostrokątnego  $ABC$ . Prosta  $EF$  przecina okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  w punktach  $X$  oraz  $Y$ , przy czym punkt  $X$  leży na łuku  $AB$  niezawierającym punktu  $C$ , a punkt  $Y$  na łuku  $AC$  niezawierającym punktu  $B$ . Punkty  $P$  oraz  $Q$  są obrazami punktów  $X$  i  $Y$  w symetrii względem prostych  $AB$  i  $AC$ , odpowiednio. Udowodnić, że  $PQ \parallel BC$ .

*Rozwiązanie:*

Niech  $O$  będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Jako, że punkty  $O$  i ortocentrum  $ABC$  są punktami izogonalnie sprzężonymi w trójkącie  $ABC$ , to prosta  $AO$  jest odbiciem symetrycznym wysokości z  $A$  względem dwusiecznej kąta  $BAC$ . Zachodzi również  $ABC \sim AEF$ . Stąd złożenie jednokładności o środku w  $A$  i skali  $\frac{AE}{AB}$  oraz symetrii względem dwusiecznej kąta  $BAC$  przekształca  $ABC$  na  $AEF$  i wysokość z  $A$  na prostą  $AO$ . Stąd  $AO \perp EF$ , czyli  $AO$  jest symetralną  $XY$ . Stąd  $AP = AX = AY = AQ$ , czyli punkty  $P, X, Y, Q$  leżą na okręgu. Punkty  $B, C, E, F$  również leżą na okręgu, gdyż  $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90^\circ$ . Oznacza to, że prosta  $PQ$  jest antyrównoległa do  $XY$  względem prostych  $XP$  i  $YQ$ , a prosta  $AB$  jest antyrównoległa do prostej  $EF = XY$  względem prostych  $CF$  i  $BE$ . Ale, jako, że  $XP \parallel CF$  i  $YQ \parallel BE$ , to  $AB \parallel PQ$ .



**18.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej  $n \geq 2$  istnieje taki  $n$ -elementowy zbiór  $S$  liczb całkowitych, że dla dowolnych, różnych od siebie  $a, b \in S$ , zachodzi podzielność  $(a - b)^2 \mid ab$ .

*Rozwiązanie:*

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. Widzimy że dla  $n = 1$ , zbiór  $S = \{1, 2\}$  spełnia warunki zadania. Załóżmy że dla zbioru  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  teza zachodzi. Niech  $d = \text{NWW}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Pokażemy że teza zachodzi dla zbioru  $S' = \{a_1 + d, a_2 + d, \dots, a_n + d, d\}$ . Najpierw widzimy że

$$((a_i + d) - (a_j + d))^2 = (a_i - a_j)^2 \mid a_i a_j$$

z założenia indukcyjnego. Widzimy też że  $a_i \mid a_i + d$  i  $a_j \mid a_j + d$  a więc

$$a_i a_j \mid (a_i + d)(a_j + d) \implies ((a_i + d) - (a_j + d))^2 \mid (a_i + d)(a_j + d)$$

Teraz dla  $a_i + d$  i  $d$  widzimy że

$$((a_i + d) - d)^2 = a_i^2 \mid a_i d$$

ponieważ  $a_i \mid d$  a więc

$$a_i d \mid (a_i + d)d \implies ((a_i + d) - d)^2 \mid (a_i + d)d$$

A więc zbiór  $S'$  spełnia założenia zadania.

**19.** Dane są skończone zbiory  $A_1, A_2, \dots, A_n$  takie, że dowolne przecięcie pewnej (dodatniej) ich liczby ma parzystą liczbę elementów, za wyjątkiem przecięcia ich wszystkich, które ma nieparzystą liczbę elementów. Znaleźć – w zależności od  $n$  – najmniejszą możliwą liczbę elementów sumy  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ .

*Rozwiązanie:*

Zdefiniujemy

$$B_I \stackrel{\text{def}}{=} \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \setminus \left( \bigcup_{i \notin I} A_i \right),$$

czyli  $B_I$  to zbiór tych elementów, które są we wszystkich zbiorach  $A_i$ , dla których  $i \in I$ , oraz w żadnych innych. Zauważmy najpierw, że wszystkie zbiory  $B_I$  są parami rozłączne. Aby to wykazać, rozważmy  $B_I$  oraz  $B_J$  dla  $I \neq J$ . Skoro zbiory  $I, J$  są różne to bez straty ogólności założmy, że istnieje  $k \in I$  takie, że  $k \notin J$ . Jeśli  $a \in B_I$  to w szczególności  $a \in A_k$ . Ale skoro  $k \notin J$  to  $a \notin B_J$ .

Udowodnimy teraz indukcją wsteczną po  $|I|$ , dla  $I \neq \emptyset$ , że  $|B_I|$  jest liczbą nieparzystą. Dla  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  jest to założenie zadania. Założmy więc, że  $|I| < n$ . Zauważmy, że

$$\bigcup_{J \supseteq I} B_J = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Istotnie, oczywistym jest, że lewa strona zawiera się w prawej. Aby wykazać, że prawa strona zawiera się w lewej, ustalmy pewien element  $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$ . Widzimy, że  $a \in B_J$ , gdzie  $J = \{j : a \in A_j\}$ .

Z założeń zadania, zbiór  $\bigcap_{i \in I} A_i$  ma parzyście wiele elementów. Natomiast wszystkie zbiory  $B_J$  dla  $J \supseteq I$  są rozłączne oraz jeśli  $J \neq I$  to z założenia indukcyjnego wiemy, że mają nieparzyście wiele elementów. Wszystkich zbiorów  $J$ , które są właściwymi nadzbiórami  $I$  jest  $2^{n-|I|} - 1$ . Zatem zbiór  $B_I$  też ma nieparzyście wiele elementów.

Zauważmy, że skoro każdy element pewnego  $A_i$  jest w pewnym zbiorze  $B_I$  to

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = \bigcup_{I \neq \emptyset} B_I.$$

Wiemy już, że wszystkie zbiory  $B_I$  są rozłączne i każdy z nich ma nieparzyście wiele elementów, więc zbiór  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  ma co najmniej  $2^n - 1$  elementów.

Wskażemy teraz zbiory  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , dla których ta suma ma dokładnie  $2^n - 1$  elementów. Rozważmy zbiór wszystkich liczb od 1 do  $2^n - 1$  zapisanych w systemie binarnym. Niech  $A_i$  to zbiór tych liczb, w których  $i$ -ta cyfra wynosi 1. Łatwo sprawdzić, że przecięcie dowolnych  $k$  z tych zbiorów zawiera dokładnie  $2^{n-k}$  elementów, więc ta rodzina spełnia warunki zadania.

**20.** Dany jest wielomian  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$ , gdzie  $a_0, \dots, a_{k-1}$  to liczby nieparzyste. Ponadto stopień  $k$  tego wielomianu jest parzysty oraz zachodzi  $P(x) \mid (x+1)^n - 1$  dla pewnego  $n$  całkowitego dodatniego. Udowodnić, że  $k+1 \mid n$ .

*Rozwiązanie:*

**Definicja.** Dla wielomianów  $A, B, M \in \mathbb{Z}[x]$  piszemy

$$A \equiv B \pmod{2, M}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $Q, R \in \mathbb{Z}[x]$  takie, że  $A - B = 2Q + MR$ .

Jeśli  $A_1 \equiv B_1 \pmod{2, M}$  oraz  $A_2 \equiv B_2 \pmod{2, M}$  to  $A_1 + A_2 \equiv B_1 + B_2 \pmod{2, M}$  oraz  $A_1 A_2 \equiv B_1 B_2 \pmod{2, M}$ . Istotnie, zapisując

$$A_1 = B_1 + 2Q_1 + MR_1$$

$$A_2 = B_2 + 2Q_2 + MR_2$$

otrzymujemy

$$A_1 + A_2 = B_1 + B_2 + 2(Q_1 + Q_2) + M(R_1 + R_2)$$

$$A_1 A_2 = B_1 B_2 + 2(Q_1 B_2 + Q_1 M R_2 + Q_2 B_1 + Q_2 M R_1 + 2Q_1 Q_2) + M(M R_1 R_2).$$

Oznaczmy przez  $W(x)$  wynik dzielenia  $(x+1)^n - 1$  przez  $P(x)$ . Ponieważ  $P(x)$  ma współczynnik wiodący równy 1, to  $W(x) \in \mathbb{Z}[x]$ . Przyjmijmy także  $M(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1$ . Skoro współczynniki wielomianu  $P$  są nieparzyste to zachodzi

$$P \equiv x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1 \pmod{2}$$

i wobec  $0 \equiv M \pmod{2, M}$  zachodzi także

$$P \equiv 0 \pmod{2, M}.$$

Oznacza to, że  $P(x) = 2Q(x) + M(x)R(x)$  dla pewnych  $Q, R \in \mathbb{Z}[x]$ . Wstawiając  $x^k$  zamiast  $x$  w powyższej równości mamy  $P(x^k) = 2Q(x^k) + M(x^k)R(x^k)$ . Zauważmy, że skoro  $M(x^k)(x^k - 1) = x^{k(k+1)} - 1$  jest podzielne przez  $M(x)(x - 1) = x^{k+1} - 1$  oraz  $\text{NWD}(x^{k+1} - 1, x^k - 1) = 1$  to zachodzi podzielność  $M(x) \mid M(x^k)$ . Wobec tego

$$P(x^k) \equiv 0 \pmod{2, M}.$$

Z treści zadania  $(x+1)^n - 1 = W(x)P(x)$ , więc  $(x^k+1)^n - 1 = W(x^k)P(x^k)$ , co daje

$$(x+1)^n - 1 \equiv 0 \pmod{2, M},$$

$$(x^k+1)^n - 1 \equiv 0 \pmod{2, M}.$$

Pozostaje zauważyć, że  $x^{k+1} \equiv 1 \pmod{2, M}$  daje  $(1+x^k)x \equiv 1+x \pmod{2, M}$ . Łącząc powyższe przystawania:

$$1 \equiv (1+x)^n \equiv (1+x^k)^n x^n \equiv x^n \equiv x^{n \bmod (k+1)} \pmod{2, M}.$$

Oznaczmy  $s \stackrel{\text{def}}{=} n \bmod (k+1)$ . Załóżmy – wbrew tezie zadania – że  $s > 0$ . Ponieważ  $2 \mid k$  to  $M(x) \bmod x+1 = M(-1) = 1$ , czyli istnieje  $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$  spełniający  $M(x) = (x+1)A(x)+1$ . Z powyższego przystawania mamy zatem

$$0 \equiv (x^s - 1)A(x) \equiv A(x)(x-1)(x^{s-1} + \dots + x + 1) \equiv x^{s-1} + \dots + x + 1 \pmod{2, M}.$$

Oznacza to istnienie wielomianów  $B(x), C(x) \in \mathbb{Z}[x]$  spełniających

$$x^{s-1} + \dots + x + 1 = 2B(x) + M(x)C(x).$$

Redukując powyższą równość modulo 2 widzimy, że lewa strona ma (modulo 2) stopień  $s-1 < k$ , zaś  $M(x)$  ma modulo 2 stopień  $k$ . Skoro czynnik  $2B(x)$  się (modulo 2) zeruje, to dostalibyśmy podzielność niezerowego wielomianu przez wielomian o większym stopniu (modulo 2). Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

**21.** Dla grafu  $G$  i jego wierzchołka  $w$  definiujemy operację *inwersji* wierzchołka  $w$  następująco: dla dowolnego wierzchołka  $v$  różnego od  $w$ , jeśli nie ma między nimi krawędzi to ją dodajemy, natomiast jeśli jest między nimi krawędź to ją usuwamy. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną  $M$ , dla której każdy graf  $G$  o 2025 wierzchołkach można doprowadzić do grafu o co najwyżej  $M$  krawędziach za pomocą ciągu operacji inwersji.

*Rozwiązanie:*

Wykażemy, że szukane  $M$  jest równe  $1012^2$ . Jest to liczba krawędzi grafu złożonego z klik  $K_{1012}$  i  $K_{1013}$  niepołączonych żadną krawędzią. Zauważmy, że operacja wykonana na grafie będącym kliką lub sumą dwóch niepołączonych klik daje graf tej postaci, mający  $\frac{a(a-1)}{2} + \frac{(2025-a)(2024-a)}{2}$  krawędzi, co osiąga minimum dla  $a = 1012$ . Stąd wynika, że szukane  $M$  nie może być mniejsze niż  $1012^2$ .

Pozostaje wykazać, że z dowolnego grafu o  $m > 1012^2$  krawędziach da się za pomocą naszej operacji dostać graf o mniejszej liczbie krawędzi. Pokażemy to w dwóch krokach.

1. Najpierw założmy, że graf  $G$  ma wierzchołek o stopniu większym niż 1012. Wówczas w oczywisty sposób operacja wykonana na tym wierzchołku zmniejsza liczbę krawędzi  $G$ .
2. Teraz rozważmy graf  $G$ , w którym każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 1012 i co najmniej 1014 z nich ma stopień dokładnie 1012. Ustalmy wierzchołek  $w$  o stopniu 1012. Operacja na nim nie zmienia liczby krawędzi  $G$ , ponadto istnieje wierzchołek  $v$ , który nie był połączony z  $w$  i też miał stopień 1012, więc po wykonaniu tej operacji ma stopień 1013. Teraz wykonanie operacji na  $v$  zmniejsza liczbę krawędzi w  $G$ .

Łatwo widzimy, że wszystkie pozostałe grafy mają co najwyżej  $1012^2$  krawędzi, co kończy dowód.

**22.** Dla danej liczby rzeczywistej  $x$  zdefiniujmy

$$F(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}_+ \\ 2 \mid \lfloor nx \rfloor}} \frac{1}{2^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą  $C$  taką, że  $F(x) \geq C$  zachodzi dla  $x \in (0, 1)$ .

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy przez  $S_x$  zbiór tych dodatnich liczb całkowitych  $n$ , że liczba  $\lfloor nx \rfloor$  jest parzysta. Na początek wykażemy, że dla każdego  $x \in (0, 1)$  mamy  $F(x) \geq \frac{4}{7}$ . Jeśli  $x < \frac{1}{2}$ , to w oczywisty sposób  $F(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{4}{7}$ . Załóżmy, że  $x \geq \frac{1}{2}$ . Zauważmy, że jeśli dla  $k$  naturalnego mamy  $k, k+1 \notin S_x$ , to z jednej strony  $(k+2)x \geq kx+1$ , więc  $\lfloor (k+2)x \rfloor > \lfloor kx \rfloor$ , a z drugiej  $(k+2)x < (k+1)x+1$ , więc  $\lfloor (k+2)x \rfloor \leq \lfloor (k+1)x \rfloor + 1$ . Stąd, i z oczywistej równości  $\lfloor kx \rfloor = \lfloor (k+1)x \rfloor$  (inaczej te liczby byłyby różnej parzystości), mamy  $k+2 \in S_x$ .

Z powyższej obserwacji wynika, że wśród dowolnych trzech kolejnych dodatnich liczb całkowitych co najmniej jedna należy do  $S_x$ . W oczywisty sposób  $1 \in S_x$ , więc otrzymujemy

$$F(x) \geq 2^{-1} + 2^{-4} + \dots = \frac{4}{7}.$$

Weźmy teraz dodatnią liczbę całkowitą  $k$  i rozważmy  $x = \frac{2}{3} - \varepsilon$  dla  $0 < \varepsilon < \frac{1}{9k}$ . Jest jasne, że wówczas

$$F(x) = \sum_{n=1}^k 2^{-3n+2} + \sum_{\substack{n \geq 3k+1 \\ 2 \mid \lfloor nx \rfloor}} 2^{-n}.$$

Pierwsza suma powyżej zbiega do  $\frac{4}{7}$ , a druga do 0 przy  $k \rightarrow \infty$ . Stąd wynika, że  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F\left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right) = \frac{4}{7}$ , co kończy dowód, że największą szukaną liczbą  $C$  jest  $\frac{4}{7}$ .

**23.** Dla danej liczby całkowitej  $n \geq 4$  znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą  $f(n)$  o tej własności, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $m$ , wśród dowolnych  $f(n)$  elementów zbioru  $\{m, m+1, \dots, m+n-1\}$  istnieją co najmniej trzy liczby parami względnie pierwsze.

*Rozwiązanie:*

Na początek łatwo sprawdzimy, że  $f(4) = 4$  i  $f(5) = f(6) = 5$ . Istotnie, ponieważ dowolna trójka zawierająca dwie liczby parzyste nie jest względnie pierwsza, to  $f(4) > 3$  i  $f(5), f(6) > 4$ . Ponadto z dowolnej czwórki kolejnych liczb całkowitych można wybrać trzy kolejne tak, by dwie z nich były nieparzyste i wówczas będą one parami względnie pierwsze, bo jedyne dwie z nich różniące się o więcej niż 1 różnią się o 2 i są nieparzyste. To daje  $f(4) = 4$  oraz w oczywisty sposób  $f(5) = 5$ . Dla dowodu, że  $f(6) = 5$ , wystarczy zauważyć, że w dowolnej piątce spośród sześciu kolejnych liczb całkowitych albo są trzy nieparzyste o różnicach 2 lub 4, albo dwie nieparzyste o różnicy 2 lub 4 i trzy parzyste, z których

ewentualna podzielność przez 3 lub 5 eliminuje co najwyżej dwie i zostawia jedną względnie pierwszą z oboma nieparzystymi.

Niech teraz  $n > 6$ . Biorąc  $m = 2$  i zbiór tych liczb spośród  $2, 3, \dots, n+1$ , które są podzielne przez 2 lub 3, dostaniemy

$$f(n) \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 1,$$

ponieważ w tym zbiorze są albo dwie liczby parzyste, albo dwie podzielne przez 3. Oznaczmy  $n = 6k + r$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą dodatnią i  $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Zauważmy, że

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor = 4k + g(r),$$

gdzie  $g(r) = r$  dla  $r = 0, 1, 2, 3$  oraz  $g(r) = r - 1$  dla  $r = 4, 5$ . Teraz weźmy dowolną dodatnią liczbę całkowitą  $m$ , podzbiór  $S \subseteq A := \{m, m+1, \dots, m+n-1\}$  mocy  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 1$  i podzielmy zbiór  $A$  na  $k$  bloków postaci  $\{m+6t, m+6t+1, \dots, m+6t+5\}$  dla  $t = 0, 1, \dots, k-1$ , oraz ogon złożony z elementów większych lub równych  $m+6k$ . Rozważmy dwa przypadki:

1.  $0 \leq r \leq 3$ . Wówczas  $|S| = 4k + r + 1$  i co najwyżej  $r$  elementów  $S$  należy do ogona, więc z zasady szufladkowej Dirichleta do pewnego bloku należy 5 elementów  $S$ . Z tego, że  $f(6) = 5$ , wynika, że wśród tych 5 elementów znajdzie się szukana trójka.
2.  $4 \leq r \leq 5$ . Wówczas  $|S| = 4k + r$  i co najwyżej  $r$  elementów  $S$  należy do ogona, więc zachodzi jedna z dwóch możliwości. Albo w jednym z bloków jest 5 elementów  $S$  i znajdujemy szukaną trójkę jak w poprzednim przypadku, albo cały ogon zawiera się w  $S$ . Wtedy jednak szukaną trójkę znajdziemy na mocy tego, że  $f(r) = r$  dla  $r = 4, 5$ .

Udowodniliśmy zatem, że  $f(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 1$ .

**24.** Dany jest trójkąt  $ABC$  oraz punkty  $P$  i  $Q$  w jego wnętrzu spełniające zależności

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCA = 90^\circ,$$

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAQ, \quad \sphericalangle PBA = \sphericalangle CBQ.$$

Wykazać, że prosta  $PQ$  przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

*Rozwiązanie:*

Z drugiego i trzeciego warunku wynika, że punkty  $P$  i  $Q$  są izogonalnie sprzężone w trójkącie  $ABC$ . Pomińmy na razie pierwszy warunek. Niech proste  $AP, BP, CP$  przecinają okrąg  $o$  opisany na trójkącie  $ABC$  odpowiednio w punktach  $A', B', C'$ , zaś  $D$  będzie takim punktem na okręgu  $o$ , że  $CD \parallel A'B'$ . Niech proste  $AQ, BQ, CQ$  przecinają okrąg  $o$  odpowiednio w punktach  $A'', B'', C''$ , zaś  $E$  będzie takim punktem na okręgu  $o$ , że  $CE \parallel A''B''$ . Wykażemy silniejszą tezę — mianowicie, że proste  $DC''$  i  $EC'$  przecinają się na prostej  $PQ$ .

Niech prosta  $DP$  przecina okrąg  $o$  ponownie w punkcie  $X$ . Przyjmijmy, że  $\sphericalangle BAP = \alpha$ ,  $\sphericalangle CAP = \alpha'$ ,  $\sphericalangle ABP = \beta'$ ,  $\sphericalangle CBP = \beta$ ,  $\sphericalangle ACB = \gamma$ ,  $\sphericalangle BCX = \varphi$ . Wówczas  $\sphericalangle ADX = \gamma - \varphi$ ,  $\sphericalangle BDX = \varphi$ , zaś z równoległości prostych  $CD$  i  $A'B'$  wynikają równości  $\sphericalangle B'BD = \alpha'$  oraz  $\sphericalangle A'AD = \beta$ . Stosując trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy dla trójkąta  $ABD$  i punktu  $P$  dostajemy

$$\frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sin \beta \cdot \sin \beta'}{\sin \alpha \cdot \sin \alpha'}.$$

Niech teraz prosta  $EQ$  przecina okrąg  $o$  ponownie w punkcie  $X'$  oraz niech  $\sphericalangle BCX' = \varphi'$ . Wykorzystując, że punkty  $P$  i  $Q$  są izogonalnie sprzężone w trójkącie  $ABC$  otrzymujemy, że  $\sphericalangle BAQ = \alpha'$ ,  $\sphericalangle CAQ = \alpha$ ,

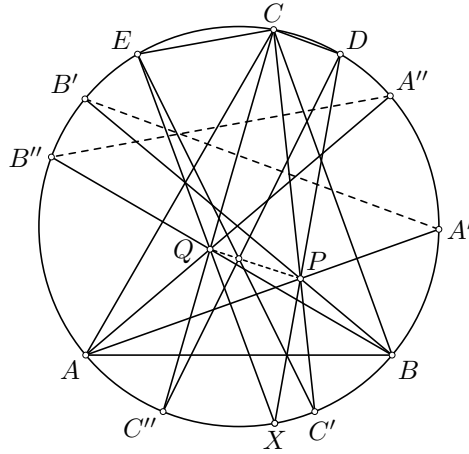
$\sphericalangle ABQ = \beta$ ,  $\sphericalangle CBP = \beta'$ . Ponadto  $\sphericalangle AEX' = \gamma - \varphi'$  i  $\sphericalangle BEX' = \varphi'$ , zaś z równoległości prostych  $CE$  i  $A''B''$  otrzymujemy  $\sphericalangle A''AE = \beta'$  oraz  $\sphericalangle B''BE = \alpha$ . Stosując trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy dla trójkąta  $ABE$  i punktu  $Q$  dostajemy

$$\frac{\sin(\gamma - \varphi')}{\sin \varphi'} = \frac{\sin \beta' \cdot \sin \beta}{\sin \alpha' \cdot \sin \alpha}.$$

Stąd wniosek, że

$$\frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sin(\gamma - \varphi')}{\sin \varphi'}.$$

Ponieważ funkcja  $\frac{\sin(\gamma-x)}{\sin x}$  jest monotoniczna w przedziale  $(0, \gamma)$ , więc  $\varphi = \varphi'$ , czyli  $X = X'$ . Innymi słowy proste  $DP$  i  $EQ$  przecinają się w punkcie  $X$  leżącym na okręgu  $o$ . Stosując teraz twierdzenie Pascala dla sześciokąta  $C'CC''DXE$  otrzymujemy, że punkt przecięcia prostych  $DC''$  i  $EC'$  leży na prostej  $PQ$ . To kończy dowód silniejszego stwierdzenia.



Przejdźmy teraz do właściwego rozwiązania zadania. Z danego w treści zadania warunku dostajemy

$$\sphericalangle PAC + \sphericalangle PCB + \sphericalangle PBA = 90^\circ.$$

Wówczas z równoległości  $CD$  i  $A'B'$  otrzymujemy

$$\sphericalangle DCB' = \sphericalangle CDA' = \sphericalangle CAA' = \sphericalangle PAC,$$

zaś z faktu, że  $P$  i  $Q$  są izogonalnie sprzężone w trójkącie  $ABC$  mamy  $\sphericalangle ACC'' = \sphericalangle BCC' = \sphericalangle PCB}$ . Stąd

$$\sphericalangle DCC'' = \sphericalangle DCB' + \sphericalangle B'CA + \sphericalangle ACC'' = \sphericalangle PAC + \sphericalangle PBA + \sphericalangle PCB = 90^\circ,$$

czyli odcinek  $DC''$  jest średnicą okręgu  $o$ . Analogicznie uzasadniamy, że odcinek  $EC'$  jest także średnicą okręgu  $o$ . W takim razie przy dodatkowym warunku  $\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCA = 90^\circ$  dostajemy, że punkt przecięcia prostych  $DC''$  i  $EC'$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , co kończy rozwiązanie zadania.

**25.** Znaleźć wszystkie takie pary  $(x, y)$  liczb całkowitych dodatnich, że zarówno  $x + y$ , jak i  $xy + 1$  są potęgami dwójki.

*Rozwiązanie:*

Założmy, że  $x + y = 2^{a+1}$ ,  $xy + 1 = 2^b$  dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej  $a$  i dodatniej liczby całkowitej  $b$ , oraz BSO niech  $x \geq y$ . Liczby  $x, y$  są obie nieparzyste, więc liczba  $d = \frac{x-y}{2}$  jest całkowita. Stąd z pierwszego równania  $x = 2^a + d$ ,  $y = 2^a - d$ , a drugie równanie przyjmuje postać  $2^{2a} - 2^b + 1 = d^2$ .

Teraz mamy  $d^2 < 2^{2a}$ , czyli  $d^2 \leq (2^a - 1)^2$ , co daje  $2^b \geq 2^{a+1}$ , czyli  $b \geq a + 1$ . Z drugiej strony albo  $d = 0$  i wtedy  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $x = y = 1$ , albo  $d > 0$  i wtedy  $2a \geq b$ . Wówczas  $2^b \mid d^2 - 1$ , więc

$2^{a+1} \mid (d-1)(d+1)$ . Liczby  $d-1$  i  $d+1$  nie mogą być obie podzielne przez 4, stąd  $2^a$  dzieli jedną z liczb  $d-1$ ,  $d+1$ . Ponieważ  $0 < d < 2^a$ , to jest to możliwe tylko dla  $d = 1$  lub  $d = 2^a - 1$ . To prowadzi do par  $(x, y)$  postaci  $(2^a + 1, 2^a - 1)$  lub  $(2^{a+1} - 1, 1)$ , które w oczywisty sposób spełniają warunki zadania.

Podsumowując, odpowiedziami są wszystkie pary postaci  $(2^a + 1, 2^a - 1)$ ,  $(2^a - 1, 2^a + 1)$ ,  $(2^{a+1} - 1, 1)$  i  $(1, 2^{a+1} - 1)$  dla nieujemnej liczby całkowitej  $a$ .

**26.** Dany jest ostrosłup trójkątny  $ABCS$  o podstawie trójkąta  $ABC$ . Okrąg o środku  $I$  wpisany w ten trójkąt jest styczny do krawędzi  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  odpowiednio w punktach  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , zaś odcinek  $SI$  jest wysokością danego ostrosłupa. Punkty  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  leżą odpowiednio na krawędziach  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$ , przy czym  $AA' = AF$ ,  $BB' = BD$ ,  $CC' = CE$ , zaś punkt  $S'$  jest obrazem symetrycznym do punktu  $S$  względem środka sfery opisanej na ostrosłupie  $ABCS$ . Wykazać, że  $A'S' = B'S' = C'S'$ .

*Rozwiązanie:*

*Sposób I.*

Wykażemy, że  $A'S' = B'S'$ , równość  $B'S' = C'S'$  dowodzimy analogicznie.

Ponieważ rzut prostokątny środka sfery opisanej na ostrosłupie  $ABCS$  na płaszczyznę  $ABS$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABS$ , więc rzut prostokątny  $P$  punktu  $S'$  na płaszczyznę  $ABS$  jest obrazem symetrycznym punktu  $S$  względem środka okręgu opisanego na trójkącie  $ABS$ . Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów  $A'PS'$  i  $B'PS'$  wnosimy, że wystarczy wykazać, że  $A'P = B'P$ . Ponadto skoro prosta  $SI$  jest wysokością ostrosłupa, zaś promień  $IF$  jest prostopadły do krawędzi  $AB$ , to płaszczyzna  $SIF$  także jest prostopadła do  $AB$ . Stąd wynika, że odcinek  $SF$  jest wysokością trójkąta  $ABS$ .

Zauważmy, że istnieje okrąg  $o_1$  o środku  $A$  przechodzący przez punkty  $F$  i  $A'$  oraz okrąg  $o_2$  o środku  $B$  przechodzący przez punkty  $F$  i  $B'$ . Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne w punkcie  $F$ , a prosta  $SF$  jest ich wspólną styczną. Przyjmijmy, że prosta  $SA'$  przecina okrąg  $o_1$  ponownie w punkcie  $A_1$ , a prosta  $SB'$  przecina okrąg  $o_2$  ponownie w punkcie  $B_1$ . Mamy

$$SA' \cdot SA_1 = SF^2 = SB' \cdot SB_1,$$

czyli punkty  $A_1$ ,  $A'$ ,  $B'$  i  $B_1$  leżą na jednym okręgu. Środek tego okręgu leży na symetralnych odcinków  $A_1A'$  i  $B_1B'$ , które przechodzą odpowiednio przez punkty  $A$  i  $B$ . Pozostaje zauważyć, że wobec równości  $\angle S'AS = \angle S'BS = 90^\circ$  tym punktem musi być  $S'$ , skąd otrzymujemy  $A'S' = B'S'$ .

*Sposób II*

Niech sfera  $s_A$  o środku  $A$  i promieniu  $AA'$  przechodząca także przez punkty  $F$  i  $E$  przecina prostą  $AA'$  ponownie w punkcie  $A_1$ ; sfera  $s_B$  o środku  $B$  i promieniu  $BB'$  przechodząca także przez punkty  $D$  i  $F$  przecina prostą  $BB'$  ponownie w punkcie  $B_1$ ; sfera  $s_C$  o środku  $C$  i promieniu  $CC'$  przechodząca także przez punkty  $D$  i  $E$  przecina prostą  $CC'$  ponownie w punkcie  $C_1$ . Ponieważ punkt  $I$  jest środkiem potęgowym trzech okręgów wielkich (o środku  $A$  i promieniu  $AF$ , o środku  $B$  i promieniu  $BD$ , o środku  $C$  i promieniu  $CE$ ) będących częściami wspólnymi rozważanych sfer i płaszczyzny  $ABC$ , to prosta  $SI$  jest osią potęgową sfer  $s_A$ ,  $s_B$ ,  $s_C$ . W takim razie

$$SA' \cdot SA_1 = SB' \cdot SB_1 = SC' \cdot SC_1,$$

czyli punkty  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  leżą na jednej sferze. Ponieważ  $\angle S'AS = \angle S'BS = \angle S'CS = 90^\circ$ , to punkt  $S'$  leży na płaszczyznach symetralnych odcinków  $A'A_1$ ,  $B'B_1$ ,  $C'C_1$ , a więc jest środkiem tej sfery. To kończy dowód.

**27.** Dany jest nieskończony ciąg liczb dodatnich  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  oraz taka stała  $K$ , że

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^2 < K \lambda_n^2 \text{ dla } n = 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że istnieje stała  $K'$  spełniająca warunek

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k < K' \lambda_n \text{ dla } n = 1, 2, \dots$$

*Rozwiązanie:*

Niech  $m = \lceil 4K \rceil$ . Wykażemy najpierw, że dla dowolnego  $n > m$  zachodzi  $\lambda_{n-m} \leq \frac{1}{2} \lambda_n$ . Istotnie, mamy

$$\lambda_n^2 \geq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^2 \geq \frac{1}{K} \sum_{k=n-m}^{n-1} \lambda_k^2 \geq \frac{m}{K} \lambda_{n-m}^2 \geq \frac{1}{4} \lambda_{n-m}^2,$$

co po spierwiastkowaniu daje  $\lambda_{n-m} \leq \frac{1}{2} \lambda_n$ .

Niech teraz  $n - 1 = qm + r$  dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej  $q$  oraz  $r \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ . Wielokrotnie korzystając z powyżej udowodnionego faktu dostajemy

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \leq \sum_{k=1}^r \lambda_k + \sum_{k=0}^{q-1} m \lambda_{n-km} \leq m \sum_{k=0}^q \lambda_{n-km} \leq m \lambda_n \sum_{k=0}^q 2^{-k} \leq 2m \lambda_n,$$

co dowodzi tezy zadania z  $K' = 2\lceil 4K \rceil$ .

**28.** W obozie matematycznym w Mszanie Dolnej uczestniczy  $2^n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) osób — uczniowie i kadra. Pewnego wieczora zorganizowano turniej picia wody na czas systemem każdy z każdym (zakładamy, że w żadnym pojedynku nie padł remis). Wygrał kierownik obozu. Uczestników turnieju, którzy pokonali kierownika obozu nazwiemy *zuchwałymi*. Właściciele ośrodka planują zorganizowanie turnieju systemem pucharowym, przy czym okaże się, że każdy pojedynek między dwoma uczestnikami zakończy się takim samym wynikiem, jak wcześniej podczas turnieju rozgrywanego systemem każdy z każdym. Wykazać, że można tak ułożyć harmonogram rozgrywek, aby kierownik obozu znów zwyciężył, a wszyscy zuchwali uczestnicy odpadli w pierwszych dwóch rundach.

*Rozwiązanie:*

Założmy, że kierownik obozu wygrał dokładnie  $k$  pojedynków w fazie każdy z każdym. Uczestników, którzy przegrali z kierownikiem będziemy nazywać *pokornymi*. Skoro średnia liczba wygranych pojedynków dowolnego uczestnika turnieju to  $\frac{2^n-1}{2}$ , to  $k \geq 2^{n-1}$ .

Rozważmy dowolny podzbiór  $d$  zuchwałych uczestników. We wszystkich pojedynkach, jakie odbyły się między nimi oraz przeciwko kierownikowi, wygrali oni dokładnie  $\frac{d(d+1)}{2}$  pojedynków. Żaden z nich nie mógł wygrać więcej niż  $k$  pojedynków, więc wygrali oni w sumie nie więcej niż  $kd - \frac{d(d+1)}{2}$  pojedynków przeciwko pokornym uczestnikom. Zatem pewien z nich wygrał nie więcej niż  $k - \frac{d+1}{2}$  pojedynków, czyli przegrał co najmniej  $\frac{d+1}{2}$  pojedynków przeciwko uczestnikom pokornym.

Niech  $Z_1, \dots, Z_{2^{n-k-1}}$  to wszyscy zuchwali uczestnicy. Założmy, że  $Z_i$  przegrał z dokładnie  $z_i$  pokornymi uczestnikami oraz  $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{2^{n-k-1}}$ . Rozważając podzbiór zuchwałych zawodników  $Z_1, Z_2, \dots, Z_i$  wiemy, że  $z_i \geq \max_{1 \leq j \leq i} z_j \geq \frac{i+1}{2}$ . Stąd  $z_1 \geq 1$ ,  $z_2, z_3 \geq 2$ ,  $z_4, z_5 \geq 3$ , itd. Niech  $P_1$  to pokorny uczestnik, który pokonał  $Z_1$ ;  $P_2$  to pokorny uczestnik, który pokonał  $Z_3$  (inny niż  $P_1$ ); i ogólnie  $P_i$  to pokorny uczestnik, który pokonał  $Z_{2^{i-1}}$  i jest inny niż  $P_1, \dots, P_{i-1}$ . Tacy pokorni uczestnicy istnieją dla  $i \leq \frac{2^{n-k}}{2}$  z obserwacji powyżej.

Opiszemy teraz parowanie w pierwszej rundzie systemu pucharowego. Dla  $i \leq \frac{2^{n-k}}{2}$  parujemy uczestnika  $P_i$  z  $Z_{2^{i-1}}$ , a więc wszyscy uczestnicy  $Z_{2^{i-1}}$  zostaną wyeliminowani w pierwszej rundzie. Następnie, dopóki istnieje pewien pokorny uczestnik  $P$ , który pokonał jeszcze nie sparowanego zuchwałego uczestnika  $Z$ , to parujemy  $P$  z  $Z$ . Teraz parujemy pozostałych zuchwałych uczestników z dowolnym dostępnym

pokornym uczestnikiem (ponieważ pokornych uczestników jest więcej niż zuchwałych, to dla każdego znajdziemy parę). Kierownika obozu parujemy z dowolnym pokornym uczestnikiem. Tacy pokorni uczestnicy istnieją, bo  $k \geq 2^{n-1}$ .

Teraz opiszemy parowanie w drugiej rundzie systemu pucharowego. Ustalmy uczestnika  $Z_{2i}$ , który jeszcze nie odpadł. Zauważmy, że  $z_{2i} \geq i + 1$  oraz wszyscy pokorni uczestnicy, z którymi przegrał on w fazie każdy z każdym, jeszcze nie odpadli z fazy pucharowej. Istotnie, jeśli pewien taki uczestnik by odpadł, to znaczyłoby, że był on w pierwszej rundzie sparowany z innym zawodnikiem pokornym. Z drugiej strony skoro zawodnik  $Z_{2i}$  nie odpadł w pierwszej rundzie to znaczy, że w chwili wyboru jego przeciwnika, wszyscy zawodnicy pokorni, którzy z nim wygrali, byli już sparowani z zawodnikami zuchwałymi. Ta sprzeczność dowodzi poprawności obserwacji. Wykonując parowania analogiczne do tych w pierwszej rundzie ( $P'_1$  to zawodnik pokorny, który wygrał z  $Z_2$ ,  $P'_2$  to zawodnik pokorny różny od  $P'_1$ , który wygrał z  $Z_4$  itd.), możemy wyeliminować wszystkich pozostałych zuchwałych uczestników. W turnieju pozostali jedynie kierownik obozu i pokorni uczestnicy, więc kierownik na pewno wygra cały turniej.

**29.** Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste  $c$ , dla których istnieje ciąg  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  liczb dodatnich spełniający dla  $n \geq 1$  równanie

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}}$$

oraz  $x_{2025} - x_1 = c\sqrt{4x_1 + 1}$ .

*Rozwiązanie:*

Przerzucając  $\sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}}$  na drugą stronę i dodając obustronnie  $\frac{1}{2}$  przekształcamy równanie rekurencyjne do postaci

$$\left(\sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ponieważ  $x_{n+1} > 0$ , to w powyższej równości można opuścić kwadraty. Dostajemy stąd równanie

$$\sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} = \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + 1 = \dots = \sqrt{x_1 + \frac{1}{4}} + n.$$

Biorąc  $n = 2024$ , podnosząc do kwadratu i odejmując  $\frac{1}{4}$  dostajemy

$$x_{2025} = x_1 + 4048\sqrt{x_1 + \frac{1}{4}} + 2024^2.$$

Teraz łatwo dostajemy

$$\frac{x_{2025} - x_1}{\sqrt{4x_1 + 1}} = 2024 + \frac{2024^2}{\sqrt{4x_1 + 1}}.$$

Ponieważ  $x_1$  może być dowolną liczbą dodatnią, to zbiór szukanych  $c$  jest równy  $(2024, 2024 \cdot 2025)$ .

**30.** Niech  $S$  będzie niepustym zbiorem skończonym oraz  $\mathcal{F}$  będzie rodziną podzbiorów  $S$  spełniającą następujące warunki:

- (a)  $S$  nie jest jedynym elementem rodziny  $\mathcal{F}$ ;
- (b) Jeśli  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ , to  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$  oraz  $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ .

Udowodnić, że istnieje element  $a \in S$  należący do co najwyżej połowy elementów rodziny  $\mathcal{F}$ .

*Rozwiązanie:*

Rozważmy rodzinę  $\mathcal{F}' = \{F \subseteq S : S \setminus F \in \mathcal{F}\}$ . Z warunków na  $\mathcal{F}$  wynika, że  $\mathcal{F}'$  spełnia warunki

- (a)'  $\mathcal{F}' \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset$ ;
- (b)' Jeśli  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}'$ , to  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}'$  oraz  $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}'$ .

Teza zadania jest równoważna temu, że istnieje element  $a \in S$  należący do co najmniej połowy elementów  $\mathcal{F}'$ .

Niech  $A \in \mathcal{F}'$  będzie minimalnym w sensie zawierania elementem rodziny  $\mathcal{F}' \setminus \{\emptyset\}$ . Dzięki warunkowi (a)' taki element istnieje, oczywiście jest on niepusty. Weźmy dowolny element  $a \in A$ . Wówczas jeśli  $F \in \mathcal{F}'$ , to albo  $A \subseteq F$  i wtedy  $a \in F$ , albo  $A \cap F = \emptyset$  i wtedy  $a \notin F$ . Istotnie, gdyby było inaczej, to zbiór  $A \cap F \in \mathcal{F}'$  przeczyłby minimalności  $A$ . Stąd wynika, że każdemu zbiorowi  $F \in \mathcal{F}'$  niezawierającemu  $a$  możemy w różnowartościowy sposób przypisać zbiór  $A \cup F \in \mathcal{F}'$  zawierający  $a$ , z czego natychmiast wynika teza.

**31.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Okrąg  $\omega$  przechodzący przez punkty  $B$  i  $C$  przecina odcinki  $AB$  i  $AC$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ . Odcinki  $BE$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $P$ . Punkty  $M$  i  $N$  są środkami okręgów wpisanych w trójkąty  $ADE$  i  $PDE$ . Punkt  $K$  jest środkiem łuku  $DE$  okręgu  $\omega$  niezawierającego punktów  $B$  i  $C$ . Wykazać, że punkt  $K$  leży na prostej  $MN$ .

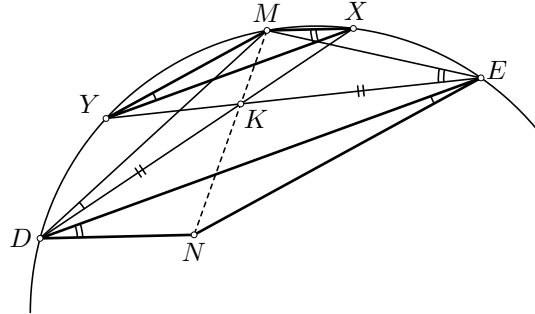
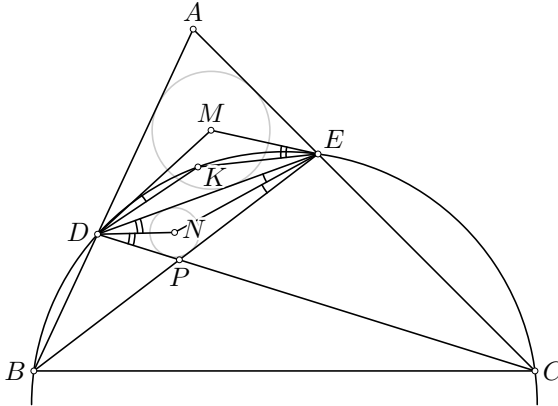
*Rozwiązanie:*

*Sposób I.*

Zauważmy, że

$$\sphericalangle MEK = \sphericalangle MED - \sphericalangle KED = \sphericalangle MED - \sphericalangle KCD = \frac{1}{2} \sphericalangle AED - \frac{1}{2} \sphericalangle ECD = \frac{1}{2} \sphericalangle CDE = \sphericalangle EDN.$$

Analogicznie obliczamy, że  $\sphericalangle MDK = \sphericalangle DEN$ .



Niech proste  $DK$  i  $EK$  przecinają okrąg opisany na trójkącie  $DEM$  ponownie odpowiednio w punktach  $X$  i  $Y$ . Skoro  $DK = EK$ , to

$$\sphericalangle KED = \sphericalangle KDE = \sphericalangle XDE = \sphericalangle XYE,$$

skąd wniosek, że  $XY \parallel DE$ . Zatem

$$\sphericalangle YXM = \sphericalangle YEM = \sphericalangle KEM = \sphericalangle EDN$$

i analogicznie  $\sphericalangle XYM = \sphericalangle DEN$ .

Trójkąty  $DEN$  i  $XYM$  są więc jednokładne, a środkiem tej jednokładności jest punkt  $K$  przecięcia prostych  $XD$  i  $YE$ . Obrazem punktu  $N$  w tej jednokładności jest punkt  $M$ , co oznacza, że punkt  $K$  leży na prostej  $MN$ .

*Sposób II.*

Tak, jak w sposobie I dowodzimy, że  $\sphericalangle MEK = \sphericalangle EDN$  oraz  $\sphericalangle MDK = \sphericalangle DEN$ . Niech  $N'$  będzie obrazem symetrycznym punkt  $N$  względem symetralnej  $\ell$  odcinka  $DE$ . Ponieważ  $DK = EK$ , to prosta  $\ell$  jest jednocześnie dwusieczną kąta  $DKE$ . Wtedy

$$\sphericalangle DEN' = \sphericalangle EDN = \sphericalangle MEK \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle EDN' = \sphericalangle DEN = \sphericalangle MDK,$$

skąd wniosek, że punkty  $M$  i  $N'$  są izogonalnie sprzężone w trójkącie  $DKE$ . W takim razie proste  $MK$  i  $N'K$  są symetryczne względem dwusiecznej kąta  $DKE$ , skąd otrzymujemy, że proste  $MK$  i  $NK$  pokrywają się, co kończy dowód.

*Sposób III.*

Niech  $I_1$  i  $I_2$  będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty  $BDE$  i  $CDE$ . Niech  $J_1$  i  $J_2$  będą środkami okręgów dopisanych odpowiednio do trójkątów  $BDE$  i  $CDE$  stycznych do odcinka  $DE$ . Z lematu o trójlściu dostajemy

$$KD = KI_1 = KI_2 = KE = KJ_1 = KJ_2,$$

skąd wniosek, że punkty  $D, I_1, I_2, E, J_1, J_2$  leżą na okręgu o środku  $K$ . Stosując twierdzenie Pascala dla sześciokąta  $DJ_1I_1EJ_2I_2$  otrzymujemy, że punkty  $M = DJ_1 \cap I_1J_1$ ,  $K = I_1J_2 \cap I_2J_2$ ,  $N = EI_1 \cap DI_2$  są współliniowe.

**32.** Bezkwadratową dodatnią liczbę całkowitą  $n$  nazwiemy *prawie pierwszą*, gdy dla każdej liczby całkowitej  $x$  zachodzi podzielność

$$n \mid x^{d_1} + x^{d_2} + \dots + x^{d_k} - kx,$$

gdzie  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$  są wszystkimi dodatnimi dzielnikami  $n$ . Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą postaci  $2^{2^m} + 1$  dla nieujemnej liczby całkowitej  $m$  i niech  $n$  będzie liczbą prawie pierwszą mającą dzielnik pierwszy  $r$  dający resztę 1 z dzielenia przez  $p$ . Udowodnić, że dla każdego  $i = 1, 2, \dots, k$  zachodzi  $p \mid d_i - 1$ .

*Rozwiązanie:*

Niech  $n = q_1 q_2 \dots q_s$  będzie rozkładem  $n$  na czynniki pierwsze. Niech  $a_j$  oznacza dla  $0 \leq j \leq r - 2$  liczbę dzielników  $n$ , które dają resztę  $m$  przy dzieleniu przez  $r - 1$ . Z małego twierdzenia fermata wynika, że dla  $0 < x < r$  mamy

$$x^{d_1} + x^{d_2} + \dots + x^{d_k} - kx \equiv -kx + \sum_{j=0}^{r-2} a_j x^j \pmod{r}.$$

Ponieważ  $r \mid n$ , to wielomian stopnia  $r - 2$  po prawej stronie ma  $r - 1$  pierwiastków  $(1, 2, \dots, r - 1)$  w  $\mathbb{Z}_r$ , więc musi to być wielomian zerowy. Stąd

$$a_j \equiv \begin{cases} k & \pmod{r} \quad j = 1 \\ 0 & \pmod{r} \quad j \neq 1 \end{cases}$$

Niech  $n = p_1 p_2 \dots p_s$  będzie rozkładem  $n$  na czynniki pierwsze. Niech teraz  $b_j$  oznacza liczbę dzielników  $n$ , które dają resztę  $j$  przy dzieleniu przez  $p$ . Ponieważ  $p \mid r - 1$  to dla  $0 \leq m < p$  mamy wzór

$$b_j = \sum_{\substack{0 \leq j' < r-1 \\ j' \equiv j \pmod{p}}} a_{j'}$$

W szczególności podobnie jak dla  $a_j$  mamy

$$b_j \equiv \begin{cases} k & \pmod{r} \quad j = 1 \\ 0 & \pmod{r} \quad j \neq 1 \end{cases}.$$

Zauważmy, że nie może być  $p|n$ , gdyż wtedy dokładnie połowa dzielników  $n$  dzieliłaby się przez  $p$  i byłoby  $b_0 = \frac{k}{2}$ , co jest niepodzielne przez  $r$ , bo  $k$  jest potęgą dwójki. Stąd musi być  $b_0 = 0$ .

Ustalmy teraz jakiś generator  $g$  modulo  $p$  i dla  $0 \leq j < p-1$  oznaczmy  $c_j \stackrel{\text{def}}{=} b_{g^j \bmod p}$ . Z tego co wiemy o  $b_j$  wynika, że

$$c_j \equiv \begin{cases} k & (\bmod r) \quad j = 0 \\ 0 & (\bmod r) \quad j \neq 0 \end{cases}.$$

Przypomnijmy, że  $n = q_1 q_2 \cdot \dots \cdot q_s$  jest rozkładem  $n$  na czynniki pierwsze. Niech teraz  $0 \leq w_i < p-1$  będzie dla  $1 \leq i \leq s$  taką liczbą, że  $q_i \equiv g^{w_i} \pmod{p}$ . Ponieważ każdy dzielnik  $n$  można jednoznacznie zapisać w postaci  $q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdot \dots \cdot q_s^{e_s}$  dla  $e_i \in \{0, 1\}$  to  $c_j$  jest liczbą ciągów  $(e_1, \dots, e_s) \in \{0, 1\}^s$  dla których  $e_1 w_1 + e_2 w_2 + \dots + e_s w_s \equiv j \pmod{p-1}$ . Stąd

$$\prod_{i=1}^s (1 + x^{w_i}) \equiv \sum_{j=0}^{p-2} c_j x^j \pmod{x^{p-1} - 1}$$

Załóżmy nie wprost, że pewne  $w_i > 0$ . Wtedy istnieją takie  $2^m > \alpha \geq 0$  oraz nieparzyste  $\beta > 0$ , że  $w_i = 2^\alpha \beta$ . Zauważmy, że wtedy wielomian  $x^{2^\alpha} + 1$  dzieli zarówno  $x^{w_i} + 1 = x^{2^\alpha \beta} + 1$  jak i  $x^{p-1} - 1 = x^{2^\alpha \cdot 2^{m-\alpha}} - 1$ . Stąd  $x^{2^\alpha} + 1$  dzieli  $\sum_{j=0}^{p-2} c_j x^j$ . Redukując tę podzielność modulo  $r$  dostalibyśmy w  $\mathbb{Z}_r[x]$ , że

$$X^{2^\alpha} + 1 \mid k,$$

co jest niemożliwe, bo wielomian większego stopnia nie może dzielić wielomianu mniejszego stopnia. Stąd dla każdego  $i$  musi być  $w_i = 0$ , czyli każdy dzielnik  $q_i \equiv 1 \pmod{p}$ . Zatem każdy dzielnik  $n$  przystaje do 1 modulo  $p$ .

## Zawody drużynowe

**1.** Udowodnić, że istnieje stała  $c < 1$  o następującej własności: dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych  $(x_n)_{n=1}^\infty$  z przedziału domkniętego  $[0, 1]$  istnieje nieskończenie wiele par indeksów  $m > n$  spełniających warunek  $|x_m - x_n| \leq \frac{c}{m}$ .

*Uwaga:* Rozwiązanie zadania dla każdej liczby  $c > 1$  nagradzane będzie dodatnią liczbą punktów.

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy przez  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  ciąg liczb harmoniczych. Skorzystamy z dwóch własności tego ciągu. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_{2n} - H_n) = \ln 2 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (H_{n+c} - H_n) = 0.$$

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Stałą  $c$  wybierzemy na końcu. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje takie  $N$ , że dla każdego  $m > n \geq N$  zachodzi  $|x_m - x_n| > \frac{c}{m}$ . Wybierzmy sobie  $M > N$  całkowite. Niech  $\sigma$  będzie taką permutacją zbioru  $\{N, N+1, \dots, M\}$ , że ciąg  $x_{\sigma(N)}, x_{\sigma(N+1)}, \dots, x_{\sigma(M)}$  jest niemalejący. Dla dowolnego  $N \leq k \leq M$  istnieją co najwyżej dwa indeksy  $l$ , dla których  $k = \max(\sigma(l), \sigma(l+1))$ . Wobec tego mamy:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{l=N}^{M-1} x_{\sigma(l+1)} - x_{\sigma(l)} > \sum_{l=N}^{M-1} \frac{c}{\max(\sigma(l), \sigma(l+1))} \geq 2c \sum_{l=(M+N)/2+1}^M \frac{1}{l} = \\ &= 2c \left[ (H_M - H_{M/2}) + (H_{M/2} - H_{(M+N)/2}) \right] \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 2c \ln 2 \end{aligned}$$

Wybierając stałą  $c$  spełniającą  $1 > c > \frac{1}{2 \ln 2} = 0.721347\dots$ , dla odpowiednio dużego  $M$ , otrzymujemy sprzeczność.

**2.** Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które spełniają równanie

$$f(xf(y) + yf(z) + zf(x)) = yf(x) + zf(y) + xf(z)$$

dla dowolnych  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

*Rozwiązanie:*

Na początku zauważmy, że  $f \equiv 0$  spełnia założenia. Teraz przyjmijmy  $f \not\equiv 0$ . Poprzez  $P(a, b, c)$  będziemy oznaczać równanie z zadania dla  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$ . Udowodnimy teraz kilka własności  $f$ .

1.  $f(0) = 0$ .

*Dowód:* Wprost z  $P(0, 0, 0)$ .

2.  $f$  jest iniekcją.

*Dowód:* Przypuśćmy, że istnieją  $a, b \in \mathbb{R}$  takie, że  $f(a) = f(b)$ .  $P(x, a, 0)$  daje  $f(xf(a)) = af(x)$ , analogicznie  $f(xf(b)) = af(b)$ . Stąd  $af(x) = f(xf(a)) = f(xf(b)) = bf(x)$  i jako, że  $f \not\equiv 0$  dostajemy sprzeczność.

3.  $f(1) = 1$

*Dowód:*  $P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  daje  $f(f(\frac{1}{3})) = f(\frac{1}{3})$ , co z iniektywności  $f$  daje  $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ . Dalej  $P(1, \frac{1}{3}, 0)$  daje  $f(1) = 1$ .

4.  $f$  jest inwolucją.

*Dowód:* Wprost z  $P(1, x, 0)$ .

5.  $f$  jest multiplikatywna.

*Dowód:* Wprost z  $P(x, f(y), 0)$ .

6.  $f$  jest nieparzysta.

*Dowód:* Z multiplikatywności  $f$  mamy  $1 = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1)^2$ . Jako, że  $f$  jest iniekcją, to  $f(-1) \neq f(1) = 1$ , stąd  $f(-1) = -1$ .

Dalej  $f(-x) = f(x \cdot (-1)) = f(-1)f(x) = -f(x)$ .

7.  $f(x)$  oraz  $x$  ma taki sam znak dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

*Dowód:* Multiplikatywność  $f$  implikuje  $f(-x^2) = f(-x \cdot x) = f(-x)f(x) = -f(x)^2$ , co razem z nieparzystością daje tezę.

Teraz skończymy dowód dowodząc, że  $f(x) = x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .  $P(x, 1, -1)$  daje  $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1$ . Z własności 7. mamy, że  $x - 1 - f(x)$  oraz  $f(x) - x - 1$  mają ten sam znak, co implikuje  $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$ . Dalej z multiplikatywności dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  mamy  $f(x^n) = f(x)^n$ , skąd  $(x^n - 1)^{\frac{1}{n}} \leq f(x) \leq (x^n + 1)^{\frac{1}{n}}$ . Biorąc  $x > 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  dostajemy  $f(x) = x$ .

Pozostaje sprawdzić, że  $f(x) = x$  spełnia równanie z zadania.

*Odpowiedź:* Jedyne funkcje spełniające to równanie to  $f \equiv 0$  oraz  $f(x) = x$ .

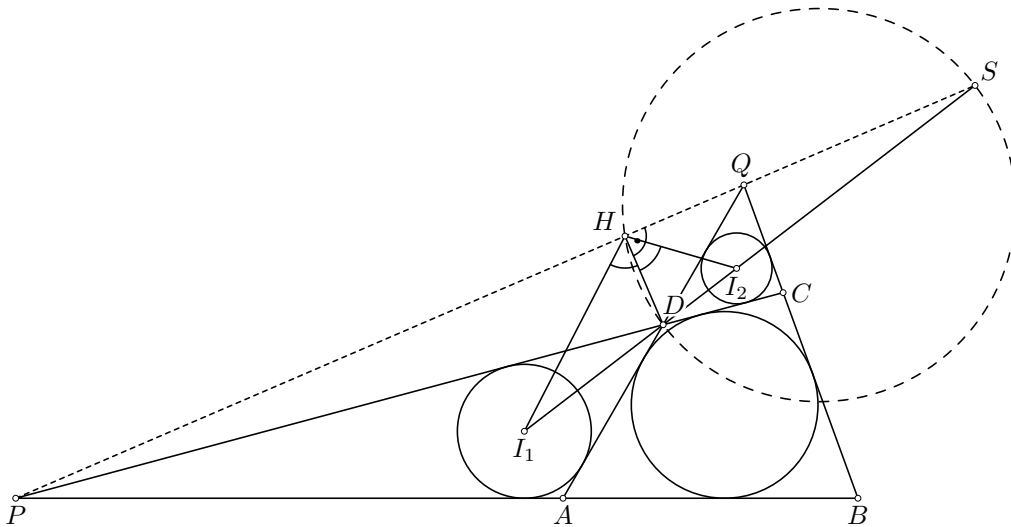
3. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w który można wpisać okrąg. Proste  $AB$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $P$ , a proste  $BC$  i  $AD$  przecinają się w punkcie  $Q$ . Punkt  $H$  jest rzutem prostokątnym punktu  $D$  na prostą  $PQ$ . Wykazać, że kąt między stycznymi z punktu  $H$  poprowadzonymi do okręgu wpisanego w trójkąt  $ADP$  jest równy kątowi między stycznymi z punktu  $H$  poprowadzonymi do okręgu wpisanego w trójkąt  $CDQ$ .

*Rozwiązanie:*

Niech  $\omega$  oznacza okrąg wpisany w  $ABCD$  oraz  $\omega_1$  i  $\omega_2$  okręgi wpisane w trójkąty  $ADP$  i  $CDQ$ ,  $I_1$  i  $I_2$  - ich środki, a  $r_1$  i  $r_2$  - ich promienie. Chcemy wykazać, że  $\frac{HI_1}{r_1} = \frac{HI_2}{r_2}$ .

Rozpatrzmy najpierw przypadek  $r_1 = r_2$ . Wówczas  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są symetryczne względem dwusiecznej kąta  $\angle ADC$ . Podobnie okrąg  $\omega$  jest symetryczny wzdłuż tej dwusiecznej. Zatem proste  $BA$  i  $BC$ ,  $DC$  i  $DA$  są symetryczne względem tej dwusiecznej, jako wspólne styczne do  $\omega$  i  $\omega_1$ ,  $\omega$  i  $\omega_2$ . Stąd  $P$  i  $Q$  również są symetryczne. Zatem dwusieczna musi być prostopadła do odcinka  $PQ$ , więc jej spodkiem jest  $H$ , stąd  $HI_1 = HI_2$ .

Rozważmy teraz  $r_1 \neq r_2$ . Niech  $S$  będzie środkiem jednokładności o skali dodatniej, przekształcającej  $\omega_1$  w  $\omega_2$ . Z twierdzenia o składaniu jednokładności punkty  $S, P, Q$  są współliniowe, ponieważ  $P$  i  $Q$  są środkami jednokładności o skalach dodatnich przekształcających  $\omega_1$  w  $\omega$  i  $\omega$  w  $\omega_2$  odpowiednio.



Ponieważ okręgi  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są jednokładne o skali ujemnej o środku w punkcie  $D$ , to  $\frac{r_1}{DI_1} = \frac{r_2}{DI_2}$ , więc chcemy pokazać  $\frac{HI_1}{DI_1} = \frac{HI_2}{DI_2}$ . Wiemy, że zbiór punktów  $X$  takich, że  $\frac{XI_1}{XI_2} = \frac{DI_1}{DI_2} = \frac{SI_1}{SI_2}$  jest okręgiem Apoloniusza o średnicy  $SD$ . Ponieważ  $PQ \perp DH$  to  $\angle SHD = 90^\circ$ , więc  $H$  leży na tym okręgu co dowodzi tezy.

4. Dany jest sześciokąt wypukły  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ . Częścią wspólną trójkątów  $A_1A_3A_5$  i  $A_2A_4A_6$  jest sześciokąt wypukły  $s$ , którego główne przekątne przecinają się w jednym punkcie. Niech  $S_i$  oznacza pole trójkąta (rozłącznego z wnętrzem sześciokąta  $s$ ) o wierzchołku  $A_i$  i boku będącym jednocześnie bokiem sześciokąta  $s$ . Niech ponadto  $S_{135}$  i  $S_{246}$  będą odpowiednio polami trójkątów  $A_1A_3A_5$  i  $A_2A_4A_6$ . Wykazać, że

$$\frac{S_1 \cdot S_3 \cdot S_5}{S_{135}} = \frac{S_2 \cdot S_4 \cdot S_6}{S_{246}}.$$

*Rozwiązanie:*

*Sposób I.*

Przyjmijmy, że dla  $i = 1, 2, \dots, 6$  punkt  $P_i$  jest przecięciem odcinków  $A_iA_{i+2}$  i  $A_{i-1}A_{i+1}$  (gdzie przyjmujemy  $P_7 = P_1$ ,  $P_8 = P_2$ ,  $P_0 = P_6$ ). Założmy ponadto, że główne przekątne sześciokąta  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  przecinają się w punkcie  $X$ . Z twierdzenia Pappusa dla trójek  $(A_1, P_6, P_5)$  i  $(A_2, P_2, P_3)$  dostajemy, że punkt  $K$  przecięcia odcinków  $A_1P_3$  i  $P_5A_2$  leży na prostej  $P_1P_4$  zawierającej także punkt  $X$  (bo  $P_1 = A_1P_2 \cap P_6A_2$  i  $X = P_6P_3 \cap P_5P_2$ ). Stosując twierdzenie Pappusa dla trójek  $(P_6, P_5, A_5)$  i  $(P_2, P_3, A_4)$  otrzymujemy, że punkt  $L$  przecięcia odcinków  $P_6A_4$  i  $A_5P_2$  również leży na prostej  $P_1P_4$  (bo  $X = P_6P_3 \cap P_5P_2$ , zaś  $P_4 = P_5A_4 \cap A_5P_3$ ).

Stosując twierdzenie Menelaosa dla trójkąta  $P_1A_3P_4$  i prostej przechodzącej przez punkty  $A_1$ ,  $K$ ,  $P_3$  dostajemy

$$\frac{P_1K}{KP_4} \cdot \frac{P_4P_3}{P_3A_3} \cdot \frac{A_3A_1}{P_1A_1} = 1,$$

zaś z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta  $P_1A_6P_4$  i prostej przechodzącej przez punkty  $A_2$ ,  $K$ ,  $P_5$  otrzymujemy

$$(*) \quad \frac{P_1K}{KP_4} \cdot \frac{P_4P_5}{P_5A_6} \cdot \frac{A_6A_2}{P_1A_2} = 1.$$

W takim razie

$$\frac{P_4P_3}{P_3A_3} \cdot \frac{A_3A_1}{P_1A_1} \cdot \frac{P_5A_6}{P_4P_5} \cdot \frac{P_1A_2}{A_6A_2} = 1.$$

Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta  $P_1A_6P_4$  i prostej przechodzącej przez punkty  $P_6$ ,  $L$ ,  $A_4$  otrzymujemy

$$\frac{P_1L}{LP_4} \cdot \frac{P_4A_4}{A_4A_6} \cdot \frac{A_6P_6}{P_1P_6} = 1,$$

natomiast z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta  $P_1A_3P_4$  i prostej przechodzącej przez punkty  $P_2$ ,  $L$ ,  $A_5$  dostajemy

$$\frac{P_1L}{LP_4} \cdot \frac{P_4A_5}{A_3A_5} \cdot \frac{A_3P_2}{P_1P_2} = 1.$$

Stąd wynika, że

$$(**) \quad \frac{P_4A_4}{A_4A_6} \cdot \frac{A_6P_6}{P_1P_6} \cdot \frac{A_3A_5}{P_4A_5} \cdot \frac{P_1P_2}{A_3P_2} = 1.$$

Mnożąc stronami równości  $(*)$  i  $(**)$  dostajemy

$$\frac{P_4P_3}{P_3A_3} \cdot \frac{A_3A_1}{P_1A_1} \cdot \frac{P_5A_6}{P_4P_5} \cdot \frac{P_1A_2}{A_6A_2} \cdot \frac{P_4A_4}{A_4A_6} \cdot \frac{A_6P_6}{P_1P_6} \cdot \frac{A_3A_5}{P_4A_5} \cdot \frac{P_1P_2}{A_3P_2} = 1.$$

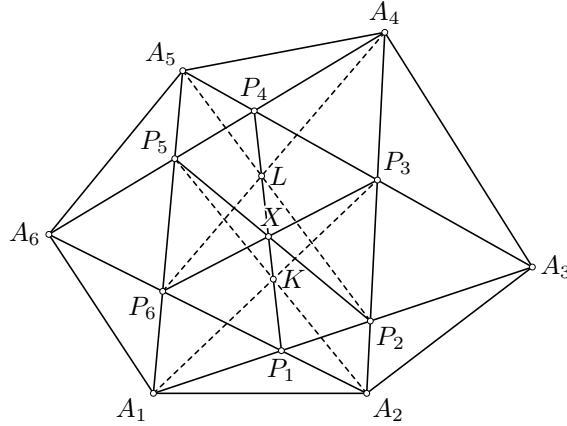
Pozostaje zauważyć, że spełnione są zależności

$$\frac{S_6}{S_{246}} = \frac{A_6P_6 \cdot P_5A_6}{A_6A_2 \cdot A_4A_6}, \quad \frac{S_{135}}{S_3} = \frac{A_3A_1 \cdot A_3A_5}{A_3P_2 \cdot P_3A_3}, \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{P_1P_2 \cdot P_1A_2}{P_1P_6 \cdot P_1A_1}, \quad \frac{S_4}{S_5} = \frac{P_4P_3 \cdot P_4A_4}{P_4P_5 \cdot P_4A_5},$$

więc równość stosunków w poprzednim zdaniu przepisuje się jako

$$\frac{S_6}{S_{246}} \cdot \frac{S_{135}}{S_3} \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_4}{S_5} = 1,$$

co jest równoważne z tezą zadania.



*Sposób II.*

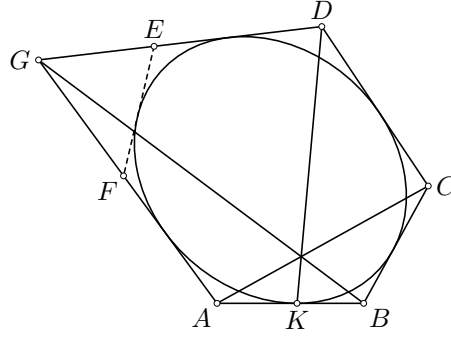
Udowodnimy najpierw następujący lemat.

*Lemat.*

Jeśli w sześciokącie wypukłym  $ABCDEF$  główne przekątne mają punkt wspólny, to istnieje elipsa wpisana w ten sześciokąt.

*Dowód lematu.*

Możemy przyjąć bez straty dla ogólności, że  $\angle F + \angle E > 180^\circ$  (takie dwa kolejne kąty istnieją, gdyż suma kątów w sześciokącie jest równa  $720^\circ$ ). Wówczas półproste  $AF$  i  $DE$  przecinają się w pewnym punkcie  $G$ , zaś pięciokąt  $ABCDG$  jest wypukły. W szczególności istnieje stożkowa  $e$  styczna do prostych zawierających boki tego sześciokąta. Niech  $K$  będzie punktem styczności stożkowej  $e$  z prostą  $AB$ . Wtedy stosując twierdzenie Brianchona dla sześciokąta  $AKBCDG$  wnosimy, że proste  $AC$ ,  $KD$  i  $BG$  mają punkt wspólny. Ponieważ proste  $AC$  i  $BG$  przecinają się wewnątrz pięciokąta  $ABCDG$ , to prosta  $KD$  przecina bok  $AB$  — innymi słowy stożkowa  $e$  jest styczna do odcinka  $AB$ . Analogicznie uzasadniamy, że stożkowa  $e$  jest styczna do boków  $BC$ ,  $CD$ ,  $DG$ ,  $GA$ . Zauważmy teraz, że z wypukłości danego pięciokąta wynika, że wszystkie punkty styczności stożkowej leżą po jednej stronie stycznej do danej stożkowej. Gdyby więc  $e$  była hiperbolą, to wszystkie punkty styczności leżałyby na jednej jej gałęzi (gdyż po jednej stronie stycznej do hiperboli może leżeć tylko jedna gałąź hiperboli). Jednakże jeśli wszystkie punkty styczności leżą na paraboli albo na jednej gałęzi hiperboli, to styczne w tych punktach wyznaczają obszar nieograniczony — w związku z tym pięciokąt  $ABCDG$  musiałby być nieograniczony i otrzymujemy sprzeczność. W takim razie stożkowa  $e$  musi być elipsą wpisaną w pięciokąt  $ABCDG$ . Przypuśćmy, że odcinek  $EF$  nie jest styczny do danej elipsy i założmy, że styczna do tej elipsy poprowadzona z punktu  $E$  (oraz różna od  $DE$ ) przecina odcinek  $AG$  w punkcie  $F'$ . Wtedy z twierdzenia Brianchona zastosowanego dla sześciokąta  $ABCDEF'$  opisanego na elipsie  $e$  otrzymujemy, że prosta  $CF'$  przechodzi przez punkt przecięcia prostych  $AD$  i  $BE$ . W takim razie musi się pokrywać z prostą  $CF$ , a stąd dostajemy  $F = F'$  — innymi słowy elipsa  $e$  jest wpisana w sześciokąt  $ABCDEF$ .



Przechodzimy do rozwiązania właściwego. Z powyższego lematu wnosimy, że istnieje elipsa wpisana w sześciokąt  $s$ . Ponieważ przekształcenia afiniczne zachowują stosunki pól figur, więc teza się nie zmienia, jeśli przekształcimy afinicznie daną elipsę na okrąg. Wystarczy więc rozwiązać zadanie w przypadku, gdy trójkąty  $A_1A_3A_5$  i  $A_2A_4A_6$  są opisane na pewnym okręgu  $o$  — przyjmijmy, że  $r$  jest promieniem tego okręgu. Tak, jak w poprzednim sposobie przyjmijmy, że dla  $i = 1, 2, \dots, 6$  punkt  $P_i$  jest przecięciem odcinków  $A_iA_{i+2}$  i  $A_{i-1}A_{i+1}$  (gdzie przyjmujemy  $P_7 = P_1$ ,  $P_8 = P_2$ ,  $P_0 = P_6$ ). Niech ponadto  $a_i$  będzie długością odcinka stycznego do okręgu  $o$  poprowadzonego z punktu  $P_i$ , zaś  $b_i$  będzie długością odcinka stycznego do okręgu  $o$  poprowadzonego z punktu  $A_i$ . Wykorzystując wzór na pole trójkąta z użyciem promienia okręgu dopisanego dla  $i = 1, 2, \dots, 6$  otrzymujemy

$$S_i = \frac{1}{2}r(A_iP_{i-1} + A_iP_i - A_{i-1}A_i) = r(b_i - a_{i-1} - a_i).$$

Ze wzoru Herona dla  $i = 1, 2, \dots, 6$  zaś dostajemy

$$S_i = \sqrt{b_i a_{i-1} a_i (b_i - a_{i-1} - a_i)},$$

skąd wynika, że

$$S_i = \frac{a_{i-1} a_i b_i}{r} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, 6.$$

Wykorzystując wzór na pole trójkąta z użyciem promienia okręgu wpisanego uzyskujemy

$$S_{135} = \frac{1}{2}r(A_1A_3 + A_3A_5 + A_5A_1) = r(b_1 + b_3 + b_5).$$

Korzystając zaś ze wzoru Herona mamy

$$S_{135} = \sqrt{(b_1 + b_3 + b_5)b_1b_3b_5},$$

co pozwala napisać, że

$$S_{135} = \frac{b_1b_3b_5}{r}.$$

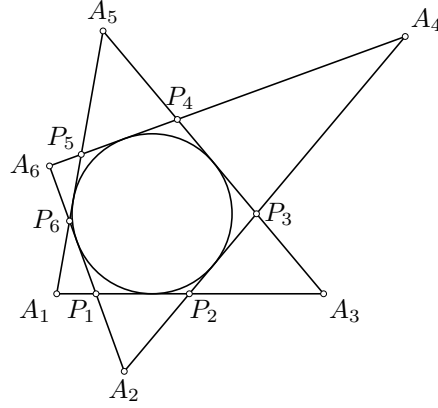
Analogicznie otrzymamy, że

$$S_{246} = \frac{b_2b_4b_6}{r}.$$

Pozostaje zauważyć, że

$$\frac{S_1 \cdot S_3 \cdot S_5}{S_{135}} = \frac{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_6}{r^2} = \frac{S_2 \cdot S_4 \cdot S_6}{S_{246}}.$$

To kończy rozwiązanie.



5. Makka Pakka i Iqipigiel grają w grę na dwóch stosach składających się z dodatniej liczby kamieni  $n$  i  $m$  odpowiednio. Ruch polega na wybraniu jednego ze stosów (oznaczymy jego rozmiar przez  $k$ ) i zabraniiu z niego  $0 < d < k$  kamieni, gdzie  $d$  dzieli  $k$ . Bohaterowie wykonują ruchy na zmianę. Jeśli na początku tury danego gracza na obu stosach znajduje się dokładnie jeden kamień, to ten gracz przegrywa. Zaczyna Makka Pakka. Wyznaczyć, w zależności od  $n$  i  $m$ , który gracz ma strategię wygrywającą.

*Rozwiązanie:*

Udowodnimy, że drugi gracz wygrywa wtedy i tylko wtedy, gdy  $v_2(n) = v_2(m)$ . Uzasadnimy następujące fakty:

1. Jeśli  $v_2(n) = v_2(m)$ , to każdy możliwy ruch psuje tę równość, tzn. jeśli  $(n', m')$  to stan po ruchu to  $v_2(n') \neq v_2(m')$ .
2. Jeśli  $v_2(n) \neq v_2(m)$  to istnieje ruch po którym  $v_2(n') = v_2(m')$ .

Strategia dla drugiego gracza wygląda więc następująco: jeśli na początku  $v_2(n) = v_2(m)$ , to po ruchu pierwszego gracza mamy  $v_2(n') \neq v_2(m')$  i dla drugiego gracza istnieje ruch po którym  $v_2(n'') = v_2(m'')$  i sytuacja się powtarza. Ponieważ gra jest skończona, a dla drugiego gracza zawsze istnieje ruch, to musi on wygrać. Analogiczne rozumowanie pokazuje, że jeśli na początku  $v_2(n) \neq v_2(m)$  to strategię wygrywającą ma pierwszy gracz. Wystarczy więc udowodnić oba wspomniane fakty.

Fakt (1): Załóżmy bez strat ogólności, że wykonujemy ruch na stosie wielkości  $n$  i odejmujemy  $d \mid n$ . Niech  $\alpha = v_2(n)$  i  $\beta = v_2(d)$ . Zachodzą równości  $n = 2^\alpha \cdot \bar{n}$ ,  $d = 2^\beta \cdot \bar{d}$  dla pewnych  $\bar{n}, \bar{d}$  nieparzystych. Oczywiście  $\beta \leq \alpha$ . Mamy:

$$n - d = 2^\alpha \cdot \bar{n} - 2^\beta \cdot \bar{d} = 2^\beta (2^{\alpha-\beta} \cdot \bar{n} - \bar{d}).$$

Jeśli  $\beta < \alpha$ , to liczba w nawiasie jest nieparzysta i  $v_2(n') = v_2(n - d) = \beta < \alpha = v_2(m')$ . Jeśli natomiast  $\beta = \alpha$ , to liczba w nawiasie jest parzysta i mamy  $v_2(n') = v_2(n - d) > \beta = \alpha = v_2(m')$ , czyli w obu przypadkach  $v_2(n') \neq v_2(m')$ .

Fakt (2): Załóżmy bez strat ogólności, że  $v_2(n) > v_2(m)$  i jak wcześniej oznaczmy  $\alpha = v_2(n)$ ,  $\beta = v_2(m)$ . Wykonujemy ruch na pierwszym stosie i wybieramy  $d = 2^\beta$ . Oczywiście  $d \mid n$  i  $d < n$  oraz mamy

$$n - d = 2^\alpha \cdot \bar{n} - 2^\beta = 2^\beta (2^{\alpha-\beta} \cdot \bar{n} - 1).$$

Liczba w nawiasie jest nieparzysta, zachodzi więc  $v_2(n') = v_2(n - d) = \beta = v_2(m) = v_2(m')$ .

*Uwaga:* Zadanie to jest szczególnym przypadkiem teorii opisywanej przez twierdzenie Sprague'a–Grundy'iego. Zanim je sformułujemy będziemy potrzebować definicji *nimbera* gry.

**Definicja.** Załóżmy, że mamy skończoną, symetryczną grę o pełnej wiedzy, w której przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Wtedy dla stanu  $T$  tej gry definiujemy *nimber* tego stanu jako

$$V(T) = \text{mex}\{V(S) \mid \text{stan } S \text{ jest osiągalny z } T \text{ w jednym ruchu}\},$$

gdzie mex zbioru to najmniejsza liczba całkowita nieujemna, która tam nie występuje.

Łatwo zauważyć, że stan jest przegrywający wtedy i tylko wtedy, gdy jego nimber to 0. Jesteśmy gotowi do sformułowania wspomnianego twierdzenia.

**Twierdzenie Sprague’a–Grundy’iego.** *Niech suma gier  $G_1 \oplus G_2$  to gra, w której gracze w ramach swojego ruchu wykonują ruch w grze  $G_1$  albo  $G_2$  i przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Dla dowolnej pary stanów  $T_1 \in G_1, T_2 \in G_2$  nimber stanu  $T_1 \oplus T_2 \in G_1 \oplus G_2$  wynosi*

$$V(T_1 \oplus T_2) = V(T_1) \text{ xor } V(T_2),$$

gdzie operacja xor to xor bitowy liczb.

Wracając do sytuacji w zadaniu, możemy zauważyć, że gra na dwóch stosach to nic innego jak suma dwóch gier na jednym stosie. Grę na jednym stosie opisuje jedna liczba całkowita - wysokość tego stosu. Na podstawie powyższego twierdzenia, stan startowy  $(n, m)$  jest przegrywający wtedy i tylko wtedy gdy  $V(n) \text{ xor } V(m) = 0 \iff V(n) = V(m)$ .

Można pokazać (ćwiczenie dla czytelnika), że dla gry przedstawionej w zadaniu zachodzi  $V(n) = v_2(n)$ , co zgadza się z konkluzją otrzymaną w pierwotnym rozwiązaniu. Teraz można też łatwo zgeneralizować grę na wiele stosów: stan startowy jest wygrywający wtedy i tylko wtedy, gdy xor wykładników 2-adycznych wysokości stosów jest niezerowy.

**6.** Niech  $S$  będzie niepustym zbiorem parzyście wielu punktów na płaszczyźnie, spośród których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnić, że istnieje podział  $S_1 \cup S_2 = S$ ,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ , dla którego otoczki wypukłe zbiorów  $S_1$  i  $S_2$  mają taką samą liczbę wierzchołków.

*Uwaga:* Otoczka wypukła skończonego zbioru punktów to wielokąt wypukły o najmniejszym polu zawierający ten zbiór.

*Rozwiązanie:*

Mówimy, że  $S = S_1 \cup S_2$  jest *partycją*, jeżeli  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ .

Dla zbioru  $T$  punktów na płaszczyźnie przez  $p(T)$  oznaczmy liczbę wierzchołków otoczki wypukłej  $\text{conv}(T)$ .

Niech  $A_1 \cdots A_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{conv}(S)$  oraz  $W \stackrel{\text{def}}{=} S \setminus \{A_1, \dots, A_n\}$ .  $W$  jest zbiorem punktów znajdujących się ściśle wewnątrz  $\text{conv}(S)$ . Rozważmy pary zbiorów  $K_j \stackrel{\text{def}}{=} \{A_1, \dots, A_j\} \cup W$ ,  $C_j \stackrel{\text{def}}{=} \{A_{j+1}, \dots, A_n\}$ , dla  $j = 0, \dots, n-1$ . Te pary tworzą partycje  $S = K_j \cup C_j$ .

Odnótujmy, że zachodzi  $p(K_{n-1}) \geq 1 = p(C_{n-1})$ . W związku z tym wybierzmy najmniejsze  $i$  takie, że  $p(K_i) \geq p(C_i)$ . Jeżeli  $i = 0$ , to  $p(W) = p(K_0) \geq p(C_0) = n$ . Wówczas z poniższego lematu dla pewnego  $W' \subset W$  zachodzi  $p(W') = n$ .

**Lemat.** *Dla dowolnego skończonego zbioru  $X$  i punktu  $A \in X$  zachodzi  $p(X \setminus \{A\}) \geq p(X) - 1$ .*

*Dowód.* Mamy dwa przypadki

- $A$  nie jest jednym z wierzchołków  $\text{conv}(X)$ . Wówczas  $p(X \setminus \{A\}) = p(X) \geq p(X) - 1$ .
- $A$  jest jednym z wierzchołków  $\text{conv}(X)$ . Przyjmijmy  $B_0 B_1 \cdots B_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{conv}(X)$ , gdzie  $B_0 = A$ . Wówczas dla pewnego ciągu  $C_1, \dots, C_\ell$  ( $\ell \geq 0$ ) zachodzi  $\text{conv}(X) = C_1 \cdots C_\ell B_1 \cdots B_k$ . Zatem  $p(X \setminus \{A\}) = \ell + k \geq k = p(X) - 1$ .

□

Istotnie, dzięki lematowi możemy sukcesywnie usuwać punkty z  $W$  aż uzyskamy żądany podzbiór (mamy  $p(\emptyset) = 0$ , więc to na pewno nastąpi). Teraz partycja  $S = W' \cup (S \setminus W')$  spełnia warunki zadania, jako że  $\text{conv}(S \setminus W') = \text{conv}(S)$ .

Teraz przyjmijmy, że  $i > 0$ . Z definicji  $i$  oraz lematu zachodzi

$$p(C_i) \geq p(C_{i-1}) - 1 \geq p(K_{i-1}) \geq p(K_i) - 1 \geq p(C_i) - 1.$$

W takim razie  $p(K_i) \in \{p(C_i), p(C_i) + 1\}$ . Jeżeli  $p(K_i) = p(C_i)$ , to  $S = K_i \cup C_i$  jest żadaną partycją.

Dalej założmy  $p(K_i) = p(C_i) + 1$ . Oznaczmy przez  $U \subset S$  zbiór punktów nie będących wierzchołkami  $\text{conv}(K_i)$  ani  $\text{conv}(C_i)$ . Naturalnie  $U \subset W$ . Jako że w rozważanym przypadku  $p(K_i) + p(C_i)$  jest nieparzyste, w szczególności mniejsze od  $|S|$ , zachodzi  $U \neq \emptyset$ . Jeżeli dla pewnego  $B \in U$ ,  $B$  nie leży wewnątrz  $\text{conv}(C_i)$ , to  $S = (K_i \setminus \{B\}) \cup (C_i \cup \{B\})$  jest żadaną partycją.

Dalej założmy, że wszystkie punkty z  $U$  leżą wewnątrz  $\text{conv}(C_i)$ . Niech  $K'_i$  będzie zbiorem tych punktów z  $K_i$ , które nie leżą wewnątrz  $\text{conv}(C_i)$ . Zachodzi  $p(K'_i) = |K'_i| < p(K_i)$ . W szczególności  $p(K'_i) \leq p(C_i)$ . Dodając sukcesywnie punkty z  $K_i \setminus K'_i$ , dzięki lematowi i  $p(K_i) > p(C_i)$ , w pewnym momencie otrzymamy zbiór  $K'_i \subset K''_i \subset K_i$  spełniający  $p(K''_i) = p(C_i)$ . Wówczas  $\text{conv}(S \setminus K''_i) = \text{conv}(C_i)$  i  $S = K''_i \cup (S \setminus K''_i)$  jest żadaną partycją.

**7.** Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite dodatnie  $n$ , że  $3^n + 61$  jest kwadratem liczby całkowitej.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że jeśli  $n$  byłoby liczbą parzystą, to mielibyśmy

$$3^n + 61 \equiv (-1)^n + 61 \equiv 62 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Skoro 2 nie jest resztą kwadratową modulo 4, to musi być  $n = 2m + 1$ , czyli szukamy rozwiązań równania

$$a^2 - 3 \cdot (3^m)^2 = 61$$

w liczbach całkowitych  $a, m \geq 0$ . Rozważmy ogólniejsze równanie postaci

$$a^2 - 3b^2 = 61 \tag{3}$$

dla  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Wynika z niego podzielność  $61|a^2 - 64b^2 = (a - 8b)(a + 8b)$ , czyli albo  $61|a - 8b$  albo  $61|a + 8b$ . Jeśli  $61|a - 8b$  to także  $61|8a - 64b$ , czyli  $61|8a - 3b$ . Stąd możemy zdefiniować parę liczb całkowitych  $(a', b')$  jako

$$(a', b') \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{8a - 3b}{61}, \frac{8b - a}{61} \right)$$

Wtedy  $a' + b'\sqrt{3} = \left( \frac{8 - \sqrt{3}}{61} \right) (a + b\sqrt{3}) = (8 + \sqrt{3})^{-1} (a + b\sqrt{3})$  i można łatwo sprawdzić, że

$$(a')^2 - 3(b')^2 = \left( \frac{8a - 3b}{61} \right)^2 - 3 \left( \frac{8b - a}{61} \right)^2 = \frac{61a^2 - 183b^2}{61} = 1.$$

Jeśli zaś  $61|a + 8b$  to znajdujemy parę liczb całkowitych  $(a', b')$  spełniającą  $a' + b'\sqrt{3} = (8 + \sqrt{3})^{-1} (a + b\sqrt{3})$  oraz  $(a')^2 - 3(b')^2 = 1$ . W obu przypadkach wszystkie rozwiązania równania 3 spełniają

$$a + b\sqrt{3} = (8 \pm \sqrt{3})(a' + b'\sqrt{3})$$

dla pewnego wyboru znaku  $\pm$  oraz pewnych liczb całkowitych  $a', b'$  spełniających  $(a')^2 - 3(b')^2 = 1$ .

**Lemat.** Wszystkie całkowite rozwiązania równania  $(a')^2 - 3(b')^2 = 1$  spełniają

$$a' + b'\sqrt{3} = \pm(2 + \sqrt{3})^k$$

dla pewnego wyboru znaku  $\pm$  oraz liczby całkowitej  $k$ .

*Dowód.* Jest to równanie Pella o rozwiązaniu podstawowym  $(2, 1)$  □

Z powyższego lematu dostajemy, że dla pewnego wyboru znaków  $\pm$  oraz liczby całkowitej  $k$  zachodzi

$$a + b\sqrt{3} = \pm(8 \pm \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^k.$$

Teraz chcemy pokazać, że dla  $(a, b)$  rozwiązujących 3 zachodzi wynikanie  $3|b \Rightarrow 2|b \vee 13|b$ . Mamy równość

$$a + b\sqrt{3} = \pm(8 \pm \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^k.$$

Wobec  $(a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = 61$  mamy także

$$a - b\sqrt{3} = \pm(8 \mp \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{-k}.$$

Ponieważ wynikanie  $3|b \Rightarrow 2|b \vee 13|b$  jest równoważne wynikaniu  $3|(-b) \Rightarrow 2|(-b) \vee 13|(-b)$  to B.S.O. wystarczy rozpatrzyć przypadek

$$a + b\sqrt{3} = (8 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^k.$$

dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definicja.** Przez  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  oznaczamy zbiór wszystkich liczb postaci  $x + y\sqrt{3}$  dla  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

Jasnym jest, że suma, różnica lub iloczyn dwóch liczb z  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  jest elementem  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ . Z niewymierności  $\sqrt{3}$  wynika także, że każdy element  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci  $x + y\sqrt{3}$  dla  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

**Definicja.** Dla liczby pierwszej  $p$  oraz  $x_1 + y_1\sqrt{3}, x_2 + y_2\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  piszemy  $x_1 + y_1\sqrt{3} \equiv_p x_2 + y_2\sqrt{3}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_1 \bmod p = x_2 \bmod p$  oraz  $y_1 \bmod p = y_2 \bmod p$ .

Jasnym jest, że dla  $p \in \mathbb{P}$  i  $u, v, w \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  z przystawania  $u \equiv_p v$  wynikają przystawania  $u+w \equiv_p v+w$  oraz  $uw \equiv_p vw$ .

Teraz obliczamy  $(2 + \sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}$ . Definiujemy  $a_k, b_k$  dla  $k \in \mathbb{Z}$  jako jedyne liczby całkowite spełniające równość

$$a_k + b_k\sqrt{3} = (8 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^k.$$

Łatwo wyznaczyć, że  $b_0 = 1, b_1 = 10, b_2 = 39$

Z przystawania  $(2 + \sqrt{3})^3 \equiv_3 1$  wynika, że

$$a_{k+3} + b_{k+3}\sqrt{3} = (a_k + b_k\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^3 \equiv_3 a_k + b_k\sqrt{3}.$$

Stąd w szczególności  $b_k \equiv b_{k+3} \pmod{3}$ , a więc  $3|b_{k+3} \Leftrightarrow 3|b_k$ , a nawet  $3|b_k \Leftrightarrow 3|b_{k \bmod 3}$ . Dzięki znajomości  $b_0, b_1, b_2$  dostajemy  $3|b_k \Leftrightarrow k \bmod 3 = 2$ .

Z przystawania  $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3} \equiv_2 1$  wynika, że

$$a_{k+2} + b_{k+2}\sqrt{3} = (a_k + b_k\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^2 \equiv_2 a_k + b_k\sqrt{3}.$$

Stąd w szczególności  $b_k \equiv b_{k+2} \pmod{2}$ , a więc  $2|b_{k+2} \Leftrightarrow 2|b_k$ , a nawet  $2|b_k \Leftrightarrow 2|b_{k \bmod 2}$ . Dzięki znajomości  $b_0, b_1$  dostajemy  $2|b_k \Leftrightarrow k \bmod 2 = 1$ .

Dostajemy więc, że jeśli  $b_k$  miałyby być podzielne przez 3, ale niepodzielne przez 2 i 13, to musi być  $k \bmod 6 = 2$ . Z przystawania  $(2 + \sqrt{3})^3 \equiv_{13} 2\sqrt{3}$  wynika  $(2 + \sqrt{3})^6 \equiv_{13} 12 \equiv_{13} -1$ , że

$$a_{k+6} + b_{k+6}\sqrt{3} = (a_k + b_k\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^6 \equiv_{13} (-a_k - b_k\sqrt{3}).$$

Stąd  $b_{k+6} \equiv -b_k \pmod{13}$ , a więc  $13|b_k \Leftrightarrow 13|b_{k \bmod 6}$ . Skoro jednak musi być  $k \bmod 6 = 2$  oraz  $b_2 = 39$  to z pewnością zachodzi  $13|b_k$ .

Otrzymaliśmy zatem, że dla dowolnego rozwiązania  $(a, b)$  zachodzi wyrażenie  $3|b \Rightarrow 2|b \vee 13|b$ . Stąd jeśli  $b = 3^m$ , to musi być  $m = 0$ , czyli  $n = 1$ . Oczywiście dla  $n = 1$  mamy  $3^n + 61 = 64 = 8^2$ .  
*Odpowiedź:* jedynie  $n = 1$  spełnia warunki zadania.

8. Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą postaci  $8n + 1$ , gdzie  $n$  jest całkowite dodatnie. Udowodnić, że zbiór liczb  $P = \{1, 2, \dots, p-1\}$  można podzielić na dwa rozłączne, równoliczne zbiory  $A, B$  spełniające

$$\prod_{a \in A} a \equiv \prod_{b \in B} b \pmod{p^3}.$$

*Rozwiązanie:*

Oczywiście  $p > 2$ . Przypomnijmy, że  $-1$  jest resztą kwadratową modulo nieparzyste  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p \equiv 1 \pmod{4}$  oraz  $2$  jest resztą kwadratową modulo nieparzyste  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p \equiv 1 \pmod{8}$  lub  $p \equiv -1 \pmod{8}$ . W szczególności zarówno  $2$  i  $-1$  są resztami kwadratowymi modulo  $p$  dane w zadaniu.

Niech  $C$  oznacza zbiór nieparzystych, niezerowych reszt kwadratowych modulo  $p$ . Ponieważ  $-1$  jest resztą kwadratową, to każdej nieparzystej reszcie kwadratowej  $x$  odpowiada parzysta reszta kwadratowa  $p - x$ . Ponadto - skoro  $2$  jest resztą kwadratową - to dzielenie przez  $2$  modulo  $p$  zadaje jakąś permutację zbioru niezerowych reszt kwadratowych. Wynika stąd, że każda reszta kwadratowa jest postaci  $\frac{p-x}{2}$  dla  $x \in C$  (jeśli jest mniejsza od  $p/2$ ) lub  $\frac{p+x}{2}$  dla  $x \in C$  (jeśli jest większa od  $p/2$ ). Stąd możemy przedstawić iloczyn wszystkich reszt kwadratowych na dwa sposoby:

$$\prod_{x \in C} x(p-x) = \prod_{x \in C} \frac{p-x}{2} \cdot \frac{p+x}{2}$$

Uwzględniając to, że dokładnie połowa niezerowych reszt kwadratowych jest nieparzysta (czyli jest ich  $2n$ ) dostajemy, że

$$2^{2n} \prod_{x \in C} x(p-x) = \prod_{x \in C} (p^2 - x^2)$$

Rozważając powyższą równość modulo  $p^3$  i rozpisując iloczyn po prawej stronie otrzymujemy (wszystkie iloczyny zawierające  $p^2$  więcej niż raz przystają do 0):

$$2^{2n} \prod_{x \in C} x(p-x) \equiv (-1)^{2n} \prod_{x \in C} x^2 \left( 1 - p^2 \sum_{x \in C} \frac{1}{x^2} \right) \pmod{p^3} \quad (4)$$

Zauważamy teraz, że modulo  $p$  zachodzi przystawanie

$$\prod_{x \in C} x^2 \cdot \sum_{x \in C} \frac{1}{x^2} \equiv \prod_{x \in C} x^2 \cdot \sum_{x \in C} (x^2)^{-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

gdzie  $y^{-1}$  oznacza odwrotność  $y$  modulo  $p$ . Istotnie, skoro  $x^2$  i  $(p-x)^2$  przystają modulo  $p$  to mamy:

$$2 \sum_{x \in C} (x^2)^{-1} \equiv \sum_{x \in C} x^{-2} + \sum_{x \in C} (p-x)^{-2} \pmod{p}$$

Ponieważ rozłączna suma  $D \stackrel{\text{def}}{=} C \cup \{p-x : x \in C\}$  to zbiór wszystkich niezerowych reszt kwadratowych oraz branie odwrotności modulo  $p$  jest permutacją  $D$ , to - oznaczając przez  $g$  generator modulo  $p$  - otrzymujemy:

$$2 \sum_{x \in C} (x^2)^{-1} \equiv \sum_{x \in D} x^2 \equiv \sum_{k=0}^{(p-3)/2} (g^{2k})^2 \equiv \frac{g^{2p-2} - 1}{g^4 - 1} \equiv 0 \pmod{p}$$

To uzasadnia, że w 4 mamy

$$2^{2n} \prod_{x \in C} x(p-x) \equiv (-1)^{2n} \prod_{x \in C} x^2 \left( 1 - p^2 \sum_{x \in C} \frac{1}{x^2} \right) \equiv (-1)^{2n} \prod_{x \in C} x^2 \pmod{p^3}$$

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla zbioru  $C'$  nieparzystych niereszt kwadratowych oraz  $D'$  niereszt kwadratowych. Jedyne czego potrzebujemy to żeby mnożenie przez  $-1$ , dzielenie przez  $2$  oraz branie odwrotności modulo  $p$  zadawało permutację  $D'$  oraz żeby zachodziło przystawanie  $\sum_{x \in D'} x^2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Pierwsze trzy warunki są oczywiście spełnione, czwarty zaś wynika z:

$$\sum_{x \in D'} x^2 \equiv \sum_{k=0}^{(p-3)/2} (g^{2k+1})^2 \equiv g^2 \frac{g^{2p-2} - 1}{g^4 - 1} \equiv 0 \pmod{4}$$

Mamy zatem

$$2^{2n} \prod_{x \in C'} x(p-x) \equiv (-1)^{2n} \prod_{x \in C'} x^2 \pmod{p^3}$$

oraz

$$2^{2n} \prod_{x \in C} x(p-x) \equiv (-1)^{2n} \prod_{x \in C} x^2 \pmod{p^3}$$

Wymnażając powyższe przystawania na krzyż oraz dzieląc obustronnie przez  $(-2)^{2n} \prod_{x \in C} x \prod_{x \in C'} x$  (jest to względnie pierwsze z  $p$ , więc możemy tak zrobić) dostajemy:

$$\prod_{x \in C} (p-x) \prod_{x \in C'} x \equiv \prod_{x \in C} x \prod_{x \in C'} (p-x) \pmod{p^3}$$

Dlatego wystarczy przyjąć:

$$\begin{aligned} A &= C' \cup \{p-x : x \in C\} \\ B &= C \cup \{p-x : x \in C'\} \end{aligned}$$

# Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Znaleźć wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , które spełniają równanie

$$f(x + yf(x)) + f(f(x)) = f(xy) + 2x$$

dla dowolnych  $x, y > 0$ .

*Rozwiązanie:*

Przez  $P(a, b)$  będziemy oznaczać równanie z zadania dla  $x = a$ ,  $y = b$ . Na początku wykazemy, że  $f$  jest iniekcją.  $P(x, \frac{y}{f(x)})$  daje

$$f(x + y) + f(f(x)) = f\left(\frac{xy}{f(x)}\right) + 2x.$$

Jeśli istnieją  $a \neq b$  takie, że  $f(a) = f(b)$ , to porównując  $P(a, \frac{b}{f(a)})$  oraz  $P(b, \frac{a}{f(b)})$  dostajemy  $2a = 2b$ . Stąd istotnie  $f$  jest iniekcją.

Teraz wykazemy, że  $f(x) \geq x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}_+$ . Przypuśćmy, że istnieje  $u \in \mathbb{R}_+$  takie, że  $f(u) < u$ .  $P(u, \frac{u}{u-f(u)})$  daje  $f(f(u)) = 2u$ . Z kolei

$$P(u, x) \Rightarrow f(u + xf(u)) = f(ux) \Rightarrow u + xf(u) = ux \Rightarrow x = \frac{u}{u - f(u)}$$

dla każdego  $x$ , co daje sprzeczność. Mamy

$$f(xy) + 2x = f(x + yf(x)) + f(f(x)) \geq x + yf(x) + x, \text{ więc } f(xy) \geq yf(x).$$

Stawiając  $y := \frac{y}{x}$  otrzymujemy  $\frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x)}{x}$  dla każdych  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . To z kolei implikuje, że  $\frac{f(x)}{x} = c$  jest stałe. Stawiając do początkowego równania sprawdzamy, że tylko  $c = 1$  spełnia założenia. Czyli jedyną taką funkcją jest  $f(x) = x$ .

2. Dany jest wielomian  $W(x)$  stopnia  $n$  o współczynnikach ze zbioru  $\{-1, 0, 1\}$ . Ponadto dana jest liczba całkowita  $k > 0$  taka, że  $(x-1)^k \mid W(x)$  oraz liczba pierwsza  $p$  spełniająca  $(n+1)^p < p^k$ . Wykazać, że zachodzi podzielność wielomianów

$$x^p - 1 \mid W(x).$$

*Rozwiązanie:*

Niech  $P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W(x)}{(x-1)^k}$ . Z algorytmu dzielenia wielomianów wynika, że skoro  $(x-1)^k$  ma wiodący współczynnik równy 1, to  $P(x)$  ma współczynniki całkowite. Niech  $\omega$  oznacza pierwiastek  $p$ -tego stopnia z jedynki, czyli liczbą zespoloną będącą pierwiastkiem wielomianu  $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$  ( $\omega = \cos\left(\frac{1}{p} \cdot 360^\circ\right) + i \sin\left(\frac{1}{p} \cdot 360^\circ\right)$ ). Wtedy wielomian  $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$  ma  $p-1$  różnych pierwiastków postaci  $\omega^k$  dla  $1 \leq k \leq p-1$ . Stąd można rozpisać

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = \prod_{k=1}^{p-1} (x - \omega^k)$$

Podstawiając do powyższej równości  $x = 1$  otrzymujemy  $\prod_{k=1}^{p-1} (1 - \omega^k) = p$ . Stąd

$$\prod_{k=1}^{p-1} W(\omega^k) = \prod_{k=1}^{p-1} (\omega^k - 1)^k P(\omega^k) = (-1)^{k(p-1)} p^k \prod_{k=1}^{p-1} P(\omega^k)$$

Zauważmy, że skoro wartość bezwzględna  $\omega^k$  wynosi 1, to skoro wszystkie współczynniki  $W(x)$  należą do  $\{-1, 0, 1\}$ , to  $W(\omega^k)$  jest sumą  $n + 1$  liczb zespolonych o wartości bezwzględnej najwyżej 1. Stąd  $|W(\omega^k)| \leq n + 1$  dla dowolnego  $1 \leq k \leq p - 1$ , więc lewa strona powyższej równości ma wartość bezwzględną najwyżej  $(n + 1)^{p-1}$ . Jeśli wykazemy, że  $\prod_{k=1}^{p-1} P(\omega^k)$  jest liczbą całkowitą to okaże się, że lewa strona powyższej równości jest liczbą całkowitą podzielną przez  $p^k$  o wartości bezwzględnej nie większej niż  $(n + 1)^{p-1}$ . Skoro  $(n + 1)^{p-1} \leq (n + 1)^p < p^k$  to oznaczałoby to, że obie strony powyższej równości wynoszą 0.

Niech  $R(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{p-2}x^{p-2}$  będzie resztą z dzielenia  $\prod_{k=1}^{p-1} P(x^k)$  przez  $x^{p-1} + \dots + x + 1$ . Z algorytmu dzielenia wielomianów wynika, że  $R(x)$  ma współczynniki całkowite. Zauważmy, że dla  $0 < m < p$  reszty z dzielenia wielomianów  $x^m, x^{2m}, \dots, x^{(p-1)m}$  przez  $x^p - 1$  to  $x, x^2, \dots, x^{p-1}$  (możliwe, że w innej kolejności). Wynika to z tego, że  $x^{km} \bmod x^p - 1 = x^{km \bmod p}$  oraz reszty z dzielenia  $m, 2m, \dots, (p-1)m$  przez  $p$  to  $1, 2, \dots, p-1$  (możliwe, że w innej kolejności). Stąd dla  $0 < m < p$  zachodzi

$$R(x) \equiv \prod_{k=1}^{p-1} P(x^k) \equiv \prod_{k=1}^{p-1} P(x^{km}) \equiv R(x^m) \pmod{x^{p-1} + \dots + x + 1}.$$

Sumując po wszystkich  $0 < m < p$  dostajemy, że

$$R(1) + (p-1)R(x) \equiv \sum_{m=1}^{p-1} R(x^m) = \sum_{i=0}^{p-2} a_i \sum_{m=0}^{p-1} x^{im} \pmod{x^{p-1} + \dots + x + 1}. \quad (5)$$

Z zależności  $\text{NWD}(x^a - 1, x^b - 1) = x^{\text{NWD}(a,b)} - 1$  wynika, że dla  $0 < i < p-1$  wielomiany  $\frac{x^p-1}{x-1}$  oraz  $\frac{x^i-1}{x-1}$  są względnie pierwsze. Dlatego mamy wynikania

$$x^p - 1 \mid x^{ip} - 1 \Rightarrow \frac{x^p - 1}{x - 1} \mid \frac{x^{ip} - 1}{x^i - 1} \cdot \frac{x^i - 1}{x - 1} \Rightarrow \frac{x^p - 1}{x - 1} \mid \frac{x^{ip} - 1}{x^i - 1} = \sum_{m=0}^{p-1} x^{im}.$$

Zatem w 5 dostajemy, że

$$R(1) + (p-1)R(x) \equiv pa_0 \pmod{x^{p-1} + \dots + x + 1}.$$

Ponieważ obie strony powyższego przystawania mają stopień mniejszy od  $p-2$  to muszą być równe. Wynika stąd, że  $R(x)$  jest wielomianem stałym. Korzystając z definicji  $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$  oraz podstawiając  $x = \omega$  otrzymujemy, że

$$\prod_{k=1}^{p-1} P(\omega^k) = R(\omega) = R(0) \in \mathbb{Z}$$

Stąd ostatecznie mamy  $\prod_{k=1}^{p-1} W(\omega^k) = 0$ , czyli istnieje  $0 < k < p$  takie, że  $W(\omega^k) = 0$ . Oznacza to, że wielomiany  $W(x)$  i  $x^{p-1} + \dots + x + 1$  mają wspólny pierwiastek. Ponieważ  $x^{p-1} + \dots + x + 1$  jest wielomianem nierozkładalnym, to wynika z tego że  $x^{p-1} + \dots + x + 1 \mid W(x)$ . Skoro wielomiany  $x - 1$  i  $x^{p-1} + \dots + x + 1$  są względnie pierwsze oraz  $x - 1 \mid W(x)$  to otrzymujemy, że  $W(x)$  jest podzielny przez  $(x - 1)(x^{p-1} + \dots + x + 1) = x^p - 1$ .

**3.** Dane są nieujemne liczby rzeczywiste  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , gdzie  $N > 1$ . Ponadto  $a_1 + a_2 + \dots + a_N \leq 500$ . Wykazać, że istnieją liczby całkowite  $k \geq 1$  oraz  $1 = n_0 < n_1 < \dots < n_k = N$  takie, że

$$\sum_{i=0}^{k-1} n_{i+1} a_{n_i} < 2025.$$

*Rozwiązanie:*

*Sposób I.* Ustalmy  $k$  tak, aby spełniało nierówności  $2^{k-1} < N \leq 2^k$ . Dla  $1 \leq i \leq k-1$ , niech  $n_i$  to indeks najmniejszego elementu spośród  $a_{2^{i-1}+1}, \dots, a_{2^i}$ . Oczywiście  $n_i \leq 2^i$  oraz

$$a_{n_i} \leq \frac{a_{2^{i-1}+1} + \dots + a_{2^i}}{2^{i-1}},$$

ponieważ średnia arytmetyczna elementów zbioru jest równa co najmniej najmniejszemu elementowi. Ponadto,  $a_{n_k} = N \leq 2^k$ . Otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^{k-1} n_{i+1} a_{n_i} \leq 2a_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_{i+1} a_{n_i} \leq 2a_1 + \sum_{i=1}^{k-1} 2^{i+1} \cdot \frac{a_{2^{i-1}+1} + \dots + a_{2^i}}{2^{i-1}} \leq 4(a_1 + \dots + a_N) \leq 2000 < 2025.$$

*Sposób II.* Wstawmy liczbę  $j$  do szukanego ciągu  $n_0, n_1, \dots, n_k$  z prawdopodobieństwem  $p_j$ . Ponieważ musimy mieć  $n_0 = 1$  i  $n_k = N$  to  $p_1 = p_N = 1$ . Dla pozostałych indeksów  $i$ , definiujemy  $p_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{i+1}$

Policzmy wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}(S)$ , gdzie

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} n_{i+1} a_{n_i}.$$

Prawdopodobieństwo, że wyraz  $ia_j$  występuje jako składnik w  $S$ , dla pewnych  $1 \leq i < j \leq N$ , wynosi

$$P_{i,j} = p_i(1 - p_{i+1}) \dots (1 - p_{j-1})p_j.$$

Zatem

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} P_{i,j} \cdot ja_i.$$

Jeśli  $j < N$  to

$$\begin{aligned} P_{i,j} \cdot j &= \frac{2}{i+1} \cdot \frac{i}{i+2} \dots \frac{j-2}{j} \cdot \frac{2}{j+1} \cdot j = 4 \cdot \frac{j \cdot \prod_{a=i}^{j-2} a}{\prod_{a=i+1}^{j+1} a} = \\ &= \frac{4i}{(j-1)(j+1)} < \frac{4i}{(j-1)j} = \frac{4i}{j-1} - \frac{4i}{j}. \end{aligned}$$

W przypadku, gdy  $j = N$  zachodzą równości

$$P_{i,N} \cdot N = \frac{2}{i+1} \cdot \frac{i}{i+2} \dots \frac{N-2}{N} \cdot 1 \cdot N = \frac{2i}{N-1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N P_{i,j} \cdot ja_i = \sum_{i=1}^{N-1} \left( \sum_{j=i+1}^N j P_{i,j} \right) a_i < \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{2i}{N-1} + \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{4i}{j-1} - \frac{4i}{j} \right) a_i = \\ &= \sum_{i=1}^{N-2} \left( \frac{2i}{N-1} + \frac{4i}{i} - \frac{4i}{N-1} \right) a_i + \frac{2(N-1)}{N-1} \cdot a_{N-1} \leq 4 \sum_{n=1}^{N-1} a_n \leq 2000. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy, że  $\mathbb{E}(S) \leq 2000$ , zatem musi istnieć ciąg indeksów  $n_0, n_1, \dots, n_k$ , dla którego  $S \leq 2000 \leq 2025$ , co kończy rozwiązanie zadania.

4. Dane są dwa prostopadłościany, pierwszy w całości zawarty w drugim. Pierwszy z nich ma wymiary  $a \times b \times c$ , a drugi  $A \times B \times C$ . Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$a + b + c \leq A + B + C.$$

*Rozwiązanie:*

*Sposób I.* Przekształćmy tezę równoważne poprzez podniesienie do kwadratu. Dostajemy

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB + BC + CA).$$

Wartości  $a^2 + b^2 + c^2$  oraz  $A^2 + B^2 + C^2$  to kwadraty długości przekątnych danych prostopadłościanów. Ponieważ przekątna prostopadłościanu jest najdłuższym odcinkiem w nim zawartym, to mamy  $a^2 + b^2 + c^2 \leq A^2 + B^2 + C^2$ . Z kolei wyrażenia  $2(ab + bc + ca)$  oraz  $2(AB + BC + CA)$  opisują pola powierzchni danych prostopadłościanów. Wystarczy więc udowodnić, że jeśli jeden prostopadłościan zawiera się w drugim, to pole powierzchni tego pierwszego jest nie większe od pola powierzchni tego drugiego. Pokażemy prawdziwość ogólniejszego faktu:

**Lemat.** *Dane są dwa wielościany wypukłe  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  spełniające  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ . Wtedy pole powierzchni  $\mathcal{P}$  jest nie większe od pola powierzchni  $\mathcal{Q}$ .*

*Dowód.* Niech  $\pi$  będzie płaszczyzną zawierającą jedną ze ścian  $\mathcal{P}$  i niech  $\bar{\pi}$  będzie półprzestrzenią o brzegu  $\pi$  i zawierającą  $\mathcal{P}$ . Rozważmy wielokąt  $\mathcal{Q}' = \bar{\pi} \cap \mathcal{Q}$ . Zawiera on  $\mathcal{P}$ , a jego pole powierzchni jest nie większe od pola powierzchni  $\mathcal{Q}$  - usunęliśmy z  $\mathcal{Q}$  fragment jego brzegu i zastąpiliśmy jego rzutem na płaszczyznę  $\pi$ , a rzutowanie nie zwiększa pola powierzchni.

Powtarzając ten proces dla wszystkich ścian  $\mathcal{P}$  dostajemy żadaną nierówność.  $\square$

Stosując powyższy lemat dla prostopadłościanów z zadania dostajemy tezę.

*Sposób II* Dla danego prostopadłościanu  $\mathcal{P}$  o wymiarach  $x \times y \times z$  i liczby rzeczywistej nieujemnej  $r$ , rozważmy zbiór punktów odległych od  $\mathcal{P}$  o co najwyżej  $r$ . Zbiór takich punktów (nazwijmy go  $\mathcal{P}_r$ ) tworzy figurę składającą się z  $\mathcal{P}$ , sześciu prostopadłościanów o wysokości  $r$ , dwunastu ćwiartek walców o promieniu  $r$  i ośmiu fragmentów kuli o promieniu  $r$ .

Całkowita objętość  $\mathcal{P}_r$  to  $xyz + 2r(xy + yz + zx) + \pi r^2(x + y + z) + \frac{4}{3}\pi r^3$ .

Wracając do problemu w zadaniu, oznaczmy prostopadłościany z zadania przez  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{Q}$  gdzie  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ . Jasnym jest, że dla każdego nieujemnego  $r$  mamy  $\mathcal{P}_r \subseteq \mathcal{Q}_r$ , co implikuje następującą nierówność między ich objętościami:

$$\begin{aligned} abc + 2r(ab + bc + ca) + \pi r^2(a + b + c) + \frac{4}{3}\pi r^3 &\leq \\ &\leq ABC + 2r(AB + BC + CA) + \pi r^2(A + B + C) + \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Tak więc, dla dowolnego  $r \geq 0$  zachodzi

$$\pi r^2((A + B + C) - (a + b + c)) + t_1 r + t_0 \geq 0,$$

dla pewnych współczynników  $t_1$  i  $t_0$  (zależnych jedynie od  $a, b, c, A, B, C$ ). Nierówność ta implikuje, że współczynnik wiodący powyższego wielomianu kwadratowego o zmiennej  $r$  jest nieujemny, co jest równoważne tezie.

**5.** Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą, a  $S$  zbiorem  $3p$  punktów kratowych na płaszczyźnie takim, że środek ciężkości tego zbioru jest punktem kratowym. Wykazać, że istnieje  $p$ -elementowy podzbiór zbioru  $S$ , którego środek ciężkości jest punktem kratowym.

*Rozwiązanie:*

Niech  $(a_i, b_i)$  dla  $i = 1, 2, \dots, 3p$  będą danymi w treści zadania punktami kratowymi. Niech ponadto

$I = \{1, 2, \dots, 3p\}$ . Rozważmy wielomiany  $3p - 1$  zmiennych  $x_1, x_2, \dots, x_{3p-1}$  nad  $\mathbb{Z}_p$ :

$$\sum_{i=1}^{3p-1} a_i x_i^{p-1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3p-1} b_i x_i^{p-1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3p-1} x_i^{p-1} = 0.$$

Z twierdzenie Chevalley'a-Warning'a liczba ich wspólnych pierwiastków jest podzielna przez  $p$ . Ponieważ  $(0, 0, \dots, 0)$  jest rozwiązaniem danego układu, więc istnieje jeszcze co najmniej jedno nietrywialne rozwiązanie  $(x_1, x_2, \dots, x_{3p-1})$ . Zauważmy, że  $x_i^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$  dla  $x_i = 0$  oraz  $x_i^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  w przeciwnym przypadku. Rozważając ostatni wielomian widzimy teraz, że zbiór  $J$  indeksów, dla których  $x_i \neq 0$  ma moc  $p$  lub  $2p$ . W takim razie patrząc na pierwsze dwa wielomiany otrzymujemy  $\sum_{i \in J} a_i \equiv 0 \pmod{p}$  oraz  $\sum_{i \in J} b_i \equiv 0 \pmod{p}$ . Jeśli  $|J| = p$ , to rozwiązanie jest zakończone, jeśli zaś  $|J| = 2p$ , to wykorzystując założenia, że  $\sum_{i \in I} a_i \equiv 0 \pmod{p}$  oraz  $\sum_{i \in I} b_i \equiv 0 \pmod{p}$  widzimy, że tym razem zbiór indeksów  $I \setminus J$  spełnia tezę zadania.

**6.** Rozważmy dwudziestościan foremny z rozróżnialnymi krawędziami ponumerowanymi liczbami  $1, 2, \dots, 30$ . Wyznaczyć liczbę kolorowań krawędzi na 3 kolory takich, że każda ściana ma krawędzie w dokładnie dwóch kolorach.

*Rozwiązanie:*

Utożsamimy kolory, których używamy z liczbami  $1, \omega, \omega^2$ , gdzie  $\omega$  spełnia  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ . Załóżmy, że ściana jest otoczona krawędziami o kolorach  $x, y, z$  i rozważmy następujące wyrażenie  $(xyz - 1)(xyz + 2)$ . Jeśli  $x = y = z$  bądź  $\{x, y, z\} = \{1, \omega, \omega^2\}$  to mamy  $xyz = 1$  i wyrażenie to jest równe 0. W przeciwnym wypadku  $xyz = \omega$  lub  $xyz = \omega^2$  i  $(\omega - 1)(\omega + 2) = \omega^2 + \omega - 2 = \omega^2 + \omega + 1 - 3 = -3$  i analogicznie dla  $\omega^2$ .

Niech  $x_1, x_2, \dots, x_{30}$  to kolory kolejnych krawędzi. Rozważmy następujący wielomian

$$P(x_1, \dots, x_{30}) = \prod_{x_i, x_j, x_k - \text{ściana}} (x_i x_j x_k - 1)(x_i x_j x_k + 2) = \prod_{x_i, x_j, x_k - \text{ściana}} (x_i^2 x_j^2 x_k^2 + x_i x_j x_k - 2).$$

Jeśli kolorowanie krawędzi spełnia warunki zadania, wtedy wartość tego wielomianu to  $3^{20}$ . W przeciwnym wypadku  $P(\vec{x}) = 0$ . W takim razie, jeśli dodamy do siebie wartości  $P$  dla wszystkich  $3^{30}$  kolorowań krawędzi, dostaniemy szukaną liczbę poprawnych kolorowań (pomnożoną przez  $3^{20}$ ).

Każda krawędź występuje w co najwyżej dwóch ścianach, więc dla wybranego  $x_i$  stopień  $x_i$  w dowolnym jednomianie wymnożonego wielomianu  $P$  to 0, 1, 2, 3 lub 4. Jeśli jednomian ma  $x_i$  w stopniu 1, 2 lub 4 to sumując ten jednomian po  $x_i = 1, \omega, \omega^2$  otrzymujemy 0. Wystarczy więc skupić się na jednomianach, gdzie wszystkie zmienne mają stopień 0 lub 3.

Na pewno mamy jednomian, gdzie wszystkie zmienne mają stopień równy 0 - jest to wyraz wolny równy  $2^{20}$ . Pokażemy teraz, że nie istnieją inne interesujące nas jednomiany.

Założmy, że istnieje taki jednomian i niech  $x_i$  występuje w nim w stopniu 3. Ponieważ istnieją tylko dwie ściany sąsiadujące z  $i$ -tą krawędzią to istnieją tylko dwa wyrażenia (w definicji  $P$ ) gdzie ta zmienna występuje. Od teraz utożsamiajmy ścianę z wyrażeniem, które jej odpowiada.

Musielimy wybrać po jednym jednomianie ze ścian sąsiadujących z  $i$ -tą krawędzią: z jednej gdzie  $x_i$  ma stopień 1, i z drugiej gdzie ma stopień 2. Patrząc teraz na inne krawędzie z obu tych ścian, dostajemy, że są one w stopniu 1 lub 2 w jednomianie. Aby to naprawić, musimy wybrać wyrażenie z kolejnych

sąsiadujących ścian w taki sposób, aby stopnie odpowiednich zmiennych sumowały się do 3. Kontynuując to rozumowanie dostajemy, że z każdej ściany musieliśmy wybrać wyrażenie w stopniu 1 lub 2 i dodatkowo wśród sąsiadujących ścian z jednej wybraliśmy wyrażenie w stopniu 2 a z drugiej stopnia 1.

W szczególności implikuje to, ściany dwudziestościanu można pokolorować na dwa kolory w taki sposób, by nie sąsiadowały ze sobą ściany jednego koloru (kolorujemy na podstawie tego, czy wybraliśmy wyrażenie  $(x_i x_j x_k)^2$  czy  $x_i x_j x_k$  z wyrażenia). Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ graf na ścianach dwudziestościanu nie jest dwudzielny - łatwo możemy tam znaleźć cykl długości 5.

Podsumowując, po dodaniu wartości  $P$  po wszystkich wartościowaniach zostaje nam suma wyrazów wolnych, czyli  $3^{30} 2^{20}$ . Każde kolorowanie policzyliśmy z wagą  $3^{20}$ , więc istnieje  $3^{10} 2^{20}$  kolorowań spełniających warunki zadania.

**7.** Dla liczby całkowitej dodatniej  $n$  niech  $f(n)$  oznacza iloczyn jej niezerowych cyfr w zapisie dziesiętnym. Definiujemy ciąg liczb całkowitych dodatnich  $(a_i)_{i=1}^{\infty}$  poprzez rekurencję  $a_{i+1} = a_i + f(a_i)$  dla  $i \geq 1$ . Wykazać, że niezależnie od wyboru wyrazu początkowego  $a_1 \in \mathbb{Z}_+$ , istnieje liczba całkowita dodatnia  $m$  taka, że  $m = f(a_i)$  dla nieskończenie wielu  $i$ .

*Rozwiązanie:*

Odnajdujemy, że możemy wybrać takie  $N \in \mathbb{Z}_+$ , że dla dowolnego  $n \geq N$  zachodzi  $9^n < 10^{n-1}$  oraz  $a_1 < \underbrace{11 \dots 1}_{N+1}$ . Ustalmy  $n \geq N$  i najmniejsze  $k$  spełniające  $a_{k+1} \geq \underbrace{11 \dots 1}_{n+1}$ . Wówczas zachodzi  $f(a_k) \leq 9^n < 10^{n-1}$ , więc  $\underbrace{11 \dots 1}_{n+1} > a_k = a_{k+1} - f(a_k) > a_{k+1} - 10^{n-1} > 10^n$ . Stąd prefiks reprezentacji dziesiętnej  $a_k$  jest postaci  $\underbrace{11 \dots 1}_{\ell} 0$  dla pewnego  $\ell > 0$ . W szczególności możemy oszacować

$$9^{n-\ell} = 1^\ell \cdot 9^{n-\ell} \geq f(a_k) = a_{k+1} - a_k \geq \underbrace{11 \dots 1}_{n+1} - \underbrace{11 \dots 1}_{\ell} 0 \underbrace{99 \dots 9}_{n-\ell} = \underbrace{11 \dots 1}_{n-\ell} + 1 > 10^{n-\ell-1}.$$

To oznacza  $n - \ell < N$ , i.e.  $f(a_k) < 9^N$ .

Teraz możemy wybrać nieskończony podciąg  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$  taki, że dla dowolnego  $k$  istnieje  $n \geq N$ , dla którego  $i_k = \min\{\ell + 1 \in \mathbb{Z}_+ : a_{\ell+1} \geq \underbrace{11 \dots 1}_{n+1}\}$ . Wówczas zawsze  $f(a_{i_k}) < 9^N$  zatem pewna wartość spośród  $\{1, \dots, 9^N - 1\}$  wystąpi nieskończenie wiele razy.

**8.** Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne, które można zapisać w postaci

$$\frac{(a_1^3 - 1)(a_2^3 - 1) \dots (a_n^3 - 1)}{(b_1^3 - 1)(b_2^3 - 1) \dots (b_m^3 - 1)}$$

dla pewnych liczb całkowitych dodatnich  $n, m$  oraz ciągów  $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^m$  liczb całkowitych większych od 1.

*Rozwiązanie:*

Jasnym jest, że wszystkie liczby wymierne, które da się uzyskać, są dodatnie. Pokażemy, że każdą dodatnią liczbę wymierną da się przedstawić w zadanej postaci.

Zauważmy, że podstawiając  $a_i = b_j^2$  dostajemy  $\frac{a_i^3 - 1}{b_j^3 - 1} = \frac{b_j^6 - 1}{b_j^3 - 1} = b_j^3 + 1$ , więc możemy również stosować czynniki postaci  $a_i^3 + 1$ . Ponadto, podstawiając pod wyrażenie  $\frac{a^3 + 1}{b^3 - 1}$  liczby  $a = 3k + 2$  oraz  $b = 3k + 1$ , dla pewnego całkowitego  $k$ , dostajemy:

$$\frac{(3k+2)^3 + 1}{(3k+1)^3 - 1} = \frac{(3k+3)((3k+2)^2 - (3k+2) + 1)}{3k((3k+1)^2 + (3k+1) + 1)} = \frac{3k+3}{3k} \cdot \frac{9k+2+9k+3}{9k^2+9k+3} = \frac{k+1}{k}$$

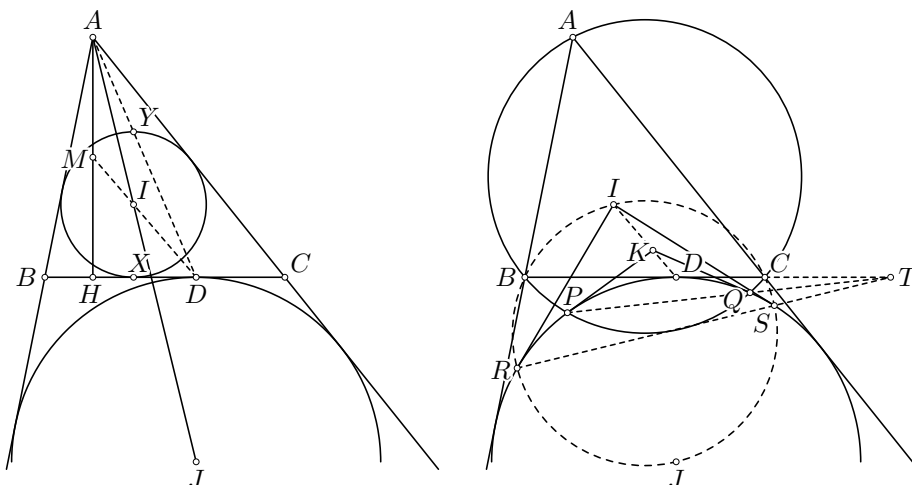
Zatem jesteśmy w stanie skonstruować liczby postaci  $\frac{k+1}{k}$  oraz podobnie  $\frac{k}{k+1}$ . Stąd ostatecznie, stosując iloczyn teleskopowy, otrzymujemy:

$$\frac{p}{q} = \prod_{k=1}^{p-1} \frac{k+1}{k} \cdot \prod_{\ell=1}^{q-1} \frac{\ell}{\ell+1}$$

9. Dany jest trójkąt różnoboczny  $ABC$  wpisany w okrąg  $o$ . Punkt  $M$  jest środkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka  $A$ . Okrąg  $\omega$  dopisany do boku  $BC$  trójkąta  $ABC$  jest styczny do boku  $BC$  w punkcie  $D$ . Okręgi  $o$  i  $\omega$  przecinają się w punktach  $P$  i  $Q$ . Udowodnić, że proste styczne do okręgu  $\omega$  w punktach  $P$  i  $Q$  przecinają się w punkcie na prostej  $DM$ .

*Rozwiązanie:*

Niech  $H$  będzie spodkiem wysokości trójkąta  $ABC$  poprowadzonej z wierzchołka  $A$ . Oznaczmy ponadto przez  $I$  środek okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ , przez  $X$  — punkt styczności tego okręgu z odcinkiem  $BC$ , zaś przez  $Y$  — obraz symetryczny punktu  $X$  względem  $I$ . Jednokładność o środku  $A$  przekształcająca okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  na okrąg  $\omega$  do niego dopisany przeprowadza punkt  $Y$  na punkt  $D$ . Innymi słowy punkty  $A, Y, D$  leżą na jednej prostej. Rozważając teraz jednokładność o środku  $D$  przekształcającą odcinek  $XY$  na odcinek  $HA$  widzimy, że obrazem punktu  $I$  jest punkt  $M$ , skąd wniosek, że punkty  $D, I, M$  leżą na jednej prostej. Wystarczy zatem wykazać, że rozważane w tezie zadania styczne przecinają się na prostej  $DI$ .



Przyjmijmy, że styczne do okręgu  $\omega$  w punktach  $P$  i  $Q$  przecinają się w punkcie  $K$ . Niech ponadto  $R$  i  $S$  będą punktami styczności prostych stycznych poprowadzonych z punktu  $I$  do okręgu  $\omega$ , zaś  $J$  — środkiem okręgu  $\omega$ . Wówczas punkty  $B, C, R, S$  leżą na okręgu  $\omega'$  o średnicy  $IJ$ . Zauważmy, że prosta  $BC$  jest osią potęgową okręgów  $o$  i  $\omega'$ , prosta  $PQ$  jest osią potęgową okręgów  $o$  i  $\omega$ , zaś prosta  $RS$  jest osią potęgową okręgów  $\omega$  i  $\omega'$ . W takim razie proste  $BC, PQ, RS$  mają punkt wspólny  $T$ . Z drugiej strony proste  $BC, PQ, RS$  są biegunowymi odpowiednio punktów  $D, K, I$  względem okręgu  $\omega$ . Z twierdzenia La Hire o wzajemności biegunowych wynika teraz, że każdy z punktów  $D, K, I$  leży na biegunowej punktu  $T$  względem okręgu  $\omega$ . To kończy rozwiązanie zadania.

10. Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ . Punkt  $X$  leży na łuku  $AB$  okręgu  $o_1$  i znajduje się wewnątrz okręgu  $o_2$ . Niech  $r_1$  będzie promieniem okręgu stycznego do odcinków  $AX$  i  $BX$  oraz wewnątrznie stycznego do okręgu  $o_2$ , zaś  $r_2$  — promieniem okręgu stycznego do odcinków  $AX$  i  $BX$  oraz wewnątrznie stycznego do okręgu  $o_1$ . Wykazać, że stosunek promieni  $r_1$  i  $r_2$  nie zależy od wyboru punktu  $X$ .

*Rozwiązanie:*

Niech prosta  $BX$  przecina okrąg  $o_2$  ponownie w punkcie  $Y$ . Niech ponadto  $I$  będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABX$ ,  $J$  środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABY$ , zaś  $K$  środkiem okręgu dopisanego do trójkąta  $ABX$  stycznego do boku  $AX$ . Oznaczmy ponadto przez  $M_1$  i  $N_1$  punkty styczności

okręgu o promieniu  $r_1$  rozważanego w treści zadania odpowiednio z odcinkami  $AX$  i  $BX$ , zaś przez  $M_2$  i  $N_2$  punkty styczności okręgu o promieniu  $r_2$  rozważanego w treści zadania odpowiednio z odcinkami  $AX$  i  $BX$ . Korzystając z lematu Sawayamy dostajemy, że punkt  $I$  leży na prostej  $M_2N_2$ , zaś punkt  $J$  leży na prostej  $M_1N_1$ . Z drugiej strony proste  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$  oraz  $XK$  są równoległe, gdyż wszystkie trzy są prostopadłe do dwusiecznej kąta  $AXB$ . W takim razie

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{XM_1}{XM_2} = \frac{JK}{IK}.$$

Zauważmy teraz, że

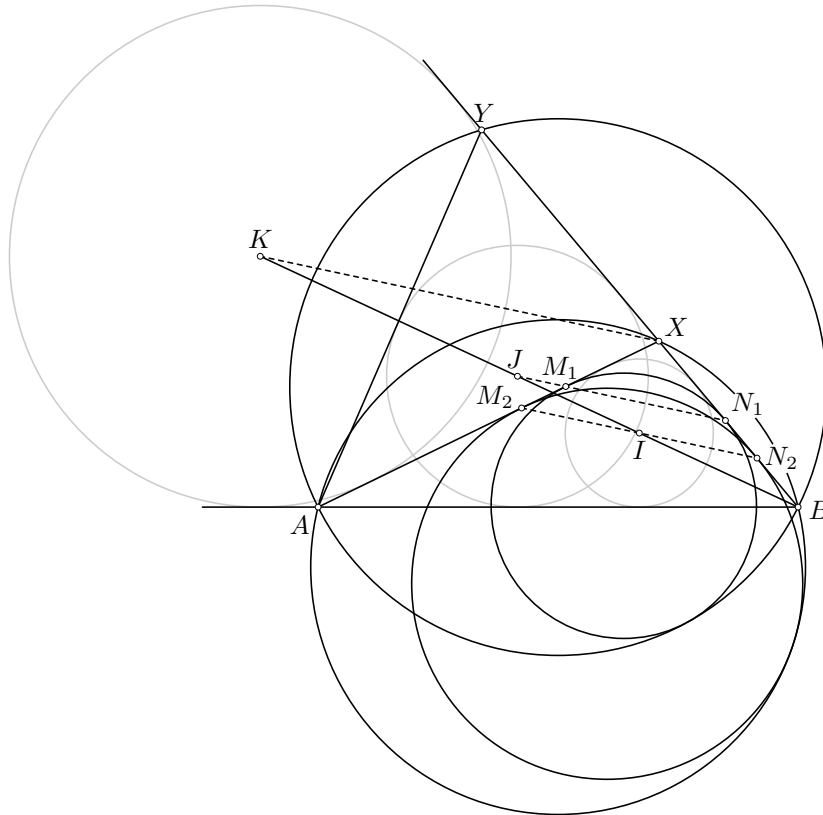
$$\sphericalangle AIK = 180^\circ - \sphericalangle AIB = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle AXB) = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle AXB,$$

$$\sphericalangle AJI = \sphericalangle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle AXB$$

oraz

$$\sphericalangle AKB = 180^\circ - \sphericalangle ABK - \sphericalangle BAK = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABX - 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAX = \frac{1}{2}\sphericalangle AXB.$$

Ponieważ miary kątów  $AXB$  i  $AYB$  są równe dla dowolnego punktu  $X$  na łuku  $AB$ , więc niezależnie od położenia punktu  $X$  wszystkie trójkąty  $AIK$  są podobne oraz wszystkie trójkąty  $AJI$  są podobne. To zaś oznacza, że stosunek  $\frac{JK}{IK}$  nie zależy od wyboru punktu  $X$ , a w związku z tym także stosunek  $\frac{r_1}{r_2}$ . Dowód jest więc zakończony.



**11.** Dana jest kula  $\Omega$  i ustalony punkt  $P$  znajdujący się wewnątrz niej, który nie jest jej środkiem. Przez punkt  $P$  narysowano trzy parami prostopadłe cięciwy  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  i  $C_1C_2$ . Punkty  $X_1$  i  $X_2$  są rzutami prostokątnymi punktu  $P$  na płaszczyzny  $A_1B_1C_1$  i  $A_2B_2C_2$  odpowiednio. Udowodnić, że istnieje punkt  $Y$  taki, że niezależnie od wyboru cięciw  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$ , punkty  $Y, X_1, X_2$  leżą na jednej prostej.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że  $A_1P \cdot A_2P = B_1P \cdot B_2P = C_1P \cdot C_2P = r^2$ . Rozważmy inwersję w punkcie  $P$  o promieniu

$r$  złożoną z symetrią względem  $P$ . Przekształcenie to zamienia miejscami punkty:  $A_1$  i  $A_2$ ,  $B_1$  i  $B_2$  oraz  $C_1$  i  $C_2$ . Płaszczyzna  $A_1B_1C_1$  przechodzi na sferę  $s$  opisaną na czworościanie  $A_2B_2C_2P$ , zaś punkt  $X_1$  przechodzi na punkt  $X'_1$  taki, że odcinek  $PX'_1$  jest średnicą tej sfery. Analogicznie płaszczyzna  $A_2B_2C_2$  przechodzi na sferę opisaną na czworościanie  $A_1B_1C_1P$ , zaś punkt  $X_2$  przechodzi na punkt  $X'_2$  taki, że odcinek  $PX'_2$  jest średnicą tej sfery. Obrazem prostej  $X_1X_2$  jest okrąg opisany na trójkącie  $PX'_1X'_2$  — należy wykazać, że wszystkie takie okręgi mają punkt wspólny, różny od  $P$ .

Skoro wektory  $\overrightarrow{PA_2}$ ,  $\overrightarrow{PB_2}$ ,  $\overrightarrow{PC_2}$  są parami prostopadłe, to równoległoscian przez nie rozpięty jest prostopadłościanem wpisanym w sferę  $s$ , w związku z czym punkt  $X'_1$  jest jego wierzchołkiem leżącym naprzeciwko punktu  $P$ . W takim razie  $\overrightarrow{OX'_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PB_2} + \overrightarrow{PC_2}$ . Stąd i z tego, że wektory  $\overrightarrow{PA_2}$ ,  $\overrightarrow{PB_2}$ ,  $\overrightarrow{PC_2}$  są parami prostopadłe otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OX'_1})^2 &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PB_2} + \overrightarrow{PC_2})^2 = OP^2 + PA_2^2 + PB_2^2 + PC_2^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PA_2} + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PB_2} + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PC_2} = \\ &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_2})^2 + (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB_2})^2 + (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC_2})^2 - 2OP^2 = 3R^2 - 2OP^2, \end{aligned}$$

gdzie  $R$  jest promieniem kuli  $\Omega$ . Analogicznie obliczamy, że  $(\overrightarrow{OX'_2})^2 = 3R^2 - 2OP^2$ . W związku z tym  $OX'_1 = OX'_2 = m$ , gdzie  $m$  jest wielkością niezależną od wyboru cięciw  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  i  $C_1C_2$ .

Niech  $K$ ,  $L$ ,  $M$  będą środkami odpowiednio cięciw  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$ . Wtedy

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO} = \vec{0}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\overrightarrow{OX'_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PB_2} + \overrightarrow{PC_2} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PM} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}).$$

Analogicznie obliczamy

$$\overrightarrow{OX'_2} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PM} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{C_2C_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{C_2C_1}).$$

W takim razie  $\overrightarrow{OX'_1} = -\overrightarrow{OX'_2}$ , co oznacza, że punkt  $O$  jest środkiem odcinka  $X'_1X'_2$ . Załóżmy, że prosta  $PO$  przecina okrąg opisany na trójkącie  $PX'_1X'_2$  ponownie w punkcie  $Q$ . Wówczas

$$OQ \cdot OP = OX'_1 \cdot OX'_2 = m^2,$$

skąd wniosek, że punkt  $Q$  nie zależy od wyboru cięciw  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  i  $C_1C_2$ . Jest on więc szukanym punktem wspólnym okręgów opisanych na wszystkich trójkątach  $PX'_1X'_2$ , co kończy rozwiązanie zadania.

## Drugi Mecz Matematyczny

**1.** Dany jest skończony zbiór  $A \subset \mathbb{R}$  oraz  $n > 0$ . Wykazać, że istnieje wielomian  $f \in \mathbb{R}[x]$  stopnia  $n$ , który ma  $n$  pierwiastków rzeczywistych oraz spełnia  $\sum_{a \in A} f(a)g(a) = 0$  dla dowolnego  $g \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\deg g < n$ .

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy warunek  $\sum_{a \in A} f(a)g(a) = 0$  przez  $P(f, g)$ . Jeśli  $n \geq |A|$ , to wystarczy wziąć dowolny wielomian  $f$  stopnia  $n$  zerujący się na  $A$ . Dowód dla  $n < |A|$  będzie składał się z trzech części.

1. Najpierw wykazemy, że jeśli dany jest taki zbiór wielomianów  $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$ , że  $\deg f_k = k$  dla wszystkich  $k$ , to dowolny wielomian  $g$  stopnia mniejszego niż  $m$  można przedstawić w postaci  $g(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i f_i(x)$  dla pewnych rzeczywistych współczynników  $a_i$ . Istotnie, niech  $\deg g = k$ , wtedy istnieje liczba  $a_k$  taka, że wielomian  $g(x) - a_k f_k(x)$  jest stopnia mniejszego niż  $k$ . Prosta indukcja kończy dowód.
2. Teraz udowodnimy, że istnieje taki ciąg wielomianów  $f_0, f_1, \dots, f_{|A|-1}$ , że  $f_n$  jest stopnia  $n$  i dla dowolnego wielomianu  $g$  stopnia mniejszego od  $n$  zachodzi warunek  $P(f_n, g)$ . Skonstruujemy ten ciąg indukcyjnie. Oczywiście możemy wziąć  $f_0 \equiv 1$ . Załóżmy teraz, że  $n > 0$  i że mamy już wielomiany  $f_0, \dots, f_{n-1}$ . Niech  $b_k$  będzie taką liczbą rzeczywistą, że  $\sum_{a \in A} a^n f_k(a) = b_k \sum_{a \in A} f_k(a)^2$ . Taka istnieje, ponieważ  $f_k$  nie może się zerować na całym zbiorze  $A$ , więc  $\sum_{a \in A} f_k(a)^2 > 0$ . Kładziemy  $f_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_k f_k(x)$ . Oczywiście  $f_n$  jest stopnia  $n$ , ponadto dla  $0 \leq k < n$  mamy

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} f_n(a) f_k(a) &= \sum_{a \in A} a^n f_k(a) - \sum_{a \in A} f_k(a) \sum_{j=0}^{n-1} b_j f_j(a) = \sum_{a \in A} a^n f_k(a) - \sum_{j=0}^{k-1} b_j \sum_{a \in A} f_j(a) f_k(a) \\ &= \sum_{a \in A} a^n f_k(a) - b_k \sum_{a \in A} f_k(a)^2 = 0. \end{aligned}$$

Z poprzedniej części dowodu wynika, że z  $P(f_n, f_k)$  dla  $k = 0, 1, \dots, n-1$  wynika  $P(f, g)$  dla dowolnego  $g$  stopnia mniejszego niż  $n$ .

3. Na koniec wykazemy, że jeśli  $f$  jest wielomianem stopnia  $n$  spełniającym  $P(f, g)$  dla dowolnego  $g$  stopnia mniejszego niż  $n$ , to  $f$  ma  $n$  pierwiastków rzeczywistych. Przypuśćmy nie wprost, że  $f$  ma  $k < n$  pierwiastków rzeczywistych. Niech  $g$  będzie wielomianem stopnia  $k$  mającym dokładnie te same pierwiastki co  $f$  (licząc z krotnościami). Wówczas  $f$  i  $g$  zmieniają znak w dokładnie tych samych punktach (pierwiastkach nieparzystej krotności), więc wielomian  $f(x)g(x)$  ma stały znak. Ma też mniej niż  $|A|$  miejsc zerowych, więc  $\sum_{a \in A} f(a)g(a) \neq 0$ , co przeczy warunkowi  $P(f, g)$  i kończy dowód.

**2.** Udowodnić, że wśród dowolnych  $2n+1$  liczb niewymiernych istnieje  $n+1$  takich liczb, że dla dowolnego  $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$  suma dowolnych  $k$  z nich jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy dane liczby niewymierne przez  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ . Skonstruujemy zbiór  $B$  w następujący sposób: na początek kładziemy  $B = \{1\}$ . Potem przechodzimy przez wszystkie indeksy  $i$  od 1 do  $2n+1$ , dla każdego  $i$  dodając  $a_i$  do  $B$  wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieją  $b_1, \dots, b_j \in B$  oraz liczby wymierne  $r_1, \dots, r_j$  spełniające  $r_1 b_1 + \dots + r_j b_j = a_i$ .

Przypuśćmy, że otrzymaliśmy zbiór  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ , gdzie  $b_k = 1$ . Zauważmy, że dla każdego  $i$  istnieje dokładnie jeden taki zestaw liczb wymiernych  $r_{i,1}, r_{i,2}, \dots, r_{i,k}$ , że  $a_i = r_{i,1} b_1 + \dots + r_{i,k} b_k$ . Istotnie, jeśli  $a_i = b_j$  dla pewnego  $j$ , to kładziemy  $r_{i,j} = 1$  oraz  $r_{i,l} = 0$  dla  $l \neq j$ , a jeśli  $a_i \notin B$ , to istnienie żądanego zestawu wynika z konstrukcji  $B$ . Ponadto gdyby dla jakiegoś  $a_i$  istniały dwa żądane zestawy,

to odejmując je dostalibyśmy  $\sum_{j=1}^k q_j b_j = 0$  dla pewnych wymiernych  $q_j$  nie wszystkich równych 0, co znowu przeczyłoby konstrukcji  $B$ .

Teraz skonstruujemy szukany zbiór co najmniej  $n + 1$  spośród liczb  $a_i$ , oznaczmy go przez  $A$ . Rozpoczynając od  $j = 1$ , wykonujemy następującą procedurę: jeśli wśród liczb  $r_{i,j}$  dla dostępnych  $a_i$  (na początku wszystkie liczby  $a_i$  są dostępne) jest nie mniej dodatnich niż ujemnych, to dodajemy do  $A$  wszystkie takie  $a_i$ , że  $r_{i,j} > 0$ , w przeciwnym przypadku dodajemy do  $A$  wszystkie takie  $a_i$ , że  $r_{i,j} < 0$ . Jeśli nie istnieje  $i$  takie, że  $r_{i,j} = 0$ , to kończymy procedurę, w przeciwnym razie kontynuujemy ją dla  $j + 1$  w miejsce  $j$ , ustalając jako dostępne te liczby  $a_i$ , dla których  $r_{i,j} = 0$ .

Z niewymierności liczb  $a_i$  wynika, że powyższa procedura zakończy się, zanim dostaniemy  $j = k$ . Zauważmy, że na każdym etapie konstrukcji dodawaliśmy do  $A$  co najmniej tyle liczb, ile odrzucaliśmy z dalszych etapów konstrukcji, więc  $|A| \geq n + 1$ . Teraz rozważmy dowolną sumę pewnych elementów  $A$ . Wybierzmy najmniejsze  $j$  takie, że  $r_{i,j} \neq 0$  dla pewnego  $i$  takiego, że  $a_i$  należy do rozważanej sumy. Z powyższej konstrukcji wszystkie takie  $r_{i,j}$  są tego samego znaku, więc rozważana suma ma niezerowy wymierny współczynnik przy  $b_j$ . Oczywiście  $j < k$ , więc liczba  $b_j$  jest niewymierna. Z tego wynika już niewymierność naszej sumy, ponieważ gdyby była ona wymierna, to po zmodyfikowaniu współczynnika przy  $b_k$  dostalibyśmy przeczącą własnościom  $B$  reprezentację  $\sum_{i=1}^k q_i b_i = 0$  dla  $q_i$  wymiernych oraz  $q_j \neq 0$ .

**3.** Dane są dodatnie liczby całkowite  $m, n$ . Niech  $A_1, \dots, A_m$  będą podzbiorami zbioru mocy  $n$ . Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_i| \cdot |A_i \cap A_j| \geq \frac{1}{mn} \left( \sum_{i=1}^m |A_i| \right)^3.$$

*Rozwiązanie:*

Ustalmy graf dwudzielny  $G = (A, B)$  na  $m + n$  wierzchołkach, gdzie  $|A| = m$  i  $|B| = n$  gdzie  $(v_i, w_j) \in E(G) \iff i \in A_j$ . Niech  $e = |E(G)|$ . Niech  $P(G)$  to liczba czwórek  $(p, q, r, s)$  że  $v_p, v_s \in A, w_q, w_r \in B$  i wierzchołki  $w_p, v_q, w_r, v_s$  tworzą ścieżkę.

Zauważmy że lewa strona nierówności jest równa  $P(G)$ , ponieważ dla ustalonych  $p$  i  $r$ , mamy  $|A_p|$  wyborów na  $v_q$  i  $|A_p \cap A_r|$  wyborów na  $v_s$ . Chcemy więc aby w dowolnym grafie dwudzielnym  $G$  zachodziło

$$P(G) \geq \frac{e^3}{mn}$$

Udowodnimy najpierw

**Lemat.** *Jeżeli  $G = (A, B)$  jest grafem dwudzielnym z  $|A| = m$  i  $|B| = n$  o  $e$  krawędziach to zachodzi  $P(G) \geq \frac{1}{27} \frac{e^3}{mn}$*

*Dowód.* Zdefiniujemy

$$A' = \{v \in A : d(v) > \frac{e}{3m}\} \quad \text{ i } \quad B' = \{v \in B : d(v) > \frac{e}{3n}\}$$

gdzie  $d(v)$  to stopień wierzchołka  $v$ . Policzmy teraz liczbę krawędzi pomiędzy  $A'$  i  $B'$ . Zauważmy że liczba krawędzi o co najmniej jednym końcu nie w  $A' \cup B'$  jest równa co najwyżej

$$\sum_{v \notin A'} d(v) + \sum_{w \notin B'} d(w) \leq \sum_{v \notin A'} \frac{e}{3m} + \sum_{w \notin B'} \frac{e}{3n} \leq \frac{2e}{3}$$

A więc pomiędzy  $A'$  i  $B'$  jest co najmniej  $\frac{e}{3}$  krawędzi. Każda krawędź  $(v, w)$  jest środkową krawędzią w  $d(v)d(w)$  ścieżkach długości 3, a więc korzystając tylko z krawędzi pomiędzy  $A'$  i  $B'$  otrzymujemy

$$\frac{e}{3} \cdot \frac{e}{3n} \cdot \frac{e}{3m} = \frac{e^3}{27mn}$$

□

Teraz dla danego grafu dwudzielnego  $G$  rozważmy graf  $G^{\otimes k}$  którego wierzchołkami są krotki  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  gdzie  $a_i \in A \forall i$  po jednej stronie i  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  gdzie  $b_i \in B \forall i$  po drugiej. Dwie krotki łączymy krawędzią, jeżeli dla każdego  $i \leq k$ ,  $(a_i, b_i) \in E(G)$ . Zauważmy że liczba wierzchołków po dwóch stronach  $G^{\otimes k}$  wynosi odpowiednio  $m^k$  i  $n^k$ . Widzimy również że liczba krawędzi jest równa  $e^k$  i  $P(G^{\otimes k}) = P(G)^k$ , ponieważ na każdej z  $k$  pozycji możemy wybrać ścieżkę z oryginalnego grafu. Stosując teraz lemat dla  $G^{\otimes k}$  widzimy że

$$P(G)^k = P(G^{\otimes k}) \geq \frac{1}{27} \frac{e^{3k}}{m^k n^k}$$

Biorąc teraz pierwiastek  $k$ -tego stopnia po obu stronach i zauważając że  $\sqrt[k]{\frac{1}{27}} \rightarrow 1$  gdy  $k \rightarrow \infty$ , otrzymujemy

$$P(G) \geq \frac{e^3}{mn}$$

Co kończy dowód.

4. Maks i Antek grają w następującą grę: najpierw Maks ustala pewną permutację  $\sigma$  liczb od 1 do  $n$ . W swoim ruchu Antek podaje pewną permutację  $\tau$  liczb od 1 do  $n$ . Jeśli  $\tau = \sigma$ , to Antek wygrywa. W przeciwnym razie Maks odpowiada mu, czy istnieje takie  $1 \leq i \leq n$ , że  $\tau(i) = \sigma(i)$ . Wykazać, że Antek może wygrać w co najwyżej  $n \log_2 n + 2025n$  ruchach.

*Rozwiązanie:*

Wskażemy algorytm, który pozwoli znaleźć Antkowi permutację  $\pi$  w żądanej liczbie ruchów. Zaczniemy od pokazania, że można w mniej niż  $2n$  ruchach wskazać permutację  $\pi$ , która nie pokrywa się z  $\sigma$  na żadnej pozycji (nazwiemy taką permutację *nieporządkiem*).

Jeśli  $n$  jest parzyste, to pytamy o  $n$  cyklicznych przesunięć permutacji identycznościowej. Gdyby żadne z nich nie było nieporządkiem, to liczby  $\sigma(i) - i$  dawałyby parami różne reszty modulo  $n$  i mielibyśmy

$$0 = \sum_{i=1}^n (\sigma(i) - i) \equiv_n \sum_{i=0}^{n-1} i \equiv_n \frac{n}{2},$$

co dałoby sprzeczność. Dla  $n$  nieparzystego zaczynamy od  $n - 1$  zapytań o permutacje mające ustaloną wartość 1 na pozycji 1 i będące cyklicznymi przesunięciami identyczności na pozycjach od 2 do  $n$ . Z powyższych rozważań wynika, że jeśli żadna z tych permutacji nie jest nieporządkiem, to  $\sigma(1) = 1$ . Wystarczy teraz powtórzyć powyższe  $n - 1$  zapytań z 2 na pozycji 1 oraz 1 w miejsce 2 w cyklicznych przesunięciach, by dostać nieporządek.

Teraz odejmijmy 1 od elementów permutowanego zbioru, dostając zbiór  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Niech  $2^m$  będzie najmniejszą potęgą dwójki nie mniejszą od  $n$ . Dla  $1 \leq i < 2^m$  definiujemy permutację  $\pi^i$  w następujący sposób: na początek  $\pi^i = \pi$ , a potem dla każdego  $0 \leq j \leq n - 1$ , jeśli  $\pi(j) \oplus i$  należy do zbioru  $\{0, \dots, n - 1\}$ , to w  $\pi^i$  zamieniamy ze sobą wartości  $\pi(j)$  oraz  $\pi(j) \oplus i$ . Tutaj  $\oplus$  oznacza binarną operację XOR na liczbach zapisanych w systemie dwójkowym. Zauważmy, że  $\pi^i$  powstaje z co najwyżej  $\frac{n}{2}$  zamian par rozłącznych elementów, ponieważ  $\pi(j) \oplus i \oplus i = \pi(j)$ .

Mając ustalony nieporządek  $\pi$ , wykonujemy następujący algorytm:

1. Definiujemy licznik  $i$ , początkowo ustawiamy  $i = 1$ . Jeśli  $i = 2^m$ , to kończymy algorytm.
2. Pytamy o  $\pi^i$ . Jeśli jest nieporządkiem, zmieniamy  $i$  na  $i + 1$ , po czym wracamy do kroku 2. Jeśli nie jest nieporządkiem, przechodzimy do kroku 3 z  $\pi' = \pi^i$ .
3. Ustawiamy wszystkie zamiany w  $\pi'$  w jakimś porządku, po czym binarnie wyszukujemy pierwszą taką, że permutacja powstała przez złożenie  $\pi$  z nią i wszystkimi wcześniejszymi zamianami nie jest nieporządkiem. Oznaczmy permutację powstałą przez złożenie  $\pi$  z tylko tą jedną zamianą przez  $\rho$

oraz zamienione elementy przez  $\rho(j)$ ,  $\rho(k)$ . Zauważmy, że w tym kroku wykonaliśmy co najwyżej  $\log_2(n)$  zapytań.

4. Ustalmy element  $a$  różny od  $\rho(j)$  i  $\rho(k)$ . Zapytajmy o permutację  $\rho$  złożoną z zamianą  $a$  i  $\rho(j)$ . Jeśli ta permutacja jest nieporządkiem, to  $\rho(k) \neq \sigma(k)$ , a jeśli  $\rho(k) = \sigma(k)$ , to musi być  $\rho(j) = \sigma(j)$ , więc permutacja, o którą zapytaliśmy, jest nieporządkiem. Stąd odpowiedź na to zapytanie pozwala nam znaleźć  $\sigma(k)$ , jeśli  $\sigma(k) = \rho(k)$ . Podobnie zapytaniem o  $\rho$  złożoną z zamianą  $a$  i  $\rho(k)$  sprawdzamy  $\sigma(j)$ .
5. Pytamy o  $\pi'$  z pominiętą zamianą  $\rho(j)$  i  $\rho(k)$ . Jeśli  $\pi'$  jest nieporządkiem, zmieniamy  $i$  na  $i + 1$ , po czym wracamy do kroku 2. Jeśli nie, to wracamy do kroku trzeciego z permutacją, o którą zapytaliśmy, w miejsce  $\pi'$ .

Jest jasne, że powyższy algorytm kończy się w skończonym czasie. Znajduje on całą permutację  $\sigma$ , ponieważ dla każdego  $j$  oraz  $k$  takiego, że  $\pi(k) = \sigma(j)$ , istnieje  $i \neq 0$  takie, że  $\pi(k) \oplus i = \pi(j)$ . Oszacujmy liczbę wykonanych zapytań. Zapytań zwiększających  $i$  jest co najwyżej  $2^m \leq 2n$ . Każde wykonanie kroków 3 i 4 razem z zapytaniem rozpoczynającym je daje co najwyżej  $\log_2(n) + 3$  zapytań. Ponadto każde wykonanie kroku 4 znajduje nam przynajmniej jeden element permutacji  $\sigma$ . Nigdy nie wskażemy dwa razy tego samego elementu, ponieważ dla tego samego  $i$  krok 4 jest wykonywany na rozłącznych parach oraz tylko dla jednego  $i$  zachodzi  $\sigma(j) \oplus i = \pi(j)$ . Stąd wynika, że algorytm wykonuje nie więcej niż  $2n + n(\log_2(n) + 3) + 2n \leq n \log_2(n) + 2025n$  kroków.

5. Pewne schronisko dla kotów zapewnia schronienie dla  $m$  spośród tych zwierząt. Kotki w schronisku zaczęły zapadać na tajemniczą chorobę, przez którą eksplodują. Szalony naukowiec Dexter podjął próbę wyleczenia tej choroby. Opracował on dwa typy sznurów - konopne i azbestowe, po czym każde dwa kotki związał ze sobą sznurem jednego z tych typów. W jednym zabiegu Dexter potrafi wyleczyć dowolne trzy kotki, z których każde dwa są połączone tym samym typem sznura. Po udanym zabiegu Dexter odwiązuje wyleczone kotki od wszystkich pozostałych i kontynuuje wykonywanie zabiegów.

Powiemy, że dwa zabiegi są tego samego typu, gdy są przeprowadzone na kotkach związanych tym samym typem sznura. Niech  $f(n)$  oznacza najmniejszą liczbę  $m$ , dla której Dexter może przeprowadzić  $n$  zabiegów tego samego typu. Udowodnić, że istnieją takie liczby całkowite  $N$ ,  $a$ ,  $b$ , że  $f(n) = an + b$  dla dowolnego  $n > N$  oraz wyznaczyć wartość  $a$ .

*Rozwiązanie:*

Zadanie tłumaczy się na język grafowy w następujący sposób:  $f(n)$  jest najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą  $m$  o tej własności, że z dowolnego kolorowania krawędzi klik  $K_m$  dwoma kolorami można wybrać  $n$  rozłącznych wierzchołkowo monochromatycznych trójkątów tego samego koloru. Nazwijmy kolory konopnym i azbestowym.

Zacniemy od wykazania, że  $f(n) > 5n - 2$ . Świadczy o tym graf o  $5n - 2$  wierzchołkach złożony z konopnej klik  $K_{3n-1}$  i azbestowej klik  $K_{2n-1}$ , połączonych azbestowymi krawędziami.

Teraz udowodnimy, że dla  $n \geq 2$  zachodzi  $f(n+1) \leq f(n) + 5$ . Niech  $m = f(n+1) - 1$ , rozważmy takie kolorowanie krawędzi  $K_m$ , w którym nie ma  $n+1$  rozłącznych trójkątów tego samego koloru. Jeśli weźmiemy dowolnych 6 wierzchołków z  $K_m$ , to pewne trzy z nich tworzą monochromatyczny trójkąt. Usuając znalezione trójkąty i biorąc szóstki spośród pozostałych wierzchołków możemy udowodnić, że w naszym kolorowaniu jest co najmniej  $\lfloor \frac{m-3}{3} \rfloor$  monochromatycznych trójkątów. Wiemy, że  $m > 5n + 2 \geq 3n + 6$ , więc tych trójkątów jest co najmniej  $n + 1$ . Oznacza to, że jest wśród nich i trójkąt konopny, i trójkąt azbestowy. Spójrzmy teraz na krawędzie między tymi dwoma trójkątami i zauważmy, że z któregoś spośród ich wierzchołków muszą wychodzić co najmniej dwie krawędzie w kolorze innym niż kolor jego trójkąta. Istotnie, w przeciwnym przypadku moglibyśmy pokolorować co najwyżej sześć krawędzi (po jednej na każdy wierzchołek), a jest ich dziewięć. Stąd wynika, że w naszym kolorowaniu  $K_m$  istnieją dwa monochromatyczne trójkąty różnych kolorów o wspólnym wierzchołku. Usuńmy uzyskaną piątkę

wierzchołków z naszego grafu, wówczas dostajemy kolorowanie kliku  $K_{m-5}$ , w którym nie ma  $n$  rozłącznych trójkątów tego samego koloru. Istotnie, gdyby było w nim takich  $n$  trójkątów, to niezależnie od tego, w jakim one są kolorze, po przywróceniu usuniętej piątki wierzchołków dostalibyśmy  $n + 1$  trójkątów przeczących wyborowi naszego kolorowania  $K_m$ . Stąd  $f(n) > m - 5$ , czyli  $f(n) \geq f(n + 1) - 5$ .

Z powyższych obserwacji wynika, że ciąg  $f(n) - 5n$  jest nierosnący i ograniczony z dołu. To oznacza, że od pewnego miejsca jest on stały, czyli  $f(n) = 5n + b$  dla pewnego  $b$ .

**6.** Podzbiór  $U$  zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  nazwiemy *n-bytomskim*, jeśli dla dowolnych dwóch różnych  $a, b \in U$  zachodzi  $a \mid \binom{a}{b}$ . Udowodnić, że istnieje taka stała  $C > 0$ , że dla  $n \geq 2$  moc zbioru  $n$ -bytomskiego wynosi nie więcej niż  $\frac{Cn}{\ln n}$ .

*Rozwiązanie:*

Dla liczby pierwszej  $p$  niech  $U_p := \{u \in U : p \mid u\}$ . Udowodnimy najpierw, że  $|U_p| \leq \left\lceil \frac{n}{p^2} \right\rceil$ . Dla  $pm, pn \in U$  gdzie  $m > n$  mamy  $pm \mid \binom{pm}{pn}$  w szczególności  $p \mid \binom{pm}{pn}$ . Skorzystamy teraz z

**Twierdzenie (Lucas).** *Dana jest liczba pierwsza  $p$  oraz liczby  $n = n_s p^s + n_{s-1} p^{s-1} + \dots + n_1 p + n_0$  i  $m = m_s p^s + m_{s-1} p^{s-1} + \dots + m_1 p + m_0$  zapisane w bazie od podstawie  $p$ . Wtedy zachodzi*

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{i=0}^s \binom{n_i}{m_i} \pmod{p}$$

gdzie  $\binom{l}{k} = 0$  jeśli  $k > l$ .

Z tw. wnioskujemy, że w zapisie o podstawie  $p$ ,  $m$  musi mieć co najmniej jedną cyfrę mniejszą od odpowiadającej cyfry  $n$ . Mamy więc, że dla każdego  $k \in \mathbb{Z}_+$ , wśród liczb  $kp, kp + 1, \dots, kp + p - 1$  co najwyżej jedna może należeć do  $U_p/p$  (gdzie  $U_p/p \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{u}{p} : u \in U_p\}$ ). Skoro  $U_p/p \subseteq [0, \frac{n}{p}]$ , otrzymujemy  $|U_p| \leq \left\lceil \frac{n}{p^2} \right\rceil$ , czyli w szczególności dla  $p \leq \sqrt{n}$  zachodzi  $|U_p| \leq \frac{2n}{p^2}$ . Ustalmy jakąś dużą stałą  $M$ . Niech  $K$  będzie taką stałą, że dla  $n > 1$  zachodzi  $\pi(n) \leq \frac{Kn}{\ln n}$ , gdzie  $\pi(n)$  oznacza liczbę liczb pierwszych mniejszych równych  $n$ . Elementów  $U$  jest najwyżej

$$(1 + \log_2 n)^{\pi(\frac{1}{M} \ln n)} + \sum_{\frac{1}{M} \ln n \leq p \leq \sqrt{n}} |U_p| + \frac{Kn}{\ln n}.$$

Ostatni składnik szacuje liczbę liczb pierwszych w  $U$ . Środkowy składnik szacuje ile może być w  $U$  liczb złożonych o jakimś dzielniku pierwszym większym równym  $\frac{1}{M} \ln n$ . Pierwszy składnik szacuje liczbę tych liczb w  $U$ , których wszystkie dzielniki pierwsze są mniejsze niż  $\frac{1}{M} \ln n$  – każdą taką liczbę można zapisać w postaci  $p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$  przy czym  $p_i^{\alpha_i} \leq n$  daje  $\alpha_i \in [0, \log_2 n]$ . Ponieważ  $s \leq \pi(\frac{1}{M} \ln n)$  to mamy najwyżej  $(1 + \log_2 n)^{\pi(\frac{1}{M} \ln n)}$  wyborów na ciąg wykładników  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ .

Oszacujemy teraz dwa pierwsze składniki powyższej sumy. Zaczynając od drugiego:

$$\sum_{\frac{1}{M} \ln n \leq p \leq \sqrt{n}} |U_p| \leq \sum_{\frac{1}{M} \ln n \leq p \leq \sqrt{n}} \frac{2n}{p^2} \leq 2n \sum_{\frac{1}{M} \ln n \leq k} \frac{1}{k^2} \leq \frac{4nM}{\ln n},$$

przy czym ostatnie oszacowanie wynika z

$$\sum_{\frac{1}{M} \ln n \leq k} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{\frac{1}{M} \ln n \leq k} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} = \frac{2}{\frac{1}{M} \ln n} = \frac{2M}{\ln n}.$$

Pierwszy czynnik możemy z kolei oszacować przez

$$(1 + \log_2 n)^{\pi(\frac{1}{M} \ln n)} = \exp \left( \ln(1 + \log_2 n) \pi \left( \frac{1}{M} \ln n \right) \right) \leq \exp \left( \frac{\ln(1 + \log_2 n) \frac{K}{M} \ln n}{\ln \left( \frac{1}{M} \ln n \right)} \right)$$

Teraz można dobrać  $M$  tak duże, że dla odpowiednio dużych  $n$  zachodzi oszacowanie

$$\frac{\ln(1 + \log_2 n)^{\frac{K}{M}} \ln n}{\ln\left(\frac{1}{M} \ln n\right)} \leq \frac{1}{2} \ln n.$$

Wtedy dla odpowiednio dużych  $n$  możemy napisać

$$(1 + \log_2 n)^{\pi(\frac{1}{M} \ln n)} + \sum_{\frac{1}{M} \ln n \leq p \leq \sqrt{n}} |U_p| + \frac{Kn}{\ln n} \leq \exp\left(\frac{\ln n}{2}\right) + \frac{4nM}{\ln n} + \frac{Kn}{\ln n}.$$

Stąd istnieje taka stała  $C > 0$ , że zbiór  $U$  ma najwyżej  $\frac{Cn}{\ln n}$  elementów.

**7.** Dana jest liczba pierwsza  $p = 24k + 11$ . Wykazać, że istnieje takie  $r$  całkowite, że dla żadnego  $x$  liczba  $x^3 - 2x - r$  nie dzieli się przez  $p$ .

*Rozwiązanie:*

Innymi słowy trzeba wykazać, że odwzorowanie  $\mathbb{Z}_p \ni x \rightarrow x^3 - 2x \in \mathbb{Z}_p$  nie jest "na". Ponieważ  $\mathbb{Z}_p$  jest zbiorem skończonym, to równoważnie trzeba wykazać, że to odwzorowanie nie jest różnowartościowe. Stąd wystarczy wskazać takie dwa różne  $x, y \in \mathbb{Z}_p$ , że  $x^3 - 2x \equiv y^3 - 2y \pmod{p}$ . Ponieważ  $x^3 - 2x - (y^3 - 2y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2)$  to wystarczy wskazać takie dwa różne  $x, y \in \mathbb{Z}_p$ , że  $x^2 + xy + y^2 - 2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Z prawa wzajemności reszt kwadratowych wynika, że:

$$p \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = -1$$

$$p \equiv 3 \pmod{8} \Rightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = -1$$

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{2(p-1)}{4}} \left(\frac{p}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = 1.$$

Stąd  $-1$  oraz  $2$  nie są resztami kwadratowymi modulo  $p$ , zaś  $3$  jest.

Wykażemy teraz, że istnieje takie  $x \in \mathbb{Z}_p$ , że  $x^2 + x + 1$  jest nieresztą kwadratową. Zauważmy, że nie może być  $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , ponieważ to wymuszałoby istnienie  $x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  i dalej z Małego Twierdzenia Fermata

$$x \equiv x^{2p-1} \equiv (x^3)^{16k+7} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Jednak wtedy  $0 \equiv x^2 + x + 1 \equiv 3 \pmod{p}$ , czyli sprzeczność. Rozważmy teraz wartość (modulo  $p$ ) sumy

$$\sum_{x=0}^{p-1} (x^2 + x + 1)^{\frac{p-1}{2}}. \quad (6)$$

Ponieważ  $x^2 + x + 1$  nie przystaje nigdy do  $0$ , to każdy składnik powyższej daje – na mocy kryterium Eulera – albo resztę  $1$  (gdy  $x^2 + x + 1$  jest resztą kwadratową) albo resztę  $-1$  (w przeciwnym razie). Załóżmy nie wprost, że każdy składnik sumy daje resztę  $1$ . Wtedy cała suma daje resztę  $0$ . Z drugiej strony zauważmy, że sumujemy pewien wielomian unormowany stopnia  $p-1$  dla  $x = 0, \dots, p-1$ . Zachodzi przystawanie

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^k \equiv \begin{cases} 0 & 0 \leq k < p-1 \\ -1 & k = p-1 \end{cases}$$

Stąd wartość sumy 6 to  $-1$  modulo  $p$ . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że  $x^2 + x + 1$  jest nieresztą kwadratową dla pewnego  $x$ .

Oznaczmy takie  $x$  przez  $z$ . Oczywiście  $z \not\equiv 1 \pmod{p}$ , bo 3 jest resztą kwadratową. Ponieważ 2 jest nieresztą kwadratową, to  $2(z^2 + z + 1)^{-1}$  jest resztą kwadratową, gdzie  $(z^2 + z + 1)^{-1}$  oznacza odwrotność  $z$  modulo  $p$ . Niech zatem  $y^2 \equiv 2(z^2 + z + 1)^{-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Wtedy oznaczwszy  $x = yz$  mamy  $x^2 + xy + y^2 \equiv 2 \pmod{p}$ . Oczywiście  $x \not\equiv y \pmod{p}$ , ponieważ  $y \not\equiv 0 \pmod{p}$  oraz  $z \not\equiv 1 \pmod{p}$ .

Dostajemy zatem, że odwzorowanie  $\mathbb{Z}_p \ni x \rightarrow x^3 - 2x \in \mathbb{Z}_p$  nie jest różnowartościowe, co kończy dowód zadania.

8. Wyznaczyć najmniejszą liczbę dodatnią  $C$ , dla której nierówność

$$\text{NWD}(n, \lfloor n\sqrt{2} \rfloor) < C\sqrt{n}$$

jest spełniona dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$ .

*Rozwiązanie:*

Ustalmy  $n$  i niech  $m \stackrel{\text{def}}{=} \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ , czyli  $m^2 < 2n^2 < (m+1)^2$  (równość oczywiście nie może zajść przez niewymierność  $\sqrt{2}$ ). Rozważmy  $d = \text{NWD}(m, n)$ . Ponieważ

$$d^2 \mid 2n^2 - m^2 \leq (m+1)^2 - 1 - m^2 = 2m < 2\sqrt{2}n,$$

to mamy  $d < \sqrt[4]{8}\sqrt{n}$ . Stąd dostajemy, że  $C \leq \sqrt[4]{8}$ . Wykażemy teraz, że musi być  $C \geq \sqrt[4]{8}$ . Rozważmy równanie  $x^2 - 2y^2 = -1$ . Ma ono nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich, ponieważ  $(x, y) = (1, 1)$  jest jego rozwiązaniem oraz z każdego rozwiązania całkowitego dodatniego  $(x, y)$  możemy uzyskać rozwiązanie o ściśle większym  $y$  biorąc  $(x', y') = (3x + 4y, 3y + 2x)$ . Dla  $x, y \in \mathbb{Z}_+$  spełniających  $x^2 - 2y^2 = -1$  ustalmy  $n = 2xy$  oraz  $m = 2x^2$ . Wtedy  $m^2 = 4x^4 < 4x^2(x^2 + 1) = 8x^2y^2 = 2n^2$  oraz wobec  $y^2 = \frac{x^2+1}{2} \leq x^2$  mamy  $2n^2 = 8x^2y^2 = 4x^2(x^2 + 1) = 4x^4 + 4x^2 < (2x^2 + 1)^2 = (m+1)^2$ . Zatem  $m = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ , a  $\text{NWD}(m, n) \geq 2x = \sqrt{\frac{2xn}{y}}$ . Rozważmy zatem ciąg par liczb całkowitych dodatnich  $(x_k, y_k)$  spełniających  $x_k^2 - 2y_k^2 = -1$  oraz  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \infty$  (z wcześniejszych rozważań wiemy, że taki istnieje). Zauważmy, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x_k}{y_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{4(2y_k^2 - 1)}{y_k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{4(2y_k^2 - 1)}{y_k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[4]{8 - \frac{4}{y_k^2}} = \sqrt[4]{8}$$

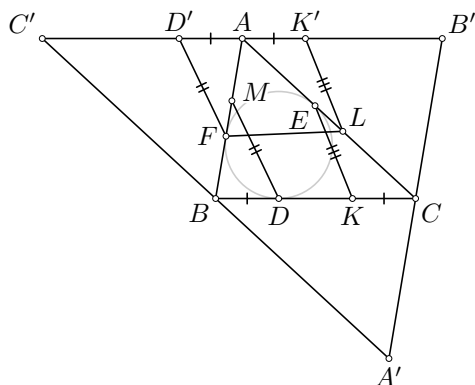
Oznaczmy  $n_k = 2x_k y_k$  oraz  $m_k = 2x_k^2$ . Z definicji  $C$  wynika, że dla każdego  $k$  zachodzi  $\sqrt{\frac{2x_k}{y_k}} \leq \frac{\text{NWD}(n_k, m_k)}{\sqrt{n_k}} \leq C$ , więc przechodząc do granicy mamy  $\sqrt[4]{8} \leq C$ . Stąd mamy:

*Odpowiedź:*  $C = \sqrt[4]{8}$ .

9. Okrąg wpisany w trójkąt ostrokątny  $ABC$  jest styczny do boków  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  odpowiednio w punktach  $D$ ,  $E$  i  $F$ . Okręgi dopisane do tego trójkąta są styczne do boków  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  odpowiednio w punktach  $K$ ,  $L$  i  $M$ . Dowieść, że z odcinków  $DM$ ,  $EK$  i  $FL$  można zbudować trójkąt.

*Rozwiązanie:*

Prowadząc przez każdy z wierzchołków trójkąta  $ABC$  prostą równoległą do przeciwległego boku otrzymujemy trójkąt  $A'B'C'$  (przy czym  $A \in B'C'$ ,  $B \in C'A'$ ,  $C \in A'B'$ ). Punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są środkami odpowiednio boków  $B'C'$ ,  $C'A'$ ,  $A'B'$ , zaś trójkąt  $A'B'C'$  jest podzielony na cztery przystające trójkąty. Symetria względem środka odcinka  $AB$  przekształca punkt  $D$  na pewien punkt  $D'$  leżący na odcinku  $AC'$ , punkt  $M$  na punkt  $F$ , a punkt  $B$  na punkt  $A$ . Stąd wynika, że  $DM = FD'$  oraz  $BD = AD'$ . Symetria względem środka odcinka  $AC$  przeprowadza punkt  $K$  na pewien punkt  $K'$  leżący na odcinku  $AB'$ , punkt  $E$  na punkt  $L$ , zaś punkt  $C$  na punkt  $A$ . Zatem mamy  $EK = LK'$  oraz  $CK = AK'$ . Ponadto zachodzą równości  $AK' = CK = BD = AD'$ .



Pozostaje zauważyć, że wobec ostrokatności trójkąta  $ABC$  trójkąt  $A'B'C'$  podzielony na cztery przystające trójkąty jest siatką czworościanu  $ABCS$  (punktowi  $S$  odpowiadają  $A', B', C'$ ), bowiem przy każdym wierzchołku  $A, B, C, S$  suma dwóch kątów płaskich jest większa niż trzeci. Jeśli  $T$  jest punktem na krawędzi  $AS$  takim, że  $AT = AK'$  — punktowi  $T$  odpowiadają punkty  $D'$  i  $K'$ , to trójkąt  $FLT$  ma boki równe długościom odcinków  $DM, EK$  i  $FL$ , co kończy dowód.

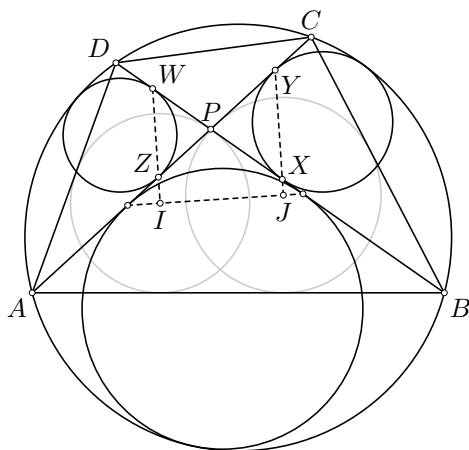
**10.** Przekątne  $AC$  i  $BD$  czworokąta wypukłego  $ABCD$  wpisanego w okrąg  $o$  przecinają się w punkcie  $P$ . Okrąg  $o_1$  jest styczny do odcinków  $AP$  i  $DP$  oraz styczny wewnętrznie do okręgu  $o$ , zaś okrąg  $o_2$  jest styczny do odcinków  $BP$  i  $CP$  oraz styczny wewnętrznie do okręgu  $o$ . Wykazać, że wspólna styczna zewnętrzna okręgów  $o_1$  i  $o_2$  (bliżej prostej  $AB$ ) jest równoległa do prostej  $AB$ .

*Rozwiązanie:*

Niech  $I$  oraz  $J$  będą środkami okręgów wpisanych w  $ABD$  i  $ABC$  oraz  $Z, Y$  i  $W, X$  to punkty styczności prostych  $AC$  i  $BD$  odpowiednio z  $o_1$  i  $o_2$ .

**Stwierdzenie 1.**  $IJ$  jest wysokością w trapezie  $XYWZ$

*Dowód.* Z lematu Sawayamy, widzimy że  $I \in ZW$  i  $J \in XY$ . Niech  $o_3$  będzie okręgiem stycznym do  $PA, PB$  i wewnętrznie do  $o$ . Ponownie z lematu Sawayamy,  $IJ$  jest prostą przechodzącą przez punkty styczności  $o_3$  z  $PA, PB$ . Jednakże ta prosta jest prostopadła do dwusiecznej  $\sphericalangle APB$  a więc równoległa do dwusiecznej  $\sphericalangle APD$ , czyli  $IJ \perp ZW$  i  $IJ \perp XY$ .



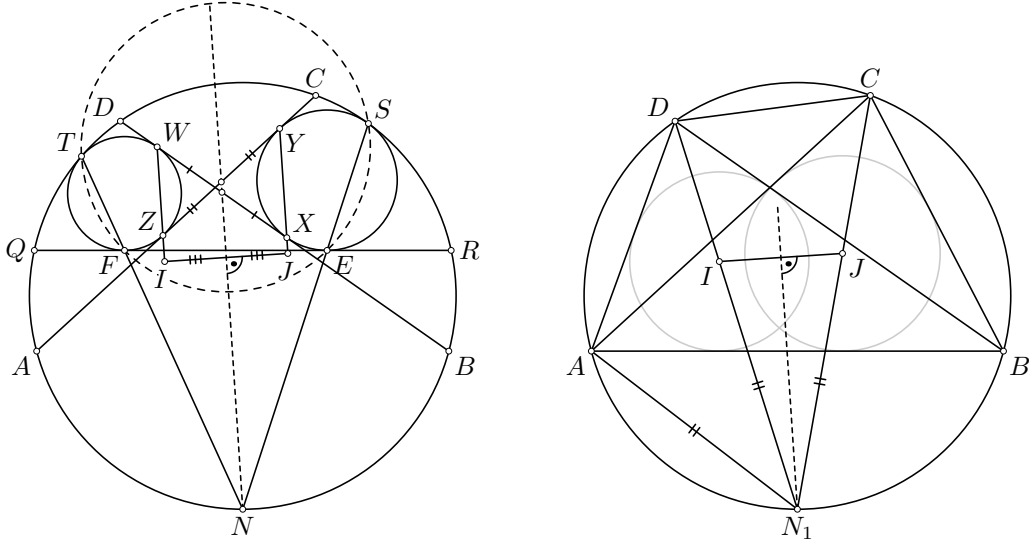
□

Niech styczna do  $o_1, o_2$  bliżej  $AB$  przecina  $o$  w  $Q$  i  $R$ . Niech  $QR$  będzie styczne do  $o_1, o_2$  w  $F, E$  oraz  $o_1, o_2$  będą styczne do  $o$  w  $T$  i  $S$ . Skorzystamy teraz z przydatnego lematu

**Lemat.** Niech  $AB$  będzie cięciwą okręgu  $\Omega$ . Załóżmy że okrąg  $\omega$  jest styczny do  $AB$  i wewnętrznie do  $\Omega$  w punktach  $C$  i  $D$ . Wtedy  $CD$  przechodzi przez środek łuku  $AB$  nie zawierającego  $D$ .

*Dowód.* Niech  $N$  będzie środkiem tego łuku. Wykonajmy inwersję o środku w  $N$  i promieniu  $NA$ . Zauważmy że w tej inwersji okrąg  $\Omega$  przechodzi na prostą  $AB$  zaś  $\omega$  na prostą  $AB$ . Mamy zatem że  $\omega$  przechodzi na siebie a więc  $C$  przechodzi na  $D$ .  $\square$

Niech  $N$  będzie środkiem łuku  $QR$  na  $o$  nie zawierającym  $A$  i  $B$ . Z powyższego lematu, mamy że  $TF$  i  $SE$  przechodzą przez  $N$ . Zauważmy również że z dowodu lematu wynika  $NF \cdot NT = NQ^2 = NE \cdot NS$  a więc  $N$  leży na osi potęgowej  $o_1$  i  $o_2$ .

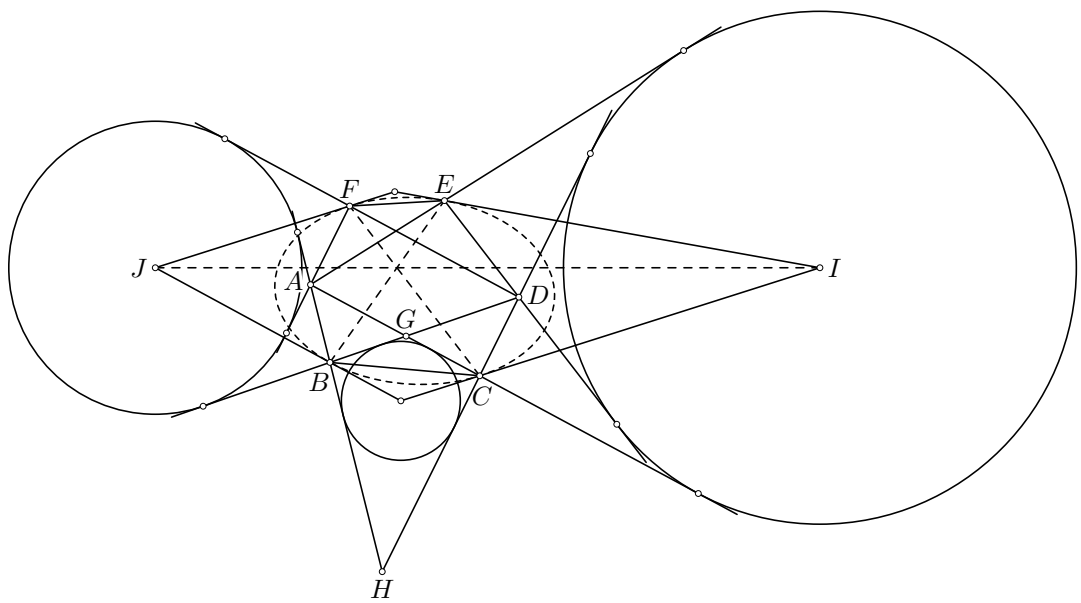


Wystarczy więc pokazać że środek łuku  $AB$  nie zawierającego  $C$  i  $D$  leży na osi potęgowej  $o_1$  i  $o_2$ . Oznaczmy ten środek przez  $N_1$ . Wiemy już, że nasza oś potęgowa jest prostą środkową w trapezie  $XYWZ$  (ponieważ środki  $ZY$  i  $XW$  oczywiście na niej leżą), a więc symetralną  $IJ$ . Niech  $M$  będzie środkiem łuku  $CD$  nie zawierającym  $A$  i  $B$ . Mamy  $\sphericalangle IMN_1 = \sphericalangle AMN_1 = \sphericalangle BMN_1 = \sphericalangle JMN_1$  oraz  $MI = MA = MB = MJ$  z lematu o trójkącie, a więc  $MN_1$  jest symetralną  $IJ$ , czyli  $N_1$  leży na osi potęgowej  $o_1$  i  $o_2$ .

**11.** Dany jest sześciokąt wypukły  $ABCDEF$ . Odcinki  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $G$ , a półproste  $AB$  i  $DC$  przecinają w punkcie  $H$ , przy czym w czworokąt  $BHCG$  można wpisać okrąg. Załóżmy, że istnieje okrąg o środku  $I$  styczny do półprostych  $AC$ ,  $CD$ ,  $ED$ ,  $AE$  poza odcinkami odpowiednio  $AC$ ,  $CD$ ,  $ED$ ,  $AE$  oraz istnieje okrąg o środku  $J$  styczny do półprostych  $DB$ ,  $DF$ ,  $BA$ ,  $FA$  poza odcinkami odpowiednio  $DB$ ,  $DF$ ,  $BA$ ,  $FA$ . Wykazać, że proste  $BE$ ,  $CF$  oraz  $IJ$  mają punkt wspólny.

*Rozwiązanie:*

Skoro w czworokąt  $BHCG$  można wpisać okrąg, to  $AB + BD = AC + CD$ . Ponieważ do czworokąta  $ACDE$  można dopisać okrąg, więc  $AC + CD = AE + DE$ , a z faktu, że do czworokąta  $ABDF$  można dopisać okrąg wynika, że  $AB + BD = AF + DF$ . Punkty  $B, C, E, F$  leżą więc na elipsie  $e$  o ogniskach  $A$  i  $D$ . Okrąg o środku  $I$  jest dopisany do czworokąta  $ACDE$ , więc punkt  $I$  leży na dwusiecznych kątów zewnętrznych przy wierzchołkach  $C$  i  $E$  w czworokącie  $ACDE$ , a zatem jest przecięciem stycznych do elipsy  $e$  w punktach  $C$  i  $E$ . Analogicznie uzasadniamy, że punkt  $J$  jest przecięciem stycznych do elipsy  $e$  w punktach  $B$  i  $F$ . Teza zadania wynika teraz z twierdzenia Brianchona zastosowanego dla czworokąta wyznaczonego przez te cztery styczne.



# Regulamin Meczu Matematycznego

## Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

## Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywołanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

*Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...*

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawi rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Jeśli zawodnik zostaje wybrany do referowania po raz  $n$ -ty, przystępuje do referowania z prawdopodobieństwem  $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-n+m}$ , gdzie  $m$  oznacza minimum liczby zakończonych referowań spośród wszystkich zawodników drużyny referującej. W przeciwnym wypadku Kapitan drużyny referującej wyznacza osobę do referowania zgodnie z punktem 7.
9. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
10. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach 7–9. Drużyna zmieniająca referującego traci  $N$  punktów przy swojej  $N$ -tej zmianie w czasie Meczu.
11. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.
12. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
13. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach 6–11. W tym przypadku, jeżeli przedstawione rozwiązanie nie zostanie uznane przez Jury za poprawne, drużyna otrzymuje  $-10$  punktów i opuszcza się punkt 14.

14. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

*Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...*

15. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
16. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo  $-10$  (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

### **Ustalenia końcowe**

17. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań lub gdy różnica pomiędzy wynikami obu drużyn jest większa niż 40 punktów. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
18. Po 3 godzinach meczu czas na referowanie zadania zostaje skrócony do 5 minut, a wszystkie punkty ujemne liczą się dwukrotnie.
19. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
20. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

# Spis treści

|                                       |           |
|---------------------------------------|-----------|
| <b>Treści zadań</b>                   | <b>5</b>  |
| Zawody indywidualne . . . . .         | 5         |
| Zawody drużynowe . . . . .            | 9         |
| Pierwszy Mecz Matematyczny . . . . .  | 10        |
| Drugi Mecz Matematyczny . . . . .     | 12        |
| <b>Rozwiązania</b>                    | <b>14</b> |
| Zawody indywidualne . . . . .         | 14        |
| Zawody drużynowe . . . . .            | 38        |
| Pierwszy Mecz Matematyczny . . . . .  | 49        |
| Drugi Mecz Matematyczny . . . . .     | 58        |
| <b>Regulamin Meczu Matematycznego</b> | <b>68</b> |