Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 9 – 23 czerwca 2013

(wydanie pierwsze)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 9-23 czerwca 2013

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. (018) 33 11 660

Kadra:
Dominik Burek
Andrzej Grzesik
Teodor Jerzak
Michał Kieza
Tomasz Kobos
Anna Siennicka
Michał Zając

Olimpiada Matematyczna w Internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 9-23 czerwca w Mszanie Dolnej, w ośrodku „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Dominik Burek, Andrzej Grzesik, Teodor Jerzak, Michał Kieza, Tomasz Kobos Anna Siennicka oraz Michał Zając. Z gościnnym wykładem wystąpił ponadto Przemysław Mazur.

W dniach 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 20 i 21 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 19 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 15 i 22 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny czterech zadań i trwały od rana do wieczora, a mecz matematyczny — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 140, 139 i 132 punkty. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyły się dwie wycieczki: 16 czerwca na Ćwilin, a 19 czerwca do Rabki-Zdrój.

Bezpośrednio po zakończeniu obozu, w dniach 23-26 czerwca w miejscowości Bìlovec (Czechy) odbyły się XIII Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. Przewodniczącym delegacji polskiej był Andrzej Grzesik, zastępcą przewodniczącego był Teodor Jerzak. W dniach 24-25 czerwca każdy z zawodników rozwiązywał po trzy zadania, mając na to po cztery i pół godziny.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami oraz zadania z XIII Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	16	0	1	0
2.	15	1	0	1
3.	4	1	1	11
4.	3	0	0	14
5.	8	3	1	7
6.	11	0	0	8
7.	5	0	1	13
8.	3	0	0	16
9.	11	4	1	2
10.	8	1	2	7
11.	4	2	0	12
12.	4	8	2	4
13.	5	4	1	9
14.	2	0	0	17
15.	1	0	0	18
16.	0	1	3	15
17.	19	0	0	0
18.	2	0	0	17
19.	4	2	0	13
20.	0	0	0	19
21.	10	3	1	5
22.	16	0	0	3
23.	12	3	0	4
24.	1	0	0	18
25.	13	0	0	6
26.	4	3	2	10
27.	5	1	1	12
28.	2	0	0	17
29.	6	1	0	11
30.	8	1	1	8
31.	0	0	0	18
32.	7	2	0	9
33.	16	0	0	1
34.	9	1	4	3
35.	4	1	0	12
36.	1	0	0	16

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia nierówność $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(f(f(0))) = 0$. Wykazać, że $f(0) = 0$.

2. Odcinek BD jest dwusieczną kąta $\angle ABC$ w trójkącie ABC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, że jeśli $\angle BDM = 90^\circ$, to zachodzi równość $AB = 3BC$.

3. Na tablicy napisano liczby $1000, 1001, \ldots, 2999$. Ruch polega na wybraniu dwóch liczb a, b znajdujących się w danym momencie na tablicy, zmazaniu ich oraz napisaniu na tablicy liczby $\frac{1}{2}\min(a, b)$. Wykazać, że w wyniku wykonania dowolnych 1999 ruchów na tablicy pozostanie liczba mniejsza niż 1.

4. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p o następującej własności: istnieje liczba naturalna n, która nie dzieli liczby $p - 1$ i taka, że $p|n! + 1$.

5. Dana jest liczba pierwsza p. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych nieujemnych spełniających równanie

$$x^3 + y^3 - 3xy = p - 1.$$

6. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leqslant 1.$$

7. Na pewnej planecie żyje rasa kosmitów, w której występują trzy różne płcie. *Małżeństwo* to trójka kosmitów, po jednym z każdej płci, wśród których każda para się lubi (jeśli kosmita A lubi kosmitę B to kosmita B lubi kosmitę A). Wiadomo, że na planecie żyje $3n$ kosmitów, po n z każdej płci oraz, że każdy kosmita lubi co najmniej po k kosmitów z każdej płci różnej od jego (gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$). Kosmici chcą utworzyć jak najwięcej różnych małżeństw, przy czym każdy kosmita może należeć co najwyżej do jednego małżeństwa. Udowodnić, że:

- jeżeli n jest liczbą parzystą oraz $k = \frac{n}{2}$, to może nie dać się utworzyć nawet jednego małżeństwa,
- jeżeli $k \geqslant \frac{3n}{4}$, to można utworzyć n rozłącznych małżeństw.

8. Okrąg wpisany w trójkąt ABC, gdzie $AB \neq AC$, jest styczny do boku BC w punkcie K, zaś M to środek wysokości AD. Odcinek KM przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punkcie $N \neq K$. Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie BCN jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

9. Dane jest $n \geqslant 1$ punktów na okręgu. Niektóre z nich są połączone odcinkami, przy czym żadne dwa odcinki nie przecinają się we wnętrzu okręgu. Udowodnić, że wszystkie punkty można pomalować trzema kolorami w taki sposób, aby każde dwa punkty połączone odcinkiem miały różne kolory.

10. Udowodnić, że dla dodatnich liczb całkowitych x, y liczba

$$4xy - x - y$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

11. W czworościanie $ABCD$ suma pól ścian ABC i ABD jest równa sumie pól ścian BCD i ACD. Dowieść, że środek sfery wpisanej w ten czworościan oraz środki krawędzi BC, BD, AD, AC leżą na jednej płaszczyźnie.

12. Dla danej liczby rzeczywistej x definiujemy ciąg $(x_n)_{n \geqslant 1}$ rekurencyjnie jako

$$x_1 = x \quad \text{oraz} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 - x_n} - \frac{1}{1 + x_n} \quad \text{dla } n \geqslant 1,$$

przy czym jeśli dla pewnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $x_n = \pm 1$, to ciąg kończy się na n-tym wyrazie. Wyznaczyć liczbę takich ciągów, które kończą się dokładnie na ósmym wyrazie.

13. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ leży punkt E, dla którego

$$\angle ADE + \angle BCE \geqslant 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \angle CBE + \angle DAE \geqslant 90^\circ.$$

Drugi punkt przecięcia okręgów opisanych na trójkątach BCE i ADE leży wewnątrz tego czworokąta. Dowieść, że jeśli M i N są środkami boków AB i CD, to $AB + CD \geqslant 2MN$.

14. Pan Stefan posiada m biszkoptów i n krakersów, przy czym waga każdego z nich, wyrażona w gramach, jest liczbą całkowitą dodatnią. Wiadomo, że każdy biszkopt waży nie więcej niż n gramów, zaś każdy krakers – nie więcej niż m gramów. Udowodnić, że Pan Stefan może wybrać niepuste podzbiory biszkoptów i krakersów o takiej samej wadze.

15. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełnia równanie

$$f(f(x)) = x^2 - 2013.$$

16. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieje dokładnie jedna liczba całkowita $0 \leqslant x < n!$ spełniająca

$$n! | x^n + 1.$$

17. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, y, z, t spełniające jednocześnie równania

$$x^2 + 6y^2 = z^2, \qquad 6x^2 + y^2 = t^2.$$

18. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leqslant \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} \sum_{i<j} a_i a_j.$$

19. Odcinki AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Niech o_A, o_B i o_C będą okręgami dopisanymi do tego trójkąta, stycznymi odpowiednio do boków BC, CA i AB. Prosta ℓ_A jest wspólną styczną zewnętrzną okręgów o_B, o_C różną od BC, proste ℓ_B i ℓ_C definiujemy analogicznie. Punkty A', B', C' to odpowiednio punkty przecięcia prostych ℓ_B i ℓ_C, ℓ_C i ℓ_A oraz ℓ_A i ℓ_B. Wykazać, że proste $A'D$, $B'E$ i $C'F$ przecinają się w jednym punkcie.

20. Dany jest zbiór S szesnastu punktów w przestrzeni, z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Każdy punkt ze zbioru S został pomalowany na jeden z czterech kolorów, przy czym każdy kolor został użyty dokładnie cztery razy. Pewien punkt przestrzeni $O \notin S$ leży we wnętrzu lub na brzegu dowolnego czworościanu o wierzchołkach jednakowego koloru ze zbioru S. Udowodnić, że istnieją cztery punkty w zbiorze S o parami różnych kolorach, które wyznaczają czworościan zawierający punkt O w swoim wnętrzu lub na brzegu.

21. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC, przy czym $AE = BD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AD i BE. Okręgi opisane na trójkątach ACD i BEC przecinają się w punktach C i S. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu S odpowiednio na proste BC i AC. Udowodnić, że punkty P, Q, M, N leżą na jednej prostej.

22. Dane są 3 stosy, na których znajduje się odpowiednio 5, 49 i 51 monet. Dozwolone operacje polegają na połączeniu dwóch stosów w jeden oraz na podzieleniu stosu o parzystej liczbie monet na dwa o jednakowej wielkości. Rozstrzygnąć czy za pomocą takich operacji można otrzymać 105 stosów, z których każdy składa się z jednej monety.

23. Dowieść, że dowolną liczbę całkowitą n można przedstawić w postaci

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm k^2,$$

dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k i pewnego wyboru znaków.

24. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia większego niż 1 o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych k, dla których wielomian $P(x) + k$ jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

25. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, które spełniają równanie

$$19f(x) - 17f(f(x)) = 2x,$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}$.

26. Wykazać, że dla liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$1 \leqslant \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leqslant n - 1.$$

27. Trójkąt ABC jest zawarty wewnątrz środkowo-symetrycznego wielokąta wypukłego W. Dla danego punktu P, leżącego wewnątrz trójkąta ABC, niech A', B', C' oznaczają odpowiednio odbicia symetryczne względem P punktów A, B, C. Dowieść, że co najmniej jeden z punktów A', B', C' leży wewnątrz lub na brzegu wielokąta W.

28. Dany jest graf o n wierzchołkach posiadający k krawędzi o długościach będących różnymi liczbami całkowitymi od 1 do k. Udowodnić, że istnieje w nim ścieżka składająca się z co najmniej $\frac{2k}{n}$ krawędzi, których długości tworzą ciąg rosnący.

29. Dany jest zbiór S złożony z 2013 punktów na płaszczyźnie, które nie leżą na jednej prostej. W każdy punkt zbioru S wpisana została pewna liczba rzeczywista, przy czym spełniony jest następujący warunek: na dowolnej prostej przechodzącej przez co najmniej dwa punkty zbioru S suma wpisanych liczb jest równa 0. Udowodnić, że wszystkie wpisane liczby są równe 0.

30. Dana jest liczba całkowita $k > 1$. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ warunek

$$\sum_{d|n} d a_d = k^n.$$

Udowodnić, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ liczba a_n jest całkowita.

31. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające następujący warunek: jeżeli x jest liczbą niewymierną, to $P(x)$ również jest liczbą niewymierną.

32. Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg przechodzący przez punkty B i C jest styczny do prostej EF w punkcie A'. Analogicznie definiujemy punkty B' i C'. Wykazać, że proste AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie.

33. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają nierówności

$$f(x) \leqslant x \quad \text{oraz} \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y),$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

34. Dana jest szachownica o wymiarach $2013 \times (2013! + 1)$. Alicja i Bob na przemian wykonują ruch polegający na przecięciu jednej z krawędzi wspólnych dla dwóch sąsiednich pól. Dodatkowo, przeciąć można tylko taką krawędź, do której została już wycięta droga. Gracz, który rozetnie tablicę na dwa kawałki przegrywa. Rozstrzygnąć, który z graczy ma strategię wygrywającą.

35. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Środkowa CS przecina ten okrąg w punktach K i L. Punkt P jest punktem przecięcia prostych DK i EL. Dowieść, że proste AB i CP są równoległe.

36. Wykazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której liczba $1! + 2! + \ldots + n!$ posiada dzielnik pierwszy większy niż $2013^{2013^{2013}}$.

Zawody drużynowe

1. Dla danej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ niech $x_n = \lfloor n\sqrt{2013} \rfloor$. Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych $q, k \geqslant 2$ ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zawiera k-wyrazowy ciąg geometryczny o ilorazie q.

2. W każdym z trzech kubków znajduje się pewna liczba fasolek. Dana jest następująca *operacja*: jeżeli w jednym kubku znajduje się a fasolek, a w drugim b fasolek, gdzie $a \geqslant b$, to możemy przełożyć b fasolek z pierwszego kubka do drugiego. Rozstrzygnąć, czy dla każdego początkowego ułożenia fasolek istnieje ciąg operacji, po wykonaniu którego co najmniej jeden kubek będzie pusty.

3. Dany jest trójkąt ABC. Punkty O i H są odpowiednio środkiem okręgu opisanego i ortocentrum tego trójkąta. Punkt D jest środkiem tego łuku AC okręgu opisanego na ABC, który nie zawiera punktu B. Punkt S leży na odcinku BC, przy czym proste OS i BD są równoległe. Wykazać, że okrąg o średnicy AS przechodzi przez środek odcinka HD.

4. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite A, B, C, gdzie $A \neq 0$, które spełniają następujący warunek: dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n, istnieje liczba całkowita x taka, że $n! = Ax^2 + Bx + C$.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Rozstrzygnąć, czy zbiór liczb całkowitych dodatnich n, dla których $n!+1|(2013n)!$ jest skończony.

2. Niech k będzie dodatnią i nieparzystą liczbą całkowitą. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej m istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że $m|k^n+n^k$.

3. Rozstrzygnąć, czy dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieją parami różne i parami względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \mid a_1^i + a_2^i + \ldots + a_n^i$$

dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$.

4. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek

$$a_{k+1} = \frac{ka_k + 1}{k - a_k}$$

dla każdego $k \geqslant 1$. Udowodnić, że w tym ciągu występuje nieskończenie wiele dodatnich i nieskończenie wiele ujemnych wyrazów.

5. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Dowieść, że jeśli p-kąt ma wszystkie boki wymiernej długości i wszystkie kąty równe, to jest on foremny.

6. Liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots a_n$ spełniają warunek $a_1 a_2 \ldots a_k \geqslant \frac{1}{(2k)!}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnić, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

7. Tablica $m \times n$ została wypełniona nieujemnymi liczbami rzeczywistymi w taki sposób, że dowolny wiersz oraz dowolna kolumna zawierają co najmniej jeden dodatni wyraz. Wiadomo ponadto, że jeśli na przecięciu wiersza i kolumny znajduje się pole z liczbą dodatnią, to sumy wyrazów w tym wierszu i kolumnie są równe. Udowodnić, że $m = n$.

8. Dane są takie liczby całkowite dodatnie k, n, że $k \leqslant n - 1$. Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są niepustymi podzbiorami zbioru n-elementowego S. Udowodnić, że można pokolorować pewne elementy zbioru S dwoma kolorami w taki sposób, że spełnione są następujące warunki:

- Każdy element zbioru S jest albo niepokolorowany albo pokolorowany na jeden z dwóch kolorów.
- Przynajmniej jeden element zbioru S jest pokolorowany.
- Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ zbiór A_i jest albo całkowicie niepokolorowany albo zawiera elementy obu kolorów.

9. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Półproste $AB^{\to}$ i $DC^{\to}$ przecinają się w punkcie P, a półproste $AD^{\to}$ i $BC^{\to}$ w punkcie Q. Punkt O leży wewnątrz czworokąta $ABCD$ i spełnia warunek $\angle BOP = \angle DOQ$. Udowodnić, że $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

10. Okrąg o_1 jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie P. Okrąg o_2 jest styczny do półprostych $CA^{\to}$ i $CB^{\to}$ oraz jest styczny zewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie Q. Wykazać, że

$$\frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

11. Spodki wysokości pewnego czworościanu są różne od ortocentrów ścian, do których zostały poprowadzone. Wykazać, że płaszczyzny zawierające te wysokości i ortocentra ścian, do których zostały poprowadzone, przecinają się w jednym punkcie.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $f(x)$ o współczynnikach całkowitych, które spełniają następujący warunek: dla dowolnej liczby pierwszej p i liczb całkowitych dodatnich x, y takich, że $p|xy-1$ zachodzi podzielność $p|f(x)f(y)-1$.

2. Dana jest liczba pierwsza p postaci $4k+3$. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają równanie

$$a^{2p}+b^{2p}+c^{2p}=d^{2p}.$$

Udowodnić, że $p|abc$.

3. Dana jest liczba pierwsza $p>2$ oraz liczba całkowita $0 \leqslant r \leqslant p-1$. Wyznaczyć liczbę ciągów $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\frac{p-1}{2}})$ o wyrazach w zbiorze $\{-1, 1\}$, dla których

$$\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\ldots+\frac{p-1}{2}\varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \equiv r \pmod{p}.$$

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych x, y równanie

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

5. Dane są liczby dodatnie a, b, c. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie x, y, z, dla których spełnione są równości

$$x+y+z=a+b+c \quad \text{oraz} \quad 4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc.$$

6. Dla liczby całkowitej dodatniej n określamy

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad T_n=\frac{d(1)+d(2)+\ldots+d(n)}{n},$$

gdzie $d(k)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby k. Wykazać, że

$$|H_n-T_n| \leqslant 1,$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

7. Na płaszczyźnie narysowano n różnych prostokątów. Udowodnić, że istnieje co najmniej $4\sqrt{n}$ różnych kątów prostych będących kątami wewnętrznymi co najmniej jednego z danych prostokątów.

8. Każdy okrąg na płaszczyźnie pomalowany został na jeden z trzech kolorów. Niech A będzie nieskończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie. Udowodnić, że istnieje taki nieskończony podzbiór B zbioru A, że dowolny okrąg zawierający co najmniej trzy punkty zbioru B jest tego samego koloru.

9. W trójkącie ABC punkty K i M leżą na boku AB (punkt K leży pomiedzy punktami M i B) natomiast punkty L i N leżą na boku AC (punkt L leży pomiedzy punktami N i C). Wykazać, że jeśli $\frac{BK}{KM} = \frac{CL}{LN}$ to ortocentra trójkątów ABC, AKL oraz AMN leżą na jednej prostej.

10. Okrąg o środku S jest dopisany do czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym prosta AC przecina ten okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E i prostopadła do prostej AC przecina proste BS i DS odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że $EP = EQ$.

11. Ośmiokąt wypukły $ABCDEFGH$ wpisany w okrąg jest podstawą ostrosłupa $ABCDEFGHS$. Przekątne AE, BF, CG i DH tego ośmiokąta przecinają się w jednym punkcie. Wykazać, że istnieje przekrój płaszczyzną tego ostrosłupa mający przeciwległe boki równoległe.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x oraz dowolnej liczby całkowitej dodatniej n spełniona jest nierówność

$$x^n + \frac{1}{x^n} - 2 \geqslant n^2 \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right).$$

2. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg spełniony jest warunek $BC = CD$. Niech ω będzie okręgiem o środku w punkcie C stycznym do BD, a I środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABD. Wykazać, że prosta przechodząca przez I i równoległa do AB jest styczna do okręgu ω.

3. Niech R będzie zbiorem liczb wymiernych r, dla których prawdziwe jest następujące zdanie: jeśli x jest liczbą rzeczywistą, dla której $x^2 - rx$ i $x^3 - rx$ są liczbami wymiernymi, to x także jest liczbą wymierną. Udowodnić, że:

a) Jeśli r jest wymierne i $r \geqslant \frac{4}{3}$ lub $r \leqslant 0$, to $r \in R$.

b) Jeśli p, q są różnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi, spełniającymi nierówność $3p < 4q$, to $\frac{p}{q} \notin R$.

4. Dane są liczby całkowite a, b, przy czym b nie jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że $x^2 + ax + b$ jest kwadratem liczby całkowitej jedynie dla skończenie wielu liczb całkowitych x.

5. Trójkąt równoboczny o boku n podzielony został na n^2 komórek będących trójkątami równobocznymi. Niektóre z komórek są zarażone. Co sekundę, wszystkie niezarażone komórki, które sąsiadują bokiem z co najmniej dwoma zarażonymi komórkami, stają się zarażone. Wyznaczyć najmniejszą liczbę komórek, które wystarczy zarazić na początku, żeby po pewnym czasie każda komórka była zarażona, gdy $n = 12$.

6. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω. Punkt P jest środkiem łuku BC okręgu ω zawierającego punkt A. Okrąg o średnicy CP przecina dwusieczną kąta $\angle BAC$ w punktach K i L (punkty A, K, L leżą w tej kolejności na prostej). Ponadto, M jest punktem symetrycznym do L względem prostej BC. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie BKM połowi odcinek BC.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia nierówność $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(f(f(0))) = 0$. Wykazać, że $f(0) = 0$.

Rozwiązanie:

Podstawiając do nierówności danej w zadaniu $x = f(f(0))$ oraz $y = f(0)$ otrzymujemy zależność

$$|f(f(0))| = |f(f(f(0))) - f(f(0))| \leqslant |f(f(0) - f(0)|.$$

Jednocześnie, podstawienie $x = f(0)$ oraz $y = 0$ daje nam $|f(f(0)) - f(0)| \leqslant |f(0)|$, co w połączeniu z poprzednim oszacowaniem implikuje nierówność $|f(f(0))| \leqslant |f(0)|$. Ostatecznie, wstawiając $x = f(f(0))$ oraz $y = 0$ dostajemy $|f(0)| \leqslant |f(f(0))|$. A zatem

$$|f(0)| = |f(f(0)) - f(0)| = |f(f(0))|.$$

Jeżeli $f(0) = f(f(0))$, to natychmiast otrzymujemy $f(0) = f(f(0)) = 0$. Jeśli zaś $f(0) = -f(f(0))$, to $|f(0)| = 2|f(0)|$, a więc i w tym wypadku $f(0) = 0$.

2. Odcinek BD jest dwusieczną kąta $\angle ABC$ w trójkącie ABC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, że jeśli $\angle BDM = 90°$, to zachodzi równość $AB = 3BC$.

Rozwiązanie:

Proste BC i MD nie są równoległe, gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy $\angle ABC = 2\angle DBC = 2\angle BDM = 180°$. Niech zatem N będzie punktem ich przecięcia. Ponieważ $\angle BDM = 90° = \angle BDN$ oraz $\angle DBM = \angle DBN$, to trójkąty BDM i BDN są przystające. W szczególności $DM = DN$ oraz $BM = BN$.

Z twierdzenia Menelausa dla trójkąta BMN i prostej CD dostajemy

$$\frac{DM}{DN} \cdot \frac{CN}{BC} \cdot \frac{AB}{AM} = 1,$$

skąd $BC = 2CN$. W takim razie

$$AB = 2BM = 2BN = 2CN + 2BC = 3BC.$$

3. Na tablicy napisano liczby $1000, 1001, \ldots, 2999$. Ruch polega na wybraniu dwóch liczb a, b znajdujących się w danym momencie na tablicy, zmazaniu ich oraz napisaniu na tablicy liczby $\frac{1}{2}\min(a,b)$. Wykazać, że w wyniku wykonania dowolnych 1999 ruchów na tablicy pozostanie liczba mniejsza niż 1.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że z oczywistej dla $x, y > 0$ nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leqslant \frac{2}{\min(x,y)}$ wynika, że suma odwrotności liczb napisanych na tablicy nie maleje w wyniku wykonania ruchu. Wystarczy więc wykazać, że suma odwrotności początkowego układu liczb jest większa niż 1. Zauważmy jednak, że dla $1 \leqslant k \leqslant 1000$

$$\frac{1}{2000-k}+\frac{1}{2000+k}=\frac{4000}{2000^2-k^2}>\frac{4000}{2000^2}=\frac{1}{1000}.$$

A zatem po dodaniu liczby $\frac{1}{2000}$ i odjęciu liczby $\frac{1}{3000}$ dostajemy, że suma odwrotności początkowego układu wynosi co najmniej $1+\frac{1}{2000}-\frac{1}{3000}>1$ i dowód jest zakończony.

4. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p o następującej własności: istnieje liczba naturalna n, która nie dzieli liczby $p-1$ i taka, że $p|n!+1$.

Rozwiązanie:

Niech $q > 2$ będzie dowolną liczbą pierwszą. Zauważmy, że liczba $(2q)!-1$ daję resztę 3 z dzielenia przez 4. Posiada ona zatem dzielnik pierwszy p, który również jest tej postaci – w przeciwnym razie liczba $(2q)!-1$ dawałaby resztę 1 z dzielenia przez 4. Jeśli wykażemy, że tak wybrana liczba pierwsza p spełnia dany warunek, to zadanie będzie rozwiązane. Rzeczywiście, jeżeli $p_1, p_2, \ldots p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi spełniającymi warunek dany w zadaniu, to biorąc $q > p_1, p_2, \ldots p_k$ dostajemy nową liczbę pierwszą spełniającą tezę, gdyż wszystkie dzielniki $(2q)!-1$ są większe od q. Korzystając z twierdzenia Wilsona otrzymujemy

$$\begin{aligned}-1 &\equiv (p-1)! \equiv (p-2q-1)! \cdot (-2q) \cdot (-2q+1) \cdot (-2q+(2q-1)) \\ &\equiv (p-2q-1)! \cdot (-1)^{2q-1} \cdot (2q)! \equiv -(p-2q-1)! \pmod p,\end{aligned}$$

a zatem $p|n!+1$ dla $n = p-2q-1$. Wystarczy zatem sprawdzić, że tak wybrane n nie jest dzielnikiem liczby $p-1$. Załóżmy przeciwnie, że $p-2q-1|p-1$. Wtedy jednak również $p-2q-1|2q$, a skoro q jest liczbą pierwszą, to dostajemy $p-2q-1 = q$ lub $p-2q-1 = 2$. W pierwszym przypadku otrzymujemy sprzeczność z faktem, iż liczby p i q są nieparzyste, a w drugim z przystawaniem $p \equiv 3 \pmod 4$, gdyż $2q+3 \equiv 2+3 \equiv 1 \pmod 4$. Kończy to rozwiązanie zadania.

5. Dana jest liczba pierwsza p. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych nieujemnych spełniających równanie

$$x^3 + y^3 - 3xy = p - 1.$$

Rozwiązanie:

Dane równanie można przepisać w postaci

$$p = x^3 + y^3 + 1 - 3xy = (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y).$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą oraz $x + y + 1 > 0$ pierwszy lub drugi czynnik rozważanego iloczynu jest równy 1. Jeśli $x+y+1 = 1$, to oczywiście $x = y = 0$, co nie daje rozwiązania. W drugim przypadku, zauważmy, że

$$1 = x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = \frac{1}{2}\left((x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2\right),$$

a zatem $2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2$. Stąd łatwo już widać, że

$$(x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}.$$

Jednakże tylko dla $(x, y) \in \{(0, 1), (1, 0), (2, 2)\}$ wyrażenie $x^3 + y^3 + 1 - 3xy$ jest liczbą pierwszą: $p = 2$ dla pierwszych dwóch par i $p = 5$ dla trzeciej.

Podsumowując dla $p = 2$ istnieją dwie pary spełniające dane równanie: $(x, y) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$ oraz jedna para $(x, y) = (2, 2)$ dla $p = 5$. Dla pozostałych liczb pierwszych p dane równanie nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych.

6. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x + y)(x + z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y + z)(y + x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z + x)(z + y)}} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność $\sqrt{(x + y)(x + z)} \geqslant \sqrt{xy}+\sqrt{xz}$. Rzeczywiście, po podniesieniu do kwadratu i uproszczeniu wyrazów podobnych sprowadza się ona do nierówności $x^2 + yz \geqslant 2\sqrt{x^2yz}$, która wynika wprost z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną. Wykorzystując jeszcze dwa analogiczne oszacowania otrzymujemy

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x + y)(x + z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y + z)(y + x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z + x)(z + y)}}$$

$$\leqslant \frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}} + \frac{y}{y+\sqrt{yz}+\sqrt{yx}} + \frac{z}{z+\sqrt{zx}+\sqrt{zy}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} = 1.$$

7. Na pewnej planecie żyje rasa kosmitów, w której występują trzy różne płcie. *Małżeństwo* to trójka kosmitów, po jednym z każdej płci, wśród których każda para się lubi (jeśli kosmita A lubi kosmitę B to kosmita B lubi kosmitę A). Wiadomo, że na planecie żyje $3n$ kosmitów, po n z każdej płci oraz, że każdy kosmita lubi co najmniej po k kosmitów z każdej płci różnej od jego (gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$). Kosmici chcą utworzyć jak najwięcej różnych małżeństw, przy czym każdy kosmita może należeć co najwyżej do jednego małżeństwa. Udowodnić, że:

- jeżeli n jest liczbą parzystą oraz $k = \frac{n}{2}$, to może nie dać się utworzyć nawet jednego małżeństwa,
- jeżeli $k \geqslant \frac{3n}{4}$, to można utworzyć n rozłącznych małżeństw.

Rozwiązanie:
Niech A, B, C oznaczają n-elementowe zbiory kosmitów danych płci.

- Jeżeli $n = 2k$, to niech A_1, A_2 będą dowolnym podziałem zbioru A na zbiory k-elementowe. Analogicznie definiujemy zbiory B_1, B_2 oraz C_1, C_2. Załóżmy, że dla płci A i B, każdy kosmita należący do zbioru A_i lubi każdego kosmitę należącego do zbioru B_i i po za tym nie lubi już żadnego innego kosmity z płci B. Analogicznie dla płci B i C, zaś dla zbiorów A i C przyjmujemy odwrotnie: każdy kosmita ze zbioru A_1 lubi wszystkich ze zbioru C_2 i nikogo z C_1, a każdy kosmita ze zbioru A_2 lubi wszystkich ze zbioru C_1, ale nikogo z C_2. Wówczas każdy kosmita lubi dokładnie k kosmitów z innych płci, ale nie da się utworzyć żadnego małżeństwa.

- Wykorzystując twierdzenie Halla wykażemy najpierw, że możliwe jest sparowanie kosmitów z płci A i B w taki sposób, aby kosmici w każdej parze lubili się. W tym celu sprawdzimy, że dla grafu dwudzielnego o wierzchołkach ze zbioru $A \cup B$ oraz krawędziach odpowiadających relacji lubienia się, spełniony jest warunek Halla. Niech więc $X \subset A$ będzie dowolnym podzbiorem l-elementowym (gdzie $1 \leqslant l \leqslant n$), a $Y \subset B$ będzie zbiorem wierzchołków połączonych z co najmniej jednym wierzchołkiem z X. Musimy sprawdzić, że do zbioru Y należy co najmniej l elementów. Załóżmy więc przeciwnie. Wówczas istnieje element $b \in B$ nie należący do Y. Z jednej strony, połączony jest on krawędzią co najmniej z $\frac{3n}{4}$

elementami z A, a z drugiej nie jest połączony z żadnym wierzchołkiem z X. Stąd $l \leqslant \frac{n}{4}$. To oznacza jednak sprzeczność, gdyż dowolny wierzchołek z X zna co najmniej $\frac{3n}{4}$ elementów z l, a zatem $\frac{3n}{4} \leqslant |Y| \leqslant \frac{n}{4} - 1$, co oczywiście jest niemożliwe. Udowodniliśmy zatem, że istnieje żądane sparowanie dla zbiorów A i B.

Rozważmy teraz graf dwudzielny, którego jedną grupą wierzchołków stanowią pary wierzchołków z A i B utworzone w poprzedniej części rozumowania, a drugą wierzchołki zbioru C. Parę (a, b) i wierzchołek $c \in C$ łączymy krawędzią, jeśli c lubi a oraz b. Jeśli wykażemy, że w tak zdefiniowanym grafie dwudzielnym możliwe jest sparowanie wierzchołków tak, aby w każdej parze występowały dwa wierzchołki połączone krawędzią, to zadanie będzie rozwiązane. W tym celu ponownie wykorzystamy twierdzenie Halla.

Niech zatem $X \subset A \times B$ będzie l-elementowym zbiorem par, a $Y \subset C$ niech będzie zbiorem wierzchołków, które są połączone krawędzią z przynajmniej jednym wierzchołkiem ze zbioru X. Podobnie jak poprzednio, dla dowodu niewprost załóżmy, że nie jest spełniony warunek Halla, czyli, że zbiór Y posiada co najwyżej $l - 1$ elementów. Istnieje więc $c \in C \setminus Y$. Skoro c lubi co najmniej $\frac{3n}{4}$ elementów z A i co najmniej $\frac{3n}{4}$ elementów z B, to jest on połączony krawędzią z co najmniej $\frac{n}{2}$ parami utworzonymi w poprzedniej części rozumowania. A zatem $l \leqslant \frac{n}{2}$. Z drugiej jednak strony, na podobnej zasadzie łatwo zauważyć, że dowolny wierzchołek z X połączony jest krawędzią z co najmniej $\frac{n}{2}$ wierzchołkami z C i stąd $|Y| \geqslant \frac{n}{2}$. Tym samym $\frac{n}{2} \geqslant l > |Y| \geqslant \frac{n}{2}$. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

8. Okrąg wpisany w trójkąt ABC, gdzie $AB \neq AC$, jest styczny do boku BC w punkcie K, zaś M to środek wysokości AD. Odcinek KM przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punkcie $N \neq K$. Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie BCN jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Rozwiązanie:

Niech I będzie środkiem okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC, zaś I_A środkiem okręgu ω_A dopisanego do tego trójkąta, stycznego do boku BC w punkcie L. Poprowadźmy prostą ℓ styczną do okręgu ω_A w punkcie K', równoległą do prostej BC i różną od niej. Jednokładność o środku A przekształcająca okrąg ω na okrąg ω_A przeprowadza punkt K na punkt K'. W takim razie punkty A, K i K' są współliniowe. Odcinki AD i $K'L$ są równoległe, a więc istnieje jednokładność o środku K przekształcająca pierwszy z nich na drugi. Ta sama jednokładność przekształca środek AD na środek $K'L$, czyli punkt M na I_A. W takim razie punkt I_A leży na prostej KM.

Niech T będzie punktem przecięcia prostej BC ze styczną do okręgu ω w punkcie N, zaś S środkiem odcinka KN. Trójkąty prostokątne TNI i TSN mające dodatkowo wspólny kąt przy wierzchołku T są podobne, skąd $TI \cdot TS = TN^2$. Ponadto $\angle ISI_A = \angle ISK = 90^\circ$, co wraz z zależnościami $\angle IBI_A = 90^\circ$ i $\angle ICI_A = 90^\circ$ dowodzi, że punkty B, I_A, C, S oraz I leżą na jednym okręgu. W takim razie

$$TB \cdot TC = TI \cdot TS = TN^2.$$

Zatem prosta TN jest styczna również do okręgu opisanego na trójkącie BCN w punkcie N, a to kończy rozwiązanie zadania.

9. Dane jest $n \geqslant 1$ punktów na okręgu. Niektóre z nich są połączone odcinkami, przy czym żadne dwa odcinki nie przecinają się we wnętrzu okręgu. Udowodnić, że wszystkie punkty można pomalować trzema kolorami w taki sposób, aby każde dwa punkty połączone odcinkiem miały różne kolory.

Rozwiązanie:

Tezę udowodnimy indukcyjnie po n. Dla $n = 1, 2, 3$ nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że teza zadania jest prawdziwa dla $n \geqslant 3$ i wykażmy ją dla $n+1$. Oznaczmy dane punkty przez $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$. Zauważmy, że jeśli narysowano wyłącznie odcinki postaci A_iA_{i+1} dla $i = 1, 2, \ldots, n+1$ (przyjmujemy, że $A_{n+2} = A_1$), to punkty można pokolorować naprzemiennie dwoma kolorami i wówczas żądany warunek jest spełniony. W innym wypadku połączono odcinkiem pewną niekolejną parę punktów (A_i, A_j). Wówczas odcinek A_iA_j dzieli koło na dwa obszary, z których oba zawierają nie więcej niż n danych punktów. Co więcej, wszystkie narysowane odcinki są zawarte w jednym z tych dwóch obszarów, gdyż inaczej pewien odcinek przeciąłby odcinek A_iA_j we wnętrzu. Możemy więc skorzystać z założenia indukcyjnego i pokolorować punkty w obrębie każdego obszaru tak aby był spełniony żądany warunek. Pozostaje zauważyć, że zmieniając ewentualnie nazwy kolorów, można założyć, że w obu kolorowaniach punkty A_i, A_j pokolorowane zostały tym samym kolorem. Otrzymaliśmy tym samym żądane kolorowanie dla całego układu $n+1$ punktów i dowód indukcyjny jest zakończony.

10. Udowodnić, że dla dodatnich liczb całkowitych x, y liczba

$$4xy - x - y$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że istnieje taka liczba całkowita n, że $4xy - x - y = n^2$. Wówczas $(4x-1)(4y-1) = (2n)^2 + 1$. Istnieje taka liczba pierwsza p, że $p|4x-1$ oraz

$p \equiv 3 \pmod 4$, gdyż w innym wypadku mielibyśmy $4x - 1 \equiv 1 \pmod 4$. A zatem

$$(2n)^2 \equiv -1 \pmod p.$$

Podnosząc tą kongruencję do nieparzystej potęgi $\frac{p-1}{2}$ i korzystając z małego twierdzenia Fermata otrzymujemy

$$1 \equiv (2n)^{p-1} \equiv ((2n)^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1 \pmod p,$$

skąd $p = 2$, co jednak przeczy temu, że $p \equiv 3 \pmod 4$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $4xy - x - y$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

11. W czworościanie $ABCD$ suma pól ścian ABC i ABD jest równa sumie pól ścian BCD i ACD. Dowieść, że środek sfery wpisanej w ten czworościan oraz środki krawędzi BC, BD, AD, AC leżą na jednej płaszczyźnie.

Rozwiązanie:

Niech P będzie punktem przecięcia płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego przy krawędzi AB z krawędzią CD. Wówczas odległości punktu P od płaszczyzn ABC i ABD są równe (oznaczmy ich wspólną wartość przez x). Środek I sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ należy do płaszczyzny ABP. W takim razie prosta PI przecina odcinek AB w pewnym punkcie Q. Niech ponadto r oznacza promień sfery wpisanej w czworościan $ABCD$. Wykorzystując warunek o sumie pól dany w treści zadania dostajemy

$$V(ABCD) = V(ABCI) + V(BCDI) + V(CDAI) + V(DABI) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot r \cdot ([ABC] + [BCD] + [CAD] + [DAB]) = \frac{2}{3} \cdot r \cdot ([ABC] + [ABD]).$$

Z drugiej strony

$$V(ABCD) = V(ABCP) + V(ABDP) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot ([ABC] + [ABD]).$$

Te dwie zależności prowadzą do wniosku, że $x = 2r$.

Wysokości czworościanów $ABCI$ i $ABCP$ poprowadzone na płaszczyznę ABC są równoległe. Z twierdzenia Talesa wynika więc, że

$$\frac{PQ}{IQ} = \frac{x}{r} = 2,$$

czyli punkt I jest środkiem odcinka PQ.

Umieśćmy czworościan $ABCD$ w prostokątnym układzie współrzędnych w ten sposób, że punkty A i B mają współrzędną z-tową równą 0, zaś punkty C i D mają współrzędną z-tową równą t (gdzie t jest pewną liczbą rzeczywistą). Zauważmy, że jeśli punkt X leży na prostej AB, zaś punkt Y na prostej CD, to środek odcinka XY ma współrzędną z-tową równą $\frac{t}{2}$. W takim razie ta uwaga stosuje się zarówno do punktu I, jak i środków krawędzi BC, BD, AD i AC. Punkty te leżą więc na jednej płaszczyźnie $z = \frac{t}{2}$.

12. Dla danej liczby rzeczywistej x definiujemy ciąg $(x_n)_{n\geqslant 1}$ rekurencyjnie jako

$$x_1 = x \quad \text{oraz} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n} \quad \text{dla } n \geqslant 1,$$

przy czym jeśli dla pewnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $x_n = \pm 1$, to ciąg kończy się na n-tym wyrazie. Wyznaczyć liczbę takich ciągów, które kończą się dokładnie na ósmym wyrazie.

Rozwiązanie:

Niech $x_1 = x = \operatorname{tg}\alpha$ dla pewnego $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wówczas

$$x_2 = \frac{1}{1-x_1} - \frac{1}{1+x_1} = \frac{2x_1}{1-x_1^2} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha,$$

ze wzoru na tangens kąta podwojonego. Postępując podobnie widzimy tym samym, że $x_n = \operatorname{tg}2^{n-1}\alpha$, dla dowolnego $n \geqslant 1$. Jeśli więc ciąg się kończy na ósmym wyrazie, to

$$x_8 = \operatorname{tg}128\alpha = \pm 1,$$

a stąd $128\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$ lub po prostu $\alpha = \pi\left(\pm\frac{1}{512} + \frac{k}{128}\right)$. Nietrudno sprawdzić, że $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in [-64, 63]$. Biorąc pod uwagę wybór znaku, daje to łącznie 256 możliwości na pierwszy wyraz ciągu. Pozostaje sprawdzić, że w żadnym z tych przypadków ciąg nie kończy się wcześniej. Gdyby tak bowiem było, to wówczas

$$\pi\left(\pm\frac{1}{512} + \frac{k}{128}\right) = \pi\left(\pm\frac{1}{2^{r+2}} + m\right),$$

dla pewnych liczb całkowitych m, r takich, że $0 < r < 7$. Jednak wtedy $\pm 1 + 4k = \pm 2^{7-r} + 2^9 m$, co jest niemożliwe, gdyż lewa strona jest liczbą nieparzystą, zaś prawa parzystą. Oznacza to, że każdy z otrzymanych 256 ciągów kończy się na dokładnie ósmym wyrazie.

13. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ leży punkt E, dla którego

$$\angle ADE + \angle BCE \geqslant 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \angle CBE + \angle DAE \geqslant 90^\circ.$$

Drugi punkt przecięcia okręgów opisanych na trójkątach BCE i ADE leży wewnątrz tego czworokąta. Dowieść, że jeśli M i N są środkami boków AB i CD, to $AB + CD \geqslant 2MN$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez F punkt przecięcia okręgów opisanych na trójkątach BCE i ADE. Możemy przyjąć bez straty dla ogólności, że punkty B, E, F, C leżą na okręgu w tej właśnie kolejności. Wówczas

$$\angle AFB = \angle AFE + \angle BFE = \angle ADE + \angle BCE \geqslant 90^\circ$$

oraz

$$\angle CFE = 360^\circ - \angle CFE - \angle DFE = (180^\circ - \angle CFE) + (180^\circ - \angle DFE)$$

$$= \angle CBE + \angle DAE \geqslant 90^\circ.$$

Z powyższych zależności wynika, że punkt F leży wewnątrz okręgów o średnicach AB i CD, a więc $AM \geqslant FM$ i $CN \geqslant FN$. To w połączeniu z nierównością trójkąta dla trójkąta FMN (być może zdegenerowanego do odcinka MN) daje

$$AB + CD = 2AM + 2AN \geqslant 2FM + 2FN \geqslant 2MN.$$

14. Pan Stefan posiada m biszkoptów i n krakersów, przy czym waga każdego z nich, wyrażona w gramach, jest liczbą całkowitą dodatnią. Wiadomo, że każdy biszkopt waży nie więcej niż n gramów, zaś każdy krakers – nie więcej niż m gramów. Udowodnić, że Pan Stefan może wybrać niepuste podzbiory biszkoptów i krakersów o takiej samej wadze.

Rozwiązanie:

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_m \leqslant n$ będą wagami biszkoptów, a $b_1, b_2, \ldots, b_n \leqslant m$ wagami krakersów. Dla $k = 1, 2, \ldots, m$ niech $A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ i podobnie $B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Przyjmijmy ponadto $A_0 = B_0 = 0$. Jeśli $A_m = B_n$, to nie ma czego dowodzić, załóżmy więc bez straty ogólności, że $A_m < B_n$. Dla dowolnego $1 \leqslant k \leqslant m$ mamy zatem $A_k - B_0 > 0$ oraz $A_k - B_n < 0$. Możemy więc określić

$$f(k) = \min\{A_k - B_i : A_k - B_i \geqslant 0, 0 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Innymi słowy, $f(k)$ jest minimalną wartością nieujemną jaką przyjmuje wyrażenie postaci $A_k - B_i$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$. Z ograniczenia $b_i \leqslant m$ wynika oszacowanie $f(k) \leqslant m - 1$ dla dowolnego $1 \leqslant k \leqslant m$. Jeśli istnieje takie k, że $f(k) = 0$, to teza zadania jest spełniona. W przeciwnym razie z zasady szufladkowej Dirichleta wynika istnienie liczb $k < l$ takich, że $f(k) = f(l)$. Niech $s < t$ będą takie, że $f(k) = A_k - B_s$ oraz $f(l) = A_l - B_t$. Wówczas

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l = b_{s+1} + b_{s+2} + \ldots + b_t,$$

co kończy dowód.

15. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełnia równanie

$$f(f(x)) = x^2 - 2013.$$

Rozwiązanie:

Niech $g(x) = x^2 - 2013$. W rozwiązaniu wykorzystamy następujące własności funkcji g, które można łatwo zweryfikować bezpośredni rachunkiem: funkcja $g(x)$ ma dwa różne punkty stałe a i b, zaś funkcja $g(g(x))$ ma cztery różne punkty stałe: a, b, c, d, przy czym $g(c) = d$ oraz $g(d) = c$.

Załóżmy zatem, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia $f \circ f = g$. Zauważmy, że wówczas

$$g(f(a)) = f(f(f(a))) = f(g(a)) = f(a),$$

czyli $f(a)$ jest punktem stałym funkcji g, co oznacza, że $f(a) \in \{a, b\}$. Analogicznie uzyskujemy $f(b) \in \{a, b\}$. Podobnie

$$g(g(f(c)) = f(f(f(f(f(c))))) = f(g(g(c))) = f(c),$$

czyli $f(c) \in \{a, b, c, d\}$. W ten sam sposób dowodzimy, że $f(d) \in \{a, b, c, d\}$.

Rozpatrzymy po kolei wszystkie możliwe wartości $f(c)$ i w ten sposób doprowadzimy rozumowanie do sprzeczności. Jeśli $f(c) = a$, to

$$d = g(c) = f(f(c)) = f(a),$$

ale to jest niemożliwe, gdyż $f(a) \in \{a, b\}$. Z tych samych powodów $f(c) \neq b$. Jasne jest również, że $f(c) \neq c$, gdyż w przeciwnym wypadku $g(c) = f(f(c)) = f(c) = c$, a c nie jest punktem stałym funkcji g. Pozostał do rozpatrzenia przypadek $f(c) = d$. Wtedy jednak

$$d = g(c) = f(f(c)) = f(d),$$

a to znowu prowadzi do sprzeczności, gdyż wówczas $g(d) = f(f(d)) = f(d) = d$. Kończy to rozwiązanie zadania.

16. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieje dokładnie jedna liczba całkowita $0 \leqslant x < n!$ spełniająca

$$n! | x^n + 1.$$

Rozwiązanie:

Wykażemy, że zbiór liczb naturalnych n spełniających warunek dany w zadaniu, to zbiór wszystkich liczb pierwszych p.

Udowodnimy najpierw, że jeśli istnieje dokładnie jedno $1 \leqslant x < n!$, dla którego $n!|x^n + 1$, to n jest liczbą pierwszą. Załóżmy bowiem przeciwnie. Jeśli $n > 2$ jest liczbą parzystą, to z jednej strony $4|n!$, a z drugiej $4 \not| x^2 + 1$ dla dowolnej liczby całkowitej x, gdyż kwadraty liczb całkowitych dają resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 4. Przeczy to temu, że $n!|x^n + 1$ dla pewnego x, a zatem n jest liczbą nieparzystą. Skoro n jest liczbą złożoną, to $n|(n-1)!$, a więc również $n!|((n-1)!)^2$. Ponieważ $2 \not| n$ zachodzi podzielność $n!|(n!-1)^n + 1$. Ale do tego

$$((n-1)!-1)^n + 1 = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} ((n-1)!)^k\right) + 1$$

$$= A(n-1)!^2 - \binom{n}{1}(n-1)! = A(n-1)!^2 - n!,$$

dla pewnego $A \in \mathbb{Z}$. Wynika stąd, że liczba $x = (n-1)! - 1$ również spełnia warunek $n!|x^n + 1$. Wskazaliśmy dwie różne liczby całkowite $1 \leqslant x < n!$ spełniające daną podzielność, a zatem liczby złożone n nie są rozwiązaniem zadania.

Oczywiście $n = 2$ spełnia warunki zadania. Załóżmy więc, że $n = q > 2$ jest liczbą pierwszą i rozważmy rozkład $n! = q \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ na czynniki pierwsze. Wystarczy wykazać, że każda z kongruencji

$$x^q \equiv -1 \pmod{q}, \qquad x^q \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant k,$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie, gdyż wówczas z chińskiego twierdzenia o resztach wynika istnienie dokładnie jednego rozwiązania kongruencji $x^q \equiv -1 \pmod{n!}$. W przypadku pierwszej z nich jest to oczywiste, gdyż z małego twierdzenia Fermata $x^q \equiv x$, a więc jedynym rozwiązaniem jest $x \equiv -1 \pmod{q}$. Ustalmy zatem $1 \leqslant i \leqslant k$. Oczywiście $q > p_i$, a więc q jest względnie pierwsze z liczbami p_i oraz $p_i - 1$. W szczególności q jest względnie pierwsze również z $\varphi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)$. Istnieją więc liczby całkowite s, t takie, że $sq + t\varphi(p_i^{\alpha_i}) = 1$. Załóżmy teraz, że liczba całkowita x z przedziału $[0, p_i^{\alpha_i})$ spełnia warunek $x^q \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Oczywiście x nie dzieli się przez p_i. Możemy zatem podnieść daną kongruencję do potęgi s i skorzystać z twierdzenia Eulera otrzymując

$$(-1)^s \equiv x^{sq} \equiv x^{1 - t\varphi(p_i^{\alpha_i})} \equiv x \pmod{p_i^{\alpha_i}},$$

co daje $x \equiv \pm 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Jednak gdy $x \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, to $x^q + 1 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, gdyż $n > 2$. A zatem $x \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ stanowi jedyne rozwiązanie rozważanej kongruencji. Kończy to dowód.

17. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, y, z, t spełniające jednocześnie równania

$$x^2 + 6y^2 = z^2, \qquad 6x^2 + y^2 = t^2.$$

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $x = y = z = t = 0$ jest jedynym rozwiązaniem danego układu równań. Po dodaniu równań stronami otrzymujemy zależność

$$7(x^2 + y^2) = z^2 + t^2.$$

Kwadraty liczb całkowitych dają resztę $0, 1, 2$ lub 4 z dzielenia przez 7. W szczególności, skoro $7 | z^2 + t^2$, to $7 | z$ i $7 | t$. Niech zatem $z = 7z_1$ oraz $t = 7t_1$ dla pewnych $z_1, t_1 \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$x^2 + y^2 = 7(z_1^2 + t_1^2),$$

a więc z tych samych powodów co wcześniej $x = 7x_1$ i $y = 7y_1$ dla pewnych x_1, y_1 całkowitych. Powtarzając wielokrotnie to samo rozumowanie dochodzimy do wniosku, że liczby x, y, z, t dzielą się przez dowolnie wysoką potęgę liczby 7, co dowodzi, że $x = z = t = y = 0$.

18. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leqslant \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} \sum_{i<j} a_i a_j.$$

Rozwiązanie:

Daną nierówność możemy przepisać w postaci

$$\left(\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \leqslant \frac{n}{2} \sum_{i<j} a_i a_j$$

albo

$$(*) \qquad \left(\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \left(\sum_{k \neq i,\, k \neq j} a_k \right) \right) \leqslant \frac{n-2}{2} \sum_{i<j} a_i a_j.$$

Dla dowolnych indeksów i, j, k mamy

$$\frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \cdot a_k \leqslant \frac{\frac{1}{4}(a_i + a_j)^2 \cdot a_k}{a_i + a_j} = \frac{1}{4}(a_i a_k + a_j a_k).$$

Dla ustalonych i, j dodajemy powyższe nierówności stronami po wszystkich $k \neq i$ oraz $k \neq j$, a następnie sumujemy otrzymane zależności po wszystkich parach (i, j). Jest jasne, że lewa strona otrzymanego wyrażenia jest równa lewej stronie zależności $(*)$. Aby się przekonać, że tak samo jest z prawymi stronami, zauważmy, że wyraz $a_i a_k$ wystąpi ze współczynnikiem $\frac{1}{4}$ w $n-2$ trójkach postaci (a_i, a_j, a_k) dla $j \neq i$ oraz $j \neq k$ oraz w $n-2$ trójkach postaci (a_k, a_j, a_i) dla $j \neq i$ oraz $j \neq k$. Dowodzi to żądanej nierówności.

19. Odcinki AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Niech o_A, o_B i o_C będą okręgami dopisanymi do tego trójkąta, stycznymi odpowiednio do boków BC, CA i AB. Prosta ℓ_A jest wspólną styczną zewnętrzną okręgów o_B, o_C różną od BC, proste ℓ_B i ℓ_C definiujemy analogicznie. Punkty A', B', C' to odpowiednio punkty przecięcia prostych ℓ_B i ℓ_C, ℓ_C i ℓ_A oraz ℓ_A i ℓ_B. Wykazać, że proste $A'D$, $B'E$ i $C'F$ przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech B_1 będzie punktem przecięcia prostych ℓ_A i AB, zaś C_1 — punktem przecięcia prostych ℓ_A i AC. Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku A trójkąta ABC przechodzi przez środki okręgów o_B i o_C. Wynika stąd, że symetria względem niej przekształca prostą ℓ_A na prostą BC, zaś punkty B_1 i C_1 odpowiednio na punkty C i B. Zatem $\angle AB_1C_1 = \angle ACB = \angle AFE$ (bowiem na czworokącie $BCEF$ można opisać okrąg). To zaś oznacza, że proste ℓ_A i EF są równoległe.

Analogicznie dowodzimy, że proste ℓ_B i DF są równoległe oraz, że proste ℓ_C i DE są równoległe. W takim razie trójkąt $A'B'C'$ (wyznaczony przez proste ℓ_A, ℓ_B i ℓ_C) oraz trójkąt DEF są jednokładne. Proste $A'D$, $B'E$ i $C'F$ przecinają się więc w jednym punkcie będącym środkiem jednokładności tych trójkątów.

20. Dany jest zbiór S szesnastu punktów w przestrzeni, z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Każdy punkt ze zbioru S został pomalowany na jeden z czterech kolorów, przy czym każdy kolor został użyty dokładnie cztery razy. Pewien punkt przestrzeni $O \notin S$ leży we wnętrzu lub na brzegu dowolnego czworościanu o wierzchołkach jednakowego koloru ze zbioru S. Udowodnić, że istnieją cztery punkty w zbiorze S o parami różnych kolorach, które wyznaczają czworościan zawierający punkt O w swoim wnętrzu lub na brzegu.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu punkty przestrzeni $\mathbb{R}^3$ będziemy oznaczać małymi literami alfabetu. Odległość pomiędzy punktem przestrzeni x oraz czworościanem T będziemy rozumieć jako minimalną możliwą odległość pomiędzy x i punktem zbioru T. W dalszej części rozumowania będziemy ją oznaczać przez $d(x, T)$. Zauważmy, że istnieje dokładnie jeden taki punkt $z \in T$, że $d(x, T) = |xz|$. Istotnie, jeśli $z_1 \neq z_2$ byłyby dwoma punktami czworościanu T o tej własności, to odległość pomiędzy środkiem odcinka $z_1 z_2$ oraz punktem x byłaby mniejsza niż $d(x, T)$, co przeczyłoby minimalności. Dokonajmy jeszcze następującego spostrzeżenia: jeśli $z \in T$ jest takim punktem, że $d(x, T) = |xz|$, to wszystkie kąty postaci $\angle xzy$, gdzie $y \in T, y \neq z$ są nieostre. Istotnie, gdyby dla pewnego $y \in T$ kąt $\angle xzy$ był ostry, to w bliskim otoczeniu punktu z na odcinku yz (zawartym w czworościanie T) znaleźlibyśmy punkt położony bliżej x, co znowu przeczy minalności.

Przechodzimy do głównej części rozumowania. Dla dowodu niewprost załóżmy, że nie istnieje czworościan o różnokolorowych wierzchołkach w zbiorze S, który zawiera x. Ze wszystkich takich czworościanów wybierzmy taki czworościan T, dla którego odległość $d(x, T)$ jest minimalna. Niech więc $z \in T$ będzie taki, że $d(x, T) = |xz|$ i przez H oznaczmy płaszczyznę prostopadłą do prostej xz i przechodzącą przez z. Mamy następujące możliwości:

- punkt z leży na wewnątrz pewnej ściany czworościanu T. Wówczas płaszczyzna wyznaczona przez tą ścianę pokrywa się z H. W przeciwnym razie na mocy początkowego spostrzeżenia odległość $|xz|$ nie byłaby minimalna.

- punkt z leży wewnątrz pewnej krawędzi czworościanu T. Z analogicznych powodów jak wyżej, H zawiera tą krawędź.

- punkt z jest pewnym wierzchołkiem czworościanu T.

Płaszczyzna H dzieli przestrzeń na dwie domknięte półprzestrzenie, które oznaczmy przez H^+ i H^-. Załóżmy przy tym, że $x \in H^+$. Zauważmy teraz, że $T \in H^-$. Istotnie, gdyby $y \in T$ leżał w otwartej półprzestrzeni H^+ to kąt $\angle xzy$ byłby ostry, co przeczyłoby spostrzeżeniu z początku rozwiązania. Ponieważ T jest niezdegenerowanym czworościanem istnieje $y \in T$ taki, że $y \notin H$. Załóżmy, że kolor punktu y to kolor czerwony. Ponieważ czworościan o czerwonych wierzchołkach zawiera punkt x w swoim wnętrzu lub na swoim brzegu, nie może być on w całości zawarty w domkniętej półprzestrzeni H^-. Istnieje więc czerwony punkt $y' \in S$, który należy do otwartej półprzestrzeni H^+. Jeśli teraz rozważymy czworościan T', którego wierzchołki stanowią wierzchołki T z y' zamiast y, to wówczas jest to czworościan o wierzchołkach w różnych kolorach, który spełnia warunek $d(x, T') < d(x, T)$. Istotnie, $z \in T'$ oraz kąt $\angle xzy'$ jest ostry. Jest to sprzeczność z minimalnością T, która kończy dowód.

21. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC, przy czym $AE = BD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AD i BE. Okręgi opisane na trójkątach ACD i BEC przecinają się w punktach C i S. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu S odpowiednio na proste BC i AC. Udowodnić, że punkty P, Q, M, N leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Na czworokątach $ASDC$ i $BSEC$ można opisać okręgi, zatem

$$\angle EAS = \angle CAS = 180^\circ - \angle CDS = \angle BDS$$

oraz

$$\angle AES = 180^\circ - \angle CES = \angle CBS = \angle DBS.$$

Stąd i z równości $AE = BD$ wynika, że trójkąty AES i DBS są przystające. W takim razie $AS = DS$ i $BS = ES$, skąd wniosek, że punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu S na proste AD i BE. Punkty P, Q, M leżą więc na prostej Simsona punktu S dla trójkąta ACD, zaś punkty P, Q, N leżą na prostej Simsona punktu S dla trójkąta BEC. To kończy rozwiązanie zadania.

22. Dane są 3 stosy, na których znajduje się odpowiednio 5, 49 i 51 monet. Dozwolone operacje polegają na połączeniu dwóch stosów w jeden oraz na podzieleniu stosu o parzystej liczbie monet na dwa o jednakowej wielkości. Rozstrzygnąć czy za pomocą takich operacji można otrzymać 105 stosów, z których każdy składa się z jednej monety.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeśli po dokonaniu pewnego ciągu operacji dojdziemy do sytuacji, w której istnieje liczba pierwsza $p > 2$ dzieląca liczbę monet na dowolnym stosie, to nie uzyskamy 105 stosów, z których każda się z 1 monety. Wynika to z faktu, że dzielenie stosu na dwie części i łączenie dwóch stosów w jeden nie wpłynie na podzielność przez p, a więc niezależnie od wykonywanych operacji wszystkie liczności stosów będą zawsze dzielić się przez p. Ponieważ początkowy układ składa się z 3 liczb nieparzystych, w pierwszym ruchu musimy połączyć dwa stosy w jeden. Możemy otrzymać następujące dwójki liczb: $\{54, 51\}$, $\{5, 100\}$, $\{49, 56\}$. Pozostaje zauważyć, że dla pierwszej dwójki $p = 3$, dla drugiej $p = 5$, a dla trzeciej $p = 7$ spełnia opisany warunek. Wykazaliśmy w ten sposób, że za pomocą skończonego ciągu danych operacji nie można uzyskać 105 stosów, z których każdy składa się z 1 monety.

23. Dowieść, że dowolną liczbę całkowitą n można przedstawić w postaci

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm k^2,$$

dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k i pewnego wyboru znaków.

Rozwiązanie:

Jeżeli liczba całkowita n może być przedstawiona w żądanej postaci, to odwrócenie wszystkich znaków w jej przedstawieniu daje przedstawienie dla liczby $-n$. Tezę wystarczy więc wykazać dla liczb całkowitych nieujemnych. Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej k prawdziwa jest tożsamość

$$(k+1)^2 - (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2 = 4.$$

Jeśli zatem mamy przedstawienie $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm k^2$, to

$$n + 4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm k^2 + (k+1)^2 - (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2.$$

Do rozwiązania zadania wystarczy więc podać żądane przedstawienie dla liczb $0, 1, 2, 3$ i skorzystać z indukcji matematycznej. Zauważmy, że

$$0 = -1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2$$

$$1 = 1^2,\ 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2,\ 3 = -1^2 + 2^2,$$

co kończy dowód.

24. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia większego niż 1 o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych k, dla których wielomian $P(x) + k$ jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Wykażemy, że jeśli $k = p - a_0$, gdzie p jest taką liczbą pierwszą, że $p > |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1|$, to wielomian $P(x) + k$ jest nierozkładalny. W oczywisty sposób dowiedzie to tezy zadania. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że dla tak wybranego k istnieją niestałe wielomiany $F(x)$ i $G(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla których $P(x) = F(x) \cdot G(x)$. Wówczas

$$p = P(0) = F(0)G(0).$$

Skoro $F(0), G(0) \in \mathbb{Z}$, to jedna z tych liczb na moduł jest równa 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $|F(0)| = 1$ i niech $z_1, z_2, \ldots, z_k$ będą wszystkimi pierwiastkami zespolonymi wielomianu F. Skoro $1 = |F(0)| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_k|$, to moduł pewnego pierwiastka z wielomianu F nie przekracza 1. Jasne jest jednak, że z jest również pierwiastkiem wielomianu $P(x) + k$. W szczególności

$$p = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z| \leqslant |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \ldots + |a_1||z|$$

$$\leqslant |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| < p.$$

Otrzymana sprzeczność pokazuje, że wielomian $P(x) + k$ jest nierozkładalny. Kończy to rozwiązanie zadania.

25. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, które spełniają równanie

$$19f(x) - 17f(f(x)) = 2x,$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełnia dane równanie i niech $g(x) = x - f(x)$. Z warunku danego w zadaniu wynika wówczas równość

$$17g(f(x)) = 2g(x),$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}$. Przez $f^{(n)}(x)$ oznaczymy n-krotne złożenie funkcji f w punkcie x. Dla ustalonego $x \in \mathbb{Z}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy zatem

$$g(f^{(n)}(x)) = \left(\frac{2}{17}\right) g(f^{(n-1)}(x)) = \left(\frac{2}{17}\right)^2 g(f^{(n-2)}(x)) = \ldots = \left(\frac{2}{17}\right)^n g(x).$$

W szczególności, skoro dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $g(f^{(n)})(x) \in \mathbb{Z}$, to również $17^n | g(x)$ dla dowolnego n. Stąd $g(x) = 0$. Ponieważ x było wybrane dowolnie otrzymujemy, że $f(x) = x$ dla każdej liczby całkowitej x.

26. Wykazać, że dla liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$1 \leqslant \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leqslant n - 1.$$

Rozwiązanie:

Daną nierówność możemy przepisać w równoważnej postaci

$$1 \leqslant \frac{1}{1 + \frac{x_2x_3}{x_1^2}} + \frac{1}{1 + \frac{x_3x_4}{x_2^2}} + \ldots + \frac{1}{1 + \frac{x_1x_2}{x_n^2}} \leqslant n - 1.$$

Podstawiając $a_i = \frac{x_{i+1}x_{i+2}}{x_i^2}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ dostajemy

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + a_i} \leqslant n - 1, \quad \text{gdzie } a_1a_2 \ldots a_n = 1.$$

Z warunku $a_1a_2 \ldots a_n = 1$ wynika, że istnieją takie liczby dodatnie k_1, k_2, $\ldots$, k_n, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi równość $a_i = \frac{k_i}{k_{i+1}}$. Dana nierówność przyjmuje teraz postać

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{k_i + k_{i+1}} \leqslant n - 1.$$

Lewe oszacowanie wynika natychmiast z nierówności

$$\frac{k_i}{k_i + k_{i+1}} \geqslant \frac{k_i}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

W celu udowodnienia prawego oszacowania zauważmy, że

$$\frac{k_i}{k_i + k_{i+1}} = 1 - \frac{k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}}.$$

Wówczas możemy przepisać daną nierówność w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} -\frac{k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}} \leqslant -1,$$

co jest natychmiastową konsekwencją lewego oszacowania.

27. Trójkąt ABC jest zawarty wewnątrz środkowo-symetrycznego wielokąta wypukłego W. Dla danego punktu P, leżącego wewnątrz trójkąta ABC, niech A', B', C' oznaczają odpowiednio odbicia symetryczne względem P punktów A, B, C. Dowieść, że co najmniej jeden z punktów A', B', C' leży wewnątrz lub na brzegu wielokąta W.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez S środek symetrii wielokąta W. Nietrudno zauważyć, że niezależnie od położenia punktu S, trójkąty ABS, BCS, CAS pokrywają łącznie trójkąt ABC. W szczególności, punkt P należy do jednego z tych trójkątów – przyjmijmy, że jest to trójkąt ABS. Niech A'' i B'' oznaczają punkty symetryczne odpowiednio do A i B względem S. Oczywiście $A'', B'' \in W$, gdyż wielokąt W jest symetryczny względem S. Ponieważ W jest wypukły, cały równoległobok $ABA''B''$ zawiera się w W.

Niech M będzie środkiem boku AB. Skoro P należy do trójkąta ABS, to należy on również do jednego z trójkątów AMS lub BMS. Przyjmijmy bez straty ogólności, że należy on do trójkąta AMS. Obrazem trójkąta AMS w jednokładności o środku w punkcie A i skali 2 jest trójkąt ABA''. Obrazem punktu P w tej jednokładności jest oczywiście punkt A'. Punkt A' należy więc do równoległoboku $ABA''B''$, który zawiera się w W. Kończy to dowód.

28. Dany jest graf o n wierzchołkach posiadający k krawędzi o długościach będących różnymi liczbami całkowitymi od 1 do k. Udowodnić, że istnieje w nim ścieżka składająca się z co najmniej $\frac{2k}{n}$ krawędzi, których długości tworzą ciąg rosnący.

Rozwiązanie:

W każdym wierzchołku danego grafu umieśćmy pająka i wprowadźmy następującą operację: wybieramy dowolną krawędź e, a następnie zamieniamy miejscami pająki zajmujące połączone nią wierzchołki. Wykonajmy tak zdefiniowaną operację pokolei dla krawędzi o długościach $1, 2, \ldots, k$. Podczas jednej operacji poruszają się dokładnie 2 pająki, wszystkich operacji wykonaliśmy k, a zatem łącznie pająki przemieściły się $2k$ razy. Ponieważ jest n pająków, to z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewien pająk poruszył się co najmniej $\frac{2k}{n}$ razy. Pozostaje zauważyć, że skoro daną operację wykonywaliśmy na krawędziach o rosnących długościach, to również każdy pająk przeszedł ścieżkę o rosnących długościach krawędzi. Pewien pająk przeszedł więc ścieżkę długości nie mniejszej niż $\frac{2k}{n}$ o rosnących długościach krawędzi i dowód jest zakończony.

29. Dany jest zbiór S złożony z 2013 punktów na płaszczyźnie, które nie leżą na jednej prostej. W każdy punkt zbioru S wpisana została pewna liczba rzeczywista, przy czym spełniony jest następujący warunek: na dowolnej prostej przechodzącej przez co najmniej dwa punkty zbioru S suma wpisanych liczb jest równa 0. Udowodnić, że wszystkie wpisane liczby są równe 0.

Rozwiązanie:

Ponumerujmy dane punkty liczbami od 1 do 2013, a liczbę wpisaną w punkt o numerze i oznaczmy przez x_i. Niech n_i oznacza liczbę prostych przechodzących przez i-ty punkt, które zawierają co najmniej dwa punkty zbioru S. Skoro nie wszystkie punkty leżą na jednej prostej, to $n_i > 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2013$. Rozważmy teraz wszystkie proste przechodzące przez ustalony punkt o numerze $1 \leqslant i \leqslant 2013$. Punkt o tym numerze pojawia się na dokładnie n_i takich prostych, a każdy inny punkt zbioru S pojawia się na dokładnie jednej takiej prostej. Ponieważ suma liczb na wszystkich takich prostych jest równa 0, otrzymujemy równość

$$0 = n_i x_i + x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_{2013} = (n_i - 1)x_i + S,$$

gdzie $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2013}$. Skoro tak, to dla dowolnych i, j zachodzi mamy $(n_i - 1)x_i = (n_j - 1)x_j$. W szczególności wszystkie liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są tego samego znaku, gdyż $n_i > 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2013$. Stąd już łatwo widać, że $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2013} = 0$.

30. Dana jest liczba całkowita $k > 1$. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ warunek

$$\sum_{d|n} d a_d = k^n.$$

Udowodnić, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ liczba a_n jest całkowita.

Rozwiązanie:

Tezę zadania wykażemy za pomocą indukcji po n. Dla $n = 1$ mamy $a_1 = k$, a oczywiście k jest liczbą całkowitą. Załóżmy więc, że teza zadania zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej m mniejszej niż n i udowodnijmy ją dla n.

Dzięki równości

$$na_n + \sum_{d|n, d\neq n} da_d = k^n,$$

wystarczy jeśli wykażemy, że $n|k^n - \sum_{d|n,d\neq n} da_d$. Udowodnimy w tym celu, że jeśli p jest liczbą pierwszą, która wchodzi do rozkładu n na czynniki pierwsze z potęgą $r > 0$, to $p^r|k^n - \sum_{d|n,d\neq n} da_d$.

Niech zatem $n = p^r \cdot x$, gdzie x jest liczbą naturalną niepodzielną przez p. Zauważmy, że skoro wszystkie liczby a_m są całkowite dla $m < n$, to

$$k^n - \sum_{d|n,d\neq n} da_d \equiv k^n - \sum_{d|p^{r-1}x} da_d \equiv k^{p^r x} - k^{p^{r-1}x}$$

$$\equiv k^{p^{r-1}x}(k^{p^r x - p^{r-1}x} - 1) \pmod{p^r}.$$

Jeśli $p|k$, to oczywiście $p^r|k^{p^{r-1}x}$, gdyż za pomocą indukcji nietrudno wykazać nierówność $r \leqslant p^{r-1}$ dla $r \geqslant 1$. Jeśli p nie dzieli k, to na mocy twierdzenia Eulera

$$k^{p^r x - p^{r-1}x} = (k^x)^{\varphi(p^r)} \equiv 1 \pmod{p^r},$$

a to kończy dowód.

31. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające następujący warunek: jeżeli x jest liczbą niewymierną, to $P(x)$ również jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wśród wielomianów stałych $P(x) \equiv c$ warunek dany w zadaniu spełniają dokładnie te, dla których c jest liczbą niewymierną. Załóżmy zatem, że wielomian $P(x)$ jest stopnia $n \geqslant 1$. Udowodnimy najpierw, że współczynniki P są liczbami wymiernymi.

Skoro $P(x)$ jest niestały, to z przyjmuje on nieskończenie wiele wartości wymiernych. Niech zatem $q_0 < q_1 < \ldots < q_n$ będą dowolnymi wartościami wymiernymi przyjmowanymi przez P. Ponieważ wielomian P przeprowadza liczby niewymierne na niewymierne, to wartości q_i muszą być przyjmowane dla argumentów wymiernych. Niech zatem $q_i = P(x_i)$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, gdzie $x_i \in \mathbb{Q}$. Ze **wzoru interpolacyjnego Lagrange'a** wynika równość

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Ponieważ $x_i, q_i \in \mathbb{Q}$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$ w powyższym wzorze pojawiają sie wyłącznie kombinacje i ilorazy liczb wymiernych. A więc rzeczywiście współczynniki $P(x)$ są liczbami wymiernymi.

Wykażemy teraz, że $P(x)$ jest wielomianem liniowym. Załóżmy bowiem przeciwnie. Dla dowolnej liczby całkowitej N wielomian $NP(x)$ również spełnia warunek dany w zadaniu, a więc biorąc za N iloczyn mianowników współczynników wielomianu P, możemy przyjąć, że współczynniki $P(x)$ są liczbami całkowitymi. Mnożąc jeszcze ewentualnie przez -1 możemy również założyć, że współczynnik wiodący jest liczbą dodatnią. Oznaczmy go przez a_n, a przez a_0 wyraz wolny naszego wielomianu. Niech $k = p + a_0$, dla pewnej liczby pierwszej p. Jeśli p jest odpowiednio duże, to istnieje $q \in \mathbb{R}$, dla którego $P(q) = k$. Udowodnimy, że dla odpowiedniego wyboru p ta równość prowadzi do sprzeczności. Z danego założenia wynika, że $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Innymi słowy, liczba wymierna q jest pierwiastkiem wielomianu $P(x) - k$, którego wyraz wolny jest równy $-p$. Z twierdzenia o pierwiastku wymiernym wynika zatem, że $a|p$ oraz $b|a_n$. Jeśli $a = \pm 1$ oraz $b|a_n$, to istnieje jedynie skończenie wiele możliwości na q, a więc biorąc p odpowiednio duże możemy zagwarantować, że $P(q) \neq k$ dla tych q. Załóżmy więc, że $a = \pm p$ oraz $b|a_n$. Niech $Q_d(x) = P(x) - a_n x^n - dx - a_0$, gdzie d jest całkowitym dzielnikiem liczby a_n. Skoro $n > 1$, to każdy z wielomianów Q_d jest wielomianem stopnia co najwyżej $n-1$, a więc istnieje takie $C > 0$, że jeśli $|x| > C$, to zachodzi nierówność $|a_n x^n| > |Q_d(x)|$ dla dowolnego $d|a_n$. W szczególności, jeżeli $p > Ca_n$, to biorąc $q = \frac{p}{d}$, gdzie $d|a_n$ otrzymujemy $|a_n q^n| > |Q_d(q)|$. To jednak stoi w sprzeczności z równością

$$P(q) - k = a_n q^n + Q_d(q) = 0,$$

z której wynika $|a_n q^n| = |Q_d(q)|$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że jeśli $P(x)$ jest niestałym wielomianem spełniającym warunek dany w zadaniu, to $P(x) = ax + b$ dla $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Aby zakończyć rozwiązanie zadania pozostaje zauważyć, że każdy wielomian tej postaci spełnia dany warunek. Wraz z wielomianami postaci $P(x) \equiv c$, gdzie $c \notin \mathbb{Q}$ są to wszystkie rozwiązania.

32. Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg przechodzący przez punkty B i C jest styczny do prostej EF w punkcie A'. Analogicznie definiujemy punkty B' i C'. Wykazać, że proste AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech B_1 i C_1 będą drugimi punktami przecięcia okręgu opisanego na trójkącie BCA' z prostymi AB i AC (jeśli okrąg ten jest styczny np. do prostej AB, to przyjmujemy $B_1 = B$). Wykorzystując twierdzenie sinusów dla trójkątów $AA'E$ i $AA'F$ dostajemy

$$\frac{A'E}{\sin\angle A'AE} = \frac{AE}{\sin\angle AA'E} \quad \text{oraz} \quad \frac{A'F}{\sin\angle A'AF} = \frac{AF}{\sin\angle AA'F},$$

co wraz z zależnością $\sin\angle AA'E = \sin\angle AA'F$ prowadzi do wniosku, że

$$\frac{\sin\angle A'AC}{\sin\angle A'AB} = \frac{\sin\angle A'AE}{\sin\angle A'AF} = \frac{A'E}{A'F} \cdot \frac{AF}{AE}. \tag{1}$$

Z równości $\angle BFC = 90^\circ = \angle BEC$ wynika, że punkty B, C, E i F leżą na jednym okręgu. Rozpatrując potęgi punktu A względem tego okręgu oraz okręgu przechodzącego przez punkty B, C, C_1 i B_1 dostajemy

$$AF \cdot AB = AE \cdot AC \quad \text{oraz} \quad AB_1 \cdot AB = AC_1 \cdot AC.$$

Dzieląc powyższe równości stronami otrzymujemy

$$\frac{AF}{AB_1} = \frac{AE}{AC_1},$$

skąd wniosek, że proste EF i B_1C_1 są równoległe. W takim razie

$$\frac{EC_1}{FB_1} = \frac{AE}{AF}. \tag{2}$$

Wykorzystując teraz potęgi punktów E i F względem okręgu przechodzącego przez punkty B, C, C_1 i B_1 dostajemy

$$A'E^2 = EC_1 \cdot EC \quad \text{oraz} \quad A'F^2 = FB_1 \cdot FB.$$

To wraz z równością (2) prowadzi do wniosku, że

$$\frac{A'E}{A'F} = \sqrt{\frac{EC_1 \cdot EC}{FB_1 \cdot FB}} = \sqrt{\frac{AE}{AF} \cdot \frac{EC}{FB}}.$$

Wstawiając powyższą równość do zależności (1) otrzymujemy

$$\frac{\sin \angle A'AC}{\sin \angle A'AB} = \sqrt{\frac{AE}{AF} \cdot \frac{EC}{FB}} \cdot \frac{AF}{AE} = \sqrt{\frac{AF}{AE} \cdot \frac{EC}{FB}}.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{\sin \angle C'CB}{\sin \angle C'CA} = \sqrt{\frac{CE}{CD} \cdot \frac{BD}{AE}} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sin \angle B'BA}{\sin \angle B'BC} = \sqrt{\frac{BD}{BF} \cdot \frac{AF}{CD}}.$$

Mnożąc powyższe równości stronami i wykorzystując zależność

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$$

prawdziwą na mocy twierdzenia Cevy dla wysokości AD, BE i CF, otrzymujemy

$$\frac{\sin \angle A'AC}{\sin \angle A'AB} \cdot \frac{\sin \angle C'CB}{\sin \angle C'CA} \cdot \frac{\sin \angle B'BA}{\sin \angle B'BC} = 1.$$

Zatem z trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy wnosimy, że proste AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie.

33. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają nierówności

$$f(x) \leqslant x \quad \text{oraz} \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y),$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla $x = 0$ z pierwszej nierówności mamy $f(0) \leqslant 0$, a z drugiej $f(0) \geqslant 0$ dla $x = y = 0$. Tym samym $f(0) = 0$. Biorąc $y = -x$ w drugiej nierówności, a następnie korzystając z pierwszej otrzymujemy

$$0 = f(x + (-x)) \leqslant f(x) + f(-x) \leqslant x + (-x) = 0,$$

skąd $f(x) = -f(-x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Pozostaje zauważyć, że na mocy pierwszego warunku

$$x \geqslant f(x) = -f(-x) \geqslant -(-x) = x,$$

a zatem $f(x) = x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

34. Dana jest szachownica o wymiarach $2013 \times (2013! + 1)$. Alicja i Bob na przemian wykonują ruch polegający na przecięciu jednej z krawędzi wspólnych dla dwóch sąsiednich pól. Dodatkowo, przeciąć można tylko taką krawędź, do której została już wycięta droga. Gracz, który rozetnie tablicę na dwa kawałki przegrywa. Rozstrzygnąć, który z graczy ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że drugi z graczy (Bob) ma strategię wygrywającą, która polega na kopiowaniu ruchów gracza pierwszego (Alicji) symetrycznie względem środka szachownicy.

Skoro wymiary szachownicy są nieparzyste, jej środek S znajduje się w środku pewnego pola. W szczególności, żadna krawędź nie jest symetryczna do samej siebie względem S. Bob zawsze może więc wykonać ruch będący odbiciem symetrycznym względem S ruchu Alicji. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że taka strategia nie jest wygrywająca, czyli, że w pewnym momencie dochodzi do sytuacji, w której Bob rozcina tablicę na dwa kawałki. Oznacza to, że po krawędziach szachownicy wycięta została pewna droga D, która jest zamknięta lub prowadzi od jednego boku do drugiego (być może tego samego). Zauważmy, że po każdym ruchu Boba sytuacja na szachownicy jest symetryczna względem S. Wynika stąd, że D musi być symetryczna do siebie względem S, gdyż w przeciwnym wypadku Alicja rozcięłaby szachownicę ruch wcześniej wycinając symetryczną drogę różną od tej wyciętej przez Boba. Załóżmy, że droga D składa się z krawędzi $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1', v_2', \ldots, v_n'$, gdzie krawędź v_i' jest symetryczna do v_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Do drogi D musi prowadzić ścieżka od jednego z boków szachownicy, możemy więc założyć, że krawędzie v_1, v_1' zostały wycięte jako pierwsze w grze. W szczególności mają one punkty wspólne z przeciwległymi bokami szachownicy. Załóżmy również, że krawędzie wycięte w ostatnim ruchu przez Alicję i Boba to odpowiednio $v_n \neq v_1$ i $v'_n \neq v'_1$. Rozważmy zbiór krawędzi $D' = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-1}\}$. Jest on niespójny, gdyż w przeciwnym wypadku szachownica zostałaby rozcięta już wcześniej – zawiera on krawędzie z przeciwległych boków szachownicy. Zbiór krawędzi D po usunięciu dwóch ostatnich krawędzi rozpada się zatem na 2 spójne, rozłączne i symetryczne kawałki lub na 3, z których jeden jest środkowo symetryczny. Zauważmy jednak, że druga możliwość prowadzi do sprzeczności. Istotnie, środkowo symetryczna i spójna droga prowadząca po krawędziach szachownicy jest zamknięta, a zatem D' zawiera rozcięcie szachownicy wbrew naszemu założeniu. Świadczy to o tym, że zbiór D' składa się z dwóch symetrycznych i rozłącznych dróg $D'_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ oraz $D'_2 = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-1}\}$.

Dodanie krawędzi v_n i v'_n powoduje połączenie dróg D'_1 i D'_2. Zauważmy, że jeżeli istnieje ścieżka postaci $v_i v'_n v'_j$, to z symetrii wynika też istnienie ścieżki postaci $v'_i v_n v_j$. W szczególności, drogi D'_1 i D'_2 połączyłyby się w spójną całość już po dodaniu krawędzi v_n, a więc po ruchu Alicji. Drogi D'_1 i D'_2 musiały się zatem połączyć wzdłuż ścieżki postaci $v_i v_n v'_n v'_j$ lub wzdłuż ścieżki postaci $v'_i v_n v'_n v_j$. To jest jednak niemożliwe, gdyż symetryczne krawędzie v_n, v'_n nie mają punktów wspólnych. Otrzymana sprzeczność kończy rozumowanie nie wprost.

35. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Środkowa CS przecina ten okrąg w punktach K i L. Punkt P jest punktem przecięcia prostych DK i EL. Dowieść, że proste AB i CP są równoległe.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że punkt K leży wewnątrz odcinka CL. Przez punkt L poprowadźmy prostą równoległą do prostej CP, przecinającą proste CA i CB odpowiednio w punktach A' i B'. Wykażemy, że $A'L = LB'$.

Załóżmy najpierw, że proste DL i EK przecinają się w pewnym punkcie Q. Wówczas z twierdzenia Pascala dla „sześciokąta" $DDKEEL$ wynika, że punkty C, P, Q leżą na jednej prostej. Z twierdzenia Cevy dla trójkąta PQL otrzymujemy

$$\frac{PE}{EL} \cdot \frac{LD}{DQ} \cdot \frac{QC}{CP} = 1.$$

Z twierdzenia Talesa dostajemy natomiast

$$\frac{PE}{EL} = \frac{CP}{A'L} \quad \text{oraz} \quad \frac{LD}{DQ} = \frac{LB'}{QC}.$$

Łącząc to z wcześniejszą zależnością otrzymujemy $A'L = LB'$.

Przyjmijmy teraz, że proste DL i EK są równoległe. Wtedy twierdzenie Pascala zastosowane do zdegenerowanego sześciokąta $DDKEEL$ prowadzi do wniosku, że prosta CP jest równoległa do prostych DL i EK. W takim razie $B' = D$, zaś A' pokrywa się z punktem przecięcia prostych DL i CA. Wykorzystując kilkukrotnie twierdzenie Talesa dostajemy

$$\frac{A'L}{EK} = \frac{CL}{CK} = \frac{PD}{DK} = \frac{LB'}{EK},$$

skąd i w tym wypadku $A'L = LB'$.

Przypuśćmy, że proste AB i $A'B'$ nie są równoległe. Niech prosta przechodząca przez punkt L i równoległa do prostej AB przecina proste CA i CB odpowiednio w punktach A_1 i B_1. Z twierdzenia Talesa dostajemy

$$\frac{AS}{A_1L} = \frac{CS}{CL} = \frac{BS}{B_1L},$$

skąd wobec równości $AS = BS$ dostajemy $A_1L = B_1L$. Czworokąt $A_1B'B_1A'$ ma środek symetrii, a więc jest równoległobokiem. To oznacza, że proste AC i BC zawierające odcinki A_1A' i $B'B_1$ są równoległe. Otrzymana sprzeczność dowodzi fałszywości uczynionego na początku tego akapitu przypuszczenia. W takim razie prosta $A'B'$ jest równoległa do AB, a to pociąga równoległość prostych AB i CP.

36. Wykazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której liczba $1! + 2! + \ldots + n!$ posiada dzielnik pierwszy większy niż $2013^{2013^{2013}}$.

Rozwiązanie:

Dla danej liczby pierwszej p i liczby całkowitej $a \neq 0$ niech $v_p(a)$ oznacza najwyższą potęgę p dzielącą a. Jeśli teza zadania nie jest spełniona, to istnieje jedynie skończenie wiele liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$, które dzielą pewien wyraz ciągu $(1! + 2! + \ldots + n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Ponieważ ciąg ten jest rosnący, dla pewnej liczby pierwszej p_i ciąg $(v_{p_i}(1! + 2! + \ldots + n!))_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony. Bez straty ogólności przyjmijmy, że liczby pierwsze posiadające tę własność to liczby $p_1, p_2, \ldots, p_l$ gdzie $1 \leqslant l \leqslant k$, zaś dla $l < i \leqslant k$ liczby p_i nie posiadają tej własności.

Ustalmy liczbę całkowitą $1 \leqslant i \leqslant l$. Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $v_{p_i}(1!+2!+\ldots+n!) \geqslant v_{p_i}((n+1)!)$. Jeśli bowiem $v_{p_i}(1!+2!+\ldots+N!) < v_{p_i}((N + 1)!)$ dla pewnej liczby naturalnej N, to

$$v_{p_i}(1! + \ldots + N! + (N + 1)!) = v_{p_i}(1! + 2! + \ldots + N!),$$

i tym samym również $v_{p_i}(1! + 2! + \ldots + N! + (N + 1)!) < v_{p_i}((N + 2)!)$, co analogicznie daje

$$v_{p_i}(1!+2!+\ldots+N!+(N+2)!) = v_{p_i}(1!+2!+\ldots+N!+(N+1)!) = v_{p_i}(1!+2!+\ldots+N!).$$

Z prostej indukcji wynika więc, że ciąg $(v_{p_i}(1! + 2! + \ldots + n!))_{n\in\mathbb{N}}$ począwszy od $n = N$ jest stały, co przeczy wyborowi liczby pierwszej p_i.

Rozważmy teraz dowolną liczbę naturalną N spełniającą warunek $N \equiv -1 \pmod{p_1p_2\ldots p_l}$. Wówczas wiemy już, że $v_{p_i}(1!+2!+\ldots+(N-1)!) \geqslant v_{p_i}(N!)$. Załóżmy, że zachodzi ostra nierówność. Wtedy

$$v_{p_i}(N!) = v_{p_i}(1! + 2! + \ldots + (N-1)! + N!) \geqslant v_{p_i}((N+1)!),$$

a to jest niemożliwe, gdyż $p_i|N+1$. Tym samym $v_{p_i}(1!+2!+\ldots+(N-1)!) = v_{p_i}(N!)$ dla $1 \leqslant i \leqslant l$ oraz dowolnej liczby naturalnej N takiej, że $N \equiv -1 \pmod{p_1p_2\ldots p_l}$. Zauważmy ponadto, że biorąc N odpowiednio duże możemy zagwarantować, że $v_{p_i}(N!) \geqslant v_{p_i}(1! + 2! + \ldots + (N-1)!)$ dla $l < i \leqslant k$, gdyż dla tych i ciąg $(v_{p_i}(1! + 2! + \ldots + n!))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Wykazaliśmy w ten sposób, że dla tak wybranej liczby naturalnej N zachodzi więc podzielność $1! + 2! + \ldots + (N-1)!|N!$. Udowodnimy, że prowadzi ona do sprzeczności.

Rzeczywiście,

$$1!+2!+\ldots+(N-1)!|(1!+2!+\ldots+(N-1)!)\cdot N - N! = (1!+2!+...+(N-2)!)\cdot N$$

$$= (1! + 2! + ... + (N-3)!) \cdot N + (N-1)! + (N-2)!.$$

Kontynuując

$$1!+2!+\ldots+(N-1)!|(1!+2!+...+(N-3)!)\cdot N+(N-1)!+(N-2)!-(1!+2!+\ldots+(N-1)!)$$

$$= (1! + 2! + ... + (N-3)!) \cdot (N-1).$$

Ta podzielność jest jednak niemożliwa, gdyż

$$1!+2!+\ldots+(N-1)! > (N-1)! = (N-3)!\cdot(N-2)\cdot(N-1) > (N-3)!\cdot(N-3)\cdot(N-1)$$

$$> (1! + 2! + \ldots + (N-3)!) \cdot (N-1).$$

Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Zawody drużynowe

1. Dla danej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ niech $x_n = \lfloor n\sqrt{2013} \rfloor$. Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych $q, k \geqslant 2$ ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zawiera k-wyrazowy ciąg geometryczny o ilorazie q.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący

Lemat. *Dla dowolnej liczby niewymiernej α i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że $\{n\alpha\} < \varepsilon$, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej x.*

Dowód. Tezę lematu wystarczy udowodnić dla $\varepsilon = \frac{1}{N}$, gdzie $N \geqslant 2$ jest dowolną liczbą naturalną. Rozważmy podział przedziału $[0,1]$ na N podprzedziałów o długości $\frac{1}{N}$:

$$[0,1] = \left[0, \frac{1}{N}\right] \cup \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right] \cup \ldots \cup \left[\frac{N-1}{N}, 1\right].$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że dla pewnych liczb naturalnych $n_1 > n_2$ liczby $\{n_1\alpha\}, \{n_2\alpha\}$ należą do jednego podprzedziału, czyli w szczególności $|\{n_1\alpha\} - \{n_2\alpha\}| < \frac{1}{N}$. Zauważmy teraz, że jeżeli $\{n_1\alpha\} > \{n_2\alpha\}$ to liczba naturalna $n = n_1 - n_2$ spełnia nierówność z lematu, gdyż $\{n\alpha\} = \{(n_1 - n_2)\alpha\} = \{n_1\alpha\} - \{n_2\alpha\} < \frac{1}{N}$. W przeciwnym wypadku łatwo zauważyć, że dla $n = n_1 - n_2$ prawdziwa jest nierówność $\{n\alpha\} > 1 - \frac{1}{N}$.

Zauważmy, że równość $\{kn\alpha\} = k\{n\alpha\} - k + 1$ zachodzi dla $k = 1$, ale nie może zachodzić dla dowolnej liczby naturalnej k. Istotnie, $\{n\alpha\} - 1 < 0$, a zatem dla $k > \frac{1}{1-\{n\alpha\}}$ mamy

$$\{kn\alpha\} = k\{n\alpha\} - k + 1 = k(\{n\alpha\} - 1) + 1 < -1 + 1 = 0,$$

co daje sprzeczność. Rozważmy więc największą liczbę naturalną k, dla której spełniona jest powyższa równość. Zauważmy, że jeżeli $a, b > 0$, to $\{a + b\} = \{a\} + \{b\}$, gdy $\{a\} + \{b\} < 1$ oraz $\{a + b\} = \{a\} + \{b\} - 1$ w przeciwnym wypadku. Rozważmy $a = kn\alpha$ oraz $b = n\alpha$. Jeżeli dla tak wybranych liczb a i b zachodziłaby druga z tych równości, to wówczas

$$\{(k+1)n\alpha\} = \{kn\alpha\} + \{n\alpha\} - 1 = k\{n\alpha\} - k + 1 + \{n\alpha\} - 1 = (k+1)\{n\alpha\} - (k+1) + 1,$$

co przeczy maksymalności liczby k. Zachodzi więc pierwsza możliwość, a więc w szczególności $\{kn\alpha\} + \{n\alpha\} < 1$. Otrzymujemy stąd

$$\{kn\alpha\} < 1 - \{n\alpha\} < 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}.$$

A zatem i w tym przypadku teza lematu jest prawdziwa.

Przechodzimy do głównej części rozwiązania. Na mocy lematu istnieje taka liczba naturalna m, że $\{m\sqrt{2013}\} < \frac{1}{q^k}$. Zauważmy, że wówczas dla $n = 1, 2, \ldots, k$ zachodzi równość

$$[q^n m\sqrt{2013}] = [q^n([m\sqrt{2013}] + \{m\sqrt{2013}\})] = q^n[m\sqrt{2013}] + [q^n\{m\sqrt{2013}\}]$$
$$= q^n[m\sqrt{2013}].$$

A zatem ciąg $x_{qm}, x_{q^2m}, \ldots, x_{q^km}$ jest szukanym podciągiem geometrycznym długości k i o ilorazie q.

2. W każdym z trzech kubków znajduje się pewna liczba fasolek. Dana jest następująca *operacja*: jeżeli w jednym kubku znajduje się a fasolek, a w drugim b fasolek, gdzie $a \geqslant b$, to możemy przełożyć b fasolek z pierwszego kubka do drugiego. Rozstrzygnąć, czy dla każdego początkowego ułożenia fasolek istnieje ciąg operacji, po wykonaniu którego co najmniej jeden kubek będzie pusty.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że dla dowolnego początkowego ułożenia fasolek istnieje ciąg operacji, po wykonaniu którego jeden kubek jest pusty. Załóżmy przeciwnie. Rozważmy minimalną liczbę całkowitą b, która może zostać osiągnięta jako liczba fasolek w jednym z kubków po wykonaniu pewnego ciągu operacji. Wówczas $b > 0$. Przyjmijmy ponadto, że b jest liczbą fasolek w kubku pierwszym. Przez a i c oznaczmy liczby fasolek odpowiednio w drugim i trzecim kubku. Załóżmy przy tym, że $a \leqslant c$. Niech $a = kb + r$, gdzie k, r są liczbami całkowitymi takimi, że $k \geqslant 1$ oraz $0 \leqslant r \leqslant b-1$. Jeśli wykażemy, że istnieje ciąg operacji, po którym w drugim kubku znajdzie się dokładnie r fasolek, to otrzymamy sprzeczność z minimalnością b. Wskażmy zatem ciąg operacji o tej własności.

Niech m będzie liczbą cyfr w zapisie dwójkowym liczby k. Rozważmy ciąg m operacji, numerowanych od 1 do m, w których i-ta operacja polega na:

- przeniesieniu fasolek z drugiego kubka do pierwszego, gdy i-ta cyfra zapisu dwójkowego liczby k (licząc od prawej) jest równa 1
- przeniesieniu fasolek z trzeciego kubka do pierwszego, w przeciwnym wypadku.

Wykażemy, że wykonanie takiego ciągu operacji jest możliwe. W każdym ruchu przenosimy fasolki do pierwszego kubka, a zatem liczba fasolek w pierwszym kubku podwaja się w każdym kroku. Po i krokach wynosi ona więc $2^i b$. Podczas tych operacji z drugiego kubka odjęliśmy maksymalnie $(2^{i-1}+2^{i-2}+\ldots+2+1)b$ fasolek. Jeśli więc $i \leqslant m-1$, to

$$a-(2^{i-1}+2^{i-2}+\ldots+2+1)b \geqslant 2^{i+1}b-(2^{i-1}+2^{i-2}+\ldots+2+1)b = (2^i+1)b > 2^i b,$$

co świadczy o tym, że po wykonaniu $i \leqslant m-1$ kroków możliwe jest przeniesienie fasolek z drugiego kubka do pierwszego. Ponieważ $c \geqslant a$ analogiczne rozumowanie pokazuje, że możliwe jest również przeniesienie fasolek z trzeciego kubka do pierwszego. Wykonanie tak zdefiniowanego ciągu m operacji jest zatem możliwe.

Zauważmy, że skoro w i-tym kroku odejmowaliśmy $2^i b$ fasolek z drugiego kubka wtedy i tylko wtedy, gdy i-ta cyfra zapisu dwójkowego liczby k była niezerowa, to po wykonaniu wszystkich kroków odjęliśmy dokładnie kb fasolek. W drugim kubku pozostało zatem r fasolek, co stanowi sprzeczność z minimalnym wyborem b. Kończy to rozwiązanie zadania.

3. Dany jest trójkąt ABC. Punkty O i H są odpowiednio środkiem okręgu opisanego i ortocentrum tego trójkąta. Punkt D jest środkiem tego łuku AC okręgu opisanego na ABC, który nie zawiera punktu B. Punkt S leży na odcinku BC, przy czym proste OS i BD są równoległe. Wykazać, że okrąg o średnicy AS przechodzi przez środek odcinka HD.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez M środek odcinka HD. Musimy udowodnić, że $\angle AMS = 90°$. Rozważmy jednokładność j o środku w punkcie H i skali $\frac{1}{2}$. Obrazem okręgu opisanego na trójkącie ABC w jednokładności j jest okrąg dziewięciu punktów trójkąta ABC. Co więcej $j(D) = M, j(O) = N, j(A) = K$, gdzie N jest środkiem okręgu dziewięciu punktów (i zarazem środkiem odcinka HO), zaś K jest środkiem odcinka AH. Oznaczmy przez G i E odpowiednio spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka A oraz środek odcinka BC. Wiadomo, że leżą one na okręgu dziewięciu punktów. Co więcej, z równości $\angle KGE = 90°$ wynika, że odcinek KE jest średnicą tego okręgu. Tym samym $\angle KME = 90°$.

Wystarczy jeśli wykażemy, że trójkąty AMK oraz SME są podobne. Rzeczywiście, wówczas prawdziwy jest ciąg równości

$$\angle AMS = \angle KMS + \angle AMK = \angle KMS + \angle SME = \angle KME = 90°,$$

który daje tezę zadania. Ponieważ $\angle AKM = 180° - \angle MKH = \angle GEM = \angle SEM$ podobieństwo tych trójkątów sprowadza się do równości $\frac{AK}{SE} = \frac{KM}{ME}$.

Zauważmy jednak, że $AK = KH = OE$, gdyż czworokąt $KHEO$ jest równoległobokiem. Mamy więc

$$\frac{AK}{SE} = \frac{OE}{SE} = \operatorname{tg} \angle OSE = \operatorname{tg} \angle CBD = \operatorname{tg} \frac{\angle CBA}{2}.$$

Z drugiej strony

$$\frac{KM}{ME} = \operatorname{tg} \angle KEM = \operatorname{tg} \frac{\angle KNM}{2} = \operatorname{tg} \frac{\angle AOD}{2} = \operatorname{tg} \angle ABD = \operatorname{tg} \frac{\angle ABC}{2},$$

co kończy dowód.

4. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite A, B, C, gdzie $A \neq 0$, które spełniają następujący warunek: dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n, istnieje liczba całkowita x taka, że $n! = Ax^2 + Bx + C$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że nie istnieją liczby całkowite A, B, C o żądanej własności. Załóżmy przeciwnie. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wyróżnik trójmianu kwadratowego $Ax^2+Bx+C-n!$ jest zatem kwadratem liczby całkowitej. Innymi słowy liczba

$$B^2 - 4AC + 4An! = an! + b,$$

jest kwadratem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $A > 0$, gdyż inaczej dany trójmian przyjmowałby jedynie skończenie wiele wartości dodatnich, a więc również $a > 0$. Zauważmy też, że jeśli $b = 0$, to liczby $2a$ i $6a$ są kwadratami liczb całkowitych, a więc liczba 3 jest kwadratem liczby wymiernej. To przeczy jednak niewymierności liczby $\sqrt{3}$, a zatem $b \neq 0$.

Dla dowolnego $n > 1$ istnieją liczby naturalne x, y takie, że $a(n^2-1)! = x^2-b$ oraz $a(n^2)! = y^2 - b$. Otrzymujemy stąd $n^2x^2 - n^2b = y^2 - b$, a więc również

$$|(n^2 - 1)b| = |nx - y| \cdot |nx + y| \geqslant 1 \cdot y = y,$$

przy czym $nx - y \neq 0$, gdyż inaczej $b = 0$. Dla odpowiednio dużych n mamy jednak

$$(n^2 - 1)^2 b^2 \geqslant y^2 = a(n^2)! + b > an^2(n^2 - 1)(n^2 - 2),$$

a zatem

$$|b| > \frac{\sqrt{an^2(n^2 - 1)(n^2 - 2)}}{n^2 - 1},$$

dla odpowiednio dużych n. To jest jednak niemożliwe, gdyż wyrażenie pod pierwiastkiem jest wielomianem stopnia 6, a więc powyższy ułamek dąży do nieskończoności dla $n \to \infty$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Rozstrzygnąć, czy zbiór liczb całkowitych dodatnich n, dla których $n! + 1|(2013n)!$ jest skończony.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że zbiór liczb całkowitych n o podanej własności jest skończony. Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\frac{(2013n)!}{(n!)^{2013}}$ to liczba różnych $2013n$-elementowych ciągów o wyrazach w zbiorze $1, 2, \ldots, 2013$, w których każdy wyraz pojawia się dokładnie n razy. W szczególności jest to liczba całkowita, czyli $(n!)^{2013}|(2013n)!$. Załóżmy teraz, że n spełnia podzielność daną w zadaniu. Liczby $n! + 1$ i $(n!)^{2013}$ są względnie pierwsze, a więc ich iloczyn dzieli liczbę $(2013n)!$. W szczególności

$$(n! + 1) \cdot (n!)^{2013} \leqslant (2013n)!.$$

Ze **wzoru Stirlinga** wprost wynika nierówność $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$. Po połączeniu z oczywistym oszacowaniem $n! \leqslant n^n$ otrzymujemy

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{2014n} < (n!)^{2014} < (n! + 1)(n!)^{2013} \leqslant (2013n)! \leqslant (2013n)^{2013n},$$

a stąd

$$n < 2013^{2013}e^{2014}.$$

Dowodzi to, że istnieje tylko skończenie wiele liczb n o postulowanej własności.

2. Niech k będzie dodatnią i nieparzystą liczbą całkowitą. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej m istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że $m|k^n + n^k$.

Rozwiązanie:

Niech $n = n_0k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej n_0. Z tożsamości $a^k + b^k = (a + b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + \ldots - ab^{k-2} + b^{k-1})$ wynika podzielność

$$k^{n_0-1} + n_0|k^{n_0k} + (n_0k)^k.$$

Wystarczy więc udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której $m|k^{n-1}+n$. Dowiedziemy mocniejszą tezę, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n o żądanej własności.

Wykażemy to za pomocą indukcji po m. Dla $m = 1$ nie ma czego dowodzić, załóżmy zatem, że $m > 1$ oraz że nasza teza jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej mniejszej niż m. Łatwo zauważyć, że ciąg reszt z dzielenia przez m

liczb $k, k^2, k^3, \ldots$ jest od pewnego miejsca okresowy. Niech ℓ oznacza długość jego okresu. Wówczas istnieje liczba całkowita $N_0 > 0$ taka, że jeśli $x \equiv y \pmod{\ell}$ oraz $x, y \geqslant N_0$, to $k^x \equiv k^y \pmod{m}$.

Na mocy założenia indukcyjnego istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich x, dla których $\ell | k^{x-1} + x$. W szczególności, istnieje $x > N_0$ o żądanej własności. Niech $N > 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $N\ell m - k^{x-1} > N_0$. Przyjmijmy $n = N\ell m - k^{x-1}$. Skoro obie liczby $N\ell m - k^{x-1}$ i x są większe niż N_0 oraz z założenia indukcyjnego $N\ell m - k^{x-1} \equiv x \pmod{\ell}$, to mamy

$$k^{n-1} + n = k^{N\ell m - k^{x-1} - 1} + N\ell m - k^{x-1} \equiv k^{x-1} - k^{x-1} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Pozostaje zauważyć, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich N, dla których $N\ell m - k^{x-1} > N_0$. Istnieje więc nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n, dla których $m | k^{n-1} + n$. Kończy to dowód indukcyjny oraz rozwiązanie zadania.

3. Rozstrzygnąć, czy dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieją parami różne i parami względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \,|\, a_1^i + a_2^i + \ldots + a_n^i$$

dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 8$ nie istnieją liczby całkowite dodatnie o żądanej własności. Załóżmy przeciwnie. Wykażemy indukcyjnie, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi podzielność

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \,|\, a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k.$$

Dla $1 \leqslant k \leqslant n$ teza zachodzi na mocy warunków zadania. Załóżmy więc, że dla $k \geqslant n$ zachodzi dana podzielność i udowodnijmy ją dla $k+1$. Rozważmy w tym celu wielomian

$$P(t) = t^{k+1-n}(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n) = t^{k+1} + c_k t^k + c_{k-1} t^{k-1} + \ldots + c_1 t^{k+1-n},$$

gdzie oczywiście $c_i \in \mathbb{Z}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas $P(a_i) = 0$ dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$. A zatem

$$0 = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n) = \sum_{i=1}^n a_i^{k+1} + c_k \sum_{i=1}^n a_i^k + c_{k-1} \sum_{i=1}^n a_i^{k-1} \ldots + c_1 \sum_{i=1}^n a_i^{k+1-n}.$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że każdy składnik postaci $c_l \sum_{i=1}^n a_i^l$ dzieli się przez sumę liczb a_i dla $k+1-n \leqslant l \leqslant k$. Otrzymujemy więc żądaną podzielność

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \,|\, a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \ldots + a_n^{k+1},$$

która kończy dowód indukcyjny.

W kolejnej części rozumowania udowodnimy, że $a_1+a_2+\ldots+a_n | n(n-1)$. Rozważmy rozkład na czynniki pierwsze

$$a_1+a_2+\ldots+a_n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m},$$

gdzie $m \in \mathbb{N}$. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots m$ zachodzi jedna z podzielności: $p_i^{\alpha_i} | n-1$ lub $p_i^{\alpha_i} | n$. Ustalmy $1 \leqslant i \leqslant m$ i w pierwszej kolejności rozważmy przypadek, w którym żadna z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nie dzieli się przez p_i. Z twierdzenia Eulera mamy wówczas

$$a_j^{\varphi(p_i^{\alpha_i})} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}},$$

dla dowolnego $j = 1, 2, \ldots m$, a więc przyjmując $k = \varphi(p_i^{\alpha_i})$ w podzielności otrzymanej w pierwszym kroku rozwiązania dostajemy

$$0 \equiv a_1+\ldots+a_n \equiv a_1^{\varphi(p_i^{\alpha_i})}+a_2^{\varphi(p_i^{\alpha_i})}+\ldots+a_n^{\varphi(p_i^{\alpha_i})} \equiv 1+1+\ldots+1 \equiv n \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Rozważmy teraz przypadek, w którym istnieje $1 \leqslant l \leqslant m$ takie, że $p_i | a_l$. Skoro każda z t liczb: $p-1, p^2-1, \ldots p^t-1$ jest względnie pierwsza z p^t, to zachodzi nierówność $\varphi(p^t) \geqslant t$. W szczególności

$$a_l^{\varphi(p_i^{\alpha_i})} \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Zauważmy ponadto, że żadna inna liczba a_j dla $j \neq l$ nie dzieli się przez p_i, gdyż założeń zadania liczby a_j są parami względnie pierwsze. W szczególności, biorąc ponownie $k = \varphi(p_i^{\alpha_i})$ w podzielności z początku rozwiązania otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 \equiv a_1+\ldots+a_n &\equiv a_1^{\varphi(p_i^{\alpha_i})}+a_2^{\varphi(p_i^{\alpha_i})}+\ldots+a_n^{\varphi(p_i^{\alpha_i})} \\ &\equiv 1+1+\ldots 1+0+1\ldots+1 \equiv n-1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy w ten sposób podzielność $a_1+a_2+\ldots+a_n | n(n-1)$.

Przechodzimy do ostatniego kroku rozwiązania. Skoro liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są parami różne i parami względnie pierwsze, to łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\ldots+a_n &\geqslant (1+2+3+5+7)+(11+13+15+\ldots+2n+1) \\ &= (1+3+5+7+9+\ldots+2n+1)-7 = n^2-7, \end{aligned}$$

Ale dla $n \geqslant 8$ mamy przecież $n^2-7 > n^2-n$. Przeczy to uzyskanej podzielności i kończy rozwiązanie zadania.

4. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek

$$a_{k+1} = \frac{ka_k+1}{k-a_k}$$

dla każdego $k \geqslant 1$. Udowodnić, że w tym ciągu występuje nieskończenie wiele dodatnich i nieskończenie wiele ujemnych wyrazów.

Rozwiązanie:

Rozważmy ciąg $(b_n)_{n\geqslant 1}$ liczb rzeczywistych określony poprzez warunki $b_1 = \operatorname{tg}^{-1} a_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oraz $b_{k+1} = b_k + \operatorname{tg}^{-1}(\frac{1}{k})$ dla $k \geqslant 1$. Zauważmy, że prostej indukcji wynika wówczas, że $a_k = \operatorname{tg} b_k$ dla $k \geqslant 1$. Rzeczywiście, jeśli $a_k = \operatorname{tg} b_k$ dla pewnego $k \geqslant 1$, to

$$a_{k+1} = \frac{ka_k + 1}{k - a_k} = \frac{a_k + \frac{1}{k}}{1 - a_k \cdot \frac{1}{k}} = \operatorname{tg}\left(b_k + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(b_{k+1}\right).$$

Ponieważ $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ mamy również

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1}(\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} = 1.$$

W szczególności, ponieważ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest również szereg $b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{-1}(\frac{1}{k})$. Zauważmy jednak, że wyrazy tego szeregu dążą do 0, a zatem istnieje nieskończenie wiele sum częściowych rozważanego szeregu, które należą do przedziału postaci $(2\pi n, 2\pi n + \frac{\pi}{2})$ oraz nieskończenie wiele sum częściowych, które należą do przedziału postaci $(2\pi n + \frac{\pi}{2}, 2\pi n)$. Ale sumy częściowe to wyrazy ciągu $(b_n)_{n\geqslant 1}$ i skoro $a_k = \operatorname{tg} b_k$, to ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ posiada nieskończenie wiele dodatnich i nieskończenie wiele ujemnych wyrazów.

5. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Dowieść, że jeśli p-kąt ma wszystkie boki wymiernej długości i wszystkie kąty równe, to jest on foremny.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujące **kryterium Eisensteina** nierozkładalności wielomianów: jeśli współczynniki $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ są całkowite i dla pewnej liczby pierwszej p spełniają warunki:

$$p|a_{n-1},\ p|a_{n-2},\ \ldots,\ p|a_0,\ p \not| a_n,\ p^2 \not| a_0,$$

to wielomian $f(x)$ jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych. Wykorzystując to kryterium udowodnimy

Lemat. *Dla dowolnej liczby pierwszej p wielomian*

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1,$$

jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Dowód lematu. Zauważmy, że dowolny wielomian $f(x)$ daje się przedstawić w postaci iloczynu niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $f(x+1)$ daje się przedstawić w takiej postaci. Aby udowodnić nierozkładalność danego wielomianu, wystarczy zatem wykazać, że wielomian $f(x+1)$ spełnia warunki kryterium Eisensteina. Istotnie, skoro $f(x) = \frac{x^p-1}{x-1}$ dla dowolnego $x \neq 1$, to

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + \binom{p}{p-1} x^{p-2} + \binom{p}{p-2} x^{p-3} + \ldots + \binom{p}{2} x + \binom{p}{1}.$$

Każdy współczynnik dwumianowy $\binom{p}{i}$ dzieli się przez p dla $1 \leqslant i \leqslant p-1$, zaś $\binom{p}{1} = p$ nie dzieli się przez p^2. Kończy to dowód lematu.

Przechodzimy do głównej części rozwiązania. Umieśćmy p-kąt dany w zadaniu na płaszczyźnie zespolonej w taki sposób, że jego wierzchołkami są liczby zespolone $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$. Nie wpływając na warunki dane w treści zadania możemy przyjąć, że $z_0 = 0$ oraz $z_1 = 1$. Niech $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ będzie pierwiastkiem p-go stopnia z jedności. Ponieważ pomnożenie liczby zespolonej z przez ω odpowiada obrotowi o kąt $\frac{2\pi}{p}$, a dowolny kąt danego p-kąta jest równy $\pi - \frac{2\pi}{p}$, to dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, p-1$ zachodzi równość $z_{i+1} - z_i = q_i\omega(z_i - z_{i-1})$, gdzie q_i jest liczbą wymierną równą stosunkowi odpowiednich boków danego p-kąta oraz przyjmujemy, że $z_p = z_0 = 0$. W szczególności, dla dowonego $i = 1, 2, \ldots, p-1$ mamy

$$z_{i+1} - z_i = q_i\omega(z_i - z_{i-1}) = q_i q_{i-1}\omega^2(z_{i-1} - z_{i-2}) = \ldots = q_i q_{i-1} \ldots q_1 \omega^i (z_1 - z_0)$$
$$= q_i q_{i-1} \ldots q_1 \omega^i.$$

Przyjmując $a_i = q_i q_{i-1} \ldots q_1 \in \mathbb{Q}$ wyliczamy zatem bez trudu

$$z_{i+1} = a_i\omega^i + z_i = a_i\omega^i + a_{i-1}\omega^{i-1} + z_{i-1} = \ldots = a_i\omega^i + a_{i-1}\omega^{i-1} + \ldots + a_1\omega + 1.$$

Ponieważ $z_p = z_0 = 0$ wnioskujemy, że

$$a_{p-1}\omega^{p-1} + a_{p-2}\omega^{p-2} + \ldots + a_1\omega + 1 = 0,$$

co oznacza, że ω jest pierwiastkiem wielomianu $g(x) = a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \ldots + a_1 x + 1$ o współczynnikach wymiernych.

Niech teraz $f(x)$ będzie wielomianem z lematu, a $h(x) \not\equiv 0$ niech będzie wielomianem o minimalnym stopniu, którego współczynniki są wymierne oraz $h(\omega) = 0$. Rozważmy dzielenie z resztą $f(x) = h(x)p(x) + r(x)$. Współczynniki wielomianu r również są wymierne. Co więcej skoro $f(\omega) = h(\omega) = 0$, to $r(\omega) = 0$. Ponieważ r jest niższego stopnia niż h, wielomian r jest wielomianem zerowym, a zatem $f(x) = h(x)p(x)$ przedstawia się w postaci iloczynu wielomianów o współczynnikach wymiernych. Jeśli oba te wielomiany są niestałe, to z **lematu Gaussa** wynika, że $f(x)$ przedstawia się również w postaci iloczynu niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych. To jednak przeczy udowodnionemu wcześniej lematowi, a zatem jeden z wielomianów $h(x)$ i $p(x)$ jest wielomianem stałym. Jasne jest, że musi być to wielomian p, a zatem wielomiany f i h są równe z dokładnością do przemnożenia przez pewną niezerową liczbę wymierną.

Powtarzając rozumowanie z dzieleniem z resztą dochodzimy do wniosku, że wielomian g dzieli się przez wielomian h, a więc również przez wielomian f. Zauważmy jednak, że są to wielomiany jednakowego stopnia, a zatem są równe z dokładnością do przemnożenia przez niezerową liczbę wymierną. Skoro jednak mają te same wyrazy wolne, to musimy mieć

$$a_{p-1} = a_{p-2} = \ldots = a_1 = 1,$$

skąd już łatwo wynika, że

$$q_{p-1} = q_{p-2} = \ldots = q_1 = 1.$$

Liczby q_i były zdefiniowane jako stosunki kolejnych boków danego p-kąta. Z powyższych równości wynika zatem, że p-kąt dany w zadaniu posiada wszystkie boki równej długości. Skoro jego kąty są równej miary, to jest to p-kąt foremny i rozwiązanie zadania jest zakończone.

6. Liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots a_n$ spełniają warunek $a_1 a_2 \ldots a_k \geqslant \frac{1}{(2k)!}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnić, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Rozwiązanie:

Wykażemy następujący

Lemat. *Dane są liczby nieujemne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ spełniające nierówności $x_1 \geqslant_1$, $x_1 x_2 \geqslant y_1 y_2, \ldots, x_1 x_2 \ldots x_n \geqslant y_1 y_2 \ldots y_n$. Wówczas $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_n$.*

Dowód lematu. Dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots n$ z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną wynika nierówność

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_k}{y_k} \geqslant k \sqrt[k]{\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_k}{y_k}} \geqslant k.$$

Zauważmy teraz, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{x_1}{y_1} y_1 + \frac{x_2}{y_2} y_2 + \ldots + \frac{x_n}{y_n} y_n$$

$$= \frac{x_1}{y_1}(y_1 - y_2) + \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}\right)(y_2 - y_3) + \ldots + \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}\right) y_n$$

$$\geqslant 1(y_1 - y_2) + 2(y_2 - y_3) + \ldots + n y_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n,$$

gdzie nierówność wynika z oszacowań $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_k}{y_k} \geqslant k$ oraz $y_k - y_{k+1} \geqslant 0$. Dowodzi to lematu.

Przechodzimy do głównej części rozwiązania. Z warunków danych w zadaniu wynika, że $x_k = a_k$, $y_k = \frac{1}{(2k-1)(2k)}$ dla $k = 1, 2, \ldots n$ spełniają założenia lematu. Otrzymujemy więc

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Udowodniliśmy w ten sposób żądaną nierówność.

7. Tablica $m \times n$ została wypełniona nieujemnymi liczbami rzeczywistymi w taki sposób, że dowolny wiersz oraz dowolna kolumna zawierają co najmniej jeden dodatni wyraz. Wiadomo ponadto, że jeśli na przecięciu wiersza i kolumny znajduje się pole z liczbą dodatnią, to sumy wyrazów w tym wierszu i kolumnie są równe. Udowodnić, że $m = n$.

Rozwiązanie:

Rozważmy graf, którego wierzchołki stanowią pola tablicy, w które wpisane zostały liczby dodatnie, a dwa pola połączone są krawędzią, jeśli leżą one w jednej kolumnie lub w jednym wierszu. Zauważmy, że każda składowa spójna naszego grafu odpowiada pewnej podtablicy wyjściowej tablicy, którą tworzymy poprzez wybranie wierszy i kolumn zawierających pola z danej składowej spójnej oraz wybraniu pól z ich wszystkich przecięć. Utworzona w ten sposób podtablica ma wymiary $k \times l$, gdzie k oznacza liczbę wierszy zawierających co najmniej jedno pole z danej spójnej składowej, zaś l oznacza liczbę kolumn o tej samej własności. Skoro każdy wiersz i każda kolumna zawierają chociaż jedno pole z liczbą dodatnią, to każdy wiersz i każda kolumna występują jako część dokładnie jednej podtablicy odpowiadającej pewnej składowej grafu. Aby zatem udowodnić, że liczba wierszy w tablicy równa jest liczbie kolumn, wystarczy wykazać, że wymiary dowolnej podtablicy odpowiadającej pewnej składowej są równe.

Rozważmy więc podtablicę $k \times l$ odpowiadającą pewnej składowej spójnej grafu i niech S oznacza sumę elementów w pierwszym wierszu tej podtablicy. Ze spójności i warunku danego w zadaniu wynika, że w dowolnym wierszu i dowolnej kolumnie rozważanej podtablicy suma elementów wynosi S. Sumując po wierszach suma elementów w całej tablicy wynosi kS, a po kolumnach lS. A zatem $kS = lS$ i skoro $S > 0$, to $k = l$. Na mocy wcześniejszych rozważań wynika stąd, że $m = n$ i dowód jest zakończony.

8. Dane są takie liczby całkowite dodatnie k, n, że $k \leqslant n - 1$. Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są niepustymi podzbiorami zbioru n-elementowego S. Udowodnić, że można pokolorować pewne elementy zbioru S dwoma kolorami w taki sposób, że spełnione są następujące warunki:

- Każdy element zbioru S jest albo niepokolorowany albo pokolorowany na jeden z dwóch kolorów.
- Przynajmniej jeden element zbioru S jest pokolorowany.
- Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ zbiór A_i jest albo całkowicie niepokolorowany albo zawiera elementy obu kolorów.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ i rozważmy układ równań

$$\sum_{j \in A_i} x_j = 0 \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Skoro $k \leqslant n - 1$ to posiada on rozwiązanie rzeczywiste $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Jeśli $1 \leqslant j \leqslant n$, to kolorujemy element j na czarno gdy $x_j > 0$, na biało gdy $x_j < 0$ oraz nie kolorujemy go wcale gdy $x_j = 0$. Ponieważ co najmniej jedna z liczb x_j jest niezerowa pokolorowany został co najmniej element zbioru S. Pozostaje więc sprawdzić, że jeśli zbiór A_i nie jest całkowicie niepokolorowany, to zawiera elementy obu kolorów. Istotnie, załóżmy, że zawiera on element czarny – wówczas $x_r > 0$ dla pewnego $r \in A_i$. Ale skoro $\sum_{j \in A_i} x_j = 0$, to musi w tej sumie pojawić się również składnik ujemny, a zatem $x_s < 0$ dla pewnego $s \in A_i$. Oznacza to, że zbiór A_i posiada element biały. W analogiczny sposób dowodzimy, że z istnienia elementu białego wynika istnienie czarnego. Kończy to dowód.

9. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Półproste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie P, a półproste $AD^{\rightarrow}$ i $BC^{\rightarrow}$ w punkcie Q. Punkt O leży wewnątrz czworokąta $ABCD$ i spełnia warunek $\angle BOP = \angle DOQ$. Udowodnić, że $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

Rozwiązanie:
Wykorzystamy następujące dwa fakty:

Fakt 1. Dana jest elipsa o ogniskach O i O' oraz punkt P leżący na zewnątrz tej elipsy. Proste PK i PL są styczne do tej elipsy odpowiednio w punktach K i L. Wówczas $\angle POK = \angle POL$.

Fakt 2. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Wówczas istnieje elipsa wpisana w trójkąt ABC, której jednym z ognisk jest punkt O.

Dowód faktu 1 można znaleźć w Broszurze 51. Olimpiady Matematycznej (str. 107), zaś fakt 2 wynika natychmiast z twierdzenia 4 (str. 108). Wykorzystując powyższe dwa fakty udowodnimy dwa lematy, z których bezpośrednio wynika teza zadania.

Lemat 1. Punkt O leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Półproste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie P, a półproste $AD^{\rightarrow}$ i $BC^{\rightarrow}$ w punkcie Q. Wówczas $\angle BOP = \angle DOQ$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje elipsa wpisana w czworokąt $ABCD$, której jednym z ognisk jest punkt O.

Dowód lematu. Załóżmy najpierw, że punkt O jest jednym z ognisk elipsy wpisanej w czworokąt $ABCD$. Niech K, L, M i N będą punktami styczności tej elipsy odpowiednio z odcinkami AB, BC, CD i DA. Wykorzystując fakt 1. dostajemy równości

$$\angle POK = \angle POM, \quad \angle BOK = \angle BOL, \quad \angle COL = \angle COM.$$

Wówczas

$$2\angle POK = \angle POK + \angle POM = \angle BOK + \angle BOL + \angle COL + \angle COM$$

$$= 2\angle BOK + 2\angle COM.$$

Wynika stąd że

$$\angle BOP = \angle POK - \angle BOK = \angle COM.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\angle DOQ = \angle COL$, co wraz z równością $\angle COL = \angle COM$ daje zależność $\angle BOP = \angle DOQ$ i kończy dowód implikacji w lewą stronę.

Załóżmy teraz, że spełniona jest równość $\angle BOP = \angle DOQ$. Na mocy faktu 2 wnosimy, że punkt O jest jednym z ognisk elipsy e wpisanej w trójkąt ABQ. Przypuśćmy, że prosta DP nie jest styczna do tej elipsy. Wybierzmy na odcinku AQ taki punkt D', że prosta $D'P$ jest styczna do elipsy e. Wówczas $\angle D'OQ \neq \angle DOQ$. Z drugiej strony wykorzystując poprzednio udowodnioną implikację dostajemy

$$\angle D'OQ = \angle BOP = \angle DOQ.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód drugiej implikacji.

Lemat 2. Punkt O leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Półproste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie P, a półproste $AD^{\rightarrow}$ i $BC^{\rightarrow}$ w punkcie Q. Wówczas $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje elipsa wpisana w czworokąt $ABCD$, której jednym z ognisk jest punkt O.

Dowód lematu. Załóżmy najpierw, że punkt O jest jednym z ognisk elipsy wpisanej w czworokąt $ABCD$. Niech K, L, M i N będą punktami styczności tej elipsy odpowiednio z odcinkami AB, BC, CD i DA. Wykorzystując fakt 1. dostajemy równości

$$\angle AOK = \angle AON, \quad \angle BOK = \angle BOL, \quad \angle COL = \angle COM, \quad \angle DOM = \angle DON.$$

Wówczas

$$\angle AOB + \angle COD = \angle AOK + \angle BOK + \angle COM + \angle DOM$$
$$= \frac{1}{2}(\angle KON + \angle KOL + \angle LOM + \angle MON) = 180^\circ.$$

Załóżmy teraz, że $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. Na mocy faktu 2 wnosimy, że punkt O jest jednym z ognisk elipsy e wpisanej w trójkąt ABQ. Przypuśćmy, że prosta CD nie jest styczna do tej elipsy. Wybierzmy na odcinku AQ taki punkt D', że prosta CD' jest styczna do elipsy e. Wówczas $\angle COD' \neq \angle COD$. Z drugiej strony wykorzystując poprzednio udowodnioną implikację dostajemy

$$\angle COD' = 180^\circ - \angle AOB = \angle COD.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód drugiej implikacji.

10. Okrąg o_1 jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie P. Okrąg o_2 jest styczny do półprostych $CA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ oraz jest styczny zewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie Q. Wykazać, że

$$\frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

Rozwiązanie:

Niech P' i Q' będą punktami styczności z odcinkiem AB odpowiednio okręgu dopisanego do trójkąta ABC i okręgu wpisanego w ten trójkąt. Rozpatrzmy przekształcenie f będące złożeniem inwersji o środku C i promieniu $\sqrt{CA \cdot CB}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta ACB. Zauważmy, że $f(A) = B$, $f(B) = A$, $f(CA^{\rightarrow}) = CB^{\rightarrow}$ oraz $f(CB^{\rightarrow}) = CA^{\rightarrow}$. Przekształcenie f przeprowadza ponadto prostą AB na okrąg opisany na trójkącie ABC i na odwrót. Obrazem okręgu o_1 jest więc okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny do boku AB, a obrazem punktu P jest punkt P'. Okrąg o_2 przechodzi natomiast na okrąg wpisany w trójkąt ABC, zaś punkt Q na punkt Q'.

Wykorzystując wzór na odległość obrazów inwersyjnych otrzymujemy

$$AP' = AP \cdot \frac{CA \cdot CB}{CA \cdot CP}, \quad AQ' = AQ \cdot \frac{CA \cdot CB}{CA \cdot CQ},$$

$$BP' = BP \cdot \frac{CA \cdot CB}{CB \cdot CP}, \quad BQ' = BQ \cdot \frac{CA \cdot CB}{CB \cdot CQ}.$$

Wykorzystując równości $AP' = BQ'$ i $AQ' = BP'$ oraz powyższe zależności dostajemy

$$1 = \frac{AP' \cdot AQ'}{BP' \cdot BQ'} = \frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ} \cdot \frac{(CB \cdot CP) \cdot (CB \cdot CQ)}{(CA \cdot CP) \cdot (CA \cdot CQ)} = \frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ} \cdot \frac{CB^2}{CA^2},$$

skąd natychmiast wynika teza.

11. Spodki wysokości pewnego czworościanu są różne od ortocentrów ścian, do których zostały poprowadzone. Wykazać, że płaszczyzny zawierające te wysokości i ortocentra ścian, do których zostały poprowadzone, przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Oznaczmy wierzchołki danego czworościanu przez A, B, C, D. Niech ponadto O będzie środkiem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$, zaś G jego środkiem ciężkości. Udowodnimy, że obraz symetryczny O' punktu O względem punktu G należy do każdej z rozważanych w treści zadania płaszczyzn. Wystarczy to wykazać dla płaszczyzny zawierającej wysokość czworościanu poprowadzoną z wierzchołka D i ortocentrum H_D trójkąta ABC, gdyż dla pozostałych płaszczyzn dowód jest analogiczny.

Jeśli trójkąt ABC jest równoboczny, to punkty O i G leżą w płaszczyźnie zawierającej wysokość czworościanu poprowadzoną z wierzchołka D i ortocentrum trójkąta ABC (bowiem rzut prostokątny punktu O na płaszczyznę ABC jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC i pokrywa się ze środkiem ciężkości i ortocentrum tego trójkąta). W takim razie w tej płaszczyźnie leży także punkt O'.

Załóżmy teraz, że trójkąt ABC nie jest równoboczny. W takim razie środek O_D okręgu opisanego na tym trójkącie, jego ortocentrum H_D oraz jego środek ciężkości G_D są różne. Ponadto z twierdzenia o prostej Eulera wynika, że punkty te leżą na jednej prostej oraz $G_DH_D = 2O_DG_D$. Punkt O_D jest rzutem prostokątnym punktu O na płaszczyznę ABC. Niech S będzie punktem przecięcia prostej OG_D z prostą przechodzącą przez punkt H_D i prostopadłą do płaszczyzny ABC. Z twierdzenia Talesa wnosimy, że

$$\frac{OG_D}{G_DS} = \frac{O_DG_D}{G_DH_D} = \frac{1}{2},$$

skąd $\frac{OS}{G_DS} = \frac{3}{2}$. Mamy ponadto $\frac{GG_D}{DG_D} = \frac{1}{3}$, co daje $\frac{G_DD}{DG} = \frac{4}{3}$. Stosując twierdzenie Menelausa dla trójkąta OG_DG i prostej DS dostajemy

$$\frac{OS}{G_DS} \cdot \frac{G_DD}{DG} \cdot \frac{GO'}{OO'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

To zaś oznacza, że punkty D, O' i S leżą na jednej prostej. Płaszczyzna zawierająca wysokość czworościanu poprowadzoną z wierzchołka D i punkt H_D jest prostopadła do płaszczyzny ABC, a więc zawiera również punkt S. W takim razie prosta DS także leży w tej płaszczyźnie, a wraz z nią punkt O'. Rozwiązanie zadania jest zakończone.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $f(x)$ o współczynnikach całkowitych, które spełniają następujący warunek: dla dowolnej liczby pierwszej p i liczb całkowitych dodatnich x, y takich, że $p|xy-1$ zachodzi podzielność $p|f(x)f(y)-1$.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący fakt: dla dowolnej liczby pierwszej p i dla dowolnej niezerowej reszty x z dzielenia przez p istnieje dokładnie jedna niezerowa reszta y taka, że $xy \equiv 1 \pmod{p}$. Resztę y o tej własności nazywa się *odwrotnością* x modulo p.

Niech $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, gdzie n oznacza stopień danego wielomianu. Jasne jest, że wśród wielomianów stałych dany warunek spełniają tylko wielomiany tożsamościowo równe 1 lub tożsamościowo równe -1. Przyjmijmy więc, że $n > 0$ i rozważmy wielomian $g(x) = x^n f(\frac{1}{x})$. Jest to wielomian o współczynnikach całkowitych, którego współczynniki występują w odwrotnej kolejności niż w wielomianie f. Rozważmy też dowolną liczbę pierwszą p i dowolną liczbę całkowitą x niepodzielną przez p. Niech y będzie odwrotnością x modulo p, czyli $p|xy-1$. Zauważmy teraz, że

$$x^n f(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^n y^i \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \pmod{p}.$$

Z warunku danego w treści zadania wynika więc, że dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnej liczby całkowitej x niepodzielnej przez p spełniona jest kongruencja

$$f(x) \cdot g(x) \equiv f(x) \cdot \left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \equiv f(x) \cdot (x^n f(y)) \equiv x^n \pmod{p}.$$

Rozważmy wielomian $h(x) = f(x) \cdot g(x) - x^n$. Ustalmy $x \neq 0$ i wybierzmy liczbę pierwszą p w taki sposób, aby $p > \max\{|h(x)|, |x|\}$. Wówczas x nie dzieli się przez p, a zatem $p|h(x)$. To jednak oznacza, że $h(x) = 0$. Wykazaliśmy w ten sposób, że wielomian $h(x)$ zeruje się dla dowolnego niezerowego argumentu, a zatem $h(x)$ jest wielomianem zerowym. Zauważmy teraz, że jeżeli wielomian $f(x)$ posiada pewien niezerowy współczynnik różny od współczynnika wiodącego, to wielomian $f(x) \cdot g(x)$ jest stopnia większego niż n, co przeczy temu, że $h(x) \equiv 0$. Wielomian $f(x)$ musi być więc postaci $f(x) = ax^n$. Pozostaje zauważyć, że wśród wielomianów tej postaci dany warunek spełniają te, dla których $a = \pm 1$. Wraz z wielomianami stałymi $f(x) \equiv \pm 1$ są to wszystkie rozwiązania zadania.

2. Dana jest liczba pierwsza p postaci $4k+3$. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają równanie

$$a^{2p} + b^{2p} + c^{2p} = d^{2p}.$$

Udowodnić, że $p|abc$.

Rozwiązanie:

Możemy oczywiście przyjąć, że $abcd \neq 0$. Dzieląc obie strony równania przez największy wspólny dzielnik liczb a, b, c, d możemy ponadto założyć, że $\mathrm{NWD}(a, b, c, d) = 1$. W tej sytuacji przynajmniej jedna z liczb a, b, c jest nieparzysta. Załóżmy, że dokładnie dwie z tych liczb są nieparzyste. Ponieważ $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ dla nieparzystych liczb całkowitych x oraz $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ dla parzystych liczb całkowitych x, to

$$2 \equiv a^{2p} + b^{2p} + c^{2p} \equiv d^{2p} \equiv 0 \pmod 4,$$

a to oznacza sprzeczność. A zatem dokładnie jedna lub wszystkie z liczb a, b, c są nieparzyste i w szczególności d też jest liczbą nieparzystą. Przyjmijmy bez straty ogólności, że liczba c jest nieparzysta. Dane równanie możemy przepisać w postaci

$$\begin{aligned} a^{2p} + b^{2p} = d^{2p} - c^{2p} &= (d^2 - c^2) \cdot \frac{d^{2p} - c^{2p}}{d^2 - c^2} \\ &= (d^2 - c^2)(d^{2p-2} + d^{2p-4}c^2 + \ldots + d^2 c^{2p-4} + c^{2p-2}). \end{aligned}$$

Skoro $d^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 4$, to

$$d^{2p-2} + d^{2p-4}c^2 + \ldots + d^2 c^{2p-4} + c^{2p-2} \equiv \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{p} \equiv p \equiv 3 \pmod 4.$$

Niech q będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $\frac{d^{2p}-c^{2p}}{d^2-c^2}$ wchodzącym do jej rozkładu na czynniki pierwsze z potęgą $\alpha > 0$. Jeśli $q \equiv 1 \pmod 4$ lub $2|\alpha$ to $q^\alpha \equiv 1 \pmod 4$. Wynika stąd, że istnieje liczba pierwsza q postaci $4k+3$ dzieląca liczbę $\frac{d^{2p}-c^{2p}}{d^2-c^2}$ w nieparzystej potędze α. Załóżmy na razie, że q nie dzieli liczby $d^2 - c^2$. Z równości

$$a^{2p} + b^{2p} = (d^2 - c^2) \cdot \frac{d^{2p} - c^{2p}}{d^2 - c^2}$$

wynika wówczas, że q dzieli liczbę $a^{2p} + b^{2p}$ również w dokładnie potędze α. Niech $a = q^\beta a_0$, $b = q^\gamma b_0$, gdzie liczby a_0 i b_0 nie dzielą się przez q. Załóżmy najpierw, że $\beta < \gamma$. Wtedy

$$a^{2p} + b^{2p} = q^{2\beta}(a_0^{2p} + q^{2\gamma - 2\beta} b_0^{2p}).$$

W szczególności q dzieli liczbę $a^{2p} + b^{2p}$ w potędze parzystej 2β, co przeczy poprzedniej części rozumowania. Analogicznie uzyskujemy sprzeczność w przypadku $\beta > \gamma$. Załóżmy więc dalej, że $\beta = \gamma$. Wówczas

$$q^\alpha | a^{2p} + b^{2p} = q^{2\beta}(a_0^{2p} + b_0^{2p}),$$

przy czym liczby a_0 i b_0 nie dzielą się przez q. Ponieważ α jest liczbą nieparzystą prawdziwa jest podzielność
$$q|a_0^{2p}+b_0^{2p}.$$
Wykorzystując przystawanie $q\equiv 3 \pmod 4$ wykażemy, że powyższa podzielność prowadzi do sprzeczności. Istotnie, po podniesieniu obu stron kongruencji
$$a_0^{2p}\equiv -b_0^{2p} \pmod q,$$
do nieparzystej potęgi $\frac{q-1}{2}$ i korzystając z małego twierdzenia Fermata otrzymujemy ciąg przystawań
$$1\equiv a_0^{p(q-1)}\equiv (-1)^{\frac{q-1}{2}}b_0^{p(q-1)}\equiv -1 \pmod p,$$
który daje oczywistą sprzeczność.

Wykazaliśmy w ten sposób, że $q|d^2-c^2$. Zauważmy, że w tym przypadku liczby a i b również dzielą się przez q, gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy użyć małego twierdzenia Fermata tak jak w poprzednim fragmencie rozumowania i uzyskać sprzeczność w identyczny sposób. W szczególności, liczba q nie dzieli c i d, gdyż inaczej wszystkie liczby a,b,c,d dzieliłyby się przez q, a to przeczyłoby założeniu z początku rozwiązania. Zauważmy teraz, że skoro $d^2\equiv c^2 \pmod q$, to
$$0\equiv \frac{d^{2p}-c^{2p}}{d^2-c^2}=d^{2p-2}+d^{2p-4}c^2+\ldots+d^2c^{2p-4}+c^{2p-2}\equiv pc^{2p-2} \pmod q,$$
a stąd $q=p$. A zatem p dzieli liczby a i b i rozwiązanie zadania jest zakończone.

3. Dana jest liczba pierwsza $p>2$ oraz liczba całkowita $0\leqslant r\leqslant p-1$. Wyznaczyć liczbę ciągów $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{\frac{p-1}{2}})$ o wyrazach w zbiorze $\{-1,1\}$, dla których
$$\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\ldots+\frac{p-1}{2}\varepsilon_{\frac{p-1}{2}}\equiv r \pmod p.$$

Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby całkowitej $0\leqslant r\leqslant p-1$ oznaczmy przez c_r szukaną liczbę ciągów. Niech $\omega\in\mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym p-go stopnia z jedności, czyli taką liczbą zespoloną, że $\omega^p=1$ oraz $\omega\neq 1$. Niech $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ będzie funkcją daną wzorem $f(z)=\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(z^i+z^{-i})$. Po wymnożeniu przez siebie wszystkich nawiasów występujących w definicji funkcji f otrzymujemy sumę jednomianów postaci $z^{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\ldots+\frac{p-1}{2}\varepsilon_{\frac{p-1}{2}}}$, gdzie $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$. Rozważmy wielomian $g(z)$ powstały przez zastąpienie wszystkich potęg występujących w jednomianach w $f(z)$ przez ich resztę z dzielenia przez p. Wówczas łatwo zauważyć, że $g(z)=\sum_{i=0}^{p-1}c_iz^i$, gdyż c_i jest równe liczbie składników postaci

$z^{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\ldots+\frac{p-1}{2}\varepsilon_{\frac{p-1}{2}}}$, które modulo p redukują się do z^i dla $i=0,1,2,\ldots,p-1$. Co więcej, jasne jest też, że $g(\omega)=f(\omega)$, gdyż wartość ω^i dla $i\in\mathbb{Z}$ zależy tylko od reszty i modulo p.

Wyznaczymy teraz wartość $f(\omega)^2$. Zauważmy, że

$$f(\omega)^2=\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^i+\omega^{-i})\cdot\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^{-i}+\omega^i)=\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^i+\omega^{-i})\cdot\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^{p-i}+\omega^{i-p})$$

$$=\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega^i+\omega^{-i})\cdot\prod_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(\omega^i+\omega^{-i})=\prod_{i=1}^{p-1}(\omega^i+\omega^{-i})=\omega^{-(1+2+\ldots+(p-1))}\prod_{i=1}^{p-1}(1+\omega^{2i}).$$

Ponieważ liczba $1+2+\ldots+(p-1)=\frac{p(p-1)}{2}$ dzieli się przez p, zaś liczby $2\cdot1,2\cdot2,\ldots,2\cdot(p-1)$ dają parami różne reszty z dzielenia przez p otrzymujemy ostatecznie

$$f(\omega)^2=\omega^{-(1+2+\ldots+(p-1))}\prod_{i=1}^{p-1}(1+\omega^{2i})=1\cdot\prod_{i=1}^{p-1}(1+\omega^i)=\prod_{i=1}^{p-1}(1+\omega^i).$$

Rozważmy wielomian $h(z)=z^{p-1}+z^{p-2}+\ldots+z+1$. Ponieważ $h(z)=\frac{z^p-1}{z-1}$ dla $z\neq1$ pierwiastki wielomianu h to pierwiastki p-go stopnia z jedności różne od 1, czyli liczby $\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{p-1}$. Zachodzi więc równość

$$h(z)=(z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{p-1}).$$

A zatem

$$1=h(-1)=(-1-\omega)(-1-\omega^2)\ldots(-1-\omega^{p-1})=(-1)^{p-1}\prod_{i=1}^{p-1}(1+\omega^i)=f(\omega)^2.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że $f(\omega)=\pm1$.

Zauważmy teraz, że

$$0=g(\omega)-f(\omega)=g(\omega)\pm1.$$

Na mocy lematu z rozwiązania zadania 5 z Pierwszego Meczu Matematycznego, wielomian $g(z)\pm1$ dzieli się przez wielomian $h(z)$. Ponieważ współczynniki wielomianu g są całkowite istnieje taka liczba całkowita m, że

$$g(z)=mz^{p-1}+mz^{p-2}+\ldots+mz+(m\pm1).$$

W szczególności, każda niezerowa reszta modulo p ma jednakową liczbę przedstawień żądanej postaci, zaś liczba przedstawień reszty zerowej różni się o 1. Pozostaje stwierdzić kiedy jest ona większa o 1, a kiedy jest mniejsza o 1.

Ponieważ wyrażen postaci $\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \ldots + \frac{p-1}{2}\varepsilon_{\frac{p-1}{2}}$, gdzie $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, jest dokładnie $2^{\frac{p-1}{2}}$ zachodzi równość $pm \pm 1 = 2^{\frac{p-1}{2}}$ lub równoważnie, $m = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} \pm 1}{p}$. W szczególności liczba $\frac{2^{\frac{p-1}{2}} \pm 1}{p}$ jest całkowita. Z **kryterium Eulera** reszta z dzielenia liczby $2^{\frac{p-1}{2}}$ przez p jest równa 1, gdy 2 jest resztą kwadratową modulo p i jest równa -1 w przeciwnym wypadku. Wiadomo ponadto, że liczba 2 jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv \pm 1 \pmod 8$. Podsumowując, jeśli $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, to dla dowolnej niezerowej reszty istnieje $\frac{2^{\frac{p-1}{2}} - 1}{p}$ żądanych przedstawień, zaś liczba przedstawień reszty zerowej wynosi $\frac{2^{\frac{p-1}{2}} + p - 1}{p}$. Gdy $p \equiv \pm 3 \pmod 8$, to dowolna niezerowa reszta posiada dokładnie $\frac{2^{\frac{p-1}{2}} + 1}{p}$ przedstawień w żądanej postaci, a reszta zerowa posiada ich $\frac{2^{\frac{p-1}{2}} - p + 1}{p}$. Kończy to rozwiązanie zadania.

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych x, y równanie

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że funkcja $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniająca warunek dany w zadaniu jest funkcją stałą.

Niech S będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych k o następującej własności: dla dowolnej liczby wymiernej x zachodzi równość $f(kx) = f(x)$. Oczywiście $1 \in S$. Co więcej, podstawiając $y := 2x$ do danego warunku otrzymujemy równość $f(x) = f(2x)$, która dowodzi, że $2 \in S$. Zauważmy dalej, że jeśli $a, b \in S$, to również $3a - b \in S$, gdyż biorąc $x := (3a - b)x, y := bx$ dostajemy

$$f(x) = f(ax) = f\left(\frac{(3a-b)x + bx}{3}\right) = \frac{f((3a-b)x) + f(bx)}{2}$$

$$= \frac{f((3a-b)x) + f(x)}{2},$$

a stąd już wynika, że $f(x) = f((3a - b)x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{Q}$. Jasne jest ponadto, że jeśli $a, b \in S$, to również $ab \in S$. Rozumując indukcyjnie po $|k|$ dla $k \in \mathbb{Z}$ wykażemy, że dowolna liczba całkowita $k \neq 0$ należy do S. Zauważmy, że $4 = 2 \cdot 2 \in S$, $-1 = 3 \cdot 1 - 4 \in S$, $-2 = 3 \cdot (-1) - (-1) \in S$ co dowodzi tezy dla $|k| \leqslant 2$. Do przeprowadzenia kroku indukcyjnego wystarczy dowieść, że dowolna liczba całkowita k o module nie mniejszym niż 3 może być zapisana w postaci $3a-b$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi o module mniejszym niż $|k|$. Zauważmy w tym celu, że dla liczb całkowitych $a = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$, $b = -3\{\frac{k}{3}\}$ zachodzi równość $k = 3a - b$ oraz nierówności $|a| \leqslant \left|\frac{k}{3}\right| < |k|$, $|b| \leqslant 2 < |k|$. Dowodzi to, iż dowolna liczba całkowita $k \neq 0$ należy do zbioru S.

Niech teraz $x = \frac{p}{q}$ oraz $y = \frac{r}{s}$ będą dowolnymi niezerowymi liczbami wymiernymi. Wówczas

$$f(x) = f(qx) = f(p) = f(p \cdot 1) = f(1) = f(r \cdot 1) = f(r) = f(sy) = f(y),$$

co dowodzi, że funkcja f jest stała na zbiorze $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Skoro

$$f(0) = f\left(\frac{(-1)+1}{3}\right) = \frac{f(-1)+f(1)}{2} = f(1),$$

to funkcja f jest stała także na całym zbiorze liczb wymiernych. Pozostaje zauważyć, że każda taka funkcja spełnia warunek dany w zadaniu.

5. Dane są liczby dodatnie a, b, c. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie x, y, z, dla których spełnione są równości

$$x + y + z = a + b + c \quad \text{oraz} \quad 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy następujący

Lemat. *Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C$ dla A, B, C będących miarami kątów pewnego trójkąta ostrokątnego.*

Dowód lematu. Sprawdźmy najpierw, że cosinusy kątów dowolnego trójkąta ostrokątnego spełniają powyższą równość. Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\cos A = \cos(\pi - (B + C)) = -\cos(B + C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C,$$

gdzie w drugiej równości wykorzystaliśmy założenie $B + C < \frac{\pi}{2}$. a zatem

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C$$

$$= (\cos A + \cos B \cos C)^2 + 1 - (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C)$$

$$= (\sin B \sin C)^2 + 1 - \sin^2 B \sin^2 C = 1.$$

Aby udowodnić implikację przeciwną, zauważmy, że jeśli liczby dodatnie x, y, z spełniają dany warunek, to oczywiście $x^2 + y^2 < 1$. W szczególności, równanie kwadratowe zmiennej z

$$z^2 + 2xyz + (x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie. Jeśli więc $x = \cos A$, $y = \cos B$ dla $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$, to z poprzedniej części rozumowania mamy $z = \cos C$, gdzie $C = \pi - (A + B)$. Kończy to dowód lematu.

Przechodzimy do głównej części rozwiązania. Zauważmy, że drugie z równań możemy przepisać w postaci

$$\frac{a^2}{4yz} + \frac{b^2}{4zx} + \frac{c^2}{4xy} + \frac{abc}{4xyz} = 1.$$

Dokonajmy podstawienia $x_1 = \frac{a}{2\sqrt{yz}}, y_1 = \frac{b}{2\sqrt{zx}}, z_1 = \frac{c}{2\sqrt{xy}}$. Wówczas liczby dodatnie x_1, y_1, z_1 spełniają warunek z lematu, a zatem $x_1 = \cos A$, $y_1 = \cos B$, $z_1 = \cos C$ dla A, B, C będących miarami kątów pewnego ostrokątnego trójkąta.

Dodając stronami równości $2\sqrt{yz}\cos A = a$, $2\sqrt{zx}\cos B = b$, $2\sqrt{xy}\cos C = c$ oraz korzystając z pierwszej z równości danych w treści zadania otrzymujemy

$$x + y + z - 2\sqrt{yz}\cos A - 2\sqrt{zx}\cos B - 2\sqrt{xy}\cos C = 0.$$

Jednocześnie

$$\begin{gathered}
x + y + z - 2\sqrt{yz}\cos A - 2\sqrt{zx}\cos B - 2\sqrt{xy}\cos C \\
= x + y + z - 2\sqrt{yz}\cos A - 2\sqrt{zx}\cos B + 2\sqrt{xy}(\cos A\cos B - \sin A\sin B) \\
= x(\sin B + \cos^2 B) + y(\sin^2 A + \cos^2 A) + z - 2\sqrt{yz}\cos A - 2\sqrt{zx}\cos B \\
+2\sqrt{xy}(\cos A\cos B - \sin A\sin B) \\
= (\sqrt{x}\sin B - \sqrt{y}\sin A)^2 + (\sqrt{x}\cos B + \sqrt{y}\cos A - \sqrt{z})^2.
\end{gathered}$$

Oba składniki powyższej sumy są zatem równe 0, a więc w szczególności

$$\sqrt{z} = \sqrt{x}\cos B + \sqrt{y}\cos A = \sqrt{x}\cdot\frac{b}{2\sqrt{zx}} + \sqrt{y}\cdot\frac{a}{2\sqrt{yz}} = \frac{b+a}{2\sqrt{z}},$$

a stąd $z = \frac{a+b}{2}$. Analogicznie dowodzimy, że $y = \frac{c+a}{2}$ oraz $x = \frac{b+c}{2}$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że dla takiej trójki liczb (x, y, z) spełnione są dane w treści zadania równości. Podana trójka stanowi więc jedyne rozwiązanie.

6. Dla liczby całkowitej dodatniej n określamy

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad T_n = \frac{d(1) + d(2) + \ldots + d(n)}{n},$$

gdzie $d(k)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby k. Wykazać, że

$$|H_n - T_n| \leqslant 1,$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

Rozwiązanie:

Wykażemy najpierw, że dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$d(1) + \ldots + d(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor .$$

Rzeczywiście, lewa strona równania zlicza dzielniki kolejnych liczb od 1 do n. Prawa strona natomiast dla każdej liczby $i = 1, 2, \ldots, n$ zlicza dla ilu liczb od 1 do n jest ona jej dzielnikiem – i jest bowiem dzielnikiem każdej z liczb $i, 2i, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \cdot i$, czyli jest dzielnikiem dokładnie $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ z tych liczb liczb. Obie strony równości zliczają więc łączną liczbę dzielników liczb od 1 do n.

Wykorzystując udowodnioną równośćdostajemy

$$T_n = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(\frac{n}{1} - \left\{\frac{n}{1}\right\}\right) + \left(\frac{n}{2} - \left\{\frac{n}{2}\right\}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n} - \left\{\frac{n}{n}\right\}\right)\right) =$$

$$= H_n - \frac{1}{n}\left(\left\{\frac{n}{1}\right\} + \left\{\frac{n}{2}\right\} + \ldots + \left\{\frac{n}{n}\right\}\right).$$

Jednakże

$$\frac{1}{n}\left(\left\{\frac{n}{1}\right\} + \left\{\frac{n}{2}\right\} + \ldots + \left\{\frac{n}{n}\right\}\right) \leqslant \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

skąd dostajemy tezę zadania.

7. Na płaszczyźnie narysowano n różnych prostokątów. Udowodnić, że istnieje co najmniej $4\sqrt{n}$ różnych kątów prostych będących kątami wewnętrznymi co najmniej jednego z danych prostokątów.

Rozwiązanie:

Wszystkie kąty proste będące kątem wewnętrznym pewnego z danych prostokątów można zakwalifikować do jednej z czterech grup: do kątów odpowiadających lewemu dolnemu rogowi prostokąta, lewemu górnemu, prawemu dolnemu oraz prawemu górnemu. Rozważmy kąty proste odpowiadające lewym dolnym i prawym górnym rogom prostokątów. Oznaczmy liczbę kątów z pierwszej grupy przez a, zaś z drugiej przez b. Każdy z danych prostokątów wyznaczony jest przez swój lewy dolny i prawy górny róg, a każda para kątów prostych, z których pierwszych jest z pierwszej, a drugi z drugiej grupy, wyznacza dokładnie jeden prostokąt. W szczególności, liczba prostokątów nie przekracza liczby takich par kątów prostych. A zatem

$$n \leqslant ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

skąd $a+b \geqslant 2\sqrt{n}$. Analogicznie dowodzimy, że istnieje co najmniej $2\sqrt{n}$ różnych kątów prostych, które odpowiadają lewym górnym i prawym dolnym rogom prostokątów. Łącznie daje to co najmniej $4\sqrt{n}$ kątów prostych i dowód jest zakończony.

8. Każdy okrąg na płaszczyźnie pomalowany został na jeden z trzech kolorów. Niech A będzie nieskończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie. Udowodnić, że istnieje taki nieskończony podzbiór B zbioru A, że dowolny okrąg zawierający co najmniej trzy punkty zbioru B jest tego samego koloru.

Rozwiązanie:

Wykażemy następujący

Lemat. *Niech G będzie grafem o nieskończonym zbiorze wierzchołków, z których każde dwa połączone są krawędzią pomalowaną na jeden ze skończonej liczby kolorów. Wówczas istnieje nieskończony podzbiór wierzchołków grafu G, którego dowolne dwa wierzchołki połączone są krawędzią jednego koloru.*

Dowód lematu. Rozważmy dowolny wierzchołek v_1 grafu G. Ponieważ z v_1 wychodzi nieskończenie wiele krawędzi, a kolorów jest skończenie wiele, istnieje nieskończenie wiele krawędzi wychodzących z v_1 w jednym kolorze. Oznaczmy ten kolor numerem k_1, a zbiór tych wierzchołków, z którymi v_1 połączony jest krawędzia w kolorze k_1 jako V_1. Wybierzmy dowolny wierzchołek $v_2 \in V_1$. Rozumując w identyczny sposób, możemy wybrać pewien kolor k_2 oraz nieskończony podzbiór $V_2 \subset V_1$ taki, że v_2 jest połączony z każdym wierzchołkiem V_2 krawędzią o kolorze k_2. Powtarzając to rozumowanie wielokrotnie otrzymujemy ciąg wierzchołków $v_1, v_2, v_3, \ldots,$, zstępujący ciąg nieskończonych podzbiorów $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ oraz ciąg numerów $k_1, k_2, k_3, \ldots$ o tej własności, że dla dowolnych $i \leqslant j$ wierzchołek v_i połączony jest z każdym wierzchołkiem zbioru V_j krawędzią w kolorze k_i. Pozostaje zauważyć, że skoro kolorów jest skończenie wiele, to ciąg $k_1, k_2, k_3, \ldots$ zawiera nieskończony podciąg stały $k = k_{n_1} = k_{n_2} = k_{n_3} = \ldots$. Zbiór $\{v_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest nieskończonym podzbiorem wierzchołków G, z których każde dwa połączone są krawędzią koloru k. Dowodzi to lematu.

Przechodzimy do głównej części rozwiązania. Dowolny 3-elementowy $\{a, b, c\}$ podzbiór zbioru A malujemy na jeden z czterech kolorów w następujący sposób: jeżeli punkty a, b, c nie są współliniowe to zbiorowi $\{a, b, c\}$ przypisujemy kolor okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach a, b, c. W przeciwnym razie zbiór $\{a, b, c\}$ malujemy na pewien inny ustalony kolor. Teza zadania sprowadza się do wykazania istnienia nieskończonego podzbioru $A' \subset A$, którego dowolny 3-elementowy podzbior pomalowany jest tym samym kolorem.

Posłużymy się rozumowaniem podobnym jak w dowodzie lematu. Rozważmy dowolny punkt $a_1 \in A$. Utwórzmy graf G, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór $A \setminus \{a_1\}$ oraz każde dwa wierzchołki b, c połączone są krawędzią w kolorze odpowiadającym kolorowi podzbioru $\{a_1, b, c\}$. Na mocy lematu istnieje nieskończony podzbiór $A_1 \subset A$ taki, że dla dowolnych $b, c \in A_1$ krawędź łącząca wierzchołki b, c jest pomalowana tym samym kolorem k_1. Oznacza to, że dla dowolnych $b, c \in A_1$ zbiór $\{a_1, b, c\}$ pomalowany jest tym samym kolorem k_1. Wybierzmy więc dowolny punkt $a_2 \in A_1$. Rozumując analogicznie, istnieje nieskończony podzbiór $A_2 \subset A_1$ o tej własności, że dla dowolnych $b, c \in A_2$ zbiór $\{a_2, b, c\}$ jest pomalowany kolorem k_2. Kontynuując w ten sposób otrzymujemy ciąg punktów $a_1, a_2, a_3, \ldots$, zstępujący ciąg nieskończonych podzbiorów $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ oraz ciąg numerów $k_1, k_2, k_3, \ldots$ o tej własności, że dla dowolnych $i \leqslant j \leqslant k$ oraz $b \in A_j, c \in A_k$ zbiór $\{a_i, b, c\}$ pomalowany jest kolorem k_i. Pozostaje zauważyć, że skoro kolorów jest skończenie wiele, to ciąg $k_1, k_2, k_3, \ldots$ zawiera nieskończony podciąg stały $k = k_{n_1} = k_{n_2} = k_{n_3} = \ldots$. Zbiór $A' = \{a_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest nieskończonym podzbiorem zbioru A, którego dowolny 3-elementowy podzbiór pomalowany jest tym samym kolorem k. Kończy to rozwiązanie zadania.

9. W trójkącie ABC punkty K i M leżą na boku AB (punkt K leży pomiedzy punktami M i B) natomiast punkty L i N leżą na boku AC (punkt L leży pomiedzy punktami N i C). Wykazać, że jeśli $\frac{BK}{KM} = \frac{CL}{LN}$ to ortocentra trójkątów ABC, AKL oraz AMN leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Niech H_1 i H_3 będą ortocentrami odpowiednio trójkątów ABC i AMN. Wybierzmy na odcinku H_1H_3 taki punkt H_2, że

$$\frac{H_1H_2}{H_2H_3} = \frac{BK}{KM} = \frac{CL}{LN}.$$

Udowodnimy, że punkt H_2 jest ortocentrum trójkąta AKL.

Punkt H_1 leży na prostej ℓ_B przechodzącej przez punkt B i prostopadłej do prostej AC, zaś punkt H_3 leży na prostej ℓ_M przechodzącej przez punkt M i prostopadłej do prostej AC. Niech S będzie punktem przecięcia prostych H_1K i ℓ_M. Z równoległości prostych ℓ_B i ℓ_M oraz twierdzenia Talesa wnosimy, że

$$\frac{H_1H_2}{H_2H_3} = \frac{BK}{KM} = \frac{H_1K}{KS}.$$

Wykorzystując teraz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa dostajemy, że punkt H_2 leży na prostej przechodzącej przez punkt K i równoległej do ℓ_M, czyli prostopadłej do AC. Analogicznie dowodzimy, że punkt H_2 leży na prostej przechodzącej przez punkt L i prostopadłej do AB. Zatem musi być on ortocentrum trójkąta AKL. Kończy to rozwiązanie zadania.

10. Okrąg o środku S jest dopisany do czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym prosta AC przecina ten okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E i prostopadła do prostej AC przecina proste BS i DS odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że $EP = EQ$.

Rozwiązanie:

Niech K, L, M, N będą punktami styczności okręgu o środku S odpowiednio z prostymi AB, BC, CD, DA. Wówczas

$$AB + BC = AB + BM - CM = AB + BK - CM = AK - CM$$

i podobnie

$$AD + DC = AN - CL.$$

Wykorzystując równości $AK = AN$ i $CL = CM$ dostajemy zależność

$$AB + BC = AD + DC,$$

która oznacza, że punkty B i D leżą na elipsie e o ogniskach A i C. Proste BS i DS są dwusiecznymi kątów zewnętrznych odpowiednio ABC i ADC, a więc są styczne do tej elipsy.

Rozpatrzmy powinowactwo osiowe o osi AC i wektorze $\overrightarrow{v}$ prostopadłym do prostej AC. Długość wektora $\overrightarrow{v}$ dobierzmy tak, aby obrazem elipsy e był pewien okrąg o środku O (punkt O należy do prostej AC, bowiem należał do niej środek elipsy e). Punkty A, C, E, O leżą na osi powinowactwa, więc przejdą na siebie. Niech B', D', S', P', Q' będą obrazami odpowiednio punktów B, D, S, P, Q. Proste $S'B'$ i $S'D'$ są styczne do okręgu o środku O, zaś prosta $P'Q'$ jest prostopadła do prostej AC (bo wektor powinowactwa jest prostopadły do AC). Ponieważ przekształcenie afiniczne zachowuje stosunki odcinków, wystarczy dowieść, że $P'E = Q'E$.

Jeśli $P' = B'$, to $Q' = D'$ i na odwrót — w tym przypadku nie ma więc czego dowodzić. W przeciwnym razie z równości

$$\angle OD'Q' = 90^\circ = \angle OEQ' \quad \text{oraz} \quad \angle OB'Q' = 90^\circ = \angle OEP'$$

wynika, że punkty O, D', Q', E leżą na jednym okręgu oraz, że punkty O, E, B', P' leżą na jednym okręgu. Mamy więc

$$\angle OQ'E = \angle OD'E = \angle OB'E = \angle OP'E.$$

W takim razie $P'E = Q'E$, co kończy rozwiązanie zadania.

11. Ośmiokąt wypukły $ABCDEFGH$ wpisany w okrąg jest podstawą ostrosłupa $ABCDEFGHS$. Przekątne AE, BF, CG i DH tego ośmiokąta przecinają się w jednym punkcie. Wykazać, że istnieje przekrój płaszczyzną tego ostrosłupa mający przeciwległe boki równoległe.

Rozwiązanie:

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AE, BF, CG i DH wielokąta $ABCDEFGH$. Jeśli punkt P pokrywa się ze środkiem okręgu o opisanego na wielokącie $ABCDEFGH$, to wielokąt ten jest środkowosymetryczny, a więc jego przeciwległe boki są równoległe. W takim razie każdy przekrój ostrosłupa płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy również ma tę własność.

Przyjmijmy teraz, że punkt P nie pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na wielokącie $ABCDEFGH$. Weźmy płaszczyznę π zawierającą wierzchołek S ostrosłupa i biegunową punktu P względem okręgu o, a następnie rozpatrzmy przekrój tego ostrosłupa pewną płaszczyzną π' równoległą do płaszczyzny π. Wykażemy, że spełnia on warunki zadania.

Niech A', B', E' i F' będą punktami przecięcia płaszczyzny π' odpowiednio z krawędziami AS, BS, ES i FS. Udowodnimy, że proste $A'B'$ i $E'F'$ są równoległe.

Załóżmy najpierw, że proste AB i EF przecinają się w pewnym punkcie Q. Z twierdzenia 3 *(Broszura 50. Olimpiady Matematycznej, str. 110)* wynika, że punkt P leży na biegunowej punktu Q względem okręgu o. Punkt Q jest leży zatem na biegunowej punktu P. Jeśli bowiem K i L są punktami przecięcia prostej PQ z tym okręgiem, to $(K, L; Q, P) = \frac{1}{(K,L;P,Q)} = 1$. W takim razie prosta SQ leży w płaszczyźnie π, a więc płaszczyzna π' jest z tą prostą rozłączna. Zatem proste $A'B'$ i SQ leżące w płaszczyźnie ABS nie mają punktów wspólnych i w związku z tym są równoległe. Analogicznie dowodzimy, że proste $E'F'$ i SQ są równoległe. Stąd wniosek, że proste $A'B'$ i $E'F'$ także są równoległe.

Załóżmy teraz, że proste AB i EF są równoległe. Wówczas biegunowa punktu P względem okręgu o jest prostopadła (z symetrii) do prostej łączącej punkt P ze środkiem okręgu o, a więc równoległa do prostych AB i EF. W takim razie prosta ℓ będąca częścią wspólną płaszczyzn ABS i EFS jest równoległa do tej biegunowej (bo jest równoległa do prostych AB i EF), a więc leży w płaszczyźnie π. To zaś oznacza, że płaszczyzna π' jest z tą prostą rozłączna. Zatem proste $A'B'$ i ℓ leżące w płaszczyźnie ABS nie mają punktów wspólnych i w związku z tym są równoległe. Analogicznie dowodzimy, że proste $E'F'$ i ℓ są równoległe. W takim razie i w tym przypadku proste $A'B'$ i $E'F'$ są równoległe.

W analogiczny sposób dowodzimy, że proste zawierające pozostałe pary przeciwległych boków rozpatrywanego przekroju płaszczyzną π' są równoległe. Kończy to rozwiązanie zadania.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x oraz dowolnej liczby całkowitej dodatniej n spełniona jest nierówność

$$x^n + \frac{1}{x^n} - 2 \geqslant n^2\left(x + \frac{1}{x} - 2\right).$$

Rozwiązanie:

Załóżmy bez straty ogólności, że $y = \sqrt{x} > 1$. Tożsamość $a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = (a - \frac{1}{a})^2$ sprowadza zadanie do wykazania nierówności

$$y^n - \frac{1}{y^n} \geqslant n\left(y - \frac{1}{y}\right)$$

lub równoważnie $y^{2n} - n(y^{n+1} - y^{n-1}) - 1 \geqslant 0$. Po podzieleniu obu stron przez liczbę dodatnią $y - 1$ otrzymujemy

$$\frac{y^{2n}-1}{y-1} - \frac{ny^{n-1}(y^2-1)}{y-1} = \sum_{i=0}^{2n-1} y^i - n(y^{n-1} + y^n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(y^{2n-1-i} - y^n - y^{n-1} + y^i) = \sum_{i=0}^{n-1} y^i(y^{n-1-i} - 1)(y^{n-i} - 1) \geqslant 0,$$

a to kończy dowód.

2. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg spełniony jest warunek $BC = CD$. Niech ω będzie okręgiem o środku w punkcie C stycznym do BD, a I środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABD. Wykazać, że prosta przechodząca przez I i równoległa do AB jest styczna do okręgu ω.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu posłużymy się kątami skierowanymi. Niech ℓ będzie prostą styczną w punkcie D do okręgu Γ opisanego na czworokącie $ABCD$. Zauważmy, że prosta ℓ jest styczna również do okręgu ω. Rzeczywiście, $\angle(\ell, CD) = \angle DBC = \angle BDC$, co świadczy o tym, że prosta CD dwusieczną kąta o ramionach wyznaczonych przez proste ℓ i BD. A zatem skoro prosta BD jest styczna do ω, prosta ℓ również jest styczna do ω.

Oznaczmy przez E środek łuku DA okręgu Γ (nie zawierającego punktów B i C), a przez ω' okrąg o środku w punkcie E styczny do DA. Rozumowanie analogiczne do powyższego pokazuje, że prosta ℓ jest styczna także do okręgu ω'. Prosta k będącą odbiciem symetrycznym ℓ względem prostej CE jest więc drugą wspólną styczną okręgów ω i ω'. Z powszechnie znanych równości (które są jednocześnie prostym ćwiczeniem) $CD = CI$ oraz $ED = EI$ wynika, że punkty D oraz I są symetryczne względem CE. W szczególności $I \in k$ i pozostało wykazać, że proste k oraz AB są równoległe. Zauważmy jednak, że

$$\angle(k, IC) = \angle(CD, \ell) = \angle CAD = \angle BAC,$$

co dowodzi, że $k \parallel AB$.

3. Niech R będzie zbiorem liczb wymiernych r, dla których prawdziwe jest następujące zdanie: jeśli x jest liczbą rzeczywistą, dla której $x^2 - rx$ i $x^3 - rx$ są liczbami wymiernymi, to x także jest liczbą wymierną. Udowodnić, że:

a) Jeśli r jest wymierne i $r \geqslant \frac{4}{3}$ lub $r \leqslant 0$, to $r \in R$.

b) Jeśli p, q są różnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi, spełniającymi nierówność $3p < 4q$, to $\frac{p}{q} \notin R$.

Rozwiązanie:

a) Załóżmy, że liczby $s = x^2 - rx$ i $t = x^3 - rx$ są wymierne. Wówczas

$$x^3 = x^2 \cdot x = (s + rx)x = sx + rx^2 = sx + r(s + rx) = \big(r^2 + s\big)x + rs,$$

co daje

$$t = x^3 - rx = \big(\big(r^2 + s\big)x + rs\big) - rx = \big(r^2 - r + s\big)x + rs.$$

Jeśli więc tylko $r^2 - r + s \neq 0$ (co możemy zapisać równoważnie jako $x^2 - rx + r^2 - r \neq 0$), to liczba

$$x = \frac{t - rs}{r^2 - r + s}$$

jest wymierna.

Pozostaje zatem sprawdzić, że dla danych r równanie kwadratowe

$$x^2 - rx + r^2 - r = 0,$$

nie posiada niewymiernych pierwiastków. Wyróżnik tego równania jest równy $D = r(3 - 4r)$. Jeżeli $r = \frac{4}{3}$ lub $r = 0$, to $D = 0$ i wówczas jedynym pierwiastkiem danego równania jest liczba $x = \frac{r}{2}$, która jest oczywiście wymierna. W pozostałych przypadkach $D < 0$ i powyższe równanie nie posiada pierwiastków rzeczywistych. Kończy to rozwiązanie tej części zadania.

b) Biorąc pod uwagę pierwszą część rozumowania z punktu *a*), wystarczy sprawdzić, że wyróżnik D równania

$$x^2 - rx + r^2 - r = 0,$$

jest dodatni i liczba $\sqrt{D}$ jest niewymierna. Zauważmy, że

$$D = r(4-3r) = \frac{p}{q}\left(4 - \frac{3p}{q}\right) = \frac{p(4q-3p)}{q^2} > 0.$$

Ponieważ $p \not| 4q$, liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $p(4q-3p)$ z wykładnikiem 1. W szczególności liczba $p(4q-3p)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej i dowód jest zakończony.

4. Dane są liczby całkowite a, b, przy czym b nie jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że $x^2 + ax + b$ jest kwadratem liczby całkowitej jedynie dla skończenie wielu liczb całkowitych x.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że równanie $x^2 + ax + b = y^2$ można przepisać w postaci

$$(2x + 2y + a)(2x - 2y + a) = a^2 - 4b.$$

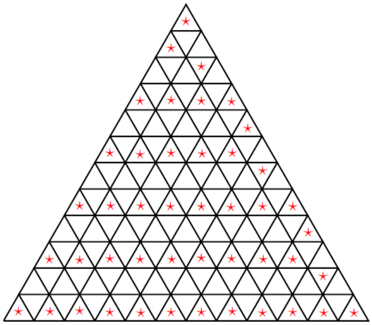
Skoro b nie jest kwadratem liczby całkowitej, to liczba $a^2 - 4b$ jest różna od 0. W szczególności, istnieje jedynie skończenie wiele rozkładów tej liczby na iloczyn dwóch liczb całkowitych. Każdy z takich rozkładów daje układ dwóch równań liniowych na x i y, który ma co najwyżej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych. Istnieje więc jedynie skończenie wiele liczb całkowitych x, dla których liczba $x^2 + ax + b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

5. Trójkąt równoboczny o boku n podzielony został na n^2 komórek będących trójkątami równobocznymi. Niektóre z komórek są zarażone. Co sekundę, wszystkie niezarażone komórki, które sąsiadują bokiem z co najmniej dwoma zarażonymi komórkami, stają się zarażone. Wyznaczyć najmniejszą liczbę komórek, które wystarczy zarazić na początku, żeby po pewnym czasie każda komórka była zarażona, gdy $n = 12$.

Rozwiązanie:

Niech k oznacza liczbę komórek zarażonych na początku. Udowodnimy najpierw, że jeżeli po pewnym czasie cały trójkąt został zarażony, to $k \geqslant 45$. Zauważmy, że po zarażeniu jednej nowej komórki obwód zarażonego obszaru zmniejsza się o co najmniej 1. Obwód zarażonego obszaru na początku wynosi co najwyżej $3k$. Aby cały trójkąt był zarażony, zarażone musi zostać pozostałe $n^2 - k$ komórek i wówczas obwód zarażonego obszaru wynosi $3n$. W szczególności $3n \leqslant 3k - (n^2 - k)$ lub równoważnie $k \geqslant \frac{n^2+3n}{4}$. Dla $n = 12$ ta nierówność daje żądane oszacowanie $k \geqslant 45$.

Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że po zarażeniu 45 komórek tak jak jest to pokazane na rysunku, po pewnym czasie cały trójkąt będzie zarażony.



Rysunek 1: Rozmieszczenie zarażonych komórek dla $k = 45$

A zatem 45 jest najmniejszą możliwą liczbą komórek, które wystarczy zarazić na początku, aby po pewnym czasie każda komórka była zarażona.

6. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω. Punkt P jest środkiem łuku BC okręgu ω zawierającego punkt A. Okrąg o średnicy CP przecina dwusieczną kąta $\angle BAC$ w punktach K i L (punkty A, K, L leżą w tej kolejności na prostej). Ponadto, M jest punktem symetrycznym do L względem prostej BC. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie BKM połowi odcinek BC.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez D środek łuku AC nie zawierającego punktu A, przez N środek boku BC, zaś przez X rzut prostokątny punktu P na prostą AC. Wówczas punkty P, X, K, L, N, C leżą na okręgu o średnicy PC. Zachodzą więc równości

$$\angle PNX = \angle PCA = \angle PDA,$$

z których wynika równoległość prostych XN i KL. Czworokąt $LNXK$ jest więc trapezem wpisanym w okrąg, a zatem jest trapezem równoramiennym. W szczególności $\angle LCN = \angle KCA$. Ponieważ $\angle BAK = \angle LAC$ dowodzi to, że punkty K i L są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC. Wykorzystując tę własność w połączeniu z definicją punktu M otrzymujemy dalej

$$\angle MBC = \angle CBL = \angle KBA \quad \text{oraz} \quad \angle BCM = \angle LCB = \angle ACK.$$

To z kolei pokazuje, że punkty A i M są izogonalnie sprzężone w trójkącie KBC. Wynika stąd, że $\angle LKC = \angle BKM$. Mamy więc

$$\angle BNM = \angle LNB = 180^\circ - \angle LNC = \angle LKC = \angle BKM.$$

Punkty B, M, N, K leżą zatem na jednym okręgu i rozwiązanie zadania jest zakończone.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.
13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści