Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 10 – 24 czerwca 2012

(wydanie pierwsze)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 10-24 czerwca 2012

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. (018) 33 11 660

Kadra:
Kamil Duszenko
Andrzej Grzesik
Teodor Jerzak
Michał Kieza
Tomasz Kobos
Joanna Ochremiak

Olimpiada Matematyczna w Internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 10-24 czerwca w Mszanie Dolnej, w ośrodku „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Kamil Duszenko, Andrzej Grzesik, Teodor Jerzak, Michał Kieza, Tomasz Kobos oraz Joanna Ochremiak. Ponadto z gościnnymi wykładami wystąpili Michał Pilipczuk i Przemysław Mazur.

W dniach 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 21 i 22 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 20 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 16 i 23 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny czterech zadań i trwały od rana do wieczora, a mecz matematyczny — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 154, 126 i 115 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyły się dwie wycieczki: 17 czerwca na Ćwilin oraz 20 czerwca do Rabki-Zdroju i na Luboń Wielki.

Bezpośrednio po zakończeniu obozu, w dniach 24-27 czerwca w miejscowości Fačkovské sedlo na Słowacji odbyły się XII Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. Przewodniczącym delegacji polskiej był Andrzej Grzesik, zastępcą przewodniczącego była Joanna Ochremiak. W dniach 25 i 26 czerwca każdy z zawodników rozwiązywał po trzy zadania, mając na to po cztery i pół godziny.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami oraz zadania z XII Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	15	0	0	2
2.	4	0	1	12
3.	7	0	0	10
4.	7	2	1	7
5.	4	0	0	13
6.	5	1	1	10
7.	6	0	0	11
8.	2	3	1	11
9.	7	0	0	10
10.	4	2	1	10
11.	1	0	0	16
12.	9	1	1	6
13.	14	0	0	3
14.	2	1	1	13
15.	7	3	1	6
16.	3	0	1	13
17.	11	0	1	6
18.	10	4	1	3
19.	10	0	0	8
20.	1	7	1	9
21.	17	1	0	1
22.	0	0	0	19
23.	17	0	0	2
24.	6	0	0	13
25.	17	1	0	1
26.	4	0	0	15
27.	6	3	0	10
28.	6	0	0	13
29.	6	0	2	10
30.	9	1	0	8
31.	1	0	1	16
32.	4	1	0	13
33.	5	1	0	13
34.	11	1	0	7
35.	4	0	0	15
36.	1	0	0	18

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. W przestrzeni dany jest zbiór n punktów ($n \geqslant 4$). Udowodnić, że wśród nich istnieją takie trzy różne punkty A, B, C, że jeżeli X jest dowolnym spośród pozostałych $n-3$ punktów, to spełniona jest nierówność

$$AX + BX + CX \geqslant AB + BC + CA.$$

2. Znaleźć najmniejszą taką liczbę naturalną n, że z dowolnych n liczb całkowitych można wybrać 6 liczb, których suma jest podzielna przez 6.

3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki: $|f(x)| \leqslant 1$ oraz

$$f(x) + f(x + \tfrac{5}{6}) = f(x + \tfrac{1}{2}) + f(x + \tfrac{1}{3})$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Wykazać, że f jest funkcją okresową.

4. Dany jest równoległobok $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu A odpowiednio na proste BC i CD, a prosta prostopadła do prostej AC i przechodząca przez punkt A przecina prostą BD w punkcie G. Dowieść, że punkty E, F i G leżą na jednej prostej.

5. Wykazać, że równanie

$$3^k = m^2 + n^2 + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych k, m, n.

6. W sześciokącie wypukłym wszystkie trzy główne przekątne mają długość większą od 2. Udowodnić, że pewien bok tego sześciokąta ma długość większą od 1.

7. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dowieść, że w dowolnym zbiorze $2n$ punktów płaszczyzny o obu współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ istnieją cztery punkty będące wierzchołkami niezdegenerowanego równoległoboku.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ złożony z liczb rzeczywistych różnych od zera, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ wielomian

$$W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.

9. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Udowodnić, że

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geqslant \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

10. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykazać, że zbiór wszystkich punktów P leżących wewnątrz danego czworokąta i spełniających równość

$$\angle DAP + \angle CBP = \angle CPD$$

jest zawarty w pewnym okręgu lub w pewnej prostej.

11. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb pierwszych (p, q), że liczba $5^p + 5^q$ jest podzielna przez pq.

12. Na konferencję prasową po meczu Polska-Rosja akredytowała się grupa dziennikarzy, wśród których dokładnie 100 mówi po polsku, dokładnie 100 mówi po angielsku i dokładnie 100 mówi po rosyjsku (jeden dziennikarz może znać dowolną liczbę języków). Jednak z powodu braku odpowiednio dużej sali tylko część dziennikarzy może wziąć udział w konferencji. Dowieść, że można wybrać przedstawicieli dziennikarzy, wśród których dokładnie 50 mówi po polsku, dokładnie 50 mówi po angielsku i dokładnie 50 mówi po rosyjsku.

13. Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), że liczba $2^m + 1$ jest podzielna przez $2^n - 1$.

14. Wyznaczyć liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

15. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w dwóch różnych punktach. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie do okręgu o_1 odpowiednio w punktach A_1 i A_2, są styczne wewnętrznie do okręgu o_2 odpowiednio w punktach B_1 i B_2 oraz przecinają się w dwóch różnych punktach C i D. Wykazać, że proste A_1B_1, A_2B_2 i CD przecinają się w jednym punkcie.

16. Dowieść, że można pokolorować każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ na jeden z czterech kolorów w taki sposób, że żaden rosnący 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazach z tego zbioru nie składa się z elementów o jednakowym kolorze.

17. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełnione są równości

$$f(g(x)) = x^3 \qquad \text{oraz} \qquad g(f(x)) = x^2.$$

18. Udowodnić, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)(2^n - 2^2) \ldots (2^n - 2^{n-1})$$

jest podzielna przez $n!$.

19. Dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$ wyznaczyć liczbę sposobów takiego wypełnienia prostokątnej tablicy rozmiaru $m \times n$ liczbami 1 i -1, że w każdej kolumnie iloczyn wszystkich liczb wynosi -1 i w każdym wierszu iloczyn wszystkich liczb wynosi -1.

20. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okręgi o_1 i o_2 po raz drugi odpowiednio w punktach C i D, przy czym punkt A leży na odcinku CD. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na prostą styczną do okręgu o_1 w punkcie C i na prostą styczną do okręgu o_2 w punkcie D. Dowieść, że prosta PQ jest styczna do okręgu o średnicy AB.

21. Dany jest skończony ciąg liczb rzeczywistych, których suma jest równa zeru, ale nie wszystkie z tych liczb są równe zeru. Udowodnić, że istnieje permutacja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ danego ciągu, dla której

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0.$$

22. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ liczba

$$2^{2^n-1} - 2^n - 1$$

jest złożona.

23. Dana jest kwadratowa tabela o boku 2012 podzielona na pola jednostkowe, z których każde może być pomalowane na czarno albo na biało. Ruch polega na wybraniu kwadratu o boku k złożonego z pól tabeli, przy czym $1500 \leqslant k \leqslant 1510$, i zmianie koloru wszystkich pól leżących w wybranym kwadracie. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnego początkowego sposobu pomalowania pól można wykonać skończony ciąg ruchów, który doprowadza do tabeli składającej się wyłącznie z białych pól.

24. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt M jest środkiem boku AB. Okrąg o średnicy CM przecina boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E, a styczne do tego okręgu w punktach D i E przecinają się w punkcie F. Dowieść, że $FA = FB$.

25. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 6n\}$ pomalowano na biało albo na czarno, przy czym dokładnie $4n$ elementów jest białych. Wykazać, że w tym zbiorze istnieje $3n$ kolejnych liczb całkowitych, wśród których dokładnie $2n$ liczb jest białych.

26. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ istnieje taki zbiór złożony z n dodatnich liczb całkowitych, że suma dowolnych dwóch różnych elementów tego zbioru jest podzielna przez ich różnicę.

27. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina ponownie okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D, przy czym punkt A leży na odcinku CD. Punkty K i L są środkami odpowiednio łuków BC okręgu o_1 i BD okręgu o_2 nie zawierających punktu A. Punkt M jest środkiem odcinka CD. Dowieść, że $\angle KML = 90°$.

28. Dana jest liczba całkowita $r \geqslant 2$. Dowieść, że trójmian kwadratowy $x^2 - rx - 1$ nie jest dzielnikiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych mniejszych co do wartości bezwzględnej od r.

29. Niech a będzie taką liczbą całkowitą, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2^n + a$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym. Udowodnić, że $a = 0$.

30. Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ oraz $AB > CD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i CD, przy czym

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}.$$

Na odcinku KL wybrano punkty P i Q, dla których $\angle APB = \angle BCD$ oraz $\angle CQD = \angle ABC$. Wykazać, że punkty B, C, P i Q leżą na jednym okręgu.

31. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniają nierówności $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ oraz

$$b_1 b_2 \ldots b_k \geqslant a_1 a_2 \ldots a_k \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dowieść, że

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

32. Każda z liczb 1, 2, 3, …, 10^{2012} może być pomalowana na biało albo na czarno. Początkowo wszystkie te liczby są czarne. Ruch polega na wybraniu jednej z liczb oraz na zmianie koloru tej liczby i wszystkich innych liczb, które nie są z nią względnie pierwsze. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie takich ruchów można doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie dane liczby będą białe.

33. Dane są różne liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Udowodnić, że istnieje taka liczba N, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant N$ liczba

$$(n + a_1)(n + a_2) \ldots (n + a_9)$$

ma dzielnik pierwszy większy od 20.

34. Rozstrzygnąć, czy liczba ciągów złożonych z 10 dodatnich liczb całkowitych, których suma odwrotności wynosi 1, jest liczbą parzystą.

35. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste AI i BI przecinają ponownie okrąg opisany na tym trójkącie odpowiednio w punktach D i E. Proste AE i BD przecinają się w punkcie T. Odcinek DE przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach F i G. Prosta równoległa do prostej AI przechodząca przez punkt F oraz prosta równoległa do prostej BI przechodząca przez punkt G przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkty P, I oraz T leżą na jednej prostej.

36. Dowieść, że każdą dodatnią liczbę wymierną można przedstawić w postaci

$$\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d.

Zawody drużynowe

1. Dana jest taka liczba pierwsza p, że liczba $q = 2p+1$ także jest pierwsza. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita podzielna przez q, której suma cyfr w zapisie dziesiętnym wynosi co najwyżej 3.

2. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, wśród których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Niech $\mathcal{S}$ oznacza zbiór wszystkich wielokątów wypukłych o wierzchołkach w tym zbiorze (jako wielokąty wypukłe traktujemy również zbiór pusty, pojedyncze punkty oraz odcinki). Dla dowolnego wielokąta $P \in \mathcal{S}$ przez $a(P)$ i $b(P)$ oznaczamy odpowiednio liczbę punktów na obwodzie i na zewnątrz wielokąta P. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\sum_{P \in \mathcal{S}} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1.$$

3. Wykazać, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunek $a+b+c=1$ prawdziwa jest nierówność

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leqslant \frac{4}{27}.$$

4. Czworościan T_1 jest zawarty w czworościanie T_2. Dowieść, że suma długości wszystkich krawędzi czworościanu T_1 nie przekracza $\frac{4}{3}$ sumy długości wszystkich krawędzi czworościanu T_2.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz liczba całkowita r. Udowodnić, że istnieją takie liczby całkowite x i y, że liczba $2x^2 + 3y^2 - r$ jest podzielna przez p.

2. Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że liczby n i 2^n+1 mają te same dzielniki pierwsze.

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach całkowitych i następującej własności: istnieje taka liczba całkowita M, że dla dowolnej liczby całkowitej $n > M$ liczba $W(3^n - n)$ jest potęgą liczby pierwszej.

4. Niech A_1, A_2, ..., A_{101} będą różnymi podzbiorami zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Przypuśćmy, że suma dowolnych 50 spośród tych podzbiorów ma więcej niż $\frac{50}{51}n$ elementów. Dowieść, że wśród danych podzbiorów istnieją takie trzy, że dowolne dwa z nich mają niepustą część wspólną.

5. W pewnym mieście żadna osoba nie zna wszystkich pozostałych, a dowolne dwie osoby, które się nie znają, mają wspólnego znajomego. Ponadto spełniona jest równość

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n^2 - n,$$

gdzie n oznacza liczbę wszystkich mieszkańców miasta oraz dla $i = 1, 2, \ldots, n$ symbol a_i oznacza liczbę znajomych i-tego mieszkańca.

Niech k oznacza minimalną liczbę mieszkańców, których można tak posadzić przy okrągłym stole (co najmniej trzyosobowym), że każdy siedzi między swoimi znajomymi. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości k.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. W pewnym kraju z każdego miasta istnieją bezpośrednie loty do co najmniej n innych miast (połączenia są obustronne), a ponadto z każdego miasta można dolecieć, być może z przesiadkami, do każdego innego. Dowieść, że istnieje takich n różnych miast M_1, M_2, ..., M_n, że dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ miasta M_i oraz M_{i+1} mają bezpośrednie połączenie, a między dowolnymi dwoma spośród pozostałych miast można odbyć podróż omijającą te n miast.

7. Liczby rzeczywiste a, b, c o wartościach bezwzględnych nie przekraczających 1 spełniają warunek

$$1 + 2abc \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$1 + 2(abc)^n \geqslant a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}.$$

8. Dla dowolnych liczb całkowitych k, $n \geqslant 2$ ciąg liczb rzeczywistych $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazwiemy k-*wyważonym*, jeżeli mają miejsce równości $S_0 = S_1 = S_2 = \ldots = S_{k-1}$, gdzie dla $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ liczba S_i jest sumą wszystkich wyrazów danego ciągu o wskaźnikach dających resztę i z dzielenia przez k.

Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę pierwszą p, że jedynym ciągiem 2012 liczb rzeczywistych, który jest q-wyważony dla każdej liczby pierwszej $q \leqslant p$, jest ciąg złożony z samych zer.

9. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E, a proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Punkt P różny od E leży wewnątrz czworokąta, przy czym kąty APB i CPD są proste. Wykazać, że także kąt EPF jest prosty.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB > AC$. Punkty B_0 i C_0 są odpowiednio środkami boków CA i AB, a punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Okrąg przechodzący przez punkty B_0 i C_0 jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie E różnym od A. Udowodnić, że środek ciężkości trójkąta ABC leży na prostej DE.

11. Dowieść, że jeżeli prosta łącząca środki dwóch przeciwległych krawędzi czworościanu przechodzi przez środek sfery wpisanej w ten czworościan, to przechodzi ona również przez środek sfery opisanej na tym czworościanie.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Niech $n \geqslant 2$ będzie taką liczbą całkowitą, że równanie

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_1 x_2 \ldots x_n$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych. Udowodnić, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

2. Dowieść, że istnieje ciąg 2012 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, z których żadna nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

3. Niech n będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że liczba $1 + 2^n + 4^n$ jest pierwsza. Wykazać, że istnieje liczba całkowita k, dla której $n = 3^k$.

4. Ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, ... jest określony wzorami: $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Rozstrzygnąć, czy liczba $a_{2013!}$ jest podzielna przez $2012! + 1$.

5. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, ..., x_n należących do przedziału $(0; \frac{\pi}{4})$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{\operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \ldots \operatorname{tg} x_n} \leqslant \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n}}.$$

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Na prostej zaznaczono $n^2 + 1$ przedziałów domkniętych. Wykazać, że wśród tych przedziałów istnieje $n + 1$ przedziałów mających punkt wspólny lub istnieje $n + 1$ przedziałów, z których dowolne dwa są rozłączne.

7. Dla dowolnych liczb całkowitych $m \geqslant n \geqslant 2$ rozpatrujemy następującą grę. Na początku dane są dwa stosy zawierające odpowiednio m i n kamieni. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy polegające na zabraniu z jednego stosu dodatniej liczby kamieni, która jest wielokrotnością liczby kamieni znajdujących się na drugim stosie. Wygrywa ten z graczy, któremu uda się opróżnić jeden ze stosów.

Rozstrzygnąć, w zależności od m i n, który z graczy — rozpoczynający grę czy jego przeciwnik — ma strategię wygrywającą.

8. Trójkąt równoboczny podzielono liniami równoległymi do boków na siatkę 36 przystających trójkątów równobocznych. W chwili początkowej w każdym węźle siatki znajduje się mrówka, ustawiona w kierunku pewnego odcinka siatki wychodzącego z tego węzła. W jednostce czasu każda mrówka przemaszerowuje po odcinku siatki z węzła na sąsiedni węzeł, po czym zakręca w lewo lub w prawo o $60°$ lub o $120°$. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że w pewnym momencie dwie mrówki się spotkają.

9. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, przy czym odcinki AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie, a kąt DFE jest prosty. Wewnątrz trójkąta wybrano punkt P, którego rzutem prostokątnym na prostą AB jest punkt F. Udowodnić, że $\angle DFC = \angle PFE$.

10. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne są prostopadłe i przecinają się w punkcie E. Wewnątrz czworokąta wybrano taki punkt F, że

$$\angle DAC = \angle FAB \qquad \text{oraz} \qquad \angle ABD = \angle FBC.$$

Wykazać, że na bokach AB, BC, CD, DA istnieją odpowiednio punkty K, L, M, N, dla których odcinki KM i LN przecinają się w punkcie E oraz

$$EK + KF = EL + LF = EM + MF = EN + NF.$$

11. Dany jest czworościan o objętości V i promieniu sfery opisanej R. Dowieść, że trzy iloczyny długości przeciwległych krawędzi są długościami boków trójkąta o polu równym $6VR$.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Dla dodatniej liczby całkowitej n, niech $\tau(n)$ będzie liczbą wszystkich dodatnich dzielników liczby n, natomiast $\varphi(n)$ — liczbą dodatnich liczb całkowitych nie większych niż n, względnie pierwszych z n. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których jedna z liczb n, $\tau(n)$ i $\varphi(n)$ jest średnią arytmetyczną pozostałych dwóch.

2. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x + f(y)) - f(x) = (x + f(y))^4 - x^4$$

dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω. Punkty I, J, K są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC, ACD oraz ABD. Niech E będzie środkiem tego łuku DB okręgu ω, który zawiera punkt A. Prosta EK przecina okrąg ω w punkcie F różnym od E. Udowodnić, że punkty C, F, I oraz J leżą na jednym okręgu.

4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\angle ACB = 90°$. Punkt P leży wewnątrz krótszego łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Prosta prostopadła do prostej CP, przechodząca przez punkt C, przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach K i L. Udowodnić, że stosunek pól trójkątów BKL i ACP nie zależy od wyboru punktu P.

5. Miasto Mar del Plata ma kształt kwadratu $WSEN$ podzielonego $2(n+1)$ ulicami na $n \times n$ kwartałów, gdzie n jest liczbą parzystą. Ulice biegną również dookoła miasta. Każdy kwartał ma kształt kwadratu o wymiarach $100\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m}$. Każda ulica w Mar del Plata jest jednokierunkowa i ruch odbywa się w tę samą stronę na całej jej długości. Na dowolnych dwóch sąsiednich równoległych ulicach ruch odbywa się w przeciwnych kierunkach. Po ulicy WS można poruszać się z punktu W do punktu S, natomiast po ulicy WN — z punktu W do punktu N. Samochód czyszczący jezdnię wyjeżdża z punktu W i zmierza do punktu E, przy czym każdy 100-metrowy odcinek ulicy może pokonać co najwyżej raz. Wyznaczyć długość najdłuższej możliwej trasy z punktu W do punktu E, którą może pokonać ten samochód.

6. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają równości

$$abcd = 4 \qquad \text{oraz} \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10.$$

Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia $ab + bc + cd + da$.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. W przestrzeni dany jest zbiór n punktów ($n \geqslant 4$). Udowodnić, że wśród nich istnieją takie trzy różne punkty A, B, C, że jeżeli X jest dowolnym spośród pozostałych $n-3$ punktów, to spełniona jest nierówność

$$AX + BX + CX \geqslant AB + BC + CA.$$

Rozwiązanie:

Wśród wszystkich trójek danych punktów wybierzmy trójkę A, B, C, dla której suma $AB + BC + CA$ jest możliwie najmniejsza. Wykażemy, że wybrana trójka spełnia warunki zadania. Istotnie, jeżeli X jest dowolnym spośród pozostałych $n-3$ punktów, to ze sposobu wyboru trójki A, B, C wynikają nierówności

$$\begin{aligned} AB + BX + XA &\geqslant AB + BC + CA, \\ BC + CX + XB &\geqslant AB + BC + CA, \\ CA + AX + XC &\geqslant AB + BC + CA. \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe trzy zależności otrzymujemy

$$AB + BC + CA + 2(AX + BX + CX) \geqslant 3(AB + BC + CA),$$

co dowodzi, że rozważana trójka punktów ma wymaganą własność.

2. Znaleźć najmniejszą taką liczbę naturalną n, że z dowolnych n liczb całkowitych można wybrać 6 liczb, których suma jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: 11.

Liczba $n = 10$ nie spełnia warunków zadania: suma dowolnych 6 liczb z układu złożonego z 5 zer oraz 5 jedynek wynosi co najmniej 1 i co najwyżej 5, nie może więc być podzielna przez 6. Tym bardziej liczby $n < 10$ nie mają opisanej własności.

Udowodnimy z kolei, że liczba $n = 11$ tę własność posiada. W tym celu zauważmy najpierw, że z dowolnych 5 liczb całkowitych można wybrać 3 liczby, których suma jest podzielna przez 3. Wynika to z faktu, że wśród dowolnych 5 liczb całkowitych istnieją 3 liczby dające takie same reszty z dzielenia przez 3 lub istnieją 3 liczby dające trzy różne reszty z dzielenia przez 3, i w obu przypadkach suma takich 3 liczb jest podzielna przez 3. Aby teraz udowodnić, że z dowolnych 11 liczb można wybrać 6 liczb, których suma jest podzielna przez 6, postępujemy następująco. Najpierw wybieramy 3 liczby, których suma s_1 jest podzielna przez 3. Następnie z pozostałych 8 liczb wybieramy 3 liczby, których suma s_2 jest podzielna przez 3. Na koniec z pozostałych 5 liczb wybieramy 3 liczby, których suma s_3 jest podzielna przez 3. Wśród liczb s_1, s_2, s_3 podzielnych przez 3 istnieje para liczb o jednakowej parzystości. Suma liczb tej pary jest zatem podzielna przez 6, a jednocześnie jest to suma pewnych 6 liczb spośród danych 11 liczb. To kończy rozwiązanie.

3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki: $|f(x)| \leqslant 1$ oraz

$$f(x) + f(x + \tfrac{5}{6}) = f(x + \tfrac{1}{2}) + f(x + \tfrac{1}{3})$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Wykazać, że f jest funkcją okresową.

Rozwiązanie:

Określmy funkcje g i h wzorami

$$g(x) = f(x) - f(x + \tfrac{1}{3}) \qquad \text{oraz} \qquad h(x) = f(x) - f(x + 1)$$

dla każdego x. Wtedy równość daną w treści zadania można przepisać w postaci $g(x) = g(x + \frac{1}{2})$. Wynika stąd, że g jest funkcją okresową, a liczba $\frac{1}{2}$ — i tym bardziej liczba 1 — jest długością jej okresu. Wobec tego na mocy zależności

$$h(x) = g(x) + g(x + \tfrac{1}{3}) + g(x + \tfrac{2}{3})$$

funkcja h także jest funkcją okresową o okresie długości 1. Ustalmy teraz liczbę rzeczywistą x i oznaczmy $c = h(x)$. Wówczas

$$h(x + 1) = h(x + 2) = \ldots = h(x + n - 1) = c$$

dla dowolnej liczby naturalnej n. Zatem

$$(*) \quad f(x) - f(x + n) = h(x) + h(x + 1) + h(x + 2) + \ldots + h(x + n - 1) = nc.$$

Na podstawie warunków zadania liczby $f(x)$ i $f(x + n)$ mają wartości bezwzględne nie większe niż 1 i w takim razie dla każdej wartości n lewa strona związku $(*)$ ma wartość bezwzględną nie większą niż 2. Jeżeli natomiast $c \neq 0$, to prawa strona równości $(*)$ ma dowolnie dużą wartość bezwzględną dla dostatecznie dużych liczb n. To oznacza, że $c = 0$, czyli $f(x) - f(x + 1) = h(x) = 0$. Liczba x była jednak wybrana dowolnie, a więc f jest funkcją okresową o okresie długości 1.

4. Dany jest równoległobok $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu A odpowiednio na proste BC i CD, a prosta prostopadła do prostej AC i przechodząca przez punkt A przecina prostą BD w punkcie G. Dowieść, że punkty E, F i G leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Niech H oraz I będą punktami, w których prosta AG przecina odpowiednio proste BC oraz CD, a J niech będzie punktem przecięcia odcinków AB i EF.

Punkty E i F leżą na okręgu o średnicy AC, skąd dostajemy równość $\angle CEF = \angle CAF$. To wraz z prostopadłościami $AF \perp CI$ i $AC \perp HI$ oraz równoległością $AB \parallel CD$ prowadzi do zależności

$$\angle CEF = \angle CAF = 90^\circ - \angle ICA = 90^\circ - \angle CAB = \angle JAH.$$

W efekcie $\angle JEH = 180^\circ - \angle CEF = 180^\circ - \angle JAH$, czyli na czworokącie $AJEH$ można opisać okrąg. Wobec tego $\angle AJH = \angle AEH = 90^\circ$ i w takim razie punkt J jest spodkiem wysokości trójkąta ABH opuszczonej z wierzchołka H.

Jednokładność o środku w punkcie G, która przeprowadza punkt D na B, zachowuje prostą AG oraz odwzorowuje proste AD i CD odpowiednio na proste BC i AB. Zatem przekształca ona trójkąt IDA na trójkąt ABH. Stąd wniosek, że punkty F i J, będące spodkami wysokości trójkątów IDA i ABH opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i H, leżą na prostej przechodzącej przez punkt G. A ponieważ punkt J leży na odcinku EF, więc ostatecznie stwierdzamy, że punkty E, F, G i J leżą na jednej prostej.

5. Wykazać, że równanie

$$3^k = m^2 + n^2 + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych k, m, n.

Rozwiązanie:

Wystarczy udowodnić, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych k liczbę $3^k - 1$ można zapisać w postaci sumy dwóch kwadratów liczb całkowitych. W tym celu wykażemy przez indukcję, że własność opisaną w poprzednim zdaniu mają liczby postaci $k = 2^\ell$ dla $\ell = 1, 2, 3, \ldots$.

Dla $\ell = 1$ liczba $3^{2^1} - 1 = 8 = 2^2 + 2^2$ jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Przypuśćmy z kolei, że dla pewnej całkowitej wartości $\ell \geqslant 1$ liczba $3^{2^\ell} - 1$ daje się zapisać w postaci sumy $m^2 + n^2$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Wówczas korzystając z tożsamości

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} 3^{2^{\ell+1}} - 1 &= (3^{2^\ell} - 1)(3^{2^\ell} + 1) = (m^2 + n^2)((3^{2^{\ell-1}})^2 + 1) = \\ &= (3^{2^{\ell-1}} m + n)^2 + (m - 3^{2^{\ell-1}} n)^2, \end{aligned}$$

co kończy krok indukcyjny i rozwiązanie zadania.

6. W sześciokącie wypukłym wszystkie trzy główne przekątne mają długość większą od 2. Udowodnić, że pewien bok tego sześciokąta ma długość większą od 1.

Rozwiązanie:

Oznaczmy dany sześciokąt przez $ABCDEF$. Trzy główne przekątne AD, BE i CF wyznaczają trójkąt albo przecinają się w jednym punkcie. W obu przypadkach pewne dwie spośród nich tworzą kąt o mierze równej co najmniej 60° (kąt między dwiema głównymi przekątnymi rozumiemy tutaj jako kąt, pod jakim z punktu ich przecięcia widać związane z tymi przekątnymi dwa przeciwległe boki sześciokąta). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że są to przekątne AD i BE.

Uzupełnijmy trójkąt DEB do równoległoboku $DEBG$. Wtedy miara kąta ADG jest miarą kąta pomiędzy przekątnymi AD i BE, a więc $\angle ADG \geqslant 60^\circ$. Wynika stąd, że w trójkącie ADG przy jednym z wierzchołków A, G znajduje się kąt wewnętrzny o najmniejszej mierze. Najkrótszy bok dowolnego trójkąta jest położony naprzeciw jego najmniejszego kąta. To oznacza, że jeden z boków AD, GD trójkąta ADG jest jego najkrótszym bokiem. Jednocześnie na mocy warunków zadania mamy $AD > 2$ oraz $GD = BE > 2$. Zatem bok AG również ma długość większą od 2. Wobec tego na mocy nierówności trójkąta otrzymujemy

$$AB + DE = AB + GB \geqslant AG > 2,$$

co dowodzi, że jeden z boków AB, DE rozpatrywanego sześciokąta ma długość większą od 1.

7. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dowieść, że w dowolnym zbiorze $2n$ punktów płaszczyzny o obu współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ istnieją cztery punkty będące wierzchołkami niezdegenerowanego równoległoboku.

Rozwiązanie:

Pomalujmy każdy punkt danego $2n$-elementowego zbioru S na zielono albo na czerwono w następujący sposób: punkt malujemy na zielono, jeżeli w układzie współrzędnych punkt ten jest położonym najbardziej na lewo punktem zbioru S na prostej poziomej przechodzącej ten punkt; wszystkie pozostałe punkty zbioru S malujemy na czerwono.

Zbiór S jest zawarty w sumie n prostych poziomych, a na każdej z nich znajduje się co najwyżej jeden punkt zielony. To oznacza, że co najwyżej n punktów jest zielonych, a co najmniej n punktów jest czerwonych. Przyporządkujmy każdemu czerwonemu punktowi jego odległość od punktu zielonego leżącego na tej samej prostej poziomej. Odległość ta jest elementem zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. W takim razie możliwych odległości jest mniej niż czerwonych punktów. Wobec tego istnieją dwa różne czerwone punkty jednakowo odległe od zielonych punktów znajdujących się na tych samych prostych poziomych. Te dwa czerwone punkty muszą leżeć na różnych prostych poziomych. Zatem wraz z przyporządkowanymi im dwoma zielonymi punktami tworzą one czworokąt wypukły, w którym dwa przeciwległe boki są poziome i mają jednakową długość. Rozważane cztery punkty są więc wierzchołkami niezdegenerowanego równoległoboku.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg a_0, a_1, a_2, $\ldots$ złożony z liczb rzeczywistych różnych od zera, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ wielomian

$$W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak.

Przeprowadzimy konstrukcję indukcyjną poszukiwanego ciągu. Określmy najpierw $a_0 = a_1 = 1$; wtedy wielomian $W_1(x) = a_1 x + a_0$ ma pierwiastek rzeczywisty. Przypuśćmy teraz, że dla skończonego ciągu a_0, a_1, $\ldots$, a_n złożonego z liczb rzeczywistych różnych od zera wielomian

$$W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Udowodnimy istnienie takiej liczby rzeczywistej $a_{n+1} \neq 0$, że wielomian

$$W_{n+1}(x) = a_{n+1} x^{n+1} + W_n(x)$$

ma $n+1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

Niech s_1, s_2, $\ldots$, s_n będzie uporządkowanym rosnąco ciągiem wszystkich pierwiastków wielomianu $W_n(x)$. Ponieważ są to pierwiastki jednokrotne, więc można dobrać taką liczbę $\varepsilon > 0$ oraz taki ciąg parami rozłącznych przedziałów $\langle t_1; u_1 \rangle$, $\langle t_2; u_2 \rangle$, $\ldots$, $\langle t_n; u_n \rangle$ zawierających odpowiednio liczby s_1, s_2, $\ldots$, s_n, że każdy z tych n przedziałów jest odwzorowywany przez wielomian $W_n(x)$ wzajemnie jednoznacznie na przedział $\langle -\varepsilon; \varepsilon \rangle$. Inaczej mówiąc, dla $i = 1, 2, \ldots, n$ prawdziwa jest następująca alternatywa: albo $W_n(t_i) = -\varepsilon$, $W_n(u_i) = \varepsilon$ oraz wielomian $W_n(x)$ jest na przedziale $\langle t_i; u_i \rangle$ funkcją ściśle rosnącą, albo też $W_n(t_i) = \varepsilon$, $W_n(u_i) = -\varepsilon$ oraz wielomian $W_n(x)$ jest na przedziale $\langle t_i; u_i \rangle$ funkcją ściśle malejącą.

Niech a_{n+1} będzie liczbą rzeczywistą różną od zera, dla której

$$|a_{n+1}| \cdot \max\{|t_1|^{n+1}, |u_n|^{n+1}\} < \varepsilon.$$

Wówczas wszystkie wartości jednomianu $a_{n+1}x^{n+1}$ na przedziale $\langle t_1; u_n\rangle$ mają wartości bezwzględne mniejsze od ε. Wykażemy, że liczba a_{n+1} ma własność opisaną w ostatnim zdaniu pierwszego akapitu rozwiązania.

W tym celu ustalmy wskaźnik $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jedna z liczb $W_n(t_i)$, $W_n(u_i)$ jest równa ε, a druga jest równa $-\varepsilon$. Natomiast liczby $a_{n+1}t_i^{n+1}$ i $a_{n+1}u_i^{n+1}$ mają wartości bezwzględne mniejsze od ε. Jedna z liczb $W_{n+1}(t_i)$, $W_{n+1}(u_i)$ jest więc ujemna, a druga jest dodatnia. Stąd wniosek, że wielomian $W_{n+1}(x)$ ma w przedziale $\langle t_i; u_i\rangle$ albo dokładnie jeden pierwiastek, który jest pierwiastkiem jednokrotnym, albo też, licząc z krotnościami, co najmniej 3 pierwiastki. Gdyby jednak chociaż raz miała miejsca druga możliwość, to licząc wszystkie pierwiastki z krotnościami we wszystkich rozważanych n przedziałach uzyskalibyśmy co najmniej $n+2$ pierwiastków wielomianu $W_{n+1}(x)$, którego stopień wynosi dokładnie $n+1$. Ta sprzeczność wskazuje, że wielomian $W_{n+1}(x)$ ma w każdym z przedziałów $\langle t_1; u_1\rangle$, $\langle t_2; u_2\rangle$, $\ldots$, $\langle t_n; u_n\rangle$ dokładnie jeden pierwiastek i wszystkie te pierwiastki są jednokrotne. Zatem wielomian $W_{n+1}(x)$ stopnia $n+1$ ma co najmniej n różnych pierwiastków jednokrotnych. Oznaczmy te pierwiastki przez w_1, w_2, $\ldots$, w_n. Wobec tego wielomian $W_{n+1}(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x-w_1)(x-w_2)\ldots(x-w_n)$ stopnia n. Ponadto iloraz tych dwóch wielomianów jako wielomian stopnia 1 także musi mieć pierwiastek rzeczywisty w, który jest różny od każdej z liczb w_1, w_2, $\ldots$, w_n, gdyż te ostatnie były pierwiastkami jednokrotnymi wielomianu $W_n(x)$. W rezultacie wielomian $W_{n+1}(x)$ ma $n+1$ różnych pierwiastków rzeczywistych: są nimi w_1, w_2, $\ldots$, w_n oraz w.

To kończy konstrukcję indukcyjną i rozwiązanie zadania.

9. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Udowodnić, że

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geqslant \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ oraz $z = \frac{1}{c}$. Wówczas x, y oraz z są liczbami dodatnimi o sumie równej 1, a dowodzoną nierówność możemy przepisać następująco:

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{yz}} + \sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{zx}} + \sqrt{\frac{1}{z} + \frac{1}{xy}} \geqslant \sqrt{\frac{1}{xyz}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} + \sqrt{\frac{1}{z}}.$$

Mnożąc powyższą zależność stronami przez $\sqrt{xyz}$ oraz korzystając z warunku $x+y+z=1$ zapisujemy ją w równoważnej postaci

$$(*) \qquad \sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy} \geqslant x+y+z+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}.$$

W celu wykazania nierówności $(*)$ wystarczy udowodnić poniższe trzy nierówności i dodać je stronami:

$$\sqrt{x+yz} \geqslant x+\sqrt{yz}, \qquad \sqrt{y+zx} \geqslant y+\sqrt{zx} \qquad \text{oraz} \qquad \sqrt{z+xy} \geqslant z+\sqrt{xy}.$$

Uzasadnimy pierwszą z powyższych trzech zależności; pozostałe dwie są analogiczne. Podnosząc ją stronami do kwadratu uzyskujemy równoważną nierówność $x+yz \geqslant x^2+2x\sqrt{yz}+yz$, którą przekształcamy do postaci $x \geqslant x^2+2x\sqrt{yz}$, czyli $1 \geqslant x+2\sqrt{yz}$. Na mocy związku $x+y+z=1$ ostatnia nierówność ma równoważną postać $y+z \geqslant 2\sqrt{yz}$ i wobec tego jest spełniona. To dowodzi zależności $(*)$ i kończy rozwiązanie.

10. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykazać, że zbiór wszystkich punktów P leżących wewnątrz danego czworokąta i spełniających równość

$$\angle DAP + \angle CBP = \angle CPD$$

jest zawarty w pewnym okręgu lub w pewnej prostej.

Rozwiązanie:

Niech P będzie punktem, dla którego spełniona jest dana w treści zadania równość. Wówczas na odcinku CD istnieje taki punkt E, że

$$\angle DAP = \angle DPE \qquad \text{oraz} \qquad \angle CBP = \angle CPE.$$

Na mocy powyższych zależności prosta EP jest styczna w punkcie P do okręgu o_1 opisanego na trójkącie APD oraz do okręgu o_2 opisanego na trójkącie BPC. Zatem prosta PE jest osią potęgową okręgów o_1 i o_2. Ponadto prosta AD jest osią potęgową okręgu o_1 i okręgu o opisanego na czworokącie $ABCD$, a prosta BC jest osią potęgową okręgów o_2 i o. Stąd wniosek, że proste PE, AD i BC przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

W pierwszym przypadku punkt F przecięcia prostych AD i BC leży na prostej PE. Potęga punktu F względem okręgu o_1 wynosi więc $FP^2 = FA \cdot FD$. To oznacza, że punkt P leży na okręgu o środku F i promieniu $\sqrt{FA \cdot FD}$, przy czym środek i promień tego okręgu są niezależne od wyboru punktu P.

Natomiast w drugim przypadku cięciwy AD i BC okręgu o są równoległe i wobec tego mają wspólną symetralną, względem której każdy z okręgów o_1 i o_2 jest do siebie symetryczny. W efekcie punkt symetryczny do punktu P względem tej symetralnej również leży na obu tych okręgach. Ponieważ okręgi te są styczne w punkcie P, więc punkt P musi leżeć na tej symetralnej.

11. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb pierwszych (p, q), że liczba $5^p + 5^q$ jest podzielna przez pq.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Szukanymi parami (p, q) są $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(5, 5)$, $(5, 313)$, $(313, 5)$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, w którym liczby pierwsze p i q o postulowanej własności są różne od 2 i 5. Wówczas liczba $5^p + 5^q = 5^p - 5 + 5(5^{q-1} + 1)$ jest podzielna przez p i na mocy małego twierdzenia Fermata stwierdzamy, że $p \mid 5^{q-1} + 1$. Analogicznie uzyskujemy podzielność $q \mid 5^{p-1} + 1$. Określmy liczby x i y wzorami

$$x = \frac{p-1}{\text{NWD}(p-1, q-1)} \qquad \text{oraz} \qquad y = \frac{q-1}{\text{NWD}(p-1, q-1)};$$

są to względnie pierwsze liczby całkowite spełniające równość

$$(*) \qquad\qquad x(q-1) = y(p-1).$$

Wobec tego co najmniej jedna z tych liczb jest nieparzysta. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że liczba x jest nieparzysta. Liczba $5^{x(q-1)} + 1 = (5^{q-1})^x + 1^x$ jest zatem podzielna przez $5^{q-1} + 1$ i tym bardziej jest podzielna przez p. Stąd i z równości $(*)$ wynika, że liczba $z = 5^{y(p-1)} + 1$ jest podzielna przez p. To jednak prowadzi do sprzeczności, gdyż liczba $z - 2 = 5^{y(p-1)} - 1$ jest podzielna przez $5^{p-1} - 1$, czyli — na podstawie małego twierdzenia Fermata — także przez p, a podzielności $p \mid z$ i $p \mid z - 2$ przeczą założeniu $p \neq 2$.

Uzyskana sprzeczność wskazuje, że w każdej parze (p, q) spełniającej warunki zadania co najmniej jedna z liczb musi być równa 2 lub 5. Niech na przykład $p = 2$; wymagany warunek przyjmuje wtedy postać $2q \mid 5^2 + 5^q$. Ta podzielność nie jest prawdziwa dla $q = 2$, a dla nieparzystych liczb pierwszych q jest ona równoważna podzielności $q \mid 5^2 + 5^q = 5^2 + 5 + (5^q - 5) = 30 + (5^q - 5)$, czyli podzielności $q \mid 30$, co daje wartości $q = 3$ i $q = 5$. Rozumując podobnie dla $p = 5$ widzimy, że żądany warunek przybiera postać $5q \mid 5^5 + 5^q$ i jest spełniony dla $q = 5$, a dla pozostałych liczb pierwszych q jest on równoważny podzielności $q \mid 5^5 + 5^q = 5^5 + 5 + (5^q - 5) = 3130 + (5^q - 5)$, czyli podzielności $q \mid 3130$, a to daje wartości $q = 2$ i $q = 313$.

12. Na konferencję prasową po meczu Polska-Rosja akredytowała się grupa dziennikarzy, wśród których dokładnie 100 mówi po polsku, dokładnie 100 mówi po angielsku i dokładnie 100 mówi po rosyjsku (jeden dziennikarz może znać dowolną liczbę języków). Jednak z powodu braku odpowiednio dużej sali tylko część dziennikarzy może wziąć udział w konferencji. Dowieść, że można wybrać przedstawicieli dziennikarzy, wśród których dokładnie 50 mówi po polsku, dokładnie 50 mówi po angielsku i dokładnie 50 mówi po rosyjsku.

Rozwiązanie:

Drużyną pojedynczą będziemy nazywać grupę dziennikarzy, w której dokładnie jeden dziennikarz mówi po polsku, dokładnie jeden mówi po angielsku i dokładnie jeden mówi po rosyjsku, a *drużyną podwójną* — grupę dziennikarzy, w której dokładnie dwaj dziennikarze mówią po polsku, dokładnie dwaj mówią po angielsku i dokładnie dwaj mówią po rosyjsku.

Udowodnimy, że z dowolnej niepustej grupy dziennikarzy, w której każdym z rozpatrywanych trzech języków włada taka sama liczba osób, można wybrać drużynę pojedynczą lub podwójną. Wówczas także wśród pozostałych dziennikarzy każdy język jest opanowany przez taką samą liczbę osób, więc spośród nich będzie można wybrać kolejną drużynę. Kontynuując to postępowanie ostatecznie podzielimy całą początkową grupę dziennikarzy na drużyny.

Aby wykazać, że wybór drużyny jest możliwy, oznaczmy przez P, A, R zbiory dziennikarzy odpowiednio mówiących tylko po polsku, mówiących tylko po angielsku i mówiących tylko po rosyjsku. Podobnie niech symbole PA, PR, AR oznaczają zbiory dziennikarzy mówiących dokładnie dwoma odpowiednimi językami, zaś PAR niech będzie zbiorem dziennikarzy mówiących we wszystkich trzech językach.

Jeżeli zbiór PAR jest niepusty lub każdy ze zbiorów P, A, R jest niepusty, to możemy wybrać drużynę pojedynczą. Przyjmijmy w takim razie, że $PAR = \emptyset$ oraz $P = \emptyset$.

Załóżmy, że jeden ze zbiorów PA, PR jest pusty, na przykład $PA = \emptyset$. Wtedy wszyscy dziennikarze mówiący po polsku należą do zbioru PR, skąd wynika, że każdym z trzech języków mówi dokładnie $|PR|$ dziennikarzy. Wszyscy dziennikarze mówiący po rosyjsku należą więc do zbioru PR, a zbiory R i AR są puste. W tej sytuacji $|A| = |PR| > 0$ i uzyskujemy drużynę pojedynczą wybierając po jednym dziennikarzu ze zbiorów A i PR.

Przypuśćmy z kolei, że zbiory PA i PR są niepuste. Możemy wtedy założyć, że zbiory A i R są puste — w przeciwnym razie można wybrać dziennikarza z jednego z tych zbiorów oraz dziennikarza z jednego ze zbiorów PA, PR i otrzymać drużynę pojedynczą. W takim razie $PA \cup PR$, $PA \cup AR$ i $PR \cup AR$ są zbiorami wszystkich dziennikarzy mówiących odpowiednio po polsku, po angielsku i po rosyjsku. Stąd wniosek, że $|PA| + |PR| = |PA| + |AR| = |PR| + |AR|$, czyli $|PA| = |PR| = |AR|$. To oznacza, że zbiory PA, PR i AR są niepuste; wybierając jednego dziennikarza z każdego z tych trzech zbiorów uzyskujemy drużynę podwójną.

Wobec tego daną w treści zadania grupę dziennikarzy można podzielić na drużyny pojedyncze i podwójne. Ponadto liczba osób mówiących w ustalonym języku jest parzysta, a więc liczba drużyn pojedynczych jest parzysta. Zatem drużyny pojedyncze można połączyć w pary i zastąpić każdą taką parę jedną drużyną podwójną. W efekcie cała grupa dziennikarzy zostanie podzielona na 50 drużyn podwójnych. Wystarczy teraz dowolnie wybrać 25 spośród tych drużyn, by otrzymać szukanych przedstawicieli na konferencję prasową.

13. Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), że liczba $2^m + 1$ jest podzielna przez $2^n - 1$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Szukanymi parami (m, n) są pary $(k, 1)$ i $(2k-1, 2)$ dla dowolnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$.

Przypuśćmy, że dodatnie liczby całkowite m i n spełniają warunki zadania. Podzielmy liczbę m przez liczbę n, otrzymując iloraz q oraz resztę r. Wówczas $0 \leqslant r < n$, a liczba $2^{qn} - 1 = (2^n)^q - 1$ jest podzielna przez $2^n - 1$. Zatem również liczba $(2^m + 1) - 2^r(2^{qn} - 1) = 2^{qn+r} + 1 - 2^{qn+r} + 2^r = 2^r + 1$ jest podzielna przez $2^n - 1$. Liczba $2^r + 1$ jest dodatnia, więc z ostatniej podzielności wynika nierówność $2^r + 1 \geqslant 2^n - 1$. Ponieważ $r \leqslant n - 1$, więc lewa strona tej nierówności nie przekracza $2^{n-1} + 1$. Wobec tego $2^{n-1} + 1 \geqslant 2^n - 1$, skąd uzyskujemy $2 \geqslant 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ i w efekcie $n \leqslant 2$.

Pozostaje stwierdzić, że dla $n = 1$ każda liczba całkowita jest podzielna przez $2^n - 1 = 1$, a więc każda wartość m ma wymaganą własność, natomiast dla $n = 2$ liczba $2^m + 1$ jest podzielna przez $2^n - 1 = 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 2^m daje resztę 2 z dzielenia przez 3, czyli gdy m jest liczbą nieparzystą.

14. Wyznaczyć liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Dany układ ma 7 rozwiązań.

Niech (x, y, z) będzie trójką liczb rzeczywistych spełniających dany układ równań. Istnieje wówczas dokładnie jeden kąt α w przedziale $(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi)$, dla którego $x = \operatorname{tg}\alpha$. Z pierwszego równania układu otrzymujemy wtedy zależność $2x = (1 - x^2)y$, z której wynika, że $1 - x^2 \neq 0$ oraz

$$(*) \qquad y = \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Wobec tego drugie równanie układu w podobny sposób prowadzi do związku $z = \operatorname{tg} 4\alpha$ i z trzeciego równania uzyskujemy teraz $x = \operatorname{tg} 8\alpha$. W rezultacie $\operatorname{tg}\alpha = x = \operatorname{tg} 8\alpha$.

Odwrotnie, jeżeli $\alpha \in (-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi)$ jest kątem, dla którego $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$, to na mocy tożsamości trygonometrycznej zastosowanej w zależności $(*)$ trójka $(x, y, z) = (\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg} 2\alpha, \operatorname{tg} 4\alpha)$ jest rozwiązaniem danego w treści zadania układu równań. Ponadto dla różnych kątów $\alpha \in (-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi)$ otrzymujemy różne wartości x, a więc różne rozwiązania układu.

Pozostaje wyznaczyć liczbę takich kątów $\alpha \in (-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi)$, że $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$. Równość ta ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy kąty α i 8α różnią się o całkowitą wielokrotność π, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $7\alpha = k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wszystkimi kątami w przedziale $(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi)$ spełniającymi ten warunek są kąty

$$\alpha = \tfrac{k}{7}\pi \qquad \text{dla } k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

i jest ich 7.

15. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w dwóch różnych punktach. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie do okręgu o_1 odpowiednio w punktach A_1 i A_2, są styczne wewnętrznie do okręgu o_2 odpowiednio w punktach B_1 i B_2 oraz przecinają się w dwóch różnych punktach C i D. Wykazać, że proste A_1B_1, A_2B_2 i CD przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech E będzie środkiem jednokładności o skali ujemnej k przekształcającej okrąg o_1 na okrąg o_2. Jednokładność ta jest złożeniem jednokładności o środku A_1 i skali ujemnej odwzorowującej okrąg o_1 na ω_1 oraz jednokładności o środku B_1 i skali dodatniej odwzorowującej okrąg ω_1 na o_2. Na mocy twierdzenia o złożeniu jednokładności punkt E leży na prostej A_1B_1. Analogicznie uzasadniamy, że punkt E leży na prostej A_2B_2.

Do zakończenia rozwiązania należy jeszcze udowodnić, że punkt E leży na prostej CD. Ponieważ prosta ta jest osią potęgową okręgów ω_1 i ω_2, więc wystarczy uzasadnić, że punkt E ma jednakowe potęgi względem obu tych okręgów. W tym celu oznaczmy przez F punkt różny od A_1, w którym prosta B_1A_1 przecina okrąg o_1, a przez G — punkt różny od A_2, w którym prosta B_2A_2 przecina okrąg o_1. Wówczas prawdziwe są równości

$$(*) \qquad \frac{EA_1}{EG} = \frac{EA_2}{EF} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{EB_1}{EF} = \frac{EB_2}{EG};$$

pierwsza równość wynika z faktu, że cięciwy FA_1 i GA_2 okręgu o_1 przecinają się w punkcie E, a w drugiej równości oba stosunki wynoszą $|k|$ ze względu na to, że jednokładność o środku E i skali k przeprowadza punkty F i G odpowiednio na punkty B_1 i B_2. Mnożąc stronami równości $(*)$ stwierdzamy, że $EA_1 \cdot EB_1 = EA_2 \cdot EB_2$, czyli istotnie punkt E ma jednakowe potęgi względem okręgów ω_1 i ω_2.

16. Dowieść, że można pokolorować każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ na jeden z czterech kolorów w taki sposób, że żaden rosnący 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazach z tego zbioru nie składa się z elementów o jednakowym kolorze.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że liczba sposobów pokolorowania każdego elementu zbioru $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ jednym z czterech kolorów jest większa od liczby takich sposobów pokolorowania, w których pewien rosnący 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny składa się z elementów o jednakowym kolorze.

Oszacujmy liczbę L rosnących ciągów arytmetycznych złożonych z 10 elementów zbioru S. Pierwszy wyraz a_1 takiego ciągu może być dowolnym elementem zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2003\}$, a różnica d może być dowolną dodatnią liczbą całkowitą spełniającą warunek $a_1 + 9d \leqslant 2012$, czyli $d \leqslant \frac{1}{9}(2012 - a_1)$. Wobec tego

$$L \leqslant \frac{2012-1}{9} + \frac{2012-2}{9} + \frac{2012-3}{9} + \ldots + \frac{2012-2003}{9} < \\ < \frac{2011+2010+2009+\ldots+2+1}{9} = \frac{2011 \cdot 2012}{2 \cdot 9} < \frac{2^{11} \cdot 2^{11}}{2 \cdot 2^3} = 4^9.$$

Dla ustalonego 10-wyrazowego ciągu arytmetycznego takie pokolorowanie każdego elementu zbioru S, że wszystkie wyrazy danego ciągu mają ten sam kolor, można uzyskać na 4^{2003} sposobów. Należy bowiem wybrać dowolny kolor każdego z 2002 elementów zbioru S nie występujących w tym ciągu, co można uczynić na 4^{2002} sposobów, oraz wybrać jeden z czterech kolorów, którym mają być pokolorowane wszystkie wyrazy ciągu. Przy tym 4^{2003} sposoby pokolorowania elementów zbioru S, otrzymane opisaną metodą dla różnych ciągów arytmetycznych, nie muszą być rozłączne. Zatem liczba takich sposobów pokolorowania elementów zbioru S, że pewien 10-wyrazowy ciąg arymetyczny składa się z elementów jednakowego koloru, nie przekracza liczby $4^{2003} \cdot L$, a więc jest mniejsza od liczby $4^{2003} \cdot 4^9 = 4^{2012}$. Stąd wniosek, że wśród wszystkich 4^{2012} sposobów pokolorowania elementów zbioru S jednym z czterech kolorów istnieje taki sposób, przy którym żaden 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny nie składa się z elementów o takim samym kolorze.

17. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełnione są równości

$$f(g(x)) = x^3 \qquad \text{oraz} \qquad g(f(x)) = x^2.$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie.

Przypuśćmy, że istnieją funkcje f i g o opisanej własności. Wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej x otrzymujemy

$$g(x^3) = g(f(g(x)) = (g(x))^2.$$

Podstawiając w powyższej zależności liczby $x = 1, 0, -1$ stwierdzamy, że każda z trzech liczb $t = g(1), g(0), g(-1)$ spełnia równanie $t = t^2$. Jednak równanie to ma tylko dwa różne rozwiązania rzeczywiste. Wobec tego wśród liczb $g(1)$, $g(0)$, $g(-1)$ pewne dwie liczby muszą być równe, a więc funkcja g nie jest różnowartościowa.

Z drugiej strony, niech x i y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, dla których ma miejsce równość $g(x) = g(y)$. Wtedy

$$x^3 = f(g(x)) = f(g(y)) = y^3,$$

skąd dostajemy $x = y$, czyli funkcja g jest różnowartościowa. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że uczynione na początku założenie jest fałszywe.

18. Udowodnić, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)(2^n - 2^2) \ldots (2^n - 2^{n-1})$$

jest podzielna przez $n!$.

Rozwiązanie:

Należy udowodnić, że dowolna liczba pierwsza p występuje w rozkładzie liczby $n!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem nie większym, niż w rozkładzie liczby $M = (2^n - 2^0)(2^n - 2^1)(2^n - 2^2) \ldots (2^n - 2^{n-1})$ na czynniki pierwsze.

Wykładnik, z jakim liczba p występuje w rozkładzie liczby $n!$, jest równy

$$v_p = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^w}\right],$$

gdzie w jest nieujemną liczbą całkowitą jednoznacznie wyznaczoną przez warunek $p^w \leqslant n < p^{w+1}$. Stąd i ze wzoru na sumę kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned} v_p &\leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \ldots + \frac{n}{p^w} = \frac{n}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^{w-1}}\right) = \\ &= \frac{n}{p} \cdot \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p}} < \frac{n}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}, \end{aligned}$$

czyli $v_p \leqslant [\frac{n}{p-1}]$. Wobec tego wystarczy udowodnić, że wykładnik, z jakim dowolna liczba pierwsza p występuje w rozkładzie liczby M, wynosi co najmniej $[\frac{n}{p-1}]$.

Liczba M jest podzielna przez $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{n-1} = 2^{n(n-1)/2}$ i wykładnik $\frac{1}{2}n(n-1)$ jest równy co najmniej n dla każdej wartości $n \geqslant 3$. To oznacza, że ostatnie zdanie poprzedniego akapitu jest prawdziwe dla liczby pierwszej $p = 2$

i dowolnej liczby $n \geqslant 3$. Bezpośrednie sprawdzenie dowodzi, że teza zadania jest prawdziwa także dla $n = 1$ i $n = 2$.

Niech teraz p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Wtedy na mocy małego twierdzenia Fermata liczba $2^{p-1} - 1$ jest podzielna przez p. Dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej $k < n$ mamy $2^n - 2^k = 2^k(2^{n-k} - 1)$. Jeżeli ponadto różnica $n - k$ jest podzielna przez $p - 1$, to $n - k = \ell(p - 1)$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ, a więc liczba $2^{n-k} - 1 = (2^{p-1})^\ell - 1$ jest podzielna przez $2^{p-1} - 1$ i tym bardziej przez p. Inaczej mówiąc, z podzielności $p - 1 \,|\, n - k$ wynika, że czynnik $2^n - 2^k$ występujący w iloczynie definiującym liczbę M jest podzielny przez p. Zatem wykładnik, z jakim liczba pierwsza p występuje w rozkładzie liczby M, jest równy co najmniej liczbie wartości $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$, dla których różnica $n - k$ jest podzielna przez $p - 1$, czyli — co najmniej liczbie elementów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ podzielnych przez $p - 1$. Ta ostatnia liczba jest oczywiście równa $[\frac{n}{p-1}]$, co kończy rozwiązanie.

19. Dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$ wyznaczyć liczbę sposobów takiego wypełnienia prostokątnej tablicy rozmiaru $m \times n$ liczbami 1 i -1, że w każdej kolumnie iloczyn wszystkich liczb wynosi -1 i w każdym wierszu iloczyn wszystkich liczb wynosi -1.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Szukana liczba sposobów wynosi $2^{(m-1)(n-1)}$, gdy liczby m i n mają tę samą parzystość, oraz 0, gdy mają one różną parzystość.

Jeżeli co najmniej jedna z liczb m, n jest równa 1, to jedynym sposobem wypełnienia tablicy, który może spełniać warunki zadania, jest wypełnienie jej w całości liczbami -1. Bez trudu przekonujemy się, że wypełnienie to spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy druga z liczb m, n jest nieparzysta, oraz że w obu przypadkach wzór podany w odpowiedzi jest słuszny.

Przyjmijmy więc w dalszej części, że $m, n \geqslant 2$. Wyodrębnijmy z danej tablicy $m \times n$ mniejszą tablicę rozmiaru $(m - 1) \times (n - 1)$ przyległą do lewego górnego rogu. Wypełnijmy tę mniejszą tablicę w dowolny sposób liczbami 1 i -1; można to uczynić na $2^{(m-1)(n-1)}$ sposobów. Zbadamy teraz, kiedy można tak uzupełnić pozostałe pola większej tablicy, by miała ona opisaną w treści zadania własność.

Niech k_i oznacza iloczyn $m-1$ liczb znajdujących się w i-tej kolumnie mniejszej tablicy dla $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, a w_j — iloczyn $n - 1$ liczb znajdujących się w j-tym wierszu dla $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Wówczas w ostatniej kolumnie większej tablicy musimy kolejno wpisać liczby $-w_1$, $-w_2$, $\ldots$, $-w_{m-1}$; pola w dolnym prawym rogu na razie nie wypełniamy. Analogicznie w ostatnim wierszu tablicy musimy kolejno wpisać liczby $-k_1$, $-k_2$, $\ldots$, $-k_{n-1}$. W tej sytuacji iloczyn wszystkich liczb dowolnej kolumny z wyjątkiem ostatniej wynosi -1 oraz iloczyn wszystkich liczb dowolnego wiersza z wyjątkiem ostatniego wynosi -1.

Ponadto iloczyn $m-1$ liczb wpisanych do tej pory w ostatniej kolumnie wynosi $K=(-1)^{m-1}w_1w_2\dots w_{m-1}$, a iloczyn $n-1$ liczb wpisanych w ostatnim wierszu wynosi $W=(-1)^{n-1}k_1k_2\dots k_{n-1}$. Aby iloczyn wszystkich liczb ostatniej kolumny i iloczyn wszystkich liczb ostatniego wiersza były oba równe -1, prawy dolny róg tablicy powinien zostać uzupełniony liczbą, która jest jednocześnie równa $-K$ i $-W$. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $K=W$. Z drugiej strony, prawdziwa jest równość $w_1w_2\dots w_{m-1}=k_1k_2\dots k_{n-1}$, gdyż oba iloczyny są równe iloczynowi wszystkich $(m-1)(n-1)$ liczb znajdujących się w mniejszej tablicy. Wobec tego na mocy określenia liczb K i W zależność $K=W$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy liczby m i n mają jednakową parzystość.

To oznacza, że dla liczb m, n o jednakowej parzystości każdy z $2^{(m-1)(n-1)}$ sposobów wypełnienia mniejszej tablicy może zostać rozszerzony do dokładnie jednego dopuszczalnego sposobu wypełnienia większej tablicy, a dla liczb m, n o różnej parzystości żaden sposób wypełnienia mniejszej tablicy nie może zostać rozszerzony do dopuszczalnego sposobu wypełnienia większej tablicy. Wynika stąd słuszność wzoru podanego w odpowiedzi.

20. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okręgi o_1 i o_2 po raz drugi odpowiednio w punktach C i D, przy czym punkt A leży na odcinku CD. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na prostą styczną do okręgu o_1 w punkcie C i na prostą styczną do okręgu o_2 w punkcie D. Dowieść, że prosta PQ jest styczna do okręgu o średnicy AB.

Rozwiązanie:

Jeżeli proste AB i CD są prostopadłe, to odcinki BC i BD są średnicami odpowiednio okręgów o_1 i o_2, a więc $P=C$ i $Q=D$. W tej sytuacji prosta PQ pokrywa się z prostą CD, do której okrąg o średnicy AB jest styczny w punkcie D.

Przyjmijmy w takim razie, nie ograniczając ogólności rozumowania, że kąt DAB jest ostry. Wówczas rzut prostokątny F punktu B na prostą CD leży na półprostej $AD^{\to}$. Z twierdzenia o kącie pomiędzy styczną a cięciwą oraz z zależności $\angle CBA+\angle DBA=\angle CBD<180^\circ$ wynika, że styczna do okręgu o_1 w punkcie C i styczna do okręgu o_2 w punkcie D przecinają się w punkcie E leżącym po przeciwnej stronie prostej CD niż punkt B. Ponadto

$$\angle CED=180^\circ-\angle ECD-\angle EDC=180^\circ-\angle CBA-\angle DBA=180^\circ-\angle CBD.$$

Wobec tego na czworokącie $CBDE$ można opisać okrąg. Zauważmy wreszcie, że $\angle ECB=180^\circ-\angle CAB=\angle DAB<90^\circ$ oraz $\angle EDB=180^\circ-\angle DAB>90^\circ$; nierówności te prowadzą do wniosku, że punkt P leży na odcinku EC, a punkt Q leży na półprostej $ED^{\to}$ poza odcinkiem ED.

Punkty P, Q i F są rzutami prostokątnymi punktu B na proste zawierające boki trójkąta ECD. Ponieważ punkt B leży na okręgu opisanym na tym trójkącie, więc te trzy rzuty leżą na jednej prostej (*prostej Simsona*). Innymi słowy, punkt F leży na prostej PQ. Z drugiej strony, kąt AFB jest prosty i wobec tego punkt F leży na okręgu o średnicy AB.

Udowodnimy, że prosta PQ jest styczna do tego okręgu w punkcie F. W tym celu wystarczy uzasadnić, że $\angle PFC = \angle FBA$. Na czworokącie $CBFP$ można opisać okrąg, którego średnicą jest odcinek CB; otrzymujemy stąd związek $\angle PFC = \angle PBC$. Jednocześnie równości

$$\angle PCB = \angle ECB = 180^\circ - \angle CAB = \angle DAB = \angle FAB$$

wskazują, że trójkąty prostokątne CPB i AFB są podobne, skąd dostajemy $\angle PBC = \angle FBA$. Wykazaliśmy w ten sposób zależność $\angle PFC = \angle FBA$, która pociąga za sobą tezę zadania.

21. Dany jest skończony ciąg liczb rzeczywistych, których suma jest równa zeru, ale nie wszystkie z tych liczb są równe zeru. Udowodnić, że istnieje permutacja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ danego ciągu, dla której

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0.$$

Rozwiązanie:

Niech $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ będzie danym ciągiem liczb rzeczywistych. Dla każdej spośród $n!$ permutacji $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ tego ciągu obliczmy wartość wyrażenia $b'_1b'_2 + b'_2b'_3 + b'_3b'_4 + \ldots + b'_{n-1}b'_n + b'_nb'_1$ i oznaczmy przez S sumę tak otrzymanych $n!$ liczb.

Wystarczy udowodnić, że $S < 0$. Będzie to bowiem oznaczało, że co najmniej jedna z uzyskanych $n!$ liczb jest ujemna, a to jest równoznaczne z tezą zadania.

Ustalmy parę wskaźników $i < j$ ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Liczba permutacji tego zbioru, w których element j występuje bezpośrednio po elemencie i (lub w których element i jest ostatnim, a element j jest pierwszym wyrazem), wynosi $n \cdot (n-2)!$, gdyż należy wybrać jedną z n pozycji dla elementu i, pozycja elementu j jest jednoznacznie określona, a pozostałe $n-2$ elementów można rozmieścić dowolnie na pozostałych $n-2$ pozycjach. To dowodzi, że iloczyn b_ib_j występuje $n \cdot (n-2)!$ razy w sumie S; podobnie uzasadniamy, że tyle samo razy w tej sumie występuje iloczyn b_jb_i. Wobec tego

$$\begin{aligned}\frac{S}{n \cdot (n-2)!} &= 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_ib_j = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2 - b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2 = \\ &= -b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2 < 0.\end{aligned}$$

W ten sposób wykazaliśmy postulowaną nierówność $S < 0$.

22. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ liczba

$$2^{2^n-1} - 2^n - 1$$

jest złożona.

Rozwiązanie:

Zapiszmy liczbę $n+1$ w postaci $n+1 = 2^k \cdot m$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, a liczba m jest nieparzysta. Wtedy $2^k \leqslant n+1$, co wraz z nierównością $n \geqslant 3$ prowadzi do wniosku, że $k \leqslant n-1$. Zatem

$$2(2^{2^n-1} - 2^n - 1) = (2^{2^n} - 1) - (2^{n+1} + 1) = (2^{2^n} - 1) - (2^{2^k m} + 1)$$

i obie liczby w nawiasach po prawej stronie są podzielne przez $2^{2^k} + 1$, gdyż

$$2^{2^n} - 1 = (2^{2^k} - 1)(2^{2^k} + 1)(2^{2^{k+1}} + 1) \ldots (2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$$

oraz

$$2^{2^k m} + 1 = (2^{2^k} + 1)(2^{2^k(m-1)} - 2^{2^k(m-2)} + 2^{2^k(m-3)} - \ldots - 2^{2^k} + 1).$$

W rezultacie liczba $2(2^{2^n-1} - 2^n - 1)$ jest podzielna przez $2^{2^k} + 1$. Stąd wniosek, że liczba nieparzysta $2^{2^n-1} - 2^n - 1$ także jest podzielna przez liczbę nieparzystą $2^{2^k} + 1$. Ponadto z nierówności $2^k \leqslant n+1$ oraz warunku $n \geqslant 3$ dostajemy

$$2^{2^n-1} - 2^n - 1 > 2^{n+2} - 2^n - 1 = 3 \cdot 2^n - 1 > 2^{n+1} + 1 \geqslant 2^{2^k} + 1.$$

Wobec tego liczba $2^{2^n-1} - 2^n - 1$ jest podzielna przez mniejszą liczbę $2^{2^k} + 1$, skąd wynika teza.

23. Dana jest kwadratowa tabela o boku 2012 podzielona na pola jednostkowe, z których każde może być pomalowane na czarno albo na biało. Ruch polega na wybraniu kwadratu o boku k złożonego z pól tabeli, przy czym $1500 \leqslant k \leqslant 1510$, i zmianie koloru wszystkich pól leżących w wybranym kwadracie. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnego początkowego sposobu pomalowania pól można wykonać skończony ciąg ruchów, który doprowadza do tabeli składającej się wyłącznie z białych pól.

Rozwiązanie:

Dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, 2012\}$ istnieje $(n-k+1)^2$ różnych kwadratów o boku k składających się z pól tabeli: pole leżące w lewym górnym rogu takiego kwadratu musi się bowiem znajdować w jednym z początkowych $n-k+1$

wierszy oraz w jednej z początkowych $n-k+1$ kolumn tabeli. Wobec tego łączna liczba kwadratów o boku k złożonych z pól tabeli, przy czym $1500 \leqslant k \leqslant 1510$, wynosi $513^2 + 512^2 + 511^2 + \ldots + 503^2 = 2838814$.

Dla danego początkowego sposobu pomalowania pól wynik wykonania skończonego ciągu ruchów nie zależy od kolejności wykonywania tych ruchów, gdyż końcowy kolor dowolnego pola jest taki sam jak początkowy kolor, jeżeli pole to należy do parzystej liczby wybranych kwadratów, oraz jest inny niż początkowy kolor w przeciwnym przypadku. Ponadto dwukrotne wybranie tego samego kwadratu w dwóch kolejnych ruchach daje taki sam efekt, jak niewykonanie żadnego z tych dwóch ruchów. Co więcej, dwukrotne wykonanie tego samego ciągu ruchów przywraca początkowe kolory wszystkich pól. Wobec tego początkowymi tabelami, z których można otrzymać tabelę w całości białą, są te same tabele, które można otrzymać z początkowej tabeli w całości białej. Jednocześnie tabele możliwe do uzyskania z tabeli początkowej w całości białej otrzymamy, wybierając każdy z możliwych 2838814 kwadratów nie więcej niż raz. Daje to łącznie co najwyżej $2^{2838814}$ różnych tabel. Ponieważ liczba wszystkich sposobów pomalowania pól tabeli wynosi $2^{2012^2} = 2^{4048144}$, więc wśród nich istnieje co najmniej $2^{4048144} - 2^{2838814}$ sposobów, dla których nie można uzyskać tabeli składającej się wyłącznie z białych pól.

24. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt M jest środkiem boku AB. Okrąg o średnicy CM przecina boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E, a styczne do tego okręgu w punktach D i E przecinają się w punkcie F. Dowieść, że $FA = FB$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez o_1 i o_2 okręgi o średnicach odpowiednio AM i BM. Środki tych okręgów leżą na prostej AB, więc okręgi te są styczne w punkcie M, a ich osią potęgową jest symetralna odcinka AB. Co więcej, na podstawie równości $\angle AEM = \angle BDM = 90°$ punkt E leży na okręgu o_1, a punkt D leży na okręgu o_2.

Niech prosta FE przecina ponownie okrąg o_1 w punkcie G, a prosta FD niech przecina ponownie okrąg o_2 w punkcie H. Odcinki EF i AM przecinają się; punkt G leży zatem po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C. Analogicznie po tej stronie leży także punkt H.

Z twierdzenia o kącie pomiędzy styczną a cięciwą otrzymujemy równości

$$(*) \qquad \angle FEM = \angle ECM \qquad \text{oraz} \qquad \angle FDM = \angle DCM.$$

Wobec tego

$$(**) \qquad \begin{aligned} \angle GED &= \angle FEM + \angle MED = \angle ECM + \angle DCM = \\ &= \angle EDM + \angle FDM = \angle HDE. \end{aligned}$$

Stosując raz jeszcze zależności $(*)$ stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}\angle GAE + \angle HBD &= \angle GAM + \angle BAC + \angle HBM + \angle ABC = \\ &= \angle FEM + \angle BAC + \angle FDM + \angle ABC = \\ &= \angle ECM + \angle BAC + \angle DCM + \angle ABC = \\ &= \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ.\end{aligned}$$

To oznacza, że na cięciwach GE i HD odpowiednio okręgów o_1 i o_2 oparte są kąty o miarach dających łącznie kąt półpełny. Ponadto w myśl związku $AM = BM$ okręgi te są przystające. Wynika stąd równość długości obu cięciw, która wraz z zależnością $(**)$ dowodzi, że czworokąt $EGHD$ jest trapezem równoramiennym. Na czworokącie tym można więc opisać okrąg i w efekcie $FG \cdot FE = FH \cdot FD$. Zatem punkt F leży na osi potęgowej okręgów o_1 i o_2, czyli — na symetralnej odcinka AB, co kończy rozwiązanie.

25. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 6n\}$ pomalowano na biało albo na czarno, przy czym dokładnie $4n$ elementów jest białych. Wykazać, że w tym zbiorze istnieje $3n$ kolejnych liczb całkowitych, wśród których dokładnie $2n$ liczb jest białych.

Rozwiązanie:

Dla $i = 1, 2, 3, \ldots, 3n + 1$ niech b_i oznacza liczbę białych elementów zbioru $\{i, i + 1, i + 2, \ldots, i + 3n - 1\}$. Wtedy suma $b_1 + b_{3n+1}$ jest liczbą białych elementów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 6n\}$, czyli wynosi ona $4n$. Z drugiej strony, dla $i = 1, 2, 3, \ldots, 3n$ różnica $b_{i+1} - b_i$ jest równa 0, gdy liczby i oraz $i + 3n$ mają jednakowy kolor, oraz jest równa ± 1, gdy liczby te mają różne kolory. Wobec tego w ciągu liczb całkowitych

$$b_1 - 2n, \quad b_2 - 2n, \quad b_3 - 2n, \quad \ldots, \quad b_{3n+1} - 2n$$

pierwszy i ostatni wyraz są liczbami przeciwnymi, a dowolne dwa sąsiednie wyrazy są równe lub różnią się o 1. To oznacza, że w ciągu tym musi wystąpić liczba 0. Pozostaje już tylko stwierdzić, że równość $b_i = 2n$ dla pewnego wskaźnika $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 3n + 1\}$ jest, na mocy określenia liczby b_i, równoznaczna z tezą zadania.

26. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ istnieje taki zbiór złożony z n dodatnich liczb całkowitych, że suma dowolnych dwóch różnych elementów tego zbioru jest podzielna przez ich różnicę.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne.

Dla $n = 2$ zbiór $\{1, 2\}$ spełnia warunki zadania.

Przypuśćmy teraz, że n-elementowy zbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ składający się z dodatnich liczb całkowitych ma opisaną własność. Niech M oznacza iloczyn wszystkich liczb a_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz wszystkich różnic $|a_i - a_j|$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Wykażemy, że wówczas $\{M, M + a_1, M + a_2, \ldots, M + a_n\}$ jest $(n+1)$-elementowym spełniającym wymagane warunki. Jest jasne, że wypisane przed chwilą elementy są różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Dowolna para różnych elementów tego zbioru albo ma postać M, $M+a_i$ dla pewnego wskaźnika $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, albo też ma postać $M + a_i$, $M + a_j$ dla pewnych wskaźników $1 \leqslant i < j \leqslant n$. W pierwszym przypadku suma $M + (M + a_i) = 2M + a_i$ jest podzielna przez różnicę $M - (M + a_i) = -a_i$ na podstawie podzielności $a_i \mid M$. Z kolei w drugim przypadku suma $(M+a_i)+(M+a_j) = 2M+(a_i+a_j)$ jest podzielna przez różnicę $(M + a_i) - (M + a_j) = a_i - a_j$, gdyż na mocy założenia indukcyjnego liczba $a_i + a_j$ jest podzielna przez $a_i - a_j$, a z określenia liczby M wynika, że jest ona podzielna przez $a_i - a_j$. To kończy konstrukcję indukcyjną.

27. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina ponownie okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D, przy czym punkt A leży na odcinku CD. Punkty K i L są środkami odpowiednio łuków BC okręgu o_1 i BD okręgu o_2 nie zawierających punktu A. Punkt M jest środkiem odcinka CD. Dowieść, że $\angle KML = 90°$.

Rozwiązanie:

Niech N będzie punktem symetrycznym do L względem punktu M. Wtedy trójkąty CMN i DML są symetryczne względem punktu M, skąd otrzymujemy związki

$$CN = DL = BL \qquad \text{oraz} \qquad \angle NCM = \angle LDM = 180° - \angle LBA.$$

To wraz z zależnościami

$$CK = BK \qquad \text{oraz} \qquad \angle KCM = 180° - \angle KBA$$

dowodzi, że w trójkątach KCN i KBL boki wychodzące odpowiednio z wierzchołków C i B mają równe długości, a kąty przy tych wierzchołkach mają równe miary. Wobec tego trójkąty te są przystające, co pociąga za sobą równość $KN = KL$. (Trójkąty te mogą być zdegenerowane do odcinków; wówczas punkty C, B leżą odpowiednio na odcinkach KN, KL i równość ich długości pozostaje prawdziwa.) Zatem trójkąt NKL jest równoramienny, a punkt M jest środkiem jego podstawy NL. Stąd uzyskujemy żądaną prostopadłość prostych KM i NL.

28. Dana jest liczba całkowita $r \geqslant 2$. Dowieść, że trójmian kwadratowy $x^2 - rx - 1$ nie jest dzielnikiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych mniejszych co do wartości bezwzględnej od r.

Rozwiązanie:

Ponieważ trójmian kwadratowy $x^2 - rx - 1$ ma pierwiastek rzeczywisty $x = \frac{1}{2}(r + \sqrt{r^2+4})$ większy od r, więc wystarczy wykazać, że liczba rzeczywista większa od r nie może być pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych spełniających warunki $|a_i| \leqslant r - 1$ dla $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$.

Przypuśćmy zatem, że liczba rzeczywista $c > r$ jest pierwiastkiem takiego wielomianu $W(x)$. Wówczas

$$\begin{aligned} c^n &\leqslant |-a_n c^n| = |W(c) - a_n c^n| = |a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \ldots + a_1 c + a_0| \leqslant \\ &\leqslant |a_{n-1}|c^{n-1} + |a_{n-2}|c^{n-2} + \ldots + |a_1|c + |a_0| \leqslant \\ &\leqslant (r-1)(c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots + c + 1) = (r-1)\frac{c^n - 1}{c - 1}. \end{aligned}$$

Jednak z zależności $c > r > 1$ wynika, że ułamek po prawej stronie jest mniejszy od $\dfrac{c^n - 1}{r - 1}$, a więc prawa strona jest mniejsza od $c^n - 1$. Otrzymana fałszywa nierówność $c^n < c^n - 1$ oznacza, że wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych większych od r, a tego dowodziliśmy.

29. Niech a będzie taką liczbą całkowitą, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2^n + a$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym. Udowodnić, że $a = 0$.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że $a \neq 0$. Liczba całkowita $2 + a$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym, skąd $2 + a \geqslant 1$ i w konsekwencji $a \geqslant -1$. Liczba $a = -1$ nie ma żądanej własności, gdyż liczba $2^4 - 1 = 15$ nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym. Zatem $a > 0$. Ponadto a jest liczbą nieparzystą. W przeciwnym bowiem razie liczba $2^n + a$ byłaby parzysta dla każdej wartości n, czyli musiałaby być potęgą dwójki o wykładniku całkowitym. Stąd i z nierówności $2^n + a > 2^n$ wynikałaby jednak zależność $2^n + a \geqslant 2^{n+1}$ i w rezultacie $a \geqslant 2^n$ dla każdego n, co nie jest możliwe.

Liczba $2 + a$ jest więc potęgą nieparzystej liczby pierwszej o wykładniku całkowitym. Oznaczmy tę liczbę pierwszą przez p. Na mocy małego twierdzenia Fermata liczby $2^p - 2$ i $2^{2p-1} - 2 = (2^{p-1} + 1)(2^p - 2)$ są podzielne przez p. Wobec tego liczby

$$c = 2^p + a = (2^p - 2) + (2 + a)$$

oraz

$$d = 2^{2p-1} + a = (2^{2p-1} - 2) + (2 + a)$$

również są podzielne przez p. Zatem w myśl warunków zadania liczby c i d są potęgami liczby pierwszej p o wykładnikach całkowitych. To wraz z nierównością $c < d$ dowodzi, że liczba d jest podzielna przez c. W efekcie liczba nieparzysta $c = 2^p + a$ jest dzielnikiem liczby

$$d - c = 2^{2p-1} - 2^p = 2^p(2^{p-1} - 1).$$

Stąd otrzymujemy podzielność $2^p + a \mid 2^{p-1} - 1$, która jest sprzeczna z nierównościami $0 < 2^{p-1} - 1 < 2^p + a$.

Uzyskana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

30. Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ oraz $AB > CD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i CD, przy czym

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}.$$

Na odcinku KL wybrano punkty P i Q, dla których $\angle APB = \angle BCD$ oraz $\angle CQD = \angle ABC$. Wykazać, że punkty B, C, P i Q leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Nierówność $AB > CD$ wskazuje, że proste AD i BC przecinają się w punkcie E leżącym po przeciwnej stronie prostej CD niż odcinek AB. Z danej w treści zadania równości stosunków wynika, że jednokładność o środku E przekształcająca odcinek DC na AB przeprowadza punkt L na K; punkty E, L i K leżą więc na jednej prostej. Na tej prostej leży również punkt R będący obrazem punktu Q w rozpatrywanej jednokładności, a przy tym trójkąty ARB i DQC są podobne.

Punkty P i R leżą po przeciwnych stronach prostej AB, a ponadto

$$\angle APB + \angle BRA = \angle APB + \angle CQD = \angle BCD + \angle ABC = 180^\circ.$$

Wobec tego na czworokącie $ARBP$ można opisać okrąg, skąd otrzymujemy $\angle DCQ = \angle ABR = \angle APR$. To prowadzi do wniosku, że

$$\angle BCQ = \angle BCD - \angle DCQ = \angle APB - \angle APR = \angle BPR.$$

Uzyskana równość $\angle BCQ = \angle RPB$ dowodzi, niezależnie od kolejności punktów P i Q na odcinku KL, że punkty B, C, P i Q leżą na jednym okręgu.

31. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniają nierówności $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ oraz

$$b_1 b_2 \ldots b_k \geqslant a_1 a_2 \ldots a_k \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dowieść, że

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Rozwiązanie:

Na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną oraz założenia $b_1b_2\ldots b_k \geqslant a_1a_2\ldots a_k$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{b_1-a_1}{a_1}+\frac{b_2-a_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_k-a_k}{a_k} &= \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_k}{a_k}-k \geqslant \\ &\geqslant k\cdot\sqrt[k]{\frac{b_1b_2\ldots b_k}{a_1a_2\ldots a_k}}-k \geqslant k\cdot 1-k=0\end{aligned}$$

dla $k=1,2,\ldots,n$. Określmy $s_0=0$ oraz

$$s_k=\frac{b_1-a_1}{a_1}+\frac{b_2-a_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_k-a_k}{a_k} \qquad \text{dla } k=1,2,\ldots,n.$$

Wówczas liczby s_0, s_1, s_2, …, s_n są nieujemne. Ponadto

$$b_k-a_k=a_k\cdot\frac{b_k-a_k}{a_k}=a_k(s_k-s_{k-1}) \qquad \text{dla } k=1,2,\ldots,n.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}&(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\ldots+(b_n-a_n)=\\ &\qquad =a_1(s_1-s_0)+a_2(s_2-s_1)+\ldots+a_n(s_n-s_{n-1})=\\ &\qquad =(a_1-a_2)s_1+(a_2-a_3)s_2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)s_{n-1}+a_ns_n.\end{aligned}$$

Z warunku $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ wynika, że wszystkie składniki prawej strony są nieujemne. Zatem także lewa strona jest liczbą nieujemną, skąd uzyskujemy tezę.

32. Każda z liczb 1, 2, 3, …, 10^{2012} może być pomalowana na biało albo na czarno. Początkowo wszystkie te liczby są czarne. Ruch polega na wybraniu jednej z liczb oraz na zmianie koloru tej liczby i wszystkich innych liczb, które nie są z nią względnie pierwsze. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie takich ruchów można doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie dane liczby będą białe.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak.

Wykażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ prawdziwa jest ogólniejsza teza: Jeżeli każda z liczb 1, 2, 3, …, n jest początkowo pomalowana na czarno, to można wykonać skończony ciąg ruchów opisanych w treści zadania, w wyniku których wszystkie te liczby staną się białe.

W celu udowodnienia powyższego stwierdzenia zastosujemy indukcję ze względu na n. Dla $n=1$ jest ono oczywiście prawdziwe.

Przyjmijmy teraz, że jest ono prawdziwe dla liczby $n = m - 1$ i weźmy pod uwagę liczby 1, 2, 3, ..., m pomalowane na czarno. Na mocy założenia indukcyjnego możemy wykonać ciąg ruchów, który zmienia kolor każdej z liczb 1, 2, 3, ..., $m - 1$ na biały. Jeżeli ten ciąg ruchów zmienia także kolor liczby m na biały, to teza indukcyjna jest spełniona. Załóżmy więc, że liczba m po wykonaniu tego ciągu ruchów jest czarna.

Oznaczmy wszystkie dzielniki pierwsze liczby m symbolami p_1, p_2, ..., p_k. Jeżeli liczba m jest podzielna przez kwadrat którejś z tych liczb pierwszych, to mniejsza liczba $m' = p_1 p_2 \dots p_k$ ma te same dzielniki pierwsze co liczba m. Wynika stąd, że dowolna dodatnia liczba całkowita jest względnie pierwsza z liczbą m wtedy i tylko wtedy, gdy jest względnie pierwsza z liczbą m'. W takim razie po wykonaniu dowolnego ruchu liczby m i m' mają ten sam kolor, wbrew założeniu uczynionemu w poprzednim akapicie. To oznacza, że $m = p_1 p_2 \dots p_k$.

Niech A będzie zbiorem wszystkich $2^k - 1$ iloczynów postaci $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_j}$, gdzie $(i_1, i_2, \dots, i_j)$ jest niepustym rosnącym ciągiem wskaźników ze zbioru $\{1, 2, \dots, k\}$. Udowodnimy, że po wykonaniu $2^k - 1$ ruchów polegających na wybraniu każdego elementu zbioru A liczby 1, 2, 3, ..., $m-1$ będą nadal białe, a liczba m zmieni kolor z czarnego na biały.

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $\ell \leqslant m - 1$ liczba elementów zbioru A, które nie są względnie pierwsze z liczbą ℓ, jest parzysta. Rzeczywiście, na mocy nierówności $\ell < m = p_1 p_2 \dots p_k$ liczba ℓ nie jest podzielna przez co najmniej jedną spośród liczb pierwszych p_1, p_2, ..., p_k, na przykład nie jest podzielna przez p_t, gdzie $t \in \{1, 2, \dots, k\}$. Elementy zbioru A, które nie są względnie pierwsze z liczbą ℓ, możemy więc połączyć w pary $(x, p_t x)$, gdzie liczba $x \in A$ nie jest podzielna przez p_t. Wobec tego kolor liczby ℓ został zmieniony parzystą liczbę razy, a więc nadal jest biały. Z drugiej strony, żaden z $2^k - 1$ elementów zbioru A nie jest względnie pierwszy z liczbą m; kolor tej liczby został zatem zmieniony nieparzystą liczbę razy, czyli ostatecznie jest czarny.

To kończy rozumowanie indukcyjne i rozwiązanie zadania.

33. Dane są różne liczby całkowite a_1, a_2, ..., a_9. Udowodnić, że istnieje taka liczba N, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant N$ liczba

$$(n + a_1)(n + a_2) \dots (n + a_9)$$

ma dzielnik pierwszy większy od 20.

Rozwiązanie:

Dla $i = 1, 2, \dots, 9$ określmy

$$b_i = |a_i - a_1| \cdot |a_i - a_2| \cdot \ldots \cdot |a_i - a_{i-1}| \cdot |a_i - a_{i+1}| \cdot \ldots \cdot |a_i - a_9|.$$

Wykażemy, że liczba $N = \max\{b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_9 - a_9\} + 1$ ma wymaganą własność.

Przypuśćmy, wbrew tej tezie, że dla pewnej liczby całkowitej $n \geqslant N$ żadna z liczb $n+a_1$, $n+a_2$, …, $n+a_9$ nie ma dzielnika pierwszego większego od 20. Dla $i = 1, 2, \ldots, 9$ skróćmy ułamek $\frac{n+a_i}{b_i}$, otrzymując ułamek nieskracalny $\frac{c_i}{d_i}$. Z określenia liczby N wynika, że $n + a_i \geqslant N + a_i > b_i > 0$ i w konsekwencji $c_i > 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, 9$. Wobec tego istnieją liczby pierwsze p_1, p_2, …, p_9, które są dzielnikami odpowiednio liczb c_1, c_2, …, c_9.

Ponieważ istnieje tylko 8 liczb pierwszych nie przekraczających 20, więc istnieje taka liczba pierwsza $p \leqslant 20$, że $p_i = p_j = p$ dla pewnych różnych wskaźników $i, j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Niech p^α i p^β będą najwyższymi potęgami liczby pierwszej p dzielącymi odpowiednio liczby $n+a_i$ i $n+a_j$. Nie tracąc ogólności rozumowania możemy przyjąć, że $\alpha \leqslant \beta$. Podzielności $p^\alpha \,|\, n+a_i$ oraz $p^\alpha \,|\, n+a_j$ prowadzą do wniosku, że $p^\alpha \,|\, a_i - a_j$. Zatem również liczba b_i jest podzielna przez p^α. Wobec tego w wyniku skrócenia ułamka $\frac{n+a_i}{b_i}$ dostajemy ułamek nieskracalny, którego licznik nie jest podzielny przez p. Uzyskana sprzeczność z podzielnością $p \,|\, c_i$ kończy rozwiązanie.

34. Rozstrzygnąć, czy liczba ciągów złożonych z 10 dodatnich liczb całkowitych, których suma odwrotności wynosi 1, jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie.

Podzielmy wszystkie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ o opisanej własności na dwie grupy: do pierwszej grupy zaliczamy ciągi, w których $a_1 \neq a_2$, a do drugiej grupy — ciągi, w których $a_1 = a_2$. Liczba ciągów w pierwszej grupie jest parzysta, gdyż ciągi te możemy połączyć w pary różnych ciągów postaci $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{10})$ i $(a_2, a_1, a_3, a_4, \ldots, a_{10})$. Wystarczy więc zbadać, czy liczba ciągów w drugiej grupie jest parzysta. Następnie grupę tę dzielimy na dwie podgrupy złożone odpowiednio z ciagów, w których $a_3 \neq a_4$ oraz z ciągów, w których $a_3 = a_4$. Tak jak poprzednio uzasadniamy, że liczba ciągów w pierwszej podgrupie jest parzysta. Kontynuując to postępowanie możemy ograniczyć się do zbadania parzystości liczby ciągów $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10})$, w których spełnione są kolejno następujące warunki: $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$, $a_5 = a_6$, $a_7 = a_8$, $a_9 = a_{10}$, $a_1 = a_3$, $a_5 = a_7$, $a_1 = a_5$. Należy więc wyznaczyć parzystość liczby tych ciągów spełniających warunki zadania, w których pierwsze 8 wyrazów jest jednakowych oraz ostatnie 2 wyrazy są równe. W tym celu wystarczy znaleźć liczbę rozwiązań równania

$$\frac{8}{x} + \frac{2}{y} = 1$$

w dodatnich liczbach całkowitych x, y. Przekształcając równoważnie to równanie uzyskujemy $8y + 2x = xy$, czyli

$$(*) \qquad (x-8)(y-2) = 16.$$

Rozkładając wszystkimi 10 możliwymi sposobami liczbę 16 na iloczyn dwóch liczb całkowitych znajdujemy następujące pary dodatnich liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie $(*)$: $(9, 18)$, $(10, 10)$, $(12, 6)$, $(16, 4)$ i $(24, 3)$. Liczba otrzymanych rozwiązań jest więc nieparzysta, czyli liczba ciągów o własności opisanej w treści zadania również jest nieparzysta.

Uwaga. W treści zadania zakładamy milcząco, że liczba ciągów o wymaganej własności jest skończona. Nietrudno jednak udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ i dowolnej liczby rzeczywistej $c > 0$ istnieje tylko skończenie wiele ciągów złożonych z n dodatnich liczb całkowitych, których suma odwrotności wynosi c. Dowód tego stwierdzenia przebiega indukcyjnie ze względu na n. Dla $n = 1$ rozważana liczba ciągów wynosi 1 lub 0, w zależności od tego, czy liczba c jest odwrotnością liczby całkowitej, czy też nie. Krok indukcyjny przeprowadzamy zaś następująco. Zauważmy najpierw, że wystarczy udowodnić, iż istnieje tylko skończenie wiele ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, w których suma odwrotności wyrazów wynosi c, a ponadto $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Z tych ostatnich nierówności wynika, że

$$\frac{n}{a_1} \geqslant \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = c,$$

czyli $a_1 \leqslant \frac{n}{c}$. Istnieje więc skończenie wiele możliwych wartości a_1, a każdej z nich odpowiada — na mocy założenia indukcyjnego — tylko skończenie wiele ciągów $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ spełniających równanie

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} = c - \frac{1}{a_1}.$$

To kończy rozumowanie indukcyjne.

35. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste AI i BI przecinają ponownie okrąg opisany na tym trójkącie odpowiednio w punktach D i E. Proste AE i BD przecinają się w punkcie T. Odcinek DE przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach F i G. Prosta równoległa do prostej AI przechodząca przez punkt F oraz prosta równoległa do prostej BI przechodząca przez punkt G przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkty P, I oraz T leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Ponieważ punkt E jest środkiem łuku AC okręgu o opisanego na trójkącie ABC, więc ma miejsce równość $\angle ADE = \angle EBC$, czyli $\angle IDG = \angle IBG$. Wobec tego na czworokącie $IBDG$ można opisać okrąg o_1. Podobnie uzasadniamy, że na czworokącie $IFEA$ można opisać okrąg o_2. Prosta AE jest osią potęgową okręgów o_2 i o, a prosta BD jest osią potęgową okręgów o_1 i o. Zatem punkt T, w którym przecinają się te dwie proste, leży na osi potęgowej okręgów o_1 i o_2;

leży na niej również punkt wspólny I tych dwóch okręgów. W takim razie wystarczy udowodnić, że także punkt P ma jednakowe potęgi względem okręgów o_1 i o_2.

Oznaczmy przez H punkt przecięcia odcinków DE i PI. Wówczas z równoległości $FP \parallel ID$ i $GP \parallel IE$ wynika, że istnieje jednokładność o środku w punkcie H i skali ujemnej, która przekształca trójkąt FPG na trójkąt DIE. Jednokładność ta przeprowadza punkty F i G odpowiednio na punkty D i E, co pociąga za sobą równość $HF \cdot HE = HG \cdot HD$. Punkt H leży poza odcinkami DG i EF, które są cięciwami odpowiednio okręgów o_1 i o_2. Ostatnia równość iloczynów oznacza więc, że punkt H ma jednakowe potęgi względem obu okręgów. W efekcie punkty H oraz I, a co za tym idzie — także punkt P, leżą na osi potęgowej tych okręgów, a tego dowodziliśmy.

36. Dowieść, że każdą dodatnią liczbę wymierną można przedstawić w postaci

$$\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że w żądanej postaci można przedstawić każdą liczbę wymierną należącą do przedziału $(\frac{1}{2};2)$. Niech bowiem ułamek $\frac{p}{q}$, w którym licznik i mianownik są dodatnimi liczbami całkowitymi, będzie liczbą wymierną z tego przedziału. Wówczas liczby $a=c=p+q$, $b=2p-q$ i $d=2q-p$ są dodatnie oraz

$$\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}=\frac{(p+q)^3+(2p-q)^3}{(q+p)^3+(q-2p)^3}=\frac{9p^3-9p^2q+9pq^2}{9q^3-9q^2p+9qp^2}=\frac{9p(p^2-pq+q^2)}{9q(p^2-pq+q^2)}=\frac{p}{q}.$$

Niech teraz w będzie dowolną dodatnią liczbą wymierną. Wtedy istnieją dodatnie liczby całkowite g i h, dla których liczba $w(\frac{g}{h})^3$ należy do przedziału $(\frac{1}{2};2)$, gdyż warunek ten jest równoważny relacji

$$\frac{g}{h}\in\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2w}};\sqrt[3]{\frac{2}{w}}\right),$$

a w każdym niepustym przedziale otwartym na prostej rzeczywistej istnieje liczba wymierna. Na mocy stwierdzenia wykazanego w pierwszym akapicie rozwiązania istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, dla których

$$w\left(\frac{g}{h}\right)^3=\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}.$$

Stąd uzyskujemy poszukiwane przedstawienie

$$w=\frac{(ah)^3+(bh)^3}{(cg)^3+(dg)^3}.$$

Zawody drużynowe

1. Dana jest taka liczba pierwsza p, że liczba $q = 2p+1$ także jest pierwsza. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita podzielna przez q, której suma cyfr w zapisie dziesiętnym wynosi co najwyżej 3.

Rozwiązanie:

Jeżeli $p = 2$, to $q = 5$ i liczba 10 podzielna przez q ma wymaganą własność. Możemy więc założyć, że $p > 2$, czyli q jest liczbą pierwszą większą od 5.

Jeśli istnieje dodatnia liczba całkowita m, dla której ma miejsce podzielność $q \mid 10^m+1$, to liczba 10^m+1 spełnia warunki zadania. Przyjmijmy wobec tego, że taka liczba m nie istnieje. Na mocy małego twierdzenia Fermata liczba

$$10^{q-1} - 1 = 10^{2p} - 1 = (10^p - 1)(10^p + 1)$$

jest podzielna przez q. W myśl uczynionego przed chwilą założenia drugi czynnik nie jest podzielny przez q i w takim razie $q \mid 10^p - 1$.

Niech n będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, dla której $q \mid 10^n - 1$. Z podzielności $q \mid 10^p - 1$ wynika, że liczba pierwsza p jest podzielna przez n. Stąd $n = 1$ lub $n = p$; pierwsza możliwość jednak odpada, gdyż podzielność $q \mid 10^1 - 1 = 9$ przeczy założeniu $q > 5$. Wobec tego każda z liczb 10^k dla $k = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ daje resztę inną niż 1 przy dzieleniu przez q. Co więcej, reszty te są różne: gdyby liczby 10^k oraz 10^ℓ, gdzie $1 \leqslant k < \ell \leqslant p-1$, dawały jednakowe reszty z dzielenia przez q, to różnica $10^\ell - 10^k = 10^k(10^{\ell-k} - 1)$, i w konsekwencji także liczba $10^{\ell-k}-1$, byłaby podzielna przez q, wbrew stwierdzeniu z poprzedniego zdania.

Zatem reszty z dzielenia p liczb

$$10^0, \quad 10^1, \quad 10^2, \quad \ldots, \quad 10^{p-1}$$

przez q są różne, żadna z nich nie jest równa 0 oraz — na mocy założenia przyjętego w drugim zdaniu drugiego akapitu — żadna nie jest równa $q-1$. To oznacza, że przy dzieleniu p liczb

$$-1-10^0, \quad -1-10^1, \quad -1-10^2, \quad \ldots, \quad -1-10^{p-1}$$

przez q również otrzymamy różne reszty, a przy tym żadna z nich nie będzie równa 0 ani $q-1$. Stąd wniosek, że reszty z dzielenia wypisanych $2p$ liczb przez q należą do $(2p-1)$-elementowego zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, q-2\}$. Istnieją więc wykładniki $k, \ell \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$, dla których liczby 10^k oraz $-1-10^\ell$ dają jednakowe reszty z dzielenia przez q. Liczba $10^k - (-1-10^\ell) = 10^k + 10^\ell + 1$ jest wówczas podzielna przez q, co kończy rozwiązanie, gdyż suma cyfr zapisu dziesiętnego tej liczby wynosi 3.

2. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, wśród których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Niech $\mathcal{S}$ oznacza zbiór wszystkich wielokątów wypukłych o wierzchołkach w tym zbiorze (jako wielokąty wypukłe traktujemy również zbiór pusty, pojedyncze punkty oraz odcinki). Dla dowolnego wielokąta $P \in \mathcal{S}$ przez $a(P)$ i $b(P)$ oznaczamy odpowiednio liczbę punktów na obwodzie i na zewnątrz wielokąta P. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\sum_{P \in \mathcal{S}} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1.$$

Rozwiązanie:

Niech p będzie dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0;1)$. Pomalujmy niezależnie każdy punkt danego zbioru na biało z prawdopodobieństwem p, a na czarno z prawdopodobieństwem $1-p$. Wówczas dla ustalonego wielokąta $P \in \mathcal{S}$ liczba $p^{a(P)}(1-p)^{b(P)}$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że wszystkie wierzchołki wielokąta P zostały pomalowane na biało, a wszystkie punkty rozważanego zbioru leżące na zewnątrz wielokąta P zostały pomalowane na czarno.

Dla różnych wielokątów $P_1, P_2 \in \mathcal{S}$ odpowiadające im zdarzenia opisane w poprzednim zdaniu wykluczają się wzajemnie. Wynika to z faktu, że dla dwóch różnych wielokątów wypukłych na płaszczyźnie istnieje taki wierzchołek jednego z nich, który leży na zewnątrz drugiego wielokąta — zdarzenie związane z jednym wielokątem może wówczas mieć miejsce tylko wtedy, gdy wierzchołek ten jest biały, a zdarzenie związane z drugim wielokątem może mieć miejsce tylko wtedy, gdy wierzchołek ten jest czarny.

Wobec tego suma

$$(*) \qquad \sum_{P \in \mathcal{S}} p^{a(P)}(1-p)^{b(P)}$$

jest prawdopodobieństwem istnienia takiego wielokąta wypukłego o wierzchołkach w danym zbiorze, że wszystkie jego wierzchołki są białe, a wszystkie punkty leżące na zewnątrz wielokąta są czarne. Jednak taki wielokąt istnieje dla dowolnego pokolorowania rozważanych punktów na biało i czarno. Wystarczy bowiem rozważyć zbiór wszystkich punktów białych oraz jego *otoczkę wypukłą*, czyli najmniejszy wielokąt wypukły zawierający wszystkie punkty białe. Wierzchołkami tego wielokąta są te punkty białe, przez które można poprowadzić taką prostą, że wszystkie pozostałe białe punkty leżą po jednej jej stronie. Bokami tego wielokąta są natomiast te odcinki łączące pary punktów białych, że wszystkie pozostałe punkty białe leżą po jednej stronie prostej zawierającej ów odcinek. (Jeżeli liczba punktów białych wynosi 0, 1 lub 2, to jako otoczkę wypukłą otrzymujemy odpowiednio zbiór pusty, pojedynczy punkt lub odcinek.)

W efekcie wyrażenie $(*)$ jest równe 1 dla każdej liczby rzeczywistej $p \in (0;1)$. Ponieważ jest ono wielomianem zmiennej p, więc jest ono równe 1 dla dowolnej liczby rzeczywistej p.

3. Wykazać, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunek $a+b+c=1$ prawdziwa jest nierówność

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \leqslant \frac{4}{27}.$$

Rozwiązanie:

Lewa strona dowodzonej nierówności nie zmienia się pod wpływem cyklicznego przestawienia symboli a, b, c, zatem możemy ograniczyć się do rozpatrzenia dwóch przypadków: $a \geqslant b \geqslant c$ oraz $a \geqslant c \geqslant b$.

Przypadek 1: $a \geqslant b \geqslant c$. Wtedy spełniona jest nierówność

$$(a-b)(b-c)c \geqslant 0.$$

Wymnażając nawiasy otrzymujemy zależność $abc-ac^2-b^2c+bc^2 \geqslant 0$, czyli

$$b^2c+c^2a \leqslant abc+bc^2.$$

Dodając teraz do obu stron liczbę a^2b+abc, a następnie stosując nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną, dostajemy

$$\begin{aligned} a^2b+b^2c+c^2a+abc &\leqslant a^2b+2abc+bc^2 = b(a+c)^2 = b(1-b)^2 = \\ &= 4\cdot b\cdot \frac{1-b}{2}\cdot\frac{1-b}{2} \leqslant 4\cdot\left(\frac{b+\frac{1-b}{2}+\frac{1-b}{2}}{3}\right)^3 = \\ &= 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

Przypadek 2: $a \geqslant c \geqslant b$. Tym razem prawdziwa jest nierówność

$$a(c-b)(a-c) \geqslant 0,$$

z której uzyskujemy $a^2c-ac^2-a^2b+abc \geqslant 0$, czyli $a^2b+c^2a \leqslant a^2c+abc$. Po dodaniu liczby b^2c+abc do obu stron otrzymujemy zależność

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \leqslant c(a+b)^2.$$

Na koniec tak jak w Przypadku 1 uzasadniamy, że $c(a+b)^2 \leqslant \dfrac{4}{27}$.

4. Czworościan T_1 jest zawarty w czworościanie T_2. Dowieść, że suma długości wszystkich krawędzi czworościanu T_1 nie przekracza $\frac{4}{3}$ sumy długości wszystkich krawędzi czworościanu T_2.

Rozwiązanie:

Rozumowanie podzielimy na następujące trzy kroki, z których oczywiście wynika żądana teza:

1. Suma długości wszystkich krawędzi czworościanu nie przekracza dwukrotności obwodu ściany o największym obwodzie.

2. Obwód trójkąta zawartego w czworościanie nie przekracza obwodu figury otrzymanej jako przekrój czworościanu płaszczyzną zawierającą ów trójkąt.

3. Obwód przekroju czworościanu płaszczyzną nie przekracza $\frac{2}{3}$ sumy długości wszystkich krawędzi czworościanu.

Krok 1: Niech $ABCD$ będzie czworościanem, w którym ściana ABC ma największy obwód. Wtedy suma obwodów wszystkich czterech ścian nie przekracza czterokrotności obwodu ściany ABC. Z drugiej strony, każda krawędź należy do dwóch ścian i w takim razie uzyskana suma jest dwukrotnością sumy długości wszystkich krawędzi danego czworościanu. Wynika stąd postulowana nierówność.

Krok 2: Własność ta wynika wprost z ogólniejszego stwierdzenia mówiącego, że obwód wielokąta wypukłego zawartego w innym wielokącie wypukłym nie przekracza obwodu tego innego wielokąta. By uzasadnić to stwierdzenie przypuśćmy, że wielokąt wypukły $\mathcal{W}_1$ zawiera się w wielokącie wypukłym $\mathcal{W}_2$. Dla każdego boku wielokąta $\mathcal{W}_1$ poprowadźmy z obu jego końców półproste prostopadłe do tego boku i wychodzące na zewnątrz wielokąta; w ten sposób powstanie *półpas*, w którym zawiera się pewien fragment wielokąta $\mathcal{W}_2$. Na mocy nierówności trójkąta długość tego fragmentu jest równa co najmniej długości wybranego boku wielokąta $\mathcal{W}_1$. Ponieważ półpasy uzyskane w opisany sposób dla różnych boków wielokąta $\mathcal{W}_1$ mają parami rozłączne wnętrza, więc łączna długość fragmentów wielokąta $\mathcal{W}_2$ zawartych w półpasach — i tym bardziej obwód całego wielokąta $\mathcal{W}_2$ — jest równy co najmniej sumie długości wszystkich boków wielokąta $\mathcal{W}_1$.

Krok 3: Niech π będzie płaszczyzną przecinającą czworościan $ABCD$ oraz niech A', B', C', D' będą rzutami prostokątnymi odpowiednio wierzchołków A, B, C, D na tę płaszczyznę. W myśl stwierdzenia wykazanego w Kroku 2 obwód figury otrzymanej w przekroju nie przekracza obwodu figury (trójkąta lub czworokąta) otrzymanej jako rzut prostokątny całego czworościanu. Ponadto długość rzutu dowolnego odcinka nie przekracza długości samego odcinka. Wobec tego wystarczy uzasadnić, że obwód rzutu czworościanu nie przekracza $\frac{2}{3}(A'B' + B'C' + C'A' + A'D' + B'D' + C'D')$.

Przyjmijmy najpierw, że rozpatrywany rzut jest trójkątem; niech na przykład punkt D' leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta wyznaczonego przez punkty A', B', C'. Wówczas na mocy nierówności trójkąta uzyskujemy

$$\begin{aligned} A'D' + B'D' + C'D' &= \frac{A'D' + B'D'}{2} + \frac{B'D' + C'D'}{2} + \frac{C'D' + A'D'}{2} \geqslant \\ &\geqslant \frac{A'B'}{2} + \frac{B'C'}{2} + \frac{C'A'}{2}. \end{aligned}$$

Zatem

$$A'B' + B'C' + C'A' + A'D' + B'D' + C'D' \geqslant \frac{3}{2}(A'B' + B'C' + C'A').$$

Niech z kolei rzut czworościanu na płaszczyznę π będzie czworokątem; przyjmijmy, że punkty A', B', C', D' są jego kolejnymi wierzchołkami. Oznaczmy przez E' punkt przecięcia przekątnych tego czworokąta. Wtedy

$$\begin{aligned} A'C' + B'D' = A'E' + E'C' + B'E' + E'D' = \\ = \frac{A'E' + E'B'}{2} + \frac{B'E' + E'C'}{2} + \frac{C'E' + E'D'}{2} + \frac{D'E' + E'A'}{2} \geqslant \\ \geqslant \frac{A'B'}{2} + \frac{B'C'}{2} + \frac{C'D'}{2} + \frac{D'A'}{2} \end{aligned}$$

i w rezultacie

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'A' + A'C' + B'D' \geqslant \frac{3}{2}(A'B' + B'C' + C'D' + D'A').$$

Otrzymane w obu przypadkach nierówności kończą Krok 3 i rozwiązanie zadania.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz liczba całkowita r. Udowodnić, że istnieją takie liczby całkowite x i y, że liczba $2x^2 + 3y^2 - r$ jest podzielna przez p.

Rozwiązanie:

Liczby

$$2 \cdot 0^2, \quad 2 \cdot 1^2, \quad 2 \cdot 2^2, \quad \ldots, \quad 2 \cdot (\tfrac{p-1}{2})^2$$

dają różne reszty z dzielenia przez p. Rzeczywiście, przypuśćmy, że dla pewnych wartości $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ liczby $2i^2$ oraz $2j^2$ dają takie same reszty z dzielenia przez p; wtedy różnica $2i^2 - 2j^2 = 2(i-j)(i+j)$ jest podzielna przez p, a ponieważ $0 \leqslant i + j < p$, więc jest to możliwe jedynie dla $i = j$. Analogicznie uzasadniamy, że liczby

$$-3 \cdot 0^2 + r, \quad -3 \cdot 1^2 + r, \quad -3 \cdot 2^2 + r, \quad \ldots, \quad -3 \cdot (\tfrac{p-1}{2})^2 + r$$

dają różne reszty z dzielenia przez p: istotnie, z podzielności różnicy

$$(-3i^2 + r) - (-3j^2 + r) = 3(j - i)(j + i)$$

przez p oraz z nierówności $0 \leqslant i, j < \frac{1}{2}p$ i $p > 3$ wynika zależność $i = j$.

Ponieważ w obu ciągach wypisaliśmy łącznie $p+1$ liczb, więc istnieje liczba w pierwszym ciągu, która daje taką samą resztę z dzielenia przez p, jak pewna liczba w drugim ciągu. Zatem dla pewnych wartości $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ liczby $2x^2$ oraz $-3y^2 + r$ dają jednakowe reszty z dzielenia przez p. W tej sytuacji różnica tych liczb, równa $2x^2 + 3y^2 - r$, jest podzielna przez p.

2. Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że liczby n i 2^n+1 mają te same dzielniki pierwsze.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $n = 3$.

Przypuśćmy, że liczba n spełnia warunki zadania. Liczba $2^n + 1$ jest nieparzysta, więc liczba n również musi być nieparzysta. Zatem liczba 2^n daje resztę 2 z dzielenia przez 3 i w efekcie liczby $2^n + 1$ oraz n są podzielne przez 3.

Załóżmy, że liczba n nie jest potęgą trójki o wykładniku całkowitym. Wobec tego ma ona dzielnik pierwszy większy od 3. Niech $p > 3$ będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby n. Iloraz $\frac{n}{p}$ jest liczbą nieparzystą i w związku z tym liczba $2^n + 1$ jest podzielna przez $2^p + 1$. Wykażemy, że liczba $2^p + 1$ ma dzielnik pierwszy q większy od p. Będzie stąd wynikało, że liczba $2^n + 1$ ma dzielnik pierwszy q, który nie jest dzielnikiem liczby n, wbrew warunkom zadania.

W rozkładzie

$$2^p + 1 = 1^p - (-2)^p = (1+2)(1 + (-2) + (-2)^2 + \ldots + (-2)^{p-1})$$

drugi czynnik, jako suma p składników dających resztę 1 z dzielenia przez 3, nie jest podzielny przez 3. To oznacza, że liczba 2^p+1 nie jest podzielna przez 9 i w takim razie ma dzielnik pierwszy $q > 3$. Liczba $2^{2p} - 1 = (2^p+1)(2^p-1)$ jest wówczas podzielna przez q. Niech m będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, dla której spełniona jest podzielność $q \mid 2^m - 1$. Wtedy $m \mid 2p$, a przy tym nierówność $q > 3$ wskazuje, że $m > 2$, zaś podzielność $q \mid 2^p + 1$ dowodzi, że $m \neq p$. Zatem $m = 2p$. Jednak na mocy małego twierdzenia Fermata mamy $q \mid 2^{q-1} - 1$ i w rezultacie $m \mid q - 1$, skąd uzyskujemy $q \geqslant m + 1 = 2p + 1 > p$. Istotnie więc liczba $2^p + 1$ ma dzielnik pierwszy $q > p$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że liczba n musi być potęgą trójki o wykładniku całkowitym. Jeżeli ten wykładnik jest równy co najmniej 2, to $9 \mid n$ i liczba $2^n + 1$ jest podzielna przez $2^9 + 1 = 513 = 3^3 \cdot 19$, czyli ma ona dzielnik pierwszy 19, który nie jest dzielnikiem liczby n. To dowodzi, że jedynie liczba $n = 3$ może spełniać warunki zadania i bez trudu przekonujemy się, że istotnie tak jest.

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach całkowitych i następującej własności: istnieje taka liczba całkowita M, że dla dowolnej liczby całkowitej $n > M$ liczba $W(3^n - n)$ jest potęgą liczby pierwszej.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedynymi wielomianami o opisanej własności są wielomiany stałe, równe potędze liczby pierwszej.

Udowodnimy, że wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, różny od wielomianu stałego, nie może spełniać warunków zadania.

W tym celu wykażemy najpierw, że zbiór liczb pierwszych, będących dzielnikami co najmniej jednej z liczb $W(n)$ dla całkowitych wartości n, jest nieskończony. Jeżeli wyraz wolny wielomianu $W(x)$ jest równy zeru, to dla każdej liczby całkowitej $n \neq 0$ prawdziwa jest podzielność $n \mid W(n)$ i rozważane stwierdzenie jest prawdziwe. Przypuśćmy więc, że wyraz wolny wielomianu $W(x)$ wynosi $a \neq 0$ i weźmy pod uwagę wielomian zadany wzorem $G(x) = \frac{1}{a}W(ax)$. Wielomian $G(x)$ nie jest stały oraz ma współczynniki całkowite, gdyż zarówno wyraz wolny, jak i współczynnik przy dowolnej dodatniej potędze zmiennej x w wielomianie $W(ax)$ jest podzielny przez a. Co więcej, wyraz wolny wielomianu $G(x)$ jest równy 1. Ponieważ dla każdej liczby całkowitej n wszystkie dzielniki pierwsze liczby $G(n)$ są dzielnikami liczby $W(an)$, więc wystarczy wykazać pierwsze zdanie akapitu dla wielomianu $G(x)$ zamiast wielomianu $W(x)$.

Przypuśćmy w tym celu, że istnieje tylko skończenie wiele różnych liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$, które są dzielnikami wartości wielomianu $G(x)$ dla argumentów całkowitych. Z równości $G(0) = 1$ wynika, że $G(x) = 1 + xH(x)$ dla pewnego wielomianu $H(x)$ o współczynnikach całkowitych. Zatem dla każdej liczby całkowitej n liczba $G(np_1p_2 \ldots p_k) = 1 + np_1p_2 \ldots p_kH(np_1p_2 \ldots p_k)$ daje resztę 1 z dzielenia przez wszystkie z liczb p_1, p_2, ..., p_k, a więc nie jest podzielna przez żadną z tych liczb pierwszych. Na podstawie określenia tych ostatnich oznacza to, że liczba $G(np_1p_2 \ldots p_k)$ nie ma żadnych dzielników pierwszych i w konsekwencji $G(np_1p_2 \ldots p_k) = \pm 1$ dla dowolnej liczby całkowitej n, w sprzeczności z faktem, że wielomian $G(x)$ nie jest stały.

Zatem istnieją liczby pierwsze $p > q > 3$, które są dzielnikami wartości wielomianu $W(x)$ dla pewnych argumentów całkowitych. Niech więc a i b będą takimi liczbami całkowitymi, że spełnione są podzielności $p \mid W(a)$ i $q \mid W(b)$. Aby uzasadnić, że wielomian $W(x)$ nie ma własności opisanej w treści zadania, wykażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej M istnieje taka liczba całkowita $n > M$, że liczba $W(3^n - n)$ jest podzielna zarówno przez p, jak i przez q (a więc nie jest potęgą liczby pierwszej).

W tym celu zauważmy najpierw, że dla dowolnych liczb całkowitych y i z podzielność $p \mid y - z$ pociąga za sobą podzielność $p \mid W(y) - W(z)$ i analogicznie dla liczby q w miejsce p, gdyż różnica $W(y) - W(z)$ jest sumą wyrażeń postaci $c_k(y^k - z^k)$, gdzie c_k jest całkowitym współczynnikiem przy potędze x^k w wielomianie $W(x)$, a każda z różnic $y^k - z^k$ jest podzielna przez $y - z$. By udowodnić ostatnie zdanie poprzedniego akapitu należy więc uzasadnić, że dla dowolnej liczby całkowitej M istnieje taka liczba całkowita $n > M$, że liczby $3^n - n$ i a dają te same reszty z dzielenia przez p, a liczby $3^n - n$ i b dają te same reszty z dzielenia przez q.

Dla dowolnych liczb całkowitych $y \geqslant z \geqslant 0$ z podzielności $p - 1 \mid y - z$ wynika podzielność $p \mid 3^y - 3^z$ i analogicznie dla liczby q w miejsce p. Rzeczywiście, jeżeli $y - z = t(p - 1)$ dla pewnej liczby całkowitej $t \geqslant 0$, to $3^y - 3^z = 3^z[(3^{p-1})^t - 1]$, a liczba w nawiasie kwadratowym jest podzielna przez $3^{p-1} - 1$ i tym bardziej — na mocy małego twierdzenia Fermata — jest podzielna przez p.

Liczby $q - 1$ i q są względnie pierwsze, więc na podstawie chińskiego twierdzenia o resztach istnieje liczba całkowita w podzielna przez $q - 1$, która przy dzieleniu przez q daje taką samą resztę jak liczba $-b + 1$. Co więcej, liczba p jest względnie pierwsza z każdą z liczb $q - 1$, q, $p - 1$. Korzystając raz jeszcze z chińskiego twierdzenia o resztach otrzymujemy liczbę całkowitą $n > M$, która przy dzieleniu przez $(q - 1)q(p - 1)$ daje taką samą resztę jak liczba w, a przy dzieleniu przez p daje taką samą resztę jak liczba $-a + 3^w$. W tej sytuacji z podzielności $q - 1 \mid n$ oraz $q \mid n - (-b + 1)$ wynika, że liczba $3^n - n$ daje przy dzieleniu przez q taką samą resztę jak liczba $3^0 - (-b + 1) = b$, a z podzielności $p - 1 \mid n - w$ oraz $p \mid n - (-a + 3^w)$ wynika, że liczba $3^n - n$ daje przy dzieleniu przez p taką samą resztę jak liczba $3^w - (-a + 3^w) = a$. Rozwiązanie jest więc zakończone.

4. Niech A_1, A_2, ..., A_{101} będą różnymi podzbiorami zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Przypuśćmy, że suma dowolnych 50 spośród tych podzbiorów ma więcej niż $\frac{50}{51}n$ elementów. Dowieść, że wśród danych podzbiorów istnieją takie trzy, że dowolne dwa z nich mają niepustą część wspólną.

Rozwiązanie:

Narysujmy na płaszczyźnie wszystkie wierzchołki pewnego 101-kąta foremnego i oznaczmy je kolejno liczbami 1, 2, ..., 101. Następnie połączmy odcinkiem wszystkie pary różnych punktów oznaczonych liczbami i oraz j, dla których zbiory A_i oraz A_j mają niepustą część wspólną. Należy udowodnić, że wśród poprowadzonych odcinków istnieją trzy odcinki tworzące trójkąt.

Przypuśćmy więc, wbrew tej tezie, że nie powstał żaden trójkąt z narysowanych odcinków. Przyjmijmy najpierw, że istnieje co najmniej 51 takich wierzchołków, że z każdego z nich wychodzi co najmniej 51 odcinków. Niech A będzie jednym z takich wierzchołków. Wówczas wśród pozostałych 100 wierzchołków istnieje co najwyżej 49 wierzchołków nie połączonych z A oraz co najmniej 50 wierzchołków połączonych odcinkiem z przynajmniej 51 innymi wierzchołkami. Stąd wniosek, że istnieje wierzchołek B połączony z co najmniej 51 innymi wierzchołkami, w tym z wierzchołkiem A. Ponadto wśród 99 wierzchołków różnych od A i B istnieje co najwyżej 49 wierzchołków nie połączonych z A oraz co najwyżej 49 wierzchołków nie połączonych z B. Wobec tego istnieje wierzchołek C połączony z A oraz z B. Zatem dowolne dwa spośród wierzchołków A, B i C są połączone odcinkiem i otrzymujemy sprzeczność z uczynionym przypuszczeniem.

W takim razie istnieje co najmniej 51 takich wierzchołków, że z każdego z nich wychodzi co najwyżej 50 odcinków. Niech i_1, i_2, ..., i_{51} będą różnymi numerami takich wierzchołków. Wtedy zbiór A_{i_1} jest rozłączny z co najmniej 50 spośród pozostałych 100 danych zbiorów. Na mocy warunków zadania suma tych co najmniej 50 zbiorów ma więcej niż $\frac{50}{51}n$ elementów. To oznacza, że zbiór A_{i_1} ma mniej niż $\frac{1}{51}n$ elementów. Analogiczne rozumowanie dowodzi, że także zbiory A_{i_2}, A_{i_3}, ..., $A_{i_{51}}$ mają mniej niż $\frac{1}{51}n$ elementów. W rezultacie suma $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_{50}}$ ma mniej niż $\frac{50}{51}n$ elementów, co przeczy założeniom zadania i kończy rozwiązanie.

5. W pewnym mieście żadna osoba nie zna wszystkich pozostałych, a dowolne dwie osoby, które się nie znają, mają wspólnego znajomego. Ponadto spełniona jest równość

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n^2 - n,$$

gdzie n oznacza liczbę wszystkich mieszkańców miasta oraz dla $i = 1, 2, \ldots, n$ symbol a_i oznacza liczbę znajomych i-tego mieszkańca.

Niech k oznacza minimalną liczbę mieszkańców, których można tak posadzić przy okrągłym stole (co najmniej trzyosobowym), że każdy siedzi między swoimi znajomymi. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości k.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $k = 5$.

Nazwijmy *trójką połączoną* trójkę (A, B, C) złożoną z mieszkańców miasta, w której osoby A i B się znają oraz osoby B i C się znają. W trójce połączonej mamy $A \neq B$ i $B \neq C$, natomiast równość $A = C$ jest możliwa. Dla ustalonej osoby B zarówno osoba A, jak i osoba C w trójce połączonej może zostać wybrana na tyle sposobów, ile znajomych ma osoba B. Stąd wniosek, że liczba wszystkich trójek połączonych wynosi $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n^2 - n$.

Przyporządkujmy teraz każdej parze różnych mieszkańców miasta pewną trójkę połączoną w następujący sposób: jeżeli osoby X i Y się znają, to parze (X, Y) przypisujemy trójkę (X, Y, X); jeżeli zaś osoby X i Y się nie znają, to parze (X, Y) przypisujemy trójkę (X, Z, Y), gdzie Z jest dowolnie wybranym wspólnym znajomym osób X i Y. Tak określone przyporządkowanie jest różnowartościowe. Przypuśćmy bowiem, że trójka połączona (A, B, C) została przypisana parze (X, Y). Wtedy jeżeli $A = C$, to $(X, Y) = (A, B)$, a jeżeli $A \neq C$, to $(X, Y) = (A, C)$. Zatem każda trójka połączona mogła zostać przypisana co najwyżej jednej parze różnych mieszkańców miasta. Jednak liczba takich par jest równa $n(n-1) = n^2 - n$. Wobec tego każda trójka połączona została przyporządkowana pewnej parze różnych mieszkańców miasta w opisany sposób.

Jeżeli różne osoby X i Y się nie znają, to mają dokładnie jednego wspólnego znajomego — gdyby dwie różne osoby Z_1 i Z_2 były ich wspólnymi znajomymi, to jedyną parą, której mogłyby być przypisane trójki połączone (X, Z_1, Y) i (X, Z_2, Y), byłaby para (X, Y). To przeczy ostatniemu zdaniu poprzedniego akapitu. Co więcej, jeżeli dwie różne osoby X i Y mają wspólnego znajomego Z, to nie mogą się one znać. Gdyby bowiem wszystkie spośród osób X, Y, Z znały się nawzajem, to parom (X, Y) i (X, Z) byłyby przyporządkowane odpowiednio trójki połączone (X, Y, X) i (X, Z, X), a więc trójka połączona (X, Z, Y) nie zostałaby przyporządkowana żadnej parze. Stąd wniosek, że nie można posadzić 3 ani 4 osób przy okrągłym stole w wymagany sposób i w konsekwencji liczba k, o ile istnieje, jest równa co najmniej 5.

Wykażemy teraz, że liczba k istnieje. Przypuśćmy w tym celu, że żadnej grupy mieszkańców miasta nie można posadzić przy okrągłym stole w żądany sposób. Niech A będzie dowolnym mieszkańcem oraz niech A_1, A_2, $\ldots$, A_k będą wszystkimi jego znajomymi; żadne dwie z tych k osób się nie znają. Każda z pozostałych $n - (k+1)$ osób ma wspólnego znajomego z osobą A, czyli zna jedną z osób A_1, A_2, $\ldots$, A_k. Wynika stąd, że $2 \leqslant k \leqslant n-2$, gdyż w przypadku $k = 1$ osoba A_1, a w przypadku $k = n-1$ osoba A znałaby wszystkich pozostałych mieszkańców miasta, wbrew warunkom zadania. Dla $i = 1, 2, \ldots, k$ oznaczmy przez $\mathcal{A}_i$ zbiór wszystkich znajomych osoby A_i różnych od A; wówczas zbiór

$\{A, A_1, A_2, \ldots, A_k\} \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_k$ jest zbiorem wszystkich mieszkańców miasta. Zauważmy też, że dla $i = 1, 2, \ldots, k$ jedynym znajomym dowolnej osoby ze zbioru $\mathcal{A}_i$ jest osoba A_i. Rzeczywiście, dwie różne osoby z tego zbioru mają wspólnego znajomego A_i, a więc nie mogą się znać. Z drugiej strony, gdyby osoba $X \in \mathcal{A}_i$ znała osobę $Y \neq A_i$, to albo $Y = A_j$, albo $Y \in \mathcal{A}_j$ dla pewnego j. Jednak w pierwszym przypadku osoby A i X mają dwóch wspólnych znajomych: A_i oraz A_j, a w drugim przypadku możemy posadzić osoby A, A_i, X, Y, A_j w tej kolejności przy okrągłym stole, w sprzeczności z założeniem uczynionym w drugim zdaniu akapitu. Wynika stąd również, że dla $i \neq j$ zbiory $\mathcal{A}_i$ oraz $\mathcal{A}_j$ są rozłączne, gdyż osoba należąca do obu tych zbiorów znałaby jednocześnie osoby A_i oraz A_j, wbrew temu, że każda osoba ze zbioru $\mathcal{A}_i$ zna tylko osobę A_i. Następnie, łączna liczba elementów zbiorów $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, …, $\mathcal{A}_k$ wynosi $n-(k+1)$, a więc jest dodatnia na mocy nierówności $k \leqslant n-2$. Zatem co najmniej jeden z tych zbiorów jest niepusty. Niech na przykład do zbioru $\mathcal{A}_1$ należy pewna osoba C. Wtedy osoba ta zna tylko osobę A_1, która z kolei zna jedynie osoby A i C oraz inne osoby ze zbioru $\mathcal{A}_1$. W tej sytuacji osoby C i A_2 się nie znają oraz nie mają wspólnego znajomego, co jednak przeczy warunkom zadania.

Udowodniliśmy w ten sposób istnienie liczby k. Załóżmy teraz, że $k \geqslant 6$ i niech A_1, A_2, A_3, …, A_k będą osobami, które można posadzić przy okrągłym stole tak, aby dowolne dwie sąsiednie osoby się znały. Gdyby osoby A_1 i A_4 się znały, to można by usunąć osoby A_2 i A_3 i uzyskać rozmieszczenie $k-2$ osób przy stole, wbrew minimalności liczby k. To oznacza, że osoby A_1 i A_4 się nie znają, a zatem mają wspólnego znajomego B. Ponadto $B \neq A_2$ oraz $B \neq A_3$, gdyż równość $B = A_2$ oznaczałaby, że dowolne dwie wśród osób A_2, A_3, A_4 się znają, a równość $B = A_3$ oznaczałaby, że dowolne dwie wśród osób A_1, A_2, A_3 się znają. W efekcie można posadzić przy stole osoby A_1, A_2, A_3, A_4, B w wypisanej kolejności, co znów przeczy minimalności liczby k. Uzyskane we wszystkich przypadkach sprzeczności wskazują, że jedyną możliwą wartością liczby k jest 5.

Na koniec pozostaje stwierdzić, że istnieje co najmniej jeden układ znajomości, dla którego $k = 5$ oraz spełnione są warunki zadania. Taki układ otrzymujemy rozmieszczając 5 osób wokół stołu i przyjmując, że dwie osoby się znają wtedy i tylko wtedy, gdy siedzą obok siebie.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. W pewnym kraju z każdego miasta istnieją bezpośrednie loty do co najmniej n innych miast (połączenia są obustronne), a ponadto z każdego miasta można dolecieć, być może z przesiadkami, do każdego innego. Dowieść, że istnieje takich n różnych miast M_1, M_2, …, M_n, że dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ miasta M_i oraz M_{i+1} mają bezpośrednie połączenie, a między dowolnymi dwoma spośród pozostałych miast można odbyć podróż omijającą te n miast.

Rozwiązanie:

Niech k będzie największą dodatnią liczbą całkowitą, dla której istnieje ciąg k różnych miast, w którym dowolne dwa sąsiednie miasta mają bezpośrednie połączenie. Niech ponadto M_1, M_2, ..., M_k będzie ciągiem o opisanej przed chwilą własności. Z maksymalności liczby k wynika, że tego ciągu nie można wydłużyć o dodatkowe jedno miasto. Zatem wszystkie miasta, do których można bezpośrednio dolecieć z miasta M_k, należą do $(k-1)$-elementowego zbioru $\{M_1, M_2, \ldots, M_{k-1}\}$. Otrzymujemy stąd nierówność $k-1 \geqslant n$, czyli $k \geqslant n+1$.

Wykażemy, że miasta M_1, M_2, ..., M_n spełniają postulowany warunek. W tym celu wystarczy udowodnić, że z dowolnego innego miasta można dolecieć do jednego z miast M_{n+1}, M_{n+2}, ..., M_k nie odwiedzając po drodze żadnego z miast M_1, M_2, ..., M_n.

Przypuśćmy, że ostatnie zdanie jest nieprawdziwe. W myśl założeń zadania z dowolnego miasta można dolecieć do jednego z miast M_1, M_2, ..., M_k. Wobec tego przyjęte założenie oznacza, że niepusty jest zbiór $\mathcal{S}$ złożony z wszystkich miast $X \notin \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ o następującej własności: na trasie dowolnej podróży z miasta X do któregokolwiek z miast $M_{n+1}, M_{n+2}, \ldots, M_k$ trzeba odwiedzić przynajmniej jedno z miast $M_1, M_2, \ldots, M_n$. W takim razie z każdego miasta należącego do zbioru $\mathcal{S}$ można dolecieć do któregoś z miast $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nie odwiedzając po drodze żadnego z miast M_{n+1}, M_{n+2}, ..., M_k. Stąd wniosek, że w zbiorze $\mathcal{S}$ istnieje miasto mające bezpośrednie połączenie z co najmniej jednym z miast $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Istnieje więc najmniejszy taki wskaźnik $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, że miasto M_i ma bezpośrednie połączenie z pewnym miastem ze zbioru $\mathcal{S}$, które oznaczymy przez N_{i-1}.

Rozpatrzmy teraz taki ciąg różnych miast ze zbioru $\mathcal{S}$ rozpoczynający się od miasta N_{i-1} i mający największą możliwą długość, że dowolne dwa sąsiednie miasta mają bezpośrednie połączenie. Oznaczmy ten ciąg przez N_{i-1}, N_{i-2}, N_{i-3}, ..., N_j, gdzie j jest pewną liczbą całkowitą. Ponieważ w ciągu różnych miast N_j, N_{j+1}, ..., N_{i-1}, M_i, M_{i+1}, ..., M_k dowolne dwa sąsiednie miasta mają bezpośrednie połączenie, więc z maksymalności liczby k uzyskujemy nierówność $j \geqslant 1$. Z drugiej strony, na mocy wyboru ciągu w niniejszym akapicie oraz wyboru liczby i miasto N_j nie ma bezpośredniego połączenia z żadnym miastem ze zbioru $\mathcal{S} \setminus \{N_{j+1}, N_{j+2}, \ldots, N_{i-1}\}$ ani z żadnym miastem ze zbioru $\{M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}\}$. Zbiór $\{N_{j+1}, N_{j+2}, \ldots, N_{i-1}, M_i, M_{i+1}, \ldots, M_n\}$ ma co najwyżej $n-1$ elementów, więc istnieje miasto Y nie należące do tego zbioru, które ma bezpośrednie połączenie z miastem N_j. Jak wykazaliśmy przed chwilą, $Y \notin \mathcal{S}$ oraz $Y \notin \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$. Stąd i z określenia zbioru $\mathcal{S}$ wynika, że z miasta Y można dolecieć do któregoś z miast M_{n+1}, M_{n+2}, ..., M_k nie odwiedzając po drodze żadnego z miast M_1, M_2, ..., M_n. Wówczas jednak taka podróż jest możliwa również z miasta N_j przez miasto Y, wbrew temu, że $N_j \in \mathcal{S}$.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że miasta $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mają wymaganą własność.

7. Liczby rzeczywiste a, b, c o wartościach bezwzględnych nie przekraczających 1 spełniają warunek

$$1+2abc \geqslant a^2+b^2+c^2.$$

Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$1+2(abc)^n \geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

Rozwiązanie:

Dany w treści zadania warunek można przepisać w równoważnej postaci

$$\begin{aligned}0 \;&\leqslant\; 1+2abc-a^2-b^2-c^2 = 1-b^2-c^2+b^2c^2-(a^2-2abc+b^2c^2) = \\ &=\; (1-b^2)(1-c^2)-(a-bc)^2,\end{aligned}$$

czyli

$$(*) \qquad (a-bc)^2 \leqslant (1-b^2)(1-c^2).$$

Z drugiej strony, na mocy nierówności $|a| \leqslant 1$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}&(a^{n-1}+a^{n-2}bc+a^{n-3}(bc)^2+\ldots+(bc)^{n-1})^2 = \\ &\qquad = |a^{n-1}+a^{n-2}bc+a^{n-3}b^2c^2+\ldots+b^{n-1}c^{n-1}|^2 \leqslant \\ &\qquad \leqslant (|a|^{n-1}+|a|^{n-2}|b||c|+|a|^{n-3}|b|^2|c|^2+\ldots+|b|^{n-1}|c|^{n-1})^2 \leqslant \\ &\qquad \leqslant (1+|b||c|+|b|^2|c|^2+\ldots+|b|^{n-1}|c|^{n-1})^2.\end{aligned}$$

Stosując nierówność Schwarza stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}&(1+|b||c|+|b|^2|c|^2+\ldots+|b|^{n-1}|c|^{n-1})^2 \leqslant \\ &\qquad \leqslant (1+|b|^2+|b|^4+\ldots+|b|^{2(n-1)})(1+|c|^2+|c|^4+\ldots+|c|^{2(n-1)}).\end{aligned}$$

Wobec tego

$$(**) \qquad \begin{aligned}&(a^{n-1}+a^{n-2}bc+a^{n-3}(bc)^2+\ldots+(bc)^{n-1})^2 \leqslant \\ &\quad \leqslant (1+|b|^2+|b|^4+\ldots+|b|^{2(n-1)})(1+|c|^2+|c|^4+\ldots+|c|^{2(n-1)}).\end{aligned}$$

Mnożąc stronami nierówności $(*)$ i $(**)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}&(a-bc)^2(a^{n-1}+a^{n-2}bc+a^{n-3}(bc)^2+\ldots+(bc)^{n-1})^2 \leqslant \\ &\qquad \leqslant (1-b^2)(1+|b|^2+|b|^4+\ldots+|b|^{2(n-1)}) \cdot \\ &\qquad\quad \cdot (1-c^2)(1+|c|^2+|c|^4+\ldots+|c|^{2(n-1)}).\end{aligned}$$

Stąd wniosek, że

$$(a^n-(bc)^n)^2 \leqslant (1-(b^2)^n)(1-(c^2)^n)$$

i w rezultacie

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (1-(b^2)^n)(1-(c^2)^n)-(a^n-(bc)^n)^2 = \\ &= 1-b^{2n}-c^{2n}+(bc)^{2n}-(a^{2n}-2a^n(bc)^n+(bc)^{2n}) = \\ &= 1+2(abc)^n-a^{2n}-b^{2n}-c^{2n}, \end{aligned}$$

co pociąga za sobą tezę zadania.

8. Dla dowolnych liczb całkowitych k, $n \geqslant 2$ ciąg liczb rzeczywistych $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazwiemy *k-wyważonym*, jeżeli mają miejsce równości $S_0 = S_1 = S_2 = \ldots = S_{k-1}$, gdzie dla $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ liczba S_i jest sumą wszystkich wyrazów danego ciągu o wskaźnikach dających resztę i z dzielenia przez k.

Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę pierwszą p, że jedynym ciągiem 2012 liczb rzeczywistych, który jest q-wyważony dla każdej liczby pierwszej $q \leqslant p$, jest ciąg złożony z samych zer.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $p = 139$.

Wykażemy, że ciąg liczb rzeczywistych $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest k-wyważony wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ jest podzielny przez wielomian $G(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}$.

W tym celu wystarczy udowodnić, że wielomiany $W(x)$ oraz

$$P(x) = S_0 + S_1x + S_2x^2 + \ldots + S_{k-1}x^{k-1}$$

dają jednakowe reszty z dzielenia przez $G(x)$, gdyż podzielność wielomianów $G(x) \mid P(x)$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $S_0 = S_1 = S_2 = \ldots = S_{k-1}$. Należy zatem uzasadnić podzielność wielomianów $G(x) \mid W(x) - P(x)$.

Z określenia liczb S_0, S_1, S_2, …, S_{k-1} wynika, że w wielomianie $W(x) - P(x)$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ suma współczynników przy potęgach zmiennej x dających resztę i z dzielenia przez k jest równa zeru. Zapiszmy wielomian $W(x) - P(x)$ jako sumę $Q_0(x) + Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_{k-1}(x)$, gdzie dla $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ wielomian $Q_i(x)$ jest sumą wszystkich tych jednomianów występujących w wielomianie $W(x) - P(x)$, w których potęga zmiennej x daje resztę i z dzielenia przez k. Wówczas dla $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ wielomian $Q_i(x)$ można przedstawić w postaci $Q_i(x) = x^iR_i(x^k)$, gdzie $R_i(x)$ jest pewnym wielomianem o sumie współczynników równej zeru. Zatem liczba 1 jest pierwiastkiem każdego z wielomianów $R_0(x)$, $R_1(x)$, $R_2(x)$, …, $R_{k-1}(x)$. To oznacza, że wielomiany te są podzielne przez wielomian $x - 1$, a wielomiany $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, …, $Q_{k-1}(x)$ są podzielne przez $x^k - 1$. W rezultacie wielomian $W(x) - P(x)$ jest podzielny przez wielomian $x^k - 1 = (x-1)G(x)$ i tym bardziej jest podzielny przez $G(x)$.

Wobec tego zadanie można przeformułować następująco: wyznaczyć najmniejszą taką liczbę pierwszą p, że jedynym wielomianem stopnia niższego niż 2012, podzielnym przez wielomian $G_q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1}$ dla każdej liczby pierwszej $q \leqslant p$, jest wielomian zerowy.

Udowodnimy w tym celu, że dla różnych liczb pierwszych q i q' wielomiany $G_q(x)$ i $G_{q'}(x)$ są względnie pierwsze. Dla dowodu zauważmy, że istnieją dodatnie liczby całkowite a i b, dla których $aq - bq' = 1$. Wtedy

$$(1 + x^q + x^{2q} + \ldots + x^{(a-1)q})G_q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{aq-1}$$

oraz

$$x(1 + x^{q'} + x^{2q'} + \ldots + x^{(b-1)q'})G_{q'}(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{bq'}.$$

Wskazaliśmy więc wielomiany $A(x)$ i $A'(x)$ spełniające zależność

$$A(x)G_q(x) - A'(x)G_{q'}(x) = 1,$$

z której wynika postulowana względna pierwszość.

Zatem dowolny wielomian jest podzielny przez wielomian $G_q(x)$ dla każdej liczby pierwszej $q \leqslant p$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on podzielny przez iloczyn tych wielomianów. Stąd wniosek, że szukana liczba p jest najmniejszą taką liczbą pierwszą, że iloczyn wielomianów $G_q(x)$ dla wszystkich liczb pierwszych $q \leqslant p$ jest wielomianem stopnia co najmniej 2012. Oznaczmy przez $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ ciąg wszystkich liczb pierwszych. Wówczas $p = p_j$, gdzie j jest najmniejszym wskaźnikiem, dla którego

$$\sigma_j = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \ldots + (p_j - 1) \geqslant 2012.$$

Bezpośrednio obliczamy, że $\sigma_{33} = 1955$ i $\sigma_{34} = 2093$, skąd $p = p_{34} = 139$.

9. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E, a proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Punkt P różny od E leży wewnątrz czworokąta, przy czym kąty APB i CPD są proste. Wykazać, że także kąt EPF jest prosty.

Rozwiązanie:

Z warunków zadania wynika, że punkt P leży na okręgu o_1 o średnicy AB oraz na okręgu o_2 o średnicy CD. Należy natomiast udowodnić, że leży on również na okręgu o o średnicy EF. W tym celu wystarczy wykazać, że okręgi o_1, o_2 i o albo mają dwa różne punkty wspólne, albo są do siebie styczne w jednym punkcie. To zaś będzie konsekwencją stwierdzenia, że istnieje jedna prosta, która jest osią potęgową każdej pary spośród nich.

Aby udowodnić istnienie takiej prostej, oznaczmy przez H punkt przecięcia wysokości trójkąta BCE i niech B', C', E' będą spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B, C, E. Wtedy punkty B' i C' leżą na okręgu o średnicy BC, a punkty C' i E' leżą na okręgu o średnicy CE. Stąd otrzymujemy równości

$$HB \cdot HB' = HC \cdot HC' = HE \cdot HE'. \tag{$*$}$$

Ponadto odcinki BB', CC' i EE' są cięciwami odpowiednio okręgów o_1, o_2 i o, a punkt H leży wewnątrz każdego z tych odcinków, na zewnątrz każdego z nich albo jest ich wspólnym końcem. To wraz z zależnościami $(*)$ dowodzi, że punkt H ma jednakowe potęgi względem wszystkich trzech rozważanych okręgów. Analogicznie uzasadniamy, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ADE ma jednakowe potęgi względem tych okręgów.

Jeżeli oba punkty przecięcia wysokości nie pokrywają się, to istnieją dwa różne punkty o jednakowych potęgach względem wszystkich trzech rozpatrywanych okręgów. Wynika stąd prawdziwość ostatniego zdania pierwszego akapitu rozwiązania. Przypuśćmy z kolei, że punkt H jest też punktem przecięcia wysokości trójkąta ADE. Gdyby $H \neq E$, to prosta HE, zawierająca wysokości trójkątów BCE i ADE opuszczone z wierzchołka E, byłaby prostopadła do prostych BC i AD, które jednak nie są równoległe. Wobec tego $H = E$, czyli przekątne AC i BD są prostopadłe. Nie tracąc ogólności rozwiązania możemy ponadto przyjąć, że punkty E i F leżą po przeciwnych stronach prostej CD. W tej sytuacji proste AD i BC nie są prostopadłe, gdyż w przeciwnym razie w czworokącie wypukłym $ECFD$ kąty wewnętrzne przy wierzchołkach E i F byłyby proste, a kąty przy wierzchołkach C i D byłyby rozwarte, co nie jest możliwe. Zatem w trójkątach ACF i BDF kąt przy wierzchołku F nie jest prosty. To oznacza, że punkty przecięcia wysokości tych trójkątów są różne od F; punkty te — podobnie jak w czwartym zdaniu tego akapitu — nie mogą się więc pokrywać. Naśladując teraz rozumowanie przeprowadzone w drugim akapicie dowodzimy, że oba punkty przecięcia wysokości mają jednakowe potęgi względem okręgów o_1, o_2 i o, co kończy rozwiązanie.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB > AC$. Punkty B_0 i C_0 są odpowiednio środkami boków CA i AB, a punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Okrąg przechodzący przez punkty B_0 i C_0 jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie E różnym od A. Udowodnić, że środek ciężkości trójkąta ABC leży na prostej DE.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez A_0 środek boku BC, a przez S — środek ciężkości trójkąta ABC. Punkt S leży na każdej ze środkowych AA_0, BB_0, CC_0 i dzieli je w stosunku $2:1$, czyli jednokładność o środku w punkcie S i skali -2 odwzorowuje punkty A_0, B_0, C_0 odpowiednio na punkty A, B, C. Niech F będzie obrazem punktu D przy tej jednokładności. Wtedy punkty D, S, F leżą na jednej prostej. Teza zadania będzie więc udowodniona, jeżeli wykażemy, że punkty E, D, F leżą na jednej prostej, co jest równoważne zależności $\angle CFE = \angle CFD$.

Punkt B_0 jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ADC, skąd $C_0A_0 = \frac{1}{2}AC = B_0D$ i w efekcie trapez $B_0C_0A_0D$ jest równoramienny. Zatem także jednokładny do niego czworokąt $BCAF$ jest trapezem równoramiennym. Oznacza to w szczególności, że punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, co pociąga za sobą równość $\angle CFE = \angle CAE$. Z drugiej strony, niech G będzie rzutem prostokątnym punktu F na prostą BC. Wówczas ze względu na symetrię trapezu równoramiennego prawdziwe są zależności $BG = CD$, $DB = GC$ oraz $\angle CFD = \angle BAG$.

Wobec tego należy udowodnić związek $\angle CAE = \angle BAG$.

W tym celu rozpatrzmy inwersję o środku w punkcie A i dowolnym promieniu. Symbolem X' będziemy oznaczać obraz punktu X przy tej inwersji, gdzie X jest dowolnym symbolem różnym od A. Zauważmy, że trójkąt $C'B'A$ jest podobny do trójkąta BCA.

Punkty B_0 i C_0 są środkami odpowiednio odcinków AC i AB, więc punkty B' i C' są odpowiednio środkami odcinków AC_0' i AB_0'. Punkt E leżący na okręgu opisanym na trójkącie ABC przechodzi przy rozważanej inwersji na punkt E' leżący na prostej $B'C'$, a ponadto

$$(*) \qquad \angle CAE = \angle C'AE'.$$

Niech M' będzie środkiem odcinka $B_0'C_0'$. Okrąg opisany na trójkącie B_0C_0E styczny w punkcie E do okręgu opisanego na trójkącie ABC jest przy rozpatrywanej inwersji odwzorowywany na okrąg opisany na trójkącie $B_0'C_0'E'$ styczny w punkcie E' do prostej $B'C'$. Stąd i z równoległości $B_0'C_0' \parallel B'C'$ wynika prostopadłość $M'E' \perp B'C'$. W takim razie odcinek $M'E'$ jest wysokością w trójkącie $B'C'M'$ przystającym do trójkąta $C'B'A$, a więc — podobnym do trójkąta BCA. Stąd wynikają równości stosunków

$$\frac{C'E'}{E'B'} = \frac{CD}{DB} = \frac{BG}{GC},$$

które dowodzą, że podobieństwo przekształcające trójkąt $C'B'A$ na trójkąt BCA przeprowadza punkt E' na punkt G i w rezultacie

$$(**) \qquad \angle C'AE' = \angle BAG.$$

Z zależności $(*)$ i $(**)$ otrzymujemy żądaną równość $\angle CAE = \angle BAG$.

11. Dowieść, że jeżeli prosta łącząca środki dwóch przeciwległych krawędzi czworościanu przechodzi przez środek sfery wpisanej w ten czworościan, to przechodzi ona również przez środek sfery opisanej na tym czworościanie.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $ABCD$ dany czworościan, a przez N — środek krawędzi CD. Niech ponadto E i F będą rzutami prostokątnymi punktu C odpowiednio na płaszczyznę ABN i na prostą AB, zaś G i H niech będą rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na płaszczyznę ABN i na prostą AB. Zauważmy, że trójkąty CEN i DGN (być może zdegenerowane odpowiednio do odcinków CN i DN) są symetryczne względem punktu N, a więc przystające.

Prosta przechodząca przez środki przeciwległych krawędzi AB i CD jest zawarta w płaszczyźnie ABN. Zatem płaszczyzna ta przechodzi przez środek sfery wpisanej w dany czworościan i w związku z tym połowi kąt dwuścienny pomiędzy ścianami ABC i ABD. To oznacza, że miara kąta przy wierzchołku F w trójkącie prostokątnym CEF jest równa mierze kąta przy wierzchołku H w trójkącie prostokątnym DGH. W efekcie na mocy równości $CE = DG$ trójkąty prostokątne CEF i DGH są przystające, skąd

$$(*) \qquad CF = DH \qquad \text{oraz} \qquad EF = GH.$$

Oznaczmy przez L środek odcinka FH. Wówczas z pierwszej z równości $(*)$ wynika, że trójkąty prostokątne CFL i DHL są przystające, co pociąga za sobą związek $CL = DL$. Wobec tego w trójkącie równoramiennym CLD odcinek LN jest środkową, co prowadzi do wniosku, że $LN \perp CD$.

W myśl ostatniego zdania pierwszego akapitu punkt N jest środkiem odcinka EG. Jednak odcinki EF i GH leżą w jednej płaszczyźnie oraz są prostopadłe do prostej AB, co wraz z drugą z równości $(*)$ oznacza, że czworokąt $HFEG$ jest prostokątem (być może zdegenerowanym do odcinka), a punkty L i N są środkami jego przeciwległych boków. To dowodzi, że $LN \perp AB$.

Prosta LN jest więc prostopadła do krawędzi AB i CD. Analogiczne rozumowanie wskazuje, że prostopadła do obu tych krawędzi jest prosta MP, gdzie M jest środkiem krawędzi AB, a P jest środkiem odcinka, którego końcami są rzuty prostokątne punktów A i B na prostą CD. W przestrzeni istnieje jednakże tylko jedna prosta przecinająca dwie proste skośne pod kątem prostym. Zatem proste LN i MP pokrywają się, czyli $L = M$. W takim razie prosta MN łącząca środki krawędzi AB i CD jest do prostopadła do obu tych krawędzi. Jest więc ona częścią wspólną płaszczyzn symetralnych tych krawędzi. Pozostaje stwierdzić, że środek sfery opisanej na danym czworościanie leży na każdej z tych płaszczyzn, a więc leży też na prostej MN.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Niech $n \geqslant 2$ będzie taką liczbą całkowitą, że równanie

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_1 x_2 \ldots x_n$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych. Udowodnić, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dla ustalonej wartości n z dowolnego układu dodatnich liczb całkowitych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ spełniającego dane w treści zadania równanie można otrzymać układ dodatnich liczb całkowitych $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, który również spełnia to równanie, a przy tym suma $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ jest większa od sumy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Wówczas rozpoczynając od dowolnego układu n liczb o żądanej własności i kontynuując to postępowanie otrzymamy nieskończony ciąg różnych układów n liczb spełniających warunki zadania.

Niech więc a_1, a_2, …, a_n będą dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których

$$(*) \qquad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Zmiana kolejności tych n liczb nie narusza prawdziwości powyższego związku i nie wpływa na wartość sumy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Możemy wobec tego założyć, że liczba a_1 nie przekracza żadnej z liczb a_2, a_3, …, a_n. Potraktujmy równanie

$$t^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 = t a_2 a_3 \ldots a_n$$

jako równanie kwadratowe ze względu na zmienną t przy ustalonych wartościach a_2, a_3, …, a_n. Z założenia pierwiastkiem tego równania jest liczba $t = a_1$. Równanie to ma więc dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma na mocy wzorów Viete'a wynosi $a_2 a_3 \ldots a_n$. Stąd wniosek, że liczba całkowita $t = a_2 a_3 \ldots a_n - a_1$ również jest pierwiastkiem rozważanego równania.

Udowodniliśmy w ten sposób, że układ

$$(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = (a_2 a_3 \ldots a_n - a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

spełnia równanie dane w treści zadania. Pozostaje jeszcze sprawdzić, że suma $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ jest większa od sumy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, co sprowadza się do nierówności $a_2 a_3 \ldots a_n - a_1 > a_1$, czyli

$$a_2 a_3 \ldots a_n > 2a_1.$$

Przypuśćmy, że ostatnia zależność jest fałszywa. Ponieważ liczby a_2, a_3, …, a_n są równe co najmniej a_1, więc $2a_1 \geqslant a_2 a_3 \ldots a_n \geqslant a_1^{n-1}$, skąd dostajemy nierówność $2 \geqslant a_1^{n-2}$ (która może stać się równością jedynie wtedy, gdy wszystkie z liczb a_2, a_3, …, a_n są równe a_1). W efekcie $n = 2$ lub $a_1 = 1$ albo też $n = 3$ i $a_1 = 2 = a_2 = a_3$. Pierwszy przypadek odpada: równanie $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2$ nie ma rozwiązań nawet w dodatnich liczbach rzeczywistych, gdyż lewa strona wynosi co najmniej $2x_1x_2$. Trzeci przypadek również odpada, ponieważ trójka $(a_1, a_2, a_3) = (2, 2, 2)$ nie spełnia zależności $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2a_3$. Wreszcie w drugim przypadku dostajemy $a_2a_3 \ldots a_n \leqslant 2a_1 = 2$. Zatem ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ składa się z n jedynek albo z $n - 1$ jedynek i jednej dwójki. Żaden z takich ciągów nie spełnia jednak równania $(*)$, co kończy rozwiązanie.

2. Dowieść, że istnieje ciąg 2012 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, z których żadna nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Rozwiązanie:

Jeżeli liczba całkowita n jest podzielna przez liczbę pierwszą $p = 4k + 3$, gdzie k jest liczbą całkowitą, ale nie jest podzielna przez p^2, to liczby n nie można zapisać w postaci sumy dwóch kwadratów liczb całkowitych. Rzeczywiście, przypuśćmy, że $n = a^2 + b^2$ dla pewnych liczb całkowitych a i b. Wtedy liczba $a^{p-1} + b^{p-1} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1}$ jest podzielna przez $a^2 + b^2$ i tym bardziej jest podzielna przez p. Jednak na mocy małego twierdzenia Fermata każda z liczb a^{p-1}, b^{p-1} daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez p. Wobec tego z podzielności $p \,|\, a^{p-1} + b^{p-1}$ wynika, że liczby a^{p-1} i b^{p-1} są podzielne przez p. Zatem liczby a i b są podzielne przez p i w efekcie liczba $n = a^2 + b^2$ jest podzielna przez p^2, wbrew przyjętemu założeniu.

Wystarczy więc wykazać, że istnieje ciąg 2012 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, z których każda jest podzielna przez pewną liczbę pierwszą dającą resztę 3 z dzielenia przez 4, ale nie jest podzielna przez kwadrat tej liczby pierwszej.

W tym celu zauważmy przede wszystkim, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych dających resztę 3 z dzielenia przez 4. Określmy bowiem ciąg liczb całkowitych c_1, c_2, c_3, … wzorami: $c_1 = 3$ oraz $c_{n+1} = 4c_1c_2 \ldots c_n - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Każdy wyraz tego ciągu daje resztę 3 z dzielenia przez 4, a więc w jego rozkładzie na czynniki pierwsze musi wystąpić pewien czynnik pierwszy dający resztę 3 z dzielenia przez 4. Z drugiej strony, dla każdej pary wskaźników $k < \ell$ prawdziwa jest podzielność $c_k \,|\, c_\ell + 1$, skąd wynika, że dowolne dwa różne wyrazy tego ciągu są względnie pierwsze. W efekcie wybierając dzielniki pierwsze różnych wyrazów otrzymujemy różne liczby pierwsze, co dowodzi pierwszego zdania akapitu.

Niech wreszcie p_1, p_2, …, p_{2012} będzie dowolnym ciągiem 2012 różnych liczb pierwszych dających resztę 3 z dzielenia przez 4. Wówczas na podstawie chińskiego twierdzenia o resztach istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że dla $i = 1, 2, \ldots, 2012$ liczba $n + i$ daje resztę p_i z dzielenia przez p_i^2. Zatem na mocy stwierdzenia udowodnionego w pierwszym akapicie rozwiązania żadna z kolejnych dodatnich liczb całkowitych $n+1$, $n+2$, …, $n+2012$ nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

3. Niech n będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że liczba $1+2^n+4^n$ jest pierwsza. Wykazać, że istnieje liczba całkowita k, dla której $n=3^k$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby całkowitej a i dowolnej dodatniej liczby całkowitej m niepodzielnej przez 3 liczba $a^{2m}+a^m+1$ jest podzielna przez a^2+a+1.

Dzieląc liczbę m z resztą przez 3 uzyskujemy przedstawienie $m=3\ell+r$, gdzie ℓ jest nieujemną liczbą całkowitą oraz $r\in\{1,2\}$. Różnice

$$a^m-a^r=a^r((a^3)^\ell-1)$$

oraz

$$a^{2m}-a^{2r}=(a^m-a^r)(a^m+a^r)=a^{2r}((a^3)^\ell-1)((a^3)^\ell+1)$$

są podzielne przez $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$ i tym bardziej są podzielne przez a^2+a+1. Zatem liczba $a^{2m}+a^m+1$ jest podzielna przez a^2+a+1 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a^{2r}+a^r+1$ jest podzielna przez a^2+a+1. Ta ostatnia podzielność jest jednak spełniona, gdyż dla $r=1$ mamy

$$a^{2r}+a^r+1=a^2+a+1,$$

a dla $r=2$ mamy

$$a^{2r}+a^r+1=a^4+a^2+1=(a^2+1)^2-a^2=(a^2+a+1)(a^2-a+1).$$

Przypuśćmy, że liczba n ma dzielnik pierwszy p różny od 3. Wtedy $n=tp$ dla pewnej liczby całkowitej t. Ze stwierdzenia sformułowanego w pierwszym akapicie rozwiązania i zastosowanego do liczb $a=2^t$ oraz $m=p$ wynika, że liczba $1+2^n+4^n=(2^t)^{2p}+(2^t)^p+1$ jest podzielna przez $(2^t)^2+2^t+1$. To wraz z nierównościami

$$1<(2^t)^2+2^t+1<(2^t)^{2p}+(2^t)^p+1$$

dowodzi, że liczba $1+2^n+4^n$ nie jest pierwsza, wbrew warunkom zadania.

Wobec tego jedynym możliwym dzielnikiem pierwszym liczby n jest liczba 3, skąd otrzymujemy tezę.

4. Ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, … jest określony wzorami: $a_1=2$ oraz $a_{n+1}=2a_n^2-1$ dla $n=1,2,3,\ldots$. Rozstrzygnąć, czy liczba $a_{2013!}$ jest podzielna przez $2012!+1$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie.

Niech $m \geqslant 2$ będzie dowolną liczbą całkowitą oraz niech k będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że wyraz a_k jest podzielny przez m. Wykażemy, że $k < m$.

Zauważmy najpierw, że jeżeli pewien wyraz rozważanego ciągu daje resztę 1 z dzielenia przez m, to następny wyraz — i w konsekwencji wszystkie kolejne wyrazy — także daje resztę 1 z dzielenia przez m. Jeżeli bowiem $a_\ell = tm + 1$ dla pewnych liczb całkowitych $\ell, t \geqslant 1$, to liczba

$$a_{\ell+1} = 2(tm+1)^2 - 1 = 2(t^2m + 2t)m + 1$$

daje resztę 1 z dzielenia przez m.

Z podzielności $m \,|\, a_k$ wynika, że liczba

$$a_{k+2} = 2(2a_k^2 - 1)^2 - 1 = 2(4a_k^2 - 4)a_k^2 + 1$$

daje resztę 1 z dzielenia przez m. Zatem każda z liczb a_{k+2}, a_{k+3}, a_{k+4}, $\ldots$ daje resztę 1 z dzielenia przez m.

Z drugiej strony, wśród $m+1$ liczb a_1, a_2, $\ldots$, a_{m+1} istnieją dwie liczby dające jednakowe reszty z dzielenia przez m. Niech będą to liczby a_i oraz a_j, gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant m+1$. Ponieważ reszta z dzielenia przez m dowolnego wyrazu rozpatrywanego ciągu jednoznacznie określa resztę z dzielenia przez m następnego wyrazu, więc liczby a_{i+1} oraz a_{j+1} dają jednakowe reszty z dzielenia przez m, liczby a_{i+2} oraz a_{j+2} dają jednakowe reszty z dzielenia przez m, i ogólnie: liczby a_{i+n} oraz a_{j+n} dają jednakowe reszty z dzielenia przez m dla każdego $n \geqslant 0$. Wynika stąd, że reszta, jaką przy dzieleniu przez m daje którakolwiek z liczb a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, $\ldots$, jest równa reszcie, jaką przy dzieleniu przez m daje któraś z liczb a_i, a_{i+1}, $\ldots$, a_{j-1}. To wraz z ostatnim zdaniem poprzedniego akapitu dowodzi, że wśród wyrazów a_i, a_{i+1}, $\ldots$, a_{j-1} istnieje wyraz dający resztę 1 z dzielenia przez m. Nierówność $j - 1 \leqslant m$ i pierwsze zdanie drugiego akapitu prowadzą teraz do wniosku, że wyrazy a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, $\ldots$ dają resztę 1 z dzielenia przez m. A to dowodzi stwierdzenia sformułowanego w pierwszym akapicie.

Pozostaje spostrzec, że z podzielności wyrazu $a_{2013!}$ przez $2012! + 1$ wynikałaby fałszywa nierówność $2013! < 2012! + 1$.

5. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, $\ldots$, x_n należących do przedziału $(0; \frac{\pi}{4})$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{\operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \ldots \operatorname{tg} x_n} \leqslant \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n}}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_i = \mathrm{tg}^2 x_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$; na mocy warunków zadania liczby rzeczywiste a_1, a_2, …, a_n należą do przedziału $(0; 1)$. Ponadto na podstawie tożsamości trygonometrycznych

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\mathrm{tg}^2 \alpha}{\mathrm{tg}^2 \alpha + 1}$$

oraz

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 \alpha + 1}$$

prawdziwe są zależności

$$\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n = \frac{a_1}{a_1 + 1} + \frac{a_2}{a_2 + 1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n + 1}$$

oraz

$$\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n = \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{a_n + 1}.$$

Oznaczmy liczbę stojącą po prawej stronie poprzedniego wiersza przez S. Wówczas

$$\frac{a_1}{a_1 + 1} + \frac{a_2}{a_2 + 1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n + 1} = \\ = \left(1 - \frac{1}{a_1 + 1}\right) + \left(1 - \frac{1}{a_2 + 1}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{1}{a_n + 1}\right) = n - S$$

i nierówność dana do udowodnienia przybiera postać

$$\sqrt[n]{\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_n}} \leqslant \sqrt{\frac{n - S}{S}},$$

lub równoważnie $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \dfrac{n - S}{S} = \dfrac{n}{S} - 1$, czyli

$$(*) \qquad S = \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{a_n + 1} \leqslant \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + 1}.$$

Należy więc dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ i dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, …, a_n mniejszych od 1 spełniona jest nierówność $(*)$.

W tym celu zastosujemy indukcję.

Dla $n = 1$ obie strony zależności $(*)$ są równe.

Przyjmijmy z kolei, że dowodzone stwierdzenie jest prawdziwe dla liczby $n = m$. Wykażemy, że jest ono prawdziwe również dla liczby $n = 2m$. Weźmy bowiem pod uwagę dowolne dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, …, a_m,

a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{2m} mniejsze od 1. Wówczas na mocy założenia uczynionego w pierwszym zdaniu akapitu spełnione są nierówności

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_m+1}\leqslant\frac{m}{\sqrt[m]{a_1a_2\ldots a_m}+1}$$

oraz

$$\frac{1}{a_{m+1}+1}+\frac{1}{a_{m+2}+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2m}+1}\leqslant\frac{m}{\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}\ldots a_{2m}}+1}.$$

Dodając stronami dwie powyższe zależności stwierdzamy, że do udowodnienia związku $(*)$ wystarczy uzasadnić nierówność

$$\frac{m}{\sqrt[m]{a_1a_2\ldots a_m}+1}+\frac{m}{\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}\ldots a_{2m}}+1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2m}{\sqrt[2m]{a_1a_2\ldots a_ma_{m+1}a_{m+2}\ldots a_{2m}}+1}.$$

Przyjmując oznaczenia $b=\sqrt[2m]{a_1a_2\ldots a_m}$ i $c=\sqrt[2m]{a_{m+1}a_{m+2}\ldots a_{2m}}$ przekształcamy równoważnie powyższą nierówność w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}&\leqslant\frac{2}{bc+1},\\(bc+1)[(c^2+1)+(b^2+1)]&\leqslant 2(b^2+1)(c^2+1),\\bc^3+b^3c+2bc+c^2+b^2+2&\leqslant 2b^2c^2+2b^2+2c^2+2,\\b^3c+bc^3-2b^2c^2&\leqslant b^2+c^2-2bc,\\bc(b-c)^2&\leqslant(b-c)^2.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż czynnik $(b-c)^2$ jest liczbą nieujemną, a liczby b i c należą do przedziału $(0;1)$. W rezultacie osiągnęliśmy cel wskazany w drugim zdaniu akapitu.

Wystarczy teraz wykazać, że z prawdziwości dowodzonego stwierdzenia dla liczby $n=m$ większej od 1 wynika jego prawdziwość dla liczby $n=m-1$. Niech więc a_1, a_2, ..., a_{m-1} będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi mniejszymi od 1. Wówczas liczba $\sqrt[m-1]{a_1a_2\ldots a_{m-1}}$ także należy do przedziału $(0;1)$ i w myśl przyjętego założenia nierówność $(*)$ jest spełniona dla liczb a_1, a_2, ..., a_{m-1}, $\sqrt[m-1]{a_1a_2\ldots a_{m-1}}$. Wobec tego

$$(**)\quad\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{m-1}+1}+\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1a_2\ldots a_{m-1}}+1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{m}{\sqrt[m]{a_1a_2\ldots a_{m-1}\sqrt[m-1]{a_1a_2\ldots a_{m-1}}}+1}.$$

Jednak mianownik ułamka stojącego po prawej stronie wynosi

$$\begin{aligned}(a_1a_2\ldots a_{m-1}(a_1a_2\ldots a_{m-1})^{\frac{1}{m-1}})^{\frac{1}{m}}+1&=((a_1a_2\ldots a_{m-1})^{\frac{m}{m-1}})^{\frac{1}{m}}+1=\\&=\sqrt[m-1]{a_1a_2\ldots a_{m-1}}+1.\end{aligned}$$

Zatem odejmując ostatni składnik lewej strony nierówności (∗∗) od obu jej stron otrzymujemy postulowaną zależność

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{m-1}+1}\leqslant\frac{m-1}{\sqrt[m-1]{a_1a_2\ldots a_{m-1}}+1}.$$

To kończy rozumowanie indukcyjne i rozwiązanie zadania.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Na prostej zaznaczono n^2+1 przedziałów domkniętych. Wykazać, że wśród tych przedziałów istnieje $n+1$ przedziałów mających punkt wspólny lub istnieje $n+1$ przedziałów, z których dowolne dwa są rozłączne.

Rozwiązanie:

Udowodnimy następujące mocniejsze stwierdzenie: dla dowolnych liczb całkowitych $m,n\geqslant 0$ wśród $mn+1$ przedziałów domkniętych na prostej zawsze można znaleźć $m+1$ przedziałów mających punkt wspólny lub $n+1$ przedziałów, z których dowolne dwa są rozłączne. Przyjmując w szczególności $m=n$ otrzymamy tezę zadania.

W celu wykazania powyższego stwierdzenia zastosujemy indukcję ze względu na wartość liczby n. Dla $n=0$ jest ono oczywiście prawdziwe.

Niech teraz $m\geqslant 0$ i $n\geqslant 1$ będą dowolnymi liczbami całkowitymi i przypuśćmy, że rozważane stwierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich par nieujemnych liczb całkowitych, z których druga liczba jest mniejsza od n. Weźmy pod uwagę $mn+1$ przedziałów domkniętych na prostej. Wśród tych przedziałów wybierzmy taki przedział, którego prawy koniec jest możliwie najmniejszą liczbą; niech będzie to przedział $\langle a;b\rangle$. Z określenia wybranego przedziału wynika, że dowolny spośród pozostałych mn przedziałów albo zawiera liczbę b, albo ma lewy koniec większy od b.

Jeżeli wśród pozostałych mn przedziałów istnieje co najmniej m przedziałów zawierających liczbę b, to wraz z przedziałem $\langle a;b\rangle$ uzyskujemy co najmniej $m+1$ przedziałów zawierających liczbę b, a więc mających punkt wspólny, co dowodzi tezy indukcyjnej. Pozostaje więc zbadać przypadek, w którym co najwyżej $m-1$ spośród pozostałych mn przedziałów zawiera liczbę b. Zatem co najmniej $mn-(m-1)=m(n-1)+1$ przedziałów ma lewy koniec większy od b.

Na mocy założenia indukcyjnego wśród $m(n-1)+1$ przedziałów o lewym końcu większym od b można znaleźć $m+1$ przedziałów mających punkt wspólny lub $(n-1)+1=n$ przedziałów, z których dowolne dwa są rozłączne. W pierwszej sytuacji ponownie uzyskujemy tezę indukcyjną. Jeżeli zaś istnieje n przedziałów, z których dowolne dwa są rozłączne, to każdy z nich jest rozłączny z przedziałem $\langle a;b\rangle$ i w efekcie wśród początkowych $mn+1$ przedziałów istnieje $n+1$ przedziałów, z których dowolne dwa są rozłączne. To kończy dowód indukcyjny.

7. Dla dowolnych liczb całkowitych $m \geqslant n \geqslant 2$ rozpatrujemy następującą grę. Na początku dane są dwa stosy zawierające odpowiednio m i n kamieni. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy polegające na zabraniu z jednego stosu dodatniej liczby kamieni, która jest wielokrotnością liczby kamieni znajdujących się na drugim stosie. Wygrywa ten z graczy, któremu uda się opróżnić jeden ze stosów.

Rozstrzygnąć, w zależności od m i n, który z graczy — rozpoczynający grę czy jego przeciwnik — ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Rozpoczynający grę ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy $m = n$ lub $\dfrac{m}{n} > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aby uzasadnić powyższą odpowiedź należy wykazać, że gracz, który ma wykonać ruch, ma w danym momencie strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy oba stosy zawierają tyle samo kamieni lub iloraz liczby kamieni na większym stosie i liczby kamieni na mniejszym stosie jest większy od liczby $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. W tym celu zastosujemy indukcję ze względu na łączną liczbę kamieni znajdujących się na obu stosach.

Jeżeli oba stosy zawierają tyle samo kamieni — w szczególności gdy każdy z nich zawiera dokładnie jeden kamień — to zdanie sformułowane w poprzednim akapicie jest oczywiście prawdziwe. Weźmy teraz pod uwagę pozycję, w której na jednym ze stosów znajduje się m kamieni, a na drugim znajduje się n kamieni, przy czym $m > n > 0$. Należy udowodnić, że w przypadku $m > \alpha n$ gracz, który ma wykonać ruch, ma strategię wygrywającą, a w przypadku $m \leqslant \alpha n$ strategię wygrywającą ma jego przeciwnik.

Przypuśćmy, że $m > \alpha n$. Jeżeli liczba m jest podzielna przez n, to możliwe jest opróżnienie większego stosu w jednym ruchu, co prowadzi do wygranej gracza wykonującego ten ruch. Załóżmy zatem, że liczba m nie jest wielokrotnością liczby n. Na mocy nierówności $\frac{m}{n} > \alpha$ istnieje dokładnie jedna dodatnia liczba całkowita k, dla której różnica $\frac{m}{n} - k$ należy do przedziału $\langle \alpha - 1; \alpha)$. Ponieważ różnica ta jest liczbą wymierną, a liczba α jest niewymierna, więc w istocie mamy

$$\alpha - 1 < \frac{m}{n} - k = \frac{m - kn}{n} < \alpha.$$

Ponadto $\frac{m}{n} - k \neq 1$, gdyż w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy równość $\frac{m}{n} = k+1$, wbrew przyjętemu założeniu. Niech ruch gracza polega na zabraniu kn kamieni ze stosu zawierającego m kamieni. Po wykonaniu tego ruchu jeden ze stosów zawiera $m - kn$ kamieni, drugi zawiera n kamieni, a iloraz tych liczb jest elementem przedziału $(\alpha - 1; \alpha)$ różnym od 1. Z równości $\alpha^2 = \alpha + 1$ wynika, że końce tego przedziału są swoimi odwrotnościami, czyli dodatnia liczba rzeczywista należy do tego przedziału wtedy i tylko wtedy, gdy należy doń jej odwrotność. W rezultacie po wykonaniu ruchu iloraz liczby kamieni na większym stosie i liczby kamieni na mniejszym stosie należy do przedziału $(1;\alpha)$, a ruch ma wykonać drugi gracz. Na mocy założenia indukcyjnego strategię wygrywającą w tej pozycji ma jego przeciwnik, który przed chwilą wykonał ruch. W ten sposób zakończyliśmy rozpatrywanie przypadku $m > \alpha n$.

Przyjmijmy z kolei, że $n < m \leqslant \alpha n$, a więc $n < m < \alpha n$ z uwagi na niewymierność liczby α. Należy wykazać, że po dowolnym ruchu gracza, który ma w danej pozycji wykonać ruch, powstanie pozycja, w której przeciwnik będzie miał strategię wygrywającą. Z nierówności $n < m < \alpha n < 2n$ wynika, że jedynym dopuszczalnym ruchem jest zabranie n kamieni ze stosu zawierającego m kamieni. Po wykonaniu tego ruchu na mniejszym stosie będzie się znajdowało $m-n$ kamieni, a na większym stosie będzie się znajdowało n kamieni. Ponadto zależność $m < \alpha n$ prowadzi do wniosku, że $m-n < \alpha n - n$ oraz

$$\frac{n}{m-n} > \frac{n}{\alpha n - n} = \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha.$$

Wobec tego w powstałej pozycji iloraz liczby kamieni na większym stosie i liczby kamieni na mniejszym stosie jest większy od α. Zatem w myśl założenia indukcyjnego strategię wygrywającą ma gracz, który ma wykonać ruch. To kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

8. Trójkąt równoboczny podzielono liniami równoległymi do boków na siatkę 36 przystających trójkątów równobocznych. W chwili początkowej w każdym węźle siatki znajduje się mrówka, ustawiona w kierunku pewnego odcinka siatki wychodzącego z tego węzła. W jednostce czasu każda mrówka przemaszerowuje po odcinku siatki z węzła na sąsiedni węzeł, po czym zakręca w lewo lub w prawo o 60° lub o 120°. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że w pewnym momencie dwie mrówki się spotkają.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak.

Wykażemy, że pewne dwie mrówki spotkają się najpóźniej po dwóch jednostkach czasu.

Wszystkie 36 przystających trójkątów równobocznych uzyskanych w wyniku podziału wyjściowego trójkąta tworzy siatkę, w której liczba węzłów wynosi $1+2+3+\ldots+7 = 28$. Wśród tych węzłów wyróżnijmy następujące 10 węzłów: 3 wierzchołki wyjściowego trójkąta równobocznego, 6 punktów leżących na obwodzie tego trójkąta w odległości $\frac{1}{3}$ jego boku od pewnego jego wierzchołka, oraz środek ciężkości wyjściowego trójkąta. Inaczej mówiąc, węzły wyróżnione otrzymujemy grupując 36 trójkątów siatki w 9 czteroelementowych grup, z których każda tworzy większy trójkąt równoboczny, oraz wybierając węzły będące wierzchołkami przynajmniej jednego z tych większych 9 trójkątów równobocznych (liczba wybranych w ten sposób węzłów jest równa $1+2+3+4 = 10$).

Zauważmy teraz, że mrówka znajdująca się w wyróżnionym węźle siatki może ponownie znaleźć się w pewnym węźle wyróżnionym dopiero po trzech jednostkach czasu. Wynika to z faktu, że żadne dwa węzły wyróżnione nie są połączone pojedynczym odcinkiem siatki ani łamaną złożoną z dwóch nierównoległych pojedynczych odcinków siatki.

Przypuśćmy, że można tak zaplanować ruch mrówek w dwóch jednostkach czasu, aby żadne dwie mrówki się nie spotkały. Wówczas wszystkie 10 mrówek, które w chwili początkowej znajdowały się w węzłach wyróżnionych, po pierwszej oraz po drugiej jednostce czasu znajdują się w węzłach niewyróżnionych. Ponadto w myśl uczynionego założenia wszystkie mrówki po pierwszej jednostce czasu znajdują się w różnych węzłach siatki. Wobec tego w tym momencie każdy z 10 węzłów wyróżnionych jest zajęty przez pewną mrówkę — i to inną, niż którakolwiek z 10 mrówek znajdujących się w węzłach wyróżnionych w chwili początkowej. Żadna z tych 10 mrówek, które po pierwszej jednostce czasu znajdują się w węzłach wyróżnionych, nie może znaleźć się w węźle wyróżnionym po drugiej jednostce czasu. Stąd wniosek, że po dwóch jednostkach czasu co najmniej 20 mrówek znajduje się w węzłach niewyróżnionych. Jednak liczba węzłów niewyróżnionych wynosi 18, co przeczy założeniu przyjętemu w pierwszym zdaniu akapitu i kończy rozwiązanie.

9. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, przy czym odcinki AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie, a kąt DFE jest prosty. Wewnątrz trójkąta wybrano punkt P, którego rzutem prostokątnym na prostą AB jest punkt F. Udowodnić, że $\angle DFC = \angle PFE$.

Rozwiązanie:

Poprowadźmy przez punkt C prostą równoległą do prostej AB. Niech G i H będą punktami, w których poprowadzoną prostą przecinają odpowiednio półproste $FD^{\rightarrow}$ i $FE^{\rightarrow}$. Wtedy punkt C leży wewnątrz odcinka GH. Stosując twierdzenie Talesa do kąta wyznaczonego przez proste BC, FG i do kąta wyznaczonego przez proste AC, FH oraz twierdzenie Cevy stwierdzamy, że

$$\frac{CH}{GC} = \frac{CH}{EC} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{GC} = \frac{AF}{EA} \cdot \frac{CE}{DC} \cdot \frac{BD}{FB} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

To oznacza, że punkt C jest środkiem odcinka GH.

Z warunku $\angle DFE = 90^\circ$ wynika, że kąt przy wierzchołku F w trójkącie GFH jest prosty. Zatem punkt C jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego GFH, a więc jest też środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, co oznacza, że $CG = CF$. Z drugiej strony, w myśl założeń zadania punkt P leży na wysokości tego trójkąta opuszczonej z wierzchołka F. Stąd uzyskujemy tezę zadania:

$$\angle DFC = \angle GFC = \angle FGC = \angle FGH = 90^\circ - \angle FHG = \angle PFH = \angle PFE.$$

10. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne są prostopadłe i przecinają się w punkcie E. Wewnątrz czworokąta wybrano taki punkt F, że

$$\angle DAC = \angle FAB \qquad \text{oraz} \qquad \angle ABD = \angle FBC.$$

Wykazać, że na bokach AB, BC, CD, DA istnieją odpowiednio punkty K, L, M, N, dla których odcinki KM i LN przecinają się w punkcie E oraz

$$EK + KF = EL + LF = EM + MF = EN + NF.$$

Rozwiązanie:

Niech F' oznacza punkt symetryczny do punktu F względem prostej AB oraz niech K będzie punktem, w którym odcinek EF' przecina prostą AB. Wówczas na mocy pierwszej z dwóch danych w treści zadania równości kątów otrzymujemy

$$\angle EAF' = \angle EAB + \angle BAF' = \angle EAB + \angle FAB = \angle EAB + \angle DAC = \angle DAB$$

i analogicznie $\angle F'BE = \angle ABC$. W rezultacie czworokąt $AF'BE$ jest wypukły, a punkt K leży wewnątrz odcinka AB.

Oznaczmy przez e elipsę o ogniskach E i F przechodzącą przez punkt K. W myśl nierówności trójkąta dla dowolnego punktu X leżącego na odcinku AB i różnego od K spełniona jest zależność

$$EX + XF = EX + XF' > EF' = EK + KF' = EK + KF.$$

Wobec tego wszystkie punkty odcinka AB różne od K leżą na zewnątrz elipsy e, a więc elipsa ta jest styczna do prostej AB w punkcie K. Zatem równość $\angle DAE = \angle FAB$ dowodzi, że elipsa e jest styczna do półprostej $AD^{\rightarrow}$ w pewnym punkcie N, a równość $\angle ABE = \angle FBC$ dowodzi, że elipsa e jest styczna do półprostej $BC^{\rightarrow}$ w pewnym punkcie L. Ponadto prawdziwe są równości

$$(*) \qquad EK + KF = EL + LF = EN + NF.$$

Wykażemy, że elipsa e jest styczna także do odcinka CD. W tym celu poprowadźmy styczną do elipsy e równoległą do prostej CD oraz leżącą po przeciwnej stronie prostej CD niż punkty A i B, jeżeli elipsa przecina prostą CD w dwóch różnych punktach, bądź też bliższą prostej CD w przeciwnym przypadku. Niech poprowadzona styczna przecina półproste $BC^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$ odpowiednio w punktach C' i D'. Wtedy elipsa e jest wpisana w czworokąt $ABC'D'$ i do uzasadnienia styczności elipsy e do odcinka CD wystarczy udowodnić, że $C' = C$ oraz $D' = D$.

Niech G i H będą punktami symetrycznymi do punktu F odpowiednio względem prostych BC' i $D'A$. Rozumując tak jak w pierwszym i drugim akapicie rozwiązania stwierdzamy, że odcinki EG i BC' przecinają się w punkcie L, a odcinki EH i $D'A$ przecinają się w punkcie N. Co więcej, z równości $(*)$ uzyskujemy związek $EF' = EG = EH$. To wraz z zależnościami $AH = AF = AF'$ oraz $BF' = BF = BG$ dowodzi, że trójkąty HEA i $F'EA$ są przystające i symetryczne względem prostej AE, a trójkąty $F'EB$ i GEB są przystające i symetryczne względem prostej BE. Zatem

$$\angle HEA = \angle F'EA \qquad \text{oraz} \qquad \angle GEB = \angle F'EB$$

i w efekcie miara kąta wypukłego AEB jest połową miary (niekoniecznie wypukłego) kąta HEG zawierającego punkty A i B. Podobnie dowodzimy, że miara kąta wypukłego $C'ED'$ jest połową miary kąta HEG zawierającego punkty C' i D'. Stąd wniosek, że

$$(**) \qquad \angle AEB + \angle C'ED' = 180^\circ.$$

(Zauważmy, że w niniejszym akapicie nigdzie nie korzystaliśmy z warunku $\angle AEB = 90^\circ$; równość $(**)$ jest więc zawsze prawdziwa, gdy elipsa o jednym z ognisk E jest wpisana w czworokąt $ABC'D'$.)

Z drugiej strony, proste CD i $C'D'$ są równoległe. Jeżeli proste te się nie pokrywają, to albo punkty C' i D' leżą odpowiednio wewnątrz odcinków BC i DA, albo też punkty C i D leżą odpowiednio wewnątrz odcinków BC' i $D'A$. Jednak w pierwszym przypadku mamy $\angle C'ED' > \angle CED = 90^\circ$, a w drugim przypadku mamy $\angle C'ED' < \angle CED = 90^\circ$, i na mocy związku $\angle AEB = 90^\circ$ otrzymujemy w obu przypadkach sprzeczność z równością $(**)$. W takim razie $C = C'$ i $D' = D$, a elipsa e jest styczna do odcinka CD w pewnym punkcie M. Ponadto zależność $(*)$ można rozszerzyć do postaci

$$EK + KF = EL + LF = EM + MF = EN + NF.$$

Do zakończenia rozwiązania pozostaje jeszcze wykazać, że odcinki KM i LN przecinają się w punkcie E. Stosując twierdzenie Brianchona do zdegenerowanego sześciokąta $AKBCMD$ opisanego na elipsie e stwierdzamy, że główne przekątne tego sześciokąta — odcinki AC, KM i BD — przecinają się w jednym punkcie. A ponieważ odcinki AC i BD przecinają się w punkcie E, więc punkt ten leży na odcinku KM. Analogicznie uzasadniamy, że punkt E leży na odcinku LN. W efekcie odcinki KM i LN przecinają się w punkcie E, co kończy rozwiązanie.

11. Dany jest czworościan o objętości V i promieniu sfery opisanej R. Dowieść, że trzy iloczyny długości przeciwległych krawędzi są długościami boków trójkąta o polu równym $6VR$.

Rozwiązanie:

Niech $ABCD$ będzie danym czworościanem. Rozpatrzmy inwersję o środku w punkcie A i promieniu równym $r = \sqrt[3]{AB \cdot AC \cdot AD}$. Symbolem X' będziemy oznaczać obraz punktu X przy tej inwersji, gdzie X jest dowolnym symbolem różnym od A.

Wyznaczmy najpierw zależność wiążącą objętość V' czworościanu $AB'C'D'$ i objętość V czworościanu $ABCD$. W tym celu zauważmy, że stosunek objętości czworościanów $ABCD$ i $AB'CD$ jest równy stosunkowi długości AB i AB', gdyż oba czworościany mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka D, a stosunek pól ich podstaw ACB i ACB' jest równy stosunkowi długości AB i AB'. Podobnie stwierdzamy, że stosunek objętości czworościanów $AB'CD$ i $AB'C'D$ jest równy stosunkowi długości AC i AC', a stosunek objętości czworościanów $AB'C'D$ i $AB'C'D'$ jest równy stosunkowi długości AD i AD'. W konsekwencji

$$\begin{aligned}\frac{V}{V'} &= \frac{AB}{AB'}\cdot\frac{AC}{AC'}\cdot\frac{AD}{AD'} = \frac{AB\cdot AB}{AB\cdot AB'}\cdot\frac{AC\cdot AC}{AC\cdot AC'}\cdot\frac{AD\cdot AD}{AD\cdot AD'} = \\ &= \frac{AB^2}{r^2}\cdot\frac{AC^2}{r^2}\cdot\frac{AD^2}{r^2} = \frac{(AB\cdot AC\cdot AD)^2}{r^6} = \frac{(r^3)^2}{r^6} = 1,\end{aligned}$$

co oznacza, że $V = V'$.

Następnie, z równości $AB\cdot AB' = r^2 = AC\cdot AC'$ wynika, że trójkąty ABC i $AC'B'$ są podobne. Stąd i z określenia długości r uzyskujemy

$$\frac{B'C'}{CB} = \frac{AB'}{AC} = \frac{AB\cdot AB'}{AB\cdot AC} = \frac{r^2}{AB\cdot AC} = \frac{AD}{r}.$$

Zatem

$$B'C' = \frac{AD\cdot CB}{r}$$

i analogicznie uzasadniamy, że

$$C'D' = \frac{AB\cdot DC}{r} \qquad \text{oraz} \qquad B'D' = \frac{AC\cdot DB}{r}.$$

Ponieważ punkty B', C' i D' leżą odpowiednio wewnątrz półprostych $AB^{\to}$, $AC^{\to}$ i $AD^{\to}$ nie zawartych w jednej płaszczyźnie, więc są one wierzchołkami trójkąta o długościach boków proporcjonalnych do iloczynów $AD\cdot CB$, $AB\cdot DC$ i $AC\cdot DB$.

Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu A względem środka sfery s opisanej na czworościanie $ABCD$. Wtedy odcinek AE jest średnicą sfery s, czyli ma długość $2R$. Ponadto obrazem sfery s przy rozpatrywanej inwersji jest płaszczyzna $B'C'D'$, a punkt E' leży na tej płaszczyźnie. Co więcej, punkt E jest najbardziej oddalonym od A punktem sfery s, skąd wniosek, że E' jest punktem płaszczyzny $B'C'D'$ najbliższym punktowi A. Innymi słowy, punkt E' jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę $B'C'D'$, a przy tym zależność $AE\cdot AE' = r^2$ prowadzi do związku

$$AE' = \frac{r^2}{2R}.$$

Objętość V czworościanu $AB'C'D'$ jest iloczynem $\frac{1}{3}$ pola trójkąta $B'C'D'$ oraz długości wysokości tego czworościanu opuszczonej z wierzchołka A. Wysokością tą jest jednak odcinek AE'. Wobec tego pole trójkąta $B'C'D'$, którego boki mają długości

$$\frac{AD \cdot CB}{r}, \qquad \frac{AB \cdot DC}{r} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AC \cdot DB}{r},$$

wynosi

$$\frac{3V}{AE'} = \frac{6VR}{r^2}.$$

Wynika stąd teza zadania.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Dla dodatniej liczby całkowitej n, niech $\tau(n)$ będzie liczbą wszystkich dodatnich dzielników liczby n, natomiast $\varphi(n)$ — liczbą dodatnich liczb całkowitych nie większych niż n, względnie pierwszych z n. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których jedna z liczb n, $\tau(n)$ i $\varphi(n)$ jest średnią arytmetyczną pozostałych dwóch.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $n \in \{1, 4, 6, 9\}$.

Z równości $\tau(1) = \varphi(1) = 1$ wynika, że liczba $n = 1$ spełnia warunki zadania. Przypuśćmy z kolei, że liczba $n > 1$ ma wymaganą własność. Ponieważ $\tau(n)$ jest liczbą elementów zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$, które są dzielnikami liczby n, a $\varphi(n)$ jest liczbą elementów zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, które są względnie pierwsze z liczbą n, więc prawdziwe są nierówności $\tau(n) \leqslant n$ i $\varphi(n) \leqslant n-1$. Zatem $\frac{1}{2}(\tau(n) + \varphi(n)) \leqslant n - \frac{1}{2}$, czyli liczba n nie jest średnią arytmetyczną liczb $\tau(n)$ i $\varphi(n)$. Pozostaje zbadać następujące dwa przypadki:

Przypadek 1: $\tau(n) = \frac{1}{2}(\varphi(n) + n)$.

W tej sytuacji $\tau(n) > \frac{1}{2}n$. Jednak każdy dodatni dzielnik liczby n albo jest równy n, albo też nie przekracza $\frac{1}{2}n$; w efekcie na mocy zależności $\tau(n) > \frac{1}{2}n$ wszystkie dodatnie liczby całkowite nie przekraczające $\frac{1}{2}n$ muszą być dzielnikami liczby n. Ponadto liczba n nie ma dzielników w przedziale $(\frac{1}{3}n; \frac{1}{2}n)$, skąd wniosek, że przedział ten nie zawiera liczb całkowitych i w takim razie jego długość, równa $\frac{1}{6}n$, nie przekracza 1. To oznacza, że $n \leqslant 6$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $n = 2, 3, 4, 5, 6$ liczby $\tau(n)$ są odpowiednio równe $2, 2, 3, 2, 4$, liczby $\varphi(n)$ są odpowiednio równe $1, 2, 2, 4, 2$, a liczby $\frac{1}{2}(\varphi(n) + n)$ są odpowiednio równe $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, \frac{9}{2}, 4$. W konsekwencji jedynymi liczbami spełniającymi w tym przypadku warunki zadania są $n = 4$ i $n = 6$.

Przypadek 2: $\varphi(n) = \frac{1}{2}(\tau(n) + n)$.

Wówczas $\varphi(n) > \frac{1}{2}n$. Gdyby liczba n była parzysta, to tylko nieparzyste elementy zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ mogłyby być względnie pierwsze z liczbą n, skąd wynikałaby nierówność $\varphi(n) \leqslant \frac{1}{2}n$. Wobec tego liczba n jest nieparzysta, a skoro liczba $\frac{1}{2}(\tau(n) + n)$ jest całkowita, więc również liczba $\tau(n)$ jest nieparzysta.

Dla każdego dzielnika d liczby n mniejszego od $\sqrt{n}$ liczba $\frac{n}{d}$ jest dzielnikiem liczby n większym od $\sqrt{n}$, a ponadto dla różnych dzielników d uzyskujemy różne dzielniki $\frac{n}{d}$ i każdy dzielnik liczby n większy od $\sqrt{n}$ można otrzymać w ten sposób. Zatem wszystkie dodatnie dzielniki liczby n różne od $\sqrt{n}$ można połączyć w pary, a więc liczba tych dzielników jest parzysta. W takim razie z nieparzystości liczby $\tau(n)$ wynika, że liczba $k = \sqrt{n}$ jest całkowita.

Liczby $n = k^2$ oraz k mają te same dzielniki pierwsze. To oznacza, że dowolna liczba całkowita jest względnie pierwsza z liczbą n wtedy i tylko wtedy, gdy jest względnie pierwsza z liczbą k. Co więcej, dla dowolnych liczb całkowitych a, b liczba a jest względnie pierwsza z k wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a+bk$ jest względnie pierwsza z k. W rezultacie każdy z k zbiorów

$$\{1+ik, 2+ik, \ldots, k-1+ik, k+ik\} \qquad \text{dla } i=0,1,2,\ldots,k-1$$

zawiera tyle samo elementów względnie pierwszych z liczbą k, co pierwszy z tych zbiorów, czyli dokładnie $\varphi(k)$ elementów. Jednocześnie zaś łączna liczba takich elementów wynosi $\varphi(k^2)$. Uzyskujemy stąd równość $\varphi(k^2) = k\varphi(k)$.

Wobec tego liczba $\tau(k^2) = \tau(n) = 2\varphi(n) - n = 2k\varphi(k) - k^2 = k(2\varphi(k) - k)$ jest podzielna przez k, co pociąga za sobą nierówność $\tau(k^2) \geqslant k$. Z rozumowania przeprowadzonego dwa akapity wcześniej wynika, że liczba dodatnich dzielników liczby k^2 mniejszych od k wynosi $\frac{1}{2}(\tau(k^2)-1)$, a więc jest równa co najmniej $\frac{1}{2}(k-1)$. Z drugiej strony, liczba n — i w ślad za tym także liczba k — jest nieparzysta. Zatem jedynymi liczbami mniejszymi od k, które mogą być dzielnikami liczby k^2, są liczby 1, 3, 5, $\ldots$, $k-4$, $k-2$ i jest ich dokładnie $\frac{1}{2}(k-1)$. W efekcie wszystkie te liczby są dzielnikami liczby k^2. Ponieważ $k > 1$, więc liczba $k^2 = (k-2)(k+2) + 4$ jest podzielna przez $k-2$, czyli również liczba 4 jest podzielna przez liczbę nieparzystą $k-2$. Stąd wniosek, że $k-2 = 1$ oraz $n = k^2 = 3^2 = 9$. Uzyskana liczba ma żądaną własność: liczba $\varphi(9) = 6$ jest średnią arytmetyczną liczb $\tau(9) = 3$ i 9.

2. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x+f(y)) - f(x) = (x+f(y))^4 - x^4$$

dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $f(x) \equiv 0$ oraz $f(x) = x^4 + c$ dla dowolnej liczby $c \in \mathbb{R}$.

Przypuśćmy, że f jest niezerową funkcją spełniającą dane równanie. Niech a będzie liczbą rzeczywistą, dla której $b = f(a) \neq 0$. Określmy funkcję g wzorem $g(x) = f(x+b) - f(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wówczas z zależności

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+f(a)) - f(x) = (x+f(a))^4 - x^4 = (x+b)^4 - x^4 = \\ &= 4bx^3 + 6b^2x^2 + 4b^3x + b^4 \end{aligned}$$

wynika, że g jest wielomianem stopnia trzeciego i wobec tego zbiór jego wartości jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

Niech z będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Wtedy $z = g(w)$ dla pewnej liczby rzeczywistej w, czyli $f(w+b) - f(w) = z$. Podstawiając $x = -f(w)$ oraz $y = w+b$ w danym w treści zadania równaniu otrzymujemy

$$f(-f(w) + f(w+b)) - f(-f(w)) = (-f(w) + f(w+b))^4 - (-f(w))^4,$$

czyli

$$(*) \qquad f(z) - f(-f(w)) = z^4 - (-f(w))^4.$$

Z drugiej strony, podstawiając $x = -f(w)$ oraz $y = w$ uzyskujemy

$$f(0) - f(-f(w)) = -(-f(w))^4,$$

co wraz ze związkiem $(*)$ prowadzi do wniosku, że $f(z) = z^4 + f(0)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej z.

Pozostaje sprawdzić, że wszystkie funkcje postaci $f(x) = x^4 + c$, a także funkcja zerowa, mają wymaganą własność.

3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω. Punkty I, J, K są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC, ACD oraz ABD. Niech E będzie środkiem tego łuku DB okręgu ω, który zawiera punkt A. Prosta EK przecina okrąg ω w punkcie F różnym od E. Udowodnić, że punkty C, F, I oraz J leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech M i N będą środkami odpowiednio łuków AB i AD okręgu ω nie zawierających innych wierzchołków czworokąta $ABCD$. Wtedy środki okręgów wpisanych I, J oraz K leżą odpowiednio na prostych CM, CN oraz BN. Ponadto

$$(*) \qquad MI = MA = MB \qquad \text{oraz} \qquad NJ = NA = ND = NK;$$

równości te wynikają z prostego rachunku na kątach, na przykład związek $MI = MA$ jest konsekwencją zależności $\angle IMA = \angle CMA = \angle CBA$ oraz

$$\begin{aligned} \angle IAM &= \angle IAB + \angle BAM = \tfrac{1}{2}\angle CAB + \angle BCM = \\ &= \tfrac{1}{2}\angle CAB + \tfrac{1}{2}\angle BCA = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle CBA). \end{aligned}$$

Zauważmy też, że środek K leży wewnątrz trójkąta równoramiennego BDE i wobec tego prosta EK przecina odcinek BD, a punkty F i C leżą po tej samej stronie prostej BD.

Punkt E jest środkiem łuku BD okręgu ω zawierającego punkt A, a punkty M i N są środkami łuków BA i AD zawartych w tym łuku BD. Stąd wniosek, że łuki BM oraz EN (zawarte w rozważanym łuku BD) mają równe długości i analogicznie łuki ME oraz ND mają równe długości. Zatem

$$\angle BFM = \angle EFN = \angle KFN,$$

co wraz z zależnością

$$\angle BMF = \angle BNF = \angle KNF$$

dowodzi, że trójkąty MBF i NKF są podobne oraz jednakowo zorientowane. W rezultacie

$$\frac{MB}{MF} = \frac{NK}{NF}.$$

Wykorzystując równości (∗) przepisujemy powyższy związek w postaci

$$\frac{MI}{MF} = \frac{NJ}{NF}.$$

Stąd i z zależności

$$\angle IMF = \angle CMF = \angle CNF = \angle JNF$$

wynika, że trójkąty MIF i NJF są podobne i jednakowo zorientowane. To oznacza, że

$$\angle IFM = \angle JFN \qquad \text{oraz} \qquad \angle IFJ = \angle MFN.$$

W konsekwencji

$$\angle IFJ = \angle MFN = \angle MCN = \angle ICJ,$$

a więc punkty C, F, I oraz J istotnie leżą na jednym okręgu.

4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\angle ACB = 90°$. Punkt P leży wewnątrz krótszego łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Prosta prostopadła do prostej CP, przechodząca przez punkt C, przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach K i L. Udowodnić, że stosunek pól trójkątów BKL i ACP nie zależy od wyboru punktu P.

Rozwiązanie:

Uzupełnijmy trójkąt prostokątny APB do prostokąta $APBR$. Punkt R leży wówczas na okręgu opisanym na trójkącie ABC, a odcinek PR jest średnicą tego okręgu. W takim razie kąt PCR jest prosty i w efekcie punkty K oraz L leżą na prostej CR. Z równoległości prostych PA i BR wynika, że trójkąty PBK i PRK mają równe pola. Częścią wspólną tych dwóch trójkątów jest trójkąt PLK i wobec tego pozostałe części obu trójkątów — trójkąty BKL i RPL — mają równe pola. Wystarczy więc wykazać, że stosunek pól trójkątów RPL i ACP nie zależy od wyboru punktu P. Trójkąty te są jednak podobne, gdyż na mocy związku $PA = BR$ mamy $\angle PCA = \angle BPR = \angle LPR$, a ponadto $\angle PAC = \angle PRC = \angle LRP$. Zatem stosunek pól trójkątów RPL i ACP jest równy kwadratowi stosunku długości odpowiednich boków RP i AC tych trójkątów. To wraz z zależnością $RP = BA$ dowodzi, że rozpatrywany stosunek pól wynosi $BA^2 : AC^2$, czyli nie zależy od wyboru punktu P.

5. Miasto Mar del Plata ma kształt kwadratu $WSEN$ podzielonego $2(n+1)$ ulicami na $n \times n$ kwartałów, gdzie n jest liczbą parzystą. Ulice biegną również dookoła miasta. Każdy kwartał ma kształt kwadratu o wymiarach $100\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m}$. Każda ulica w Mar del Plata jest jednokierunkowa i ruch odbywa się w tę samą stronę na całej jej długości. Na dowolnych dwóch sąsiednich równoległych ulicach ruch odbywa się w przeciwnych kierunkach. Po ulicy WS można poruszać się z punktu W do punktu S, natomiast po ulicy WN — z punktu W do punktu N. Samochód czyszczący jezdnię wyjeżdża z punktu W i zmierza do punktu E, przy czym każdy 100-metrowy odcinek ulicy może pokonać co najwyżej raz. Wyznaczyć długość najdłuższej możliwej trasy z punktu W do punktu E, którą może pokonać ten samochód.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $100(2n^2 - 2n + 4)$ metrów.

Określmy $2n$ linii prostych $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ równoległych do prostej NS w następujący sposób: dla $i = 1, 2, \ldots, n$ linia k_i przecina ulicę WN w odległości $100i - 50$ metrów od punktu W, a linia ℓ_i przecina ulicę NE w odległości $100i-50$ metrów od punktu N. Żadna z tych $2n$ linii nie przechodzi przez skrzyżowanie, a liczby ulic przeciętych przez linie $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n-1}, \ell_n$ wynoszą odpowiednio $2, 4, \ldots, 2n-2, 2n, 2n, 2n-2, \ldots, 4, 2$.

Ustalmy wartość $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i weźmy pod uwagę linię k_i, która przecina $2i$ stumetrowych odcinków ulic. Każdy z tych odcinków ma wyznaczony kierunek ruchu: albo od punktu leżącego po tej samej stronie linii k_i co punkt W do punktu leżącego po tej samej stronie linii k_i co punkt E, albo odwrotnie. Odcinki pierwszego typu nazwijmy *dodatnimi*, a odcinki drugiego typu — *ujemnymi*. Ponadto *początkiem* odcinka nazwijmy punkt, z którego należy rozpocząć ruch po tym odcinku w dopuszczalnym kierunku.

Linia k_i przecina dodatni odcinek ulicy WN oraz przecina $i-1$ najbliższych ulic równoległych do ulicy WN, a więc ich przecięte odcinki są na przemian ujemne i dodatnie. Analogicznie linia k_i przecina dodatni odcinek ulicy WS oraz na przemian ujemne i dodatnie odcinki $i-1$ najbliższych ulic równoległych do ulicy WS. Stąd wniosek, że dla nieparzystych wartości i linia k_i przecina $i + 1$ odcinków dodatnich oraz $i - 1$ odcinków ujemnych, a dla parzystych wartości i linia k_i przecina i odcinków dodatnich oraz i odcinków ujemnych.

Jeżeli i jest liczbą parzystą, to liczby odcinków dodatnich i ujemnych przeciętych przez linię k_i są równe. Jednak w chwili końcowej samochód znajduje się po przeciwnej stronie linii k_i niż w chwili początkowej. Zatem liczba odcinków dodatnich przeciętych przez linię k_i, które znajdują się na trasie podróży samochodu, jest większa o 1 od liczby odcinków ujemnych przeciętych przez linię k_i i znajdujących się na tej trasie. Stąd wniosek, że przynajmniej jeden odcinek ujemny przecięty przez linię k_i leży poza trasą podróży.

Jeżeli $i = 1$, to z dwóch odcinków dodatnich wychodzących z punktu W i przeciętych przez linię k_i tylko jeden znajduje się na trasie podróży, gdyż samochód nie może po raz drugi znaleźć się w punkcie W.

Jeżeli wreszcie $i \geqslant 3$ jest liczbą nieparzystą, to z dwóch odcinków dodatnich przeciętych przez linię k_i i mających wspólny początek na ulicy WN tylko jeden może znajdować się na trasie podróży samochodu, ponieważ istnieje tylko jeden sposób dostania się do tego początku. Podobnie z dwóch odcinków dodatnich przeciętych przez linię k_i i mających wspólny początek na ulicy WS tylko jeden może znajdować się na trasie podróży. Gdyby dla którejś z dwóch opisanych przed chwilą par odcinków dodatnich żaden odcinek z tej pary nie leżał na trasie podróży, to łącznie istniałyby co najmniej 3 odcinki przecięte przez linię k_i nie leżące na tej trasie. Załóżmy z kolei, że pewien odcinek z każdej z rozważanych dwóch par odcinków dodatnich leży na trasie podróży. Linia k_i przecina, oprócz czterech odcinków dodatnich należących do tych dwóch par, $i-3$ odcinków dodatnich oraz $i-1$ odcinków ujemnych. Jeżeli wszystkie te $2i-4$ odcinków należy do trasy podróży, to na tej trasie znajduje się, spośród odcinków przeciętych przez linię k_i, dokładnie $i-1$ odcinków dodatnich oraz dokładnie $i-1$ odcinków ujemnych. Zatem w chwili końcowej samochód znajduje się po tej samej stronie linii k_i co w chwili początkowej. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wśród odcinków przeciętych przez linię k_i co najmniej 3 odcinki nie leżą na trasie podróży.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla linii $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ dochodzimy do wniosku, że wśród odcinków ulic przeciętych przez linie k_1, k_2, k_3, k_4, $k_5, \ldots, k_{n-2}, k_{n-1}, k_n$; $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ldots, \ell_{n-2}, \ell_{n-1}, \ell_n$ istnieje odpowiednio co najmniej 1, 1, 3, 1, 3, …, 1, 3, 1; 1, 3, 1, 3, 1, …, 3, 1, 1 odcinków nie leżących na trasie podróży samochodu. Wobec tego łączna liczba takich odcinków wynosi co najmniej $3 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n+2) = 4n-4$. Ponieważ liczba wszystkich 100-metrowych odcinków ulic jest równa $2n(n+1) = 2n^2+2n$, więc trasa podróży nie może składać się z więcej niż $2n^2-2n+4$ odcinków.

Udowodnimy teraz, że dla każdej liczby parzystej $n \geqslant 2$ można zaplanować trasę podróży samochodu złożoną z $2n^2-2n+4$ stumetrowych odcinków ulic w sposób zgodny z wymaganiami zadania. Dla uproszczenia dalszego opisu będziemy stosować pojęcia skrętu w prawo i w lewo przyjmując, że samochód przejeżdżający całą ulicę WN, a następnie całą ulicę NE, wykonuje w punkcie N skręt w prawo.

Określmy najpierw pewną prostszą operację. Przypuśćmy, że samochód znajduje się na ulicy WS w punkcie różnym od S i w odległości będącej wielokrotnością 200 metrów od punktu W. Wówczas operacja polega na pokonaniu następującej trasy:

1. najpierw 200 metrów jazdy w kierunku równoległym do WN i skręt w prawo;

2. następnie wykonaniu $\frac{1}{2}n-1$ razy ciągu czynności: 200 metrów jazdy, skręt w lewo, 100 metrów jazdy, skręt w lewo, 200 metrów jazdy, skręt w prawo, 100 metrów jazdy, skręt w prawo (w rezultacie samochód znajdzie się na ulicy NE);

3. wreszcie 100 metrów jazdy, skręt w prawo, $100n$ metrów jazdy, skręt w lewo i 100 metrów jazdy.

Po pokonaniu opisanej trasy złożonej z $2 + 6 \cdot (\frac{1}{2}n - 1) + 1 + n + 1 = 4n - 2$ odcinków ulic samochód znajdzie się ponownie na ulicy WS, bliżej o 200 metrów do punktu S w stosunku do pozycji przed rozpoczęciem operacji. Co więcej, cała operacja przebiegała w pasie o szerokości 200 metrów wyznaczonym przez dwie ulice równoległe do ulicy WN.

Poszukiwaną trasę podróży samochodu możemy teraz opisać następująco. Rozpoczynając od punktu W wykonujemy $\frac{1}{2}n - 1$ razy operację opisaną w poprzednim akapicie, a na koniec pokonujemy 200 metrów po ulicy WS do punktu S oraz wykonujemy $\frac{1}{2}n$ razy następujący ciąg czynności: skręt w lewo, 100 metrów jazdy, skręt w lewo, 200 metrów jazdy, skręt w prawo, 100 metrów jazdy, skręt w prawo, 200 metrów jazdy. Ostatecznie samochód znajdzie się w punkcie E. Końcowy fragment opisanej trasy składa się z $2+6 \cdot \frac{1}{2}n = 3n+2$ odcinków ulic, a więc łączna liczba odcinków całej określonej w ten sposób trasy wynosi $(\frac{1}{2}n - 1)(4n - 2) + 3n + 2 = (n - 2)(2n - 1) + 3n + 2 = 2n^2 - 2n + 4$.

6. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają równości

$$abcd = 4 \qquad \text{oraz} \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10.$$

Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia $ab + bc + cd + da$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $\sqrt{82}$.

Z równości $ac \cdot bd = 4$ wynika, że przynajmniej jedna z liczb ac, bd jest równa co najmniej 2. Ponieważ cykliczne przestawienie symboli a, b, c, d nie narusza żadnej z dwóch danych w treści zadania równości ani nie wpływa na wartość wyrażenia $ab + bc + cd + da$, więc nie tracąc ogólności rozumowania możemy przyjąć, że $ac \geqslant 2$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $E = ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d)$, $F = a^2 + c^2$ oraz $G = ac$. Wówczas $G \geqslant 2$ i $F \geqslant 2G$. Obliczamy, że

$$\begin{aligned}
E^2 &= (a + c)^2(b + d)^2 = (a^2 + c^2 + 2ac)(b^2 + d^2 + 2bd) = \\
&= (a^2 + c^2 + 2ac)\left(10 - a^2 - c^2 + \frac{8}{ac}\right) = (F + 2G)\left(10 - F + \frac{8}{G}\right) = \\
&= 10F + 20G - F^2 - 2FG + \frac{8F}{G} + 16 = \\
&= -(F^2 - 10F + 25) + \left(41 + 20G - 2FG + \frac{8F}{G}\right) = \\
&= -(F - 5)^2 + \left[F\left(\frac{8}{G} - 2G\right) + 41 + 20G\right].
\end{aligned}$$

Na mocy nierówności $G \geqslant 2$ wyrażenie $\frac{8}{G} - 2G = \frac{2}{G}(4 - G^2)$ ma wartość niedodatnią, co wraz z zależnością $F \geqslant 2G$ prowadzi do wniosku, że

$$\begin{aligned} E^2 &\leqslant -(F-5)^2 + \left[2G\left(\frac{8}{G} - 2G\right) + 41 + 20G\right] = \\ &= -(F-5)^2 + [16 - 4G^2 + 41 + 20G] = \\ &= -(F-5)^2 - (2G-5)^2 + 82 \leqslant 82. \end{aligned}$$

Ponadto równość $E^2 = 82$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F\left(\frac{8}{G} - 2G\right) = 2G\left(\frac{8}{G} - 2G\right) \qquad \text{oraz} \qquad F - 5 = 2G - 5 = 0,$$

czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $F = 2G = 5$.

Zbadajmy, czy istnieją liczby a, b, c, d spełniające warunki zadania, dla których $F = 2G = 5$. Równości te można przepisać w postaci $a^2+c^2 = 2ac = 5$; są więc one prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Ponadto liczby dodatnie b i d powinny spełniać zależności

$$b^2 + d^2 = 10 - a^2 - c^2 = 5 \qquad \text{oraz} \qquad bd = \frac{4}{ac} = \frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5},$$

z których otrzymujemy $b + d = \sqrt{b^2 + d^2 + 2bd} = \sqrt{5 + \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{41}{5}}$. Zatem w myśl wzorów Viete'a szukane liczby b i d powinny być dwoma różnymi pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 - \sqrt{\frac{41}{5}}x + \frac{8}{5} = 0$, które istotnie ma dwa różne pierwiastki dodatnie, gdyż jego wyróżnik wynosi $\Delta = \frac{41}{5} - 4 \cdot \frac{8}{5} = \frac{9}{5} > 0$. (Można obliczyć, że pierwiastkami tego równania są liczby $\dfrac{\sqrt{41} - 3}{2\sqrt{5}}$ i $\dfrac{\sqrt{41} + 3}{2\sqrt{5}}$.)

Wobec tego $E \leqslant \sqrt{82}$, a wartość $E = \sqrt{82}$ jest osiągana dla pewnych liczb dodatnich a, b, c, d związanych zależnościami $abcd = 4$ oraz $a^2+b^2+c^2+d^2 = 10$. Jest to więc poszukiwana największa możliwa wartość.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.
13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści