Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 31 maja – 14 czerwca 2015

(wydanie pierwsze)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 31 maja – 14 czerwca 2015

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. 18 33 11 660

Kadra:
Tomasz Cieśla
Maciej Gawron
Andrzej Grzesik
Jan Gwinner
Teodor Jerzak
Michał Kieza
Szymon Kubicius

Olimpiada Matematyczna w Internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 31 maja – 14 czerwca 2015 w Mszanie Dolnej, w ośrodku „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Tomasz Cieśla, Maciej Gawron, Andrzej Grzesik, Jan Gwinner, Teodor Jerzak, Michał Kieza oraz Szymon Kubicius

W dniach 1, 2, 3, 5, 8, 9, 10, 11 i 12 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 4 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 6 i 13 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny czterech zadań i trwały od rana do wieczora, a mecz matematyczny — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 151, 149 i 147 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyły się dwie wycieczki: 7 czerwca na Ćwilin, a 4 czerwca do Rabki-Zdroju.

Bezpośrednio po zakończeniu obozu, w dniach 14-17 czerwca w miejscowości Fačkovské Sedlo (Słowacja) odbyły się XV Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. Przewodniczącym delegacji polskiej był Michał Pilipczuk, zastępcą przewodniczącego był Andrzej Grzesik. W dniach 15-16 czerwca każdy z zawodników rozwiązywał po trzy zadania, mając na to po cztery i pół godziny.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami oraz zadania z XV Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	19	0	0	1
2.	12	5	0	3
3.	12	7	0	1
4.	4	0	4	12
5.	9	2	2	7
6.	4	0	0	16
7.	7	2	0	11
8.	4	0	0	16
9.	19	0	0	1
10.	12	0	3	5
11.	8	2	0	10
12.	4	0	0	16
13.	20	0	0	0
14.	13	0	0	7
15.	7	1	2	10
16.	0	0	0	20
17.	14	1	0	5
18.	11	0	1	8
19.	0	0	1	19
20.	1	0	0	19
21.	8	0	0	12
22.	4	1	0	15
23.	6	4	1	9
24.	4	0	0	16
25.	17	0	0	2
26.	10	1	0	8
27.	7	0	0	12
28.	10	0	0	9
29.	7	1	0	10
30.	2	2	1	13
31.	3	0	0	15
32.	3	0	0	15
33.	17	0	1	0
34.	6	0	0	12
35.	3	8	0	7
36.	4	1	1	12

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Nauczyciel napisał na tablicy trójmian kwadratowy $x^2 + 3x + 15$. Następnie wszyscy uczniowie w klasie podchodzili kolejno do tablicy; każdy z nich zmniejszał albo zwiększał o jeden współczynnik przy x albo wyraz wolny trójmianu. Na koniec okazało się, że na tablicy widnieje trójmian $x^2+13x+5$. Rozstrzygnąć, czy w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian o pierwiastkach całkowitych.

2. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $4k + 1$. Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{i^2}{p} \right\}.$$

3. Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O przecinają się w punkcie Q. Punkty $K,\ L,\ M,\ N$ są kolejno środkami okręgów opisanych na trójkątach $QAB,\ QBC,\ QCD,\ QDA$. Proste KM i LN przecinają się w punkcie P. Dowieść, że punkty $O,\ P,\ Q$ są współliniowe.

4. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą dodatnią S o następującej własności: trójkąt równoboczny o polu równym 1 można przykryć dowolnymi pięcioma trójkątami równobocznymi o sumie pól równej S.

5. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. Boki oraz przekątne n-kąta foremnego zostały pomalowane na jeden z $n-1$ kolorów. Wierzchołek nazywamy *tęczowym*, jeżeli wychodzące z niego odcinki zostały pomalowane na wszystkie możliwe kolory. Wyznaczyć maksymalną możliwą liczbę tęczowych wierzchołków.

6. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 < x_2 < x_3$ będące pierwiastkami równania $x^3 - 3x - 1 = 0$. Udowodnić, że $x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1$.

7. W różnobocznym i ostrokątnym trójkącie ABC punkty $M,\ N$ i P są odpowiednio środkami boków $BC,\ CA$ i AB. Symetralne odcinków AB i AC przecinają półprostą AM odpowiednio w punktach D i E. Proste BD i CE przecinają się w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnić, że punkty $A,\ N,\ F$ i P leżą na jednym okręgu.

8. Dany jest rosnący ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ liczb całkowitych, który spełnia warunek $a_n \leqslant 1000n$. Wykazać, że w ciągu istnieje nieskończenie wiele wyrazów, które w zapisie dziesiętnym posiadają co najmniej 2015 kolejnych cyfr równych 1.

9. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba $n \cdot 2^{2015}$ składa się w zapisie dziesiętnym tylko z cyfr 1 i 2.

10. W każdym polu szachownicy $n \times n$ znajduje się żarówka – na początku wszystkie są wyłączone. Pojedynczy ruch polega na wybraniu m kolejnych żarówek w wierszu lub kolumnie i jednoczesnej zmianie ich stanu. Udowodnić, że można doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie żarówki są włączone wtedy i tylko wtedy, gdy m dzieli n.

11. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y warunek

$$f\left(x + xy + f(y)\right) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right).$$

12. Punkt P leży na boku AB czworokąta wypukłego $ABCD$. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt CDP jest styczny do okręgów wpisanych w trójkąty ADP i BCP odpowiednio w punktach K i L. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie E, a proste AK i BL przecinają się w punkcie F. Wykazać, że punkty E, I, F są współliniowe.

13. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Przez punkty A, B, C poprowadzone zostały proste prostopadłe do prostych PA, PB, PC. Otrzymane proste wyznaczają trójkąt z którego trójkąt ABC odcina trzy trójkąty. Wykazać, że ortocentra tych trzech trójkątów tworzą trójkąt przystający do ABC.

14. W każdym polu nieskończonej szachownicy wpisano pewną liczbę rzeczywistą. Figurą nazwiemy dowolny skończony podzbiór pól szachownicy. Dane są dwie figury F i G. Przy każdym przesunięciu figury F o całkowitą liczbę rzędów i wierszy suma przykrytych przez nią liczb jest nieujemna. Udowodnić, że można tak przesunąć figurę G o całkowitą liczbę rzędów i wierszy, żeby suma przykrytych przez nią liczb była nieujemna.

15. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita $n > 1$. Dowieść, że istnieje co najwyżej jedna para (a, b) liczb całkowitych dodatnich, dla której $p = a^2 + nb^2$.

16. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Udowodnić, że wielomian $x^n - x - 1$ jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

17. Znaleźć wszystkie funkcje różnowartościowe $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ spełniające warunek

$$2f(f(n)) \leqslant f(n) + n.$$

18. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi o i ω są opisane odpowiednio na trójkątach ABC i KLM. Okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 są styczne wewnętrznie do okręgu o i styczne zewnętrznie do okręgu ω, przy czym punktami styczności okręgów o_1 i o_2 z o są punkty B i C, a punktami styczności okręgów o_3 i o_4 z ω są L i M. Udowodnić, że środki okręgów o_1, o_2, o_3, o_4 są wierzchołkami równoległoboku.

19. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich (m, n) równanie

$$m^6 = n^{n+1} + n - 1.$$

20. Danych jest $2n+1$ punktów na płaszczyźnie, przy czym żadne trzy nie leżą na jednej prostej, oraz żadne cztery nie leżą na jednym okręgu. Udowodnić, że liczba okręgów przechodzących przez trzy z wybranych punktów, które dzielą pozostałe $2n-2$ punktów na połowy wynosi n^2.

21. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c, r, s, t spełniające warunki

$$ab + 1 = r^2, \quad bc + 1 = s^2, \quad ca + 1 = t^2.$$

Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $\frac{rs}{t}, \frac{st}{r}, \frac{tr}{s}$ nie jest całkowita.

22. Liczby rzeczywiste a, b, c są długościami boków trójkąta o obwodzie 1. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

23. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AD i BC. Okrąg o jest styczny do odcinków AB i AC i przecina odcinek BC w punktach E i F. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt BCD. Punkty X i Y są punktami przecięcia okręgu ω z odcinkami DE i DF, które leżą bliżej punktu D. Udowodnić, że $XY \parallel AD$.

24. Na przyjęciu urodzinowym u Bogny jubilatka gra z gośćmi w następującą grę. Na początku na stole leży n^2+2015 ciastek, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 2015. Następnie naprzemiennie Bogna i jeden z gości zjadają pewną liczbę ciastek. Liczba ciastek zjedzonych w jednym ruchu musi wynosić 1, być liczba pierwszą mniejszą niż n, lub być wielokrotnością n. Wygrywa gracz, który zje ostatnie ciastko. Rozstrzygnąć, czy Bogna ma strategię wygrywającą.

25. Dany jest trójkąt ABC i punkt P w jego wnętrzu. Proste AP, BP, CP przecinają boki BC, CA, AB w punktach odpowiednio X, Y, Z. Udowodnić, że jeśli pola trójkątów APY i APZ są równe, to punkt X jest środkiem odcinka BC.

26. Udowodnić, że jeśli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczonym ściśle rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych, to ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dany wzorem

$$b_n = \frac{a_2 - a_1}{a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}$$

jest nieograniczony.

27. W szachownicy 2015×2015 wpisujemy kolejno wierszami liczby od 1 do 2015^2. W jednym ruchu można wybrać trzy kolejne pola w wierszu lub kolumnie, i zwiększyć liczbę w środkowym polu o dwa jednocześnie zmniejszając skrajne pola o jeden, lub zmniejszyć środkową liczbę o dwa jednocześnie zwiększając liczby w skrajnych polach o jeden. Po pewnej liczbie ruchów w tablicy ponownie wpisane są liczby od 1 do 2015^2. Udowodnić, że znajdują się one w początkowej konfiguracji.

28. Dane są wielomian f o współczynnikach całkowitych oraz liczba pierwsza p takie, że $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$ oraz dla dowolnej liczby całkowitej k liczba $f(k)$ daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez p.
Udowodnić, że $\deg(f) \geqslant p - 1$.

29. Na obóz matematyczny ma przyjechać 2015 uczestników. Wiadomo, że każdy z nich nie lubi dokładnie 3 spośród pozostałych uczestników i relacja nielubienia nie jest symetryczna (tzn. osoba A może nie lubić B i jednocześnie B może lubić A). Kierownik obozu chce zakwaterować uczestników w pokojach w taki sposób, żeby każdy lubił wszystkie osoby w swoim pokoju. Jaka jest najmniejsza liczba pokoi, dla której jest to zawsze możliwe?

30. Dane są dwa wielomiany $P(x), Q(x)$, których wszystkie współczynniki wynoszą 1 lub 2015. Wiadomo, że $Q(x) \mid P(x)$.
Udowodnić, że $\deg Q + 1 \mid \deg P + 1$.

31. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Udowodnić, że istnieje taka permutacja $k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}$ liczb $1, 2, \ldots, p-1$, że zachodzi podzielność

$$p \mid 1^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + (p-1)^{k_{p-1}}.$$

32. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty X, Y, Z leżą na bokach odpowiednio BC, CA, AB, przy czym XYZ jest trójkątem równobocznym o najmniejszym możliwym polu. Udowodnić, że proste prostopadłe do YZ, ZX, XY przechodzące przez odpowiednio A, B, C są współpękowe.

33. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3a+2b-c}{4}.$$

34. Grzybiarz Wojciech hoduje 2015 grzybów $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_{2015}$, każdy w oddzielnej doniczce, i podejrzewa, że niektóre z nich zachorowały (ale nie jest w stanie stwierdzić które, bo ma wybity palec). Może jednak wybrać pewne dwa grzyby G_i, G_j, gdzie $i \neq j$, i przesadzić G_j na godzinę do doniczki G_i. Po tym czasie grzyba G_j przesadza z powrotem do jego doniczki. Jeśli G_i był chory, a G_j zdrowy, to po tej operacji grzyb G_i wyzdrowieje, a grzyb G_j zachoruje. W pozostałych trzech przypadkach stan grzybów nie zmieni się. Wojciech wykonuje pewną liczbę takich operacji.
Czy pod koniec zawsze jest w stanie wybrać pewne dwa grzyby i mieć pewność, że są oba zdrowe albo oba chore?

35. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg ω o środku w punkcie O. Punkt D jest środkiem łuku BC okręgu ω niezawierającego punktu A, natomiast punkt M środkiem boku BC. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt Q jest symetryczny do I względem punktu M. Półprosta QD przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie T. Udowodnić, że $\sphericalangle ACT = \sphericalangle DOI$.

36. Powiemy, że liczba naturalna *ma tę moc*, jeżeli jest postaci a^n, gdzie $a \in \{3, 4, 5, 6\}$, zaś n jest liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że każdą liczbę całkowitą większą od 2 można przedstawić jako sumę parami różnych liczb mających tę moc.

Zawody drużynowe

1. Jarosław bawi się pionkami. Ma przed sobą dwie trasy długości k centymetrów. Na starcie każdej z nich stoi tyle samo pionków. Chciałby doprowadzić swoje pionki do mety – jednak przeszkadza mu w tym złośliwy Antoni. Co jakiś czas, Jarosław wybiera po jednym pionku na obu trasach i przesuwa je o centymetr do przodu. Po każdym ruchu Jarosława, Antoni niszczy dokładnie jeden pionek na jednej z tras.

Wyznaczyć taką funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że Jarosław, ustawiwszy na starcie obu tras po $f(k)$ pionków, może zawsze doprowadzić chociaż jednego pionka do mety, niezależnie od strategii Antoniego.

Funkcja f nie powinna rosnąć istotnie szybciej niż funkcje w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

2. Maciek i Teodor grają w następującą grę na szachownicy 100×100. Maciek wybiera dowolne puste pole, następnie Teodor kładzie domino 1×2 na planszy tak aby pokryć wybrane przez pierwszego gracza pole. Domina nie mogą na siebie nachodzić. Gra kończy się gdy któryś z graczy nie może wykonać ruchu. Maciek wygrywa jeżeli cała plansza jest pokryta, w przeciwnym razie wygrywa Teodor. Rozstrzygnąć, który z graczy ma strategię wygrywającą.

3. Dana jest liczba rzeczywista a różna od 0 i 1. Janek i Tomek grają w następującą grę. Gracze naprzemiennie, począwszy od Janka, zamieniają jedną gwiazdkę w wielomianie

$$\star x^4 + \star x^3 + \star x^2 + \star x + \star$$

na dowolną liczbę postaci a^n, gdzie n jest liczbą całkowitą. Janek wygrywa, jeżeli powstały wielomian nie ma pierwiastka rzeczywistego, w przeciwnym razie wygrywa Tomek. Wyznaczyć, w zależności od a który z graczy ma strategię wygrywającą.

4. Krystyna i Stefan grają w nietypową wersję gry w kółko i krzyżyk. Plansza składa się z 3×3 dużych kwadratów, a każdy z nich zawiera mniejszą planszę złożoną z 3×3 pól. Grę zaczyna Krystyna stawiając znak X w dowolnym spośród 81 pól. Następnie gracze naprzemiennie stawiają swój znak w dowolnym polu leżącym wewnątrz dużego kwadratu odpowiadającemu ostatniemu ruchowi przeciwnika. Przykładowo, jeśli Krystyna postawi X w lewym górnym polu któregokolwiek z 9 dużych kwadratów, to Stefan musi zagrać w pewne wolne pole w dużym kwadracie leżącym w lewym górnym rogu planszy. Jeśli kwadrat, w którym jest się zmuszonym zagrać jest już całkowicie wypełniony, to można zagrać w dowolnym wolnym polu na planszy. Gracz, który wygra grę w którymś dużym kwadracie, wygrywa ten duży kwadrat. Całą grę wygrywa gracz, który jako pierwszy wygra trzy duże kwadraty leżące w linii. Rozstrzygnąć, czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą i jeśli tak, to który.

Pytanie pozakonkursowe. Zmieńmy trochę zasady, zakładając, że jeśli gracz jest zmuszony zagrać w dużym kwadracie, który już został przez kogoś wygrany, to może zagrać w dowolne wolne pole na planszy. Rozstrzygnąć, czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą i jeśli tak, to który.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz takie dwa podzbiory A, B zbioru $\{0, 1, \ldots, n\}$, że spełniony jest warunek $|A| + |B| \geqslant n + 2$. Udowodnić, że istnieją takie elementy $a \in A, b \in B$, że $a + b$ jest potęgą dwójki.

2. Danych jest $5n$ punktów na płaszczyźnie, przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe. Niektóre z tych punktów połączono $10n^2 + 1$ odcinkami, a następnie każdy z narysowanych odcinków pomalowano na zielono lub czerwono. Udowodnić, że istnieje trójkąt, którego boki są tego samego koloru.

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla których istnieje taka funkcja $F : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}_+$, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c oraz dla dowolnego n zachodzi podzielność

$$P(n) \mid \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} F(a+i, b+j, c+k).$$

4. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich (m, n) równanie

$$3^n = 2m^2 + 1.$$

5. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $p = 2^{2^k} + 1$, dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k. Wyznaczyć liczbę par liczb całkowitych (m, n) spełniających warunki $0 \leqslant m < n < p - 1$ oraz kongruencję

$$2^n + 3^n \equiv 2^m + 3^m \pmod{p}.$$

6. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$3(x + y + z) \geqslant 2\left(\sqrt{x^2 + yz} + \sqrt{y^2 + zx} + \sqrt{z^2 + xy}\right).$$

7. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n istnieje taka liczba całkowita a, że $P(a) = 2^n$.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian $P(x,y)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y zachodzi nierówność $P(x,y) \geqslant 0$, ale P nie daje się zapisać jako suma kwadratów wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

9. Dany jest czworościan $ABCS$ wpisany w sferę s. Sfera s' przechodząca przez punkt S przecina krawędzie AS, BS, CS odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty X, Y, Z są symetryczne do punktów D, E, F odpowiednio względem środków krawędzi AS, BS, CS. Udowodnić, że jeśli sfery s i s' przecinają się wzdłuż okręgu leżącego w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny ABC, to punkty A, B, C, X, Y, Z leżą na jednej sferze.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Prosta prostopadła do prostej BC przechodząca przez A przecina okrąg o średnicy BC w punktach K i M, przy czym $AK < AM$. Prosta prostopadła do prostej AC przechodząca przez B przecina okrąg o średnicy AC w punktach L i N, przy czym $BL < BN$. Udowodnić, że proste AB, KN, ML przecinają się w jednym punkcie.

11. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF, a R — jego promieniem. Udowodnić, że

$$[ABC] \geqslant 3\sqrt{3}R\sqrt{R^2 - OP^2},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wykazać, że równanie $x^4 - 17y^2 = 2w^2$ nie ma rozwiązań we względnie pierwszych liczbach całkowitych dodatnich (x, y, w).

2. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią, zaś m liczbą nieparzystą. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba $m^n + n^m$ ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

3. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz taka liczba całkowita a, że $p|a^2+a+1$. Udowodnić, że zachodzi podzielność

$$p \mid (p-1)! \left(a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \ldots - \frac{a^{p-1}}{p-1} \right).$$

4. Danych jest $2n+1$ liczb niewymiernych. Udowodnić, że można tak wybrać $n+1$ z nich, aby suma dowolnego niepustego podzbioru wybranych liczb była niewymierna.

5. Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą C taką, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych spełniających warunek $x + y + z = 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{x}{1 + 9yz + C(y-z)^2} + \frac{y}{1 + 9zx + C(z-x)^2} + \frac{z}{1 + 9xy + C(x-y)^2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

6. Niech a_0, b_0 będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Dla $n \geqslant 0$ definiujemy $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{b_n} \rfloor$ oraz $b_{n+1} = b_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że $a_n = b_n$.

7. Szachownicę 2015×2015 pokryto kostkami domina w ten sposób, że lewe górne pole jest puste. Jeżeli w pewnym wierszu lub pewnej kolumnie znajdują się trzy pola, z których jedno jest puste, a dwa pozostałe są zajęte przez jedno domino, to domino możemy przesunąć, zmieniając puste pole. Udowodnić, że można tak poprzesuwać kostki domina aby puste pole znajdowało się w prawym dolnym rogu.

8. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. W każdym wierzchołku n-kąta foremnego znajduje się liczba -1. Ruch polega na pomnożeniu liczby w pewnym wierzchołku przez liczbę znajdującą się w poprzednim wierzchołku. Andrzej wykonuje ruchy na kolejnych wierzchołkach n-kąta. Okazało się, że po wykonaniu k ruchów Andrzej powrócił do początkowego układu n liczb równych -1. Udowodnić, że gdyby Andrzej postępował analogicznie z (2^n-1)-kątem, w którego wierzchołkach były wpisane liczby -1, to po 2^k-1 ruchach również powróciłby do początkowego układu liczb.

9. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ostrokątny ABC i styczny do jego boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt S jest punktem przecięcia prostych przechodzących przez B i C równoległych do odpowiednio DF i DE. Punkt K jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą EF, a punkt G — środkiem ciężkości trójkąta DEF. Punkt P jest punktem przecięcia półprostej GK i ω. Udowodnić, że punkty S, D i P leżą na jednej prostej.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg o środku O. Punkty D i E leżą na odcinkach BO i CO, przy czym $BD = OE$. Okręgi o_1 i o_2 są opisane na trójkątach odpowiednio ADO i AEO. Punkt M jest środkiem łuku AD zawierającego punkt O okręgu o_1. Punkt N jest środkiem łuku AE zawierającego punkt O okręgu o_2. Udowodnić, że

$$\sphericalangle DNO + \sphericalangle EMO = 2\sphericalangle BAC.$$

11. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym przeciwległe boki są równe. Ponadto prawdziwe są zależności

$$\sphericalangle ABC \geqslant \sphericalangle CDE \geqslant \sphericalangle EFA, \quad \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFA < 360^\circ$$

$$\text{oraz} \quad \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFA > \sphericalangle ABC.$$

Wykazać, że $2[ACE] < [ABCDEF]$.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Parami różne punkty A, B, C, D oraz E leżą w tej kolejności na okręgu o promieniu r, przy czym $AB = CD = DE > r$. Udowodnić, że trójkąt o wierzchołkach w środkach ciężkości trójkątów ABD, BCD oraz ADE jest rozwartokątny.

2. Rodzinę zbiorów $\mathcal{F}$ nazwiemy *doskonałą* jeśli spełniony jest następujący warunek: Dla każdej trójki zbiorów $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{F}$, co najmniej jeden ze zbiorów

$$(X_1 \setminus X_2) \cap X_3, \qquad (X_2 \setminus X_1) \cap X_3$$

jest pusty. Wykazać, że jeśli $\mathcal{F}$ jest doskonałą rodziną składającą się z podzbiorów pewnego skończonego zbioru U, to $|\mathcal{F}| \leqslant |U| + 1$.

3. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x + y + z = 0$$

oraz żadna z nich nie leży w otwartym przedziale $(-1, 1)$. Znaleźć największą możliwą wartość wyrażenia $x + y + z$.

4. Dziwny kalkulator ma tylko dwa przyciski, przy czym na każdym z nich napisana jest pewna dodatnia liczba dwucyfrowa. Na początku wyświetlacz kalkulatora pokazuje liczbę 1. Po naciśnięciu przycisku z liczbą N, kalkulator zamienia obecnie wyświetlaną liczbę X na liczbę $X \cdot N$ lub $X + N$, przy czym mnożenie i dodawanie jest używane naprzemiennie (pierwsze jest mnożenie). Przykładowo, jeśli na pierwszym przycisku widnieje liczba 10, a na drugim liczba 20, to kolejne przyciśnięcia pierwszego, drugiego, pierwszego, i jeszcze raz pierwszego przycisku spowodują kolejne wyświetlanie się liczb $1 \cdot 10 = 10$, $10+20 = 30$, $30 \cdot 10 = 300$, oraz $300+10 = 310$. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie wartości dwucyfrowych liczb znajdujących się na przyciskach kalkulatora, dla których można pokazać na wyświetlaczu nieskończenie wiele liczb kończących się na

(a) 2015,

(b) 5813.

5. Trójkąt ABC jest ostrokątny, ale nie równoboczny. Niech O i H będą odpowiednio środkiem okręgu opisanego na nim oraz jego ortocentrum. Okrąg k przechodzi przez punkt B oraz jest styczny do prostej AC w punkcie A. Okrąg l ma środek na półprostej BH oraz jest styczny do prostej AB w punkcie A. Okręgi k i l przecinają się w punkcie X różnym od A. Wykazać, że $\sphericalangle HXO = 180^\circ - \sphericalangle BAC$.

6. Niech n będzie parzystą liczbą dodatnią. Na tablicy jest napisane n liczb rzeczywistych. W jednym ruchu możemy wybrać dwie liczby, zmazać je i zastąpić *każdą* z nich ich iloczynem. Udowodnić, że dla każdego początkowego układu n liczb można po skończonej liczbie ruchów uzyskać n równych liczb na tablicy.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Nauczyciel napisał na tablicy trójmian kwadratowy $x^2 + 3x + 15$. Następnie wszyscy uczniowie w klasie podchodzili kolejno do tablicy; każdy z nich zmniejszał albo zwiększał o jeden współczynnik przy x albo wyraz wolny trójmianu. Na koniec okazało się, że na tablicy widnieje trójmian $x^2+13x+5$. Rozstrzygnąć, czy w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian o pierwiastkach całkowitych.

Rozwiązanie:

Dana operacja zmienia wartość trójmianu w punkcie $x = -1$ o ± 1. Dla trójmianu $x^2+3x+15$ wartość w punkcie $x = -1$ wynosi 12, zaś dla trójmianu $x^2+13x+5$ wartość w punkcie $x = -1$ jest równa -7. W takim razie w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian $x^2 + ax + b$, dla którego wartość w punkcie -1 wynosiła 0 — innymi słowy -1 jest jednym z dwóch pierwiastków tego trójmianu. Ze wzorów Viete'a wnosimy, że drugim jego pierwiastkiem jest liczba całkowita b.

2. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $4k + 1$. Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{i^2}{p} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Z równości $\{\frac{i^2}{p}\} = \{\frac{(p-i)^2}{p}\}$, spełnionej dla $i = 1, 2, \ldots p-1$ dostajemy

$$4\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{i^2}{p} \right\} = 2\sum_{i=1}^{p-1} \left\{ \frac{i^2}{p} \right\}.$$

Niech u będzie taką liczbą spośród $1, 2, \ldots, p-1$, że $u^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Taka liczba istnieje, wystarczy przyjąć $u = \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}$, wówczas z twierdzenia Wilsona dostajemy

$$\begin{aligned} -1 &\equiv (p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot \ldots \cdot (p-1) \\ &\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right)^2 \equiv u^2 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Definiujemy liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ jako $a_i = i \cdot u \pmod{p}$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, p-1$, tworzą one permutację liczb $1, 2, \ldots, p-1$. Zauważmy, że

$$\left\{\frac{i^2}{p}\right\} + \left\{\frac{a_i^2}{p}\right\} = 1,$$

gdyż $i^2 + a_i^2 \equiv i^2 + (ui)^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$4\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{\frac{i^2}{p}\right\} = 2\sum_{i=1}^{p-1} \left\{\frac{i^2}{p}\right\} = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\left\{\frac{i^2}{p}\right\} + \left\{\frac{a_i^2}{p}\right\}\right) = \sum_{i=1}^{p-1} 1 = p-1.$$

Wartość szukanej sumy wynosi $\frac{p-1}{4}$.

3. Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O przecinają się w punkcie Q. Punkty K, L, M, N są kolejno środkami okręgów opisanych na trójkątach QAB, QBC, QCD, QDA. Proste KM i LN przecinają się w punkcie P. Dowieść, że punkty O, P, Q są współliniowe.

Rozwiązanie:

Niech A_1, B_1, C_1, D_1 będą odpowiednio środkami odcinków AQ, BQ, CQ, DQ. Wtedy $A_1 \in NK$, $B_1 \in KL$, $C_1 \in LM$, $D_1 \in MN$. Proste KL i MN są równoległe, gdyż obie są prostopadłe do prostej BD. Analogicznie stwierdzamy, że proste NK i LM są równoległe, więc czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem. Skoro odcinki A_1C_1 i B_1D_1 są prostopadłe do odpowiednich boków tego równoległoboku, to punkt P przecięcia przekątnych równoległoboku $KLMN$ należy do symetralnych tych odcinków. W takim razie punkt P jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $A_1B_1C_1D_1$.

Jednokładność o środku Q i skali $\frac{1}{2}$ przeprowadza czworokąt $ABCD$ na czworokąt $A_1B_1C_1D_1$, a więc punkt O przechodzi w tej jednokładności na punkt P. To zaś oznacza, że punkty O, P, Q są współliniowe.

4. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą dodatnią S o następującej własności: trójkąt równoboczny o polu równym 1 można przykryć dowolnymi pięcioma trójkątami równobocznymi o sumie pól równej S.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że szukana liczba S wynosi 2. Po pierwsze, zauważmy, że nie może być ona mniejsza. Istotnie, używając zestawu pięciu trójkątów o polach $(1-\varepsilon, 1-\varepsilon, 0, 0, 0)$ nie możemy pokryć trójkąta o polu 1.

Weźmy teraz pięć trójkątów o sumie pól równych 2. Oznaczmy ich pola przez $A \geqslant B \geqslant C \geqslant D \geqslant E$. Jeżeli $A \geqslant 1$ to pokrywamy nasz trójkąt używając jedynie A. Załóżmy przeciwnie, niech $A < 1$. Umieszczamy trójkąty o polach

A, B, C w wierzchołkach pokrywanego trójkąta. Udowodnijmy, że każda para trójkątów spośród A, B i C przecina się. Istotnie, gdyby tak nie było to $\sqrt{B} + \sqrt{C} < 1$ a co za tym idzie

$$2 = A + B + C + D + E < 1 + B + C + 2\sqrt{BC} = 1 + (\sqrt{B} + \sqrt{C})^2 < 2,$$

sprzeczność. Oznaczmy przez X, Y, Z pola przecięć odpowiednio trójkątów A i B, B i C, C i A. Wiemy, że $X + Y \leqslant B, Y + Z \leqslant A, Z + X \leqslant C$. Otrzymujemy, że pole przykrytej części wynosi co najmniej

$$\begin{aligned} A + B + C - X - Y - Z &= A + B + C - \frac{1}{2}((X + Y) + (Y + Z) + (Z + X)) \\ &\geqslant \frac{1}{2}(A + B + C) = 1 - \frac{D + E}{2} \geqslant 1 - D. \end{aligned}$$

Dostajemy, że nieprzykryty obszar jest trójkątem o polu nie większym niż D. Możemy go przykryć trójkątem o polu D.

5. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. Boki oraz przekątne n-kąta foremnego zostały pomalowane na jeden z $n-1$ kolorów. Wierzchołek nazywamy *tęczowym*, jeżeli wychodzące z niego odcinki zostały pomalowane na wszystkie możliwe kolory. Wyznaczyć maksymalną możliwą liczbę tęczowych wierzchołków.

Rozwiązanie:

Ponumerujmy wierzchołki n-kąta foremnego liczbami $1, 2, \ldots, n$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy n jest liczbą parzystą. Dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n - 1$ pomalujmy odcinek łączący wierzchołki o numerach i, j kolorem o numerze $i+j \mod n-1$, zaś odcinek łączący wierzchołki o numerach i, n pomalujmy na kolor $2i \mod n - 1$. Twierdzimy, że po takim malowaniu wszystkie wierzchołki stają się tęczowe.

Liczba n jest parzysta, więc liczba $n - 1$ jest nieparzysta i wobec tego

$$2i \equiv 2j \mod n - 1 \iff i \equiv j \mod n - 1.$$

To oznacza, że dowolne dwa różne odcinki o końcu w wierzchołku o numerze n mają różny kolor, czyli wierzchołek ten jest tęczowy.

Rozważmy teraz dowolny wierzchołek o numerze i, przy czym $1 \leqslant i < n$. Rozważmy odcinki łączące go z wierzchołkami o numerach $j \neq k$, przy czym $j, k < n$. Kolory tych odcinków są różne, gdyż $i + j \not\equiv i + k \mod n - 1$. Ponadto $2i \not\equiv i + j \mod n - 1$, wobec tego odcinki łączące i z j oraz n mają różne kolory. Stąd odcinki o końcu w wierzchołku o numerze i mają parami różne kolory, a więc wierzchołek i jest tęczowy.

Zatem jeśli n jest liczbą parzystą, to maksymalna liczba tęczowych wierzchołków wynosi n.

Załóżmy teraz, że n jest liczbą nieparzystą. Udowodnimy, że musi istnieć wierzchołek, który nie jest tęczowy. Istotnie, gdyby wszystkie wierzchołki były tęczowe, to liczba odcinków w każdym kolorze byłaby równa $\frac{n}{2}$. Otrzymujemy sprzeczność, bo $\frac{n}{2}$ nie jest liczbą całkowitą.

Z drugiej strony istnieje pomalowanie odcinków tak, aby $n-1$ wierzchołków było tęczowych. Skoro n jest liczbą nieparzystą, to $n-1$ jest liczbą parzystą. Podobnie jak wyżej dowodzimy, że wierzchołki o numerach $1, 2, \ldots, n-1$ można pomalować $n-2$ różnymi kolorami tak, aby z każdego wierzchołka wychodził dokładnie jeden odcinek z każdego z $n-2$ kolorów. Odcinki łączące wierzchołek o numerze n łączymy z pozostałymi na kolor, który nie został użyty do kolorowania pozostałych odcinków. W ten sposób z każdego wierzchołka o numerze mniejszym niż n wychodzą odcinki we wszystkich $n-1$ kolorach.

Zatem maksymalna możliwa liczba tęczowych wierzchołków dla n nieparzystego wynosi $n-1$.

6. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 < x_2 < x_3$ będące pierwiastkami równania $x^3 - 3x - 1 = 0$. Udowodnić, że $x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że wszystkie pierwiastki równania $x^3-3x-1=0$ leżą w przedziale $[-2, 2]$. Istotnie dla $x > 2$ mamy $x^3-3x-1 = x(x^2-3)-1 > 2\cdot1-1 = 1$, zaś dla $x < -2$ mamy $x^3 - 3x - 1 = x(x^2 - 3) - 1 < -2 \cdot 1 - 1 = -3$.

Podstawiając $x = 2\cos\alpha$, dla pewnego $\alpha \in [0, \pi)$ dostajemy równanie $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i stąd $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$. Otrzymujemy, że pierwiastkami wyjściowego równania są liczby $2\cos\frac{\pi}{9}, 2\cos\frac{5\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{9}$. Bez trudu sprawdzamy, że $\cos\frac{\pi}{9} > \cos\frac{5\pi}{9} > \cos\frac{7\pi}{9}$. Pozostaje zauważyć, że

$$\begin{aligned} x_3^2 - x_2^2 &= 4\cos^2\frac{\pi}{9} - 4\cos^2\frac{5\pi}{9} = 2\cos\frac{2\pi}{9} - 2\cos\frac{10\pi}{9} \\ &= 2\cos\frac{\pi}{9} - 2\cos\frac{7\pi}{9} = x_3 - x_1. \end{aligned}$$

7. W różnobocznym i ostrokątnym trójkącie ABC punkty M, N i P są odpowiednio środkami boków BC, CA i AB. Symetralne odcinków AB i AC przecinają półprostą AM odpowiednio w punktach D i E. Proste BD i CE przecinają się w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnić, że punkty A, N, F i P leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia sinusów dla trójkątów ABF i ACF otrzymujemy

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle AFB} = \frac{AF}{\sin\sphericalangle FBA} = \frac{AF}{\sin\sphericalangle BAM}$$

$$\text{oraz}\quad \frac{AC}{\sin\sphericalangle AFC}=\frac{AF}{\sin\sphericalangle FCA}=\frac{AF}{\sin\sphericalangle CAM},$$

skąd wniosek, że

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin AFB}{\sin\sphericalangle AFC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle CAM}{\sin\sphericalangle BAM}. \tag{1}$$

Stosując twierdzenie sinusów dla trójkątów ABM i ACM dostajemy

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle AMB}=\frac{BM}{\sin\sphericalangle BAM}\quad\text{oraz}\quad\frac{AC}{\sin\sphericalangle AMC}=\frac{CM}{\sin\sphericalangle CAM},$$

skąd wobec równości $BM=CM$ mamy

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\sphericalangle AMB}{\sin\sphericalangle AMC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle CAM}{\sin\sphericalangle BAM}=\frac{\sin\sphericalangle CAM}{\sin\sphericalangle BAM}. \tag{2}$$

Łącząc równości (1) i (2) uzyskujemy $\sin\sphericalangle AFB=\sin\sphericalangle AFC$. Ponieważ punkty B, F i C nie są współliniowe, to prowadzi to do wniosku, że $\sphericalangle AFB=\sphericalangle AFC$.

Niech $\sphericalangle BAD=\sphericalangle ABD=\alpha$ i $\sphericalangle CAE=\sphericalangle ACE=\beta$. Skoro trójkąt ABC jest różnoboczny, to punkt F nie leży na prostej AM. Przyjmijmy bez straty dla ogólności, że punkt F leży wewnątrz trójkąta CAM. Wykorzystując równość $\sphericalangle AFB=\sphericalangle AFC$ uzyskujemy, że

$$\alpha+\sphericalangle MAF+\alpha=\beta+\beta-\sphericalangle MAF,$$

więc $\sphericalangle MAF=\beta-\alpha$. W takim razie

$$\sphericalangle BAF=\sphericalangle BAD+\sphericalangle MAF=\alpha+\beta-\alpha=\beta=\sphericalangle ACF$$

i analogicznie $\sphericalangle CAF=\alpha=\sphericalangle ABF$.

Trójkąty ABF i CAF są więc podobne, a więc trójkąty APF i CNF także są podobne. W takim razie $\sphericalangle APF=\sphericalangle CNF$, co jest równoważne z tezą zadania.

8. Dany jest rosnący ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ liczb całkowitych, który spełnia warunek $a_n\leqslant 1000n$. Wykazać, że w ciągu istnieje nieskończenie wiele wyrazów, które w zapisie dziesiętnym posiadają co najmniej 2015 kolejnych cyfr równych 1.

Rozwiązanie:

Po pierwsze zauważmy, że od pewnego miejsca ciąg (a_i) przyjmuje tylko wartości nieujemne: niech s_0 będzie takie, że dla każdego $s\geqslant s_0$ mamy $a_s\geqslant 0$.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Liczbę $x\in\mathbb{N}$ nazwiemy *dobrą*, jeśli w jej zapisie dziesiętnym znajdziemy 2015 kolejnych cyfr równych jeden.

Określmy zbiory:

$$S_n = \{0, 1, \ldots, 10^{2015n} - 1\}$$

$$D_n = \{x \in S_n : x \text{ jest dobra}\}$$

$$C_n = \{x \in S_n : x \text{ występuje w ciągu } (a_i)\}.$$

S_n to zbiór liczb, które mają w zapisie dziesiętnym nie więcej niż $2015n$ cyfr. Dla przejrzystości zapisu, będziemy je utożsamiać z ciągami o wyrazach $\{0, 1, \ldots, 9\}$ długości $2015n$ (nie przejmujemy się wiodącymi zerami).

Rozważmy ciąg $c_0, \ldots, c_{2015n-1}$ – możemy go podzielić na n segmentów długości 2015. Zauważmy, że jeśli ciąg (c_i) nie reprezentuje dobrej liczby, to każdy z segmentów musi być różny od $(1, 1, \ldots, 1)$. Jak łatwo policzyć, wszystkich ciągów długości $2015n$ spełniających ten warunek jest dokładnie $(10^{2015} - 1)^n$ – każdy segment możemy wybrać na $10^{2015} - 1$ sposobów.

Oznacza to, że

$$\#(S_n \backslash D_n) \leqslant (10^{2015} - 1)^n,$$

czyli równoważnie

$$\#D_n \geqslant 10^{2015n} - (10^{2015} - 1)^n.$$

Oszacujmy teraz moc zbioru C_n. Oznaczając $N = 10^{2015n}$, wiemy, że zachodzi nierówność $a_{(N/1000)-1} \leqslant N - 1$. Zatem liczby $a_{s_0}, \ldots, a_{(N/1000)-1}$ należą do C_n: stąd nierówność

$$\#C_n \geqslant \frac{10^{2015n}}{1000} - s_0.$$

$C_n \cup D_n \subset S_n$, więc $\#(C_n \cup D_n) \leqslant 10^{2015n}$.

Możemy więc policzyć:

$$\begin{aligned}\#(C_n \cap D_n) &= \#C_n + \#D_n - \#(C_n \cup D_n)\\ &\geqslant \frac{10^{2015n}}{1000} - s_0 + 10^{2015n} - (10^{2015} - 1)^n - 10^{2015n}.\end{aligned}$$

Prawą stronę nierówności możemy zapisać inaczej jako

$$10^{2015n}\left(\frac{1}{1000} - \left(\frac{10^{2015} - 1}{10^{2015}}\right)^n\right) - s_0,$$

a ta liczba może być dowolnie duża. Gdyby więc w ciągu (a_i) było tylko skończenie wiele dobrych liczb, otrzymalibyśmy sprzeczność.

9. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba $n \cdot 2^{2015}$ składa się w zapisie dziesiętnym tylko z cyfr 1 i 2.

Rozwiązanie:

Udowodnimy indukcyjnie, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m istnieje m-cyfrowa liczba k podzielna przez 2^m, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z cyfr 1 i 2.

Dla $m = 1$ wystarczy przyjąć $k = 2$.

Przypuśćmy teraz, że k jest m-cyfrową liczbą podzielną przez 2^m, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z jedynek i dwójek.

Jeżeli $2^{m+1} \mid k$, to liczba powstała przez dopisanie dwójki na początek liczby k (czyli liczba $2 \cdot 10^m + k$) dzieli się przez 2^{m+1}, ma $m + 1$ cyfr i każda z nich jest jedynką lub dwójką.

Jeżeli k nie dzieli się przez 2^{m+1}, to $k \equiv 2^m \mod 2^{m+1}$, gdyż $2^m \mid k$. Wobec tego $10^m + k \equiv 2^m + 2^m \equiv 0 \mod 2^{m+1}$, zatem liczba $10^m + k$ powstała przez dopisanie do liczby k jedynki z lewej strony ma $m + 1$ cyfr, które są wyłącznie jedynkami i dwójkami i jest podzielna przez 2^{m+1}. Dowód indukcyjny jest więc zakończony.

W szczególności dla $m = 2015$ otrzymujemy liczbę k podzielną przez 2^{2015}, której zapis dziesiętny jest złożony z samych jedynek i dwójek. Wystarczy przyjąć $n = \frac{k}{2^{2015}}$.

10. W każdym polu szachownicy $n \times n$ znajduje się żarówka – na początku wszystkie są wyłączone. Pojedynczy ruch polega na wybraniu m kolejnych żarówek w wierszu lub kolumnie i jednoczesnej zmianie ich stanu. Udowodnić, że można doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie żarówki są włączone wtedy i tylko wtedy, gdy m dzieli n.

Rozwiązanie:

Jeżeli m dzieli n to oczywiście możemy włączyć wszystkie żarówki. Przypuśćmy, że $n = km + r$ gdzie $r \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$. Ponumerujmy wiersze oraz kolumny szachownicy liczbami od 0 do $n-1$. Wyróżniamy te pola których współrzędne przy dzieleniu przez m dają resztę 0 lub r. Zauważmy, że w dowolnym ruchu nie zamieniamy stanu żadnej wyróżnionej żarówki lub zmieniamy stan dokładnie dwóch wyróżnionych żarówek. Wobec czego po dowolnej skończonej liczbie ruchów liczba wyróżnionych zapalonych żarówek będzie parzysta. Wyróżnionych żarówek jest $(2k + 1)^2$ – nieparzyście wiele. Wobec czego nie da się włączyć jednocześnie wszystkich wyróżnionych żarówek.

11. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y warunek

$$f\left(x + xy + f(y)\right) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że funkcja spełniająca równanie dane w treści zadania nie może być stała. Istotnie, gdyby $f \equiv c$, to otrzymalibyśmy $c = (c+\frac{1}{2})^2$, skąd $0 = c^2+\frac{1}{4}$, sprzeczność.

Podstawmy $y := -1$. Otrzymujemy zależność

$$f(f(-1)) = \left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(f(-1)+\frac{1}{2}\right),$$

prawdziwą dla dowolnego x. Gdyby $f(-1)+\frac{1}{2} \neq 0$, to dla dowolnej liczby x mielibyśmy

$$f(x) = \frac{f(f(-1))}{f(-1)+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2},$$

więc funkcja byłaby stała. Wobec tego $f(-1) = -\frac{1}{2}$ i stąd natychmiast dostajemy $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Przypuśćmy, że dla pewnej liczby $a \neq -1$ zachodzi równość $f(a) = -\frac{1}{2}$ i podstawmy do równania danego w treści zadania $x := \frac{x}{a+1} + \frac{1}{2}$ i $y := a$. Otrzymujemy $f(x) = 0$ dla dowolnego x, co nie może mieć miejsca, gdyż funkcja f nie jest stała. Wobec tego

$$f(x) = -\frac{1}{2} \iff x = -1.$$

Podstawmy $x := \frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1}$, przy czym $y \neq -1$. Korzystając z równości $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ otrzymujemy

$$0 = \left(f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1}\right)+\frac{1}{2}\right)\left(f(y)+\frac{1}{2}\right).$$

Skoro $y \neq 1$, to drugi nawias jest niezerowy. Wobec tego

$$f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1}\right)+\frac{1}{2} = 0,$$

a to oznacza, że dla dowolnego $y \neq -1$

$$\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1} = -1,$$

czyli $f(y) = y+\frac{1}{2}$. Wzór ten zgadza się też dla $y = -1$.

Bezpośrednie podstawienie pokazuje, że funkcja dana wzorem $f(x) = x+\frac{1}{2}$ spełnia równanie funkcyjne z treści zadania.

12. Punkt P leży na boku AB czworokąta wypukłego $ABCD$. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt CDP jest styczny do okręgów wpisanych w trójkąty

ADP i BCP odpowiednio w punktach K i L. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie E, a proste AK i BL przecinają się w punkcie F. Wykazać, że punkty E, I, F są współliniowe.

Rozwiązanie:

Niech J będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów ABC i BAD. Wówczas okrąg o o środku J styczny do prostej AB jest także styczny do prostych BC i AD. Niech ω będzie okręgiem wpisanym w trójkąt CDP.

Niech j_1 będzie jednokładnością o skali ujemnej przekształcającą okrąg ω na okrąg o. Przekształcenie j_1 jest złożeniem jednokładności o środku K (i skali ujemnej) przekształcającej okrąg ω na okrąg wpisany w trójkąt ADP oraz jednokładności o środku A (i skali dodatniej) przekształcającej okrąg wpisany w trójkąt ADP na okrąg o. Zatem z twierdzenia o złożeniu jednokładności wynika, że środek jednokładności j_1 leży na prostej AK. Analogicznie dowodzimy, że środek jednokładności j_1 leży na prostej BL, skąd wniosek, że tym punktem jest F.

Niech teraz X, Y będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ADP odpowiednio z bokami AP i AD, zaś Z będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt CDP z odcinkiem CD. Wtedy

$$\begin{aligned} AD + CP &= AY + DY + PL + CL = AX + DZ + PK + CZ \\ &= AX + DZ + PX + CZ = AP + CD, \end{aligned}$$

skąd wniosek, że w czworokąt $APCD$ można wpisać okrąg o_1. Analogicznie dowodzimy, że w czworokąt $BCDP$ można wpisać okrąg o_2.

Rozważmy przekształcenie j_2 będące jednokładnością o skali dodatniej przekształcającą okrąg ω na okrąg o. Przekształcenie to jest złożeniem jednokładności o środku C (i skali dodatniej) przeprowadzającej okrąg ω na okrąg o_1 i jednokładności o środku A (i skali dodatniej) przekształcającej okrąg o_1 na okrąg o. W takim razie wykorzystując ponownie twierdzenie o złożeniu jednokładności wnosimy, że środek jednokładności j_2 należy do prostej AC. Analogicznie uzasadniamy, że środek tej jednokładności leży na prostej BD. W takim razie pokrywa się on z punktem F.

Ostatecznie otrzymaliśmy, że punkty E i F są środkami dwóch jednokładności przekształcających okrąg ω na okrąg o, więc muszą leżeć one na prostej IJ. W przypadku, gdy punkty I i J pokrywają się, to punkty E i F pokrywają się z punktem I.

13. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Przez punkty A, B, C poprowadzone zostały proste prostopadłe do prostych PA, PB, PC. Otrzymane proste wyznaczają trójkąt z którego trójkąt ABC odcina trzy trójkąty. Wykazać, że ortocentra tych trzech trójkątów tworzą trójkąt przystający do ABC.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do odcinka PB oraz prosta przechodząca przez punkt C i prostopadła do odcinka PC przecinają się w punkcie A'. Punkty B' i C' są określone analogicznie. Niech H_A, H_B i H_C będą odpowiednio ortocentrami trójkątów BCA', CAB' i ABC'. Wysokość trójkąta BAC' poprowadzona z wierzchołka B jest prostopadła do prostej $A'B'$, a więc równoległa do prostej CP. Analogicznie dowodzimy, że wysokość trójkąta BCA' poprowadzona z wierzchołka C jest równoległa do prostej BP. W takim razie czworokąt BH_ACP jest równoległobokiem. Podobnie uzasadniamy, że czworokąt AH_BCP jest równoległobokiem. Zatem odcinki BH_A, CP i AH_B są równoległe oraz równe skąd wniosek, że czworokąt ABH_AH_B jest równoległobokiem, czyli $H_AH_B = AB$.

Analogicznie dowodzimy, że $H_BH_C = BC$ i $H_CH_A = AC$, co pociąga za sobą tezę zadania.

14. W każdym polu nieskończonej szachownicy wpisano pewną liczbę rzeczywistą. Figurą nazwiemy dowolny skończony podzbiór pól szachownicy. Dane są dwie figury F i G. Przy każdym przesunięciu figury F o całkowitą liczbę rzędów i wierszy suma przykrytych przez nią liczb jest nieujemna. Udowodnić, że można tak przesunąć figurę G o całkowitą liczbę rzędów i wierszy, żeby suma przykrytych przez nią liczb była nieujemna.

Rozwiązanie:

Utożsammy pola szachownicy z punktami kratowymi na płaszczyźnie. Symbolem $v(x,y)$ oznaczać będziemy liczbę wpisaną w pole (x,y). Niech figura F składa się z pól $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_m,b_m)$, a figura G z pól (c_1,d_1), (c_2,d_2), $\ldots$, (c_n,d_n).

Z warunków zadania wynika, że

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v(a_j+c_i,b_j+d_i) \geqslant 0,$$

gdyż suma liczb pokrytych przez figurę F przesuniętą o wektor (x,y) wynosi $\sum_{j=1}^{m} v(a_j+x,b_j+y)$ i zgodnie z warunkami zadania jest ona nieujemna. Zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} v(a_j+c_i,b_j+d_i) \geqslant 0,$$

wobec tego dla pewnej liczby k musi zachodzić

$$\sum_{i=1}^{n} v(a_k+c_i,b_k+d_i) \geqslant 0.$$

Nierówność ta oznacza, że figura G przesunięta o wektor (a_k, b_k) pokrywa liczby, których suma jest nieujemna, co kończy dowód.

15. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita $n > 1$. Dowieść, że istnieje co najwyżej jedna para (a, b) liczb całkowitych dodatnich, dla której $p = a^2 + nb^2$.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że

$$p = a^2 + nb^2 = c^2 + nd^2$$

są dwoma różnymi rozkładami liczby p w sposób podany w treści zadania. Wówczas

$$\begin{aligned} p^2 &= (a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = a^2c^2 + n^2b^2d^2 + n(a^2d^2 + b^2c^2) = \\ &= (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2 = (ac - nbd)^2 + n(ad + bc)^2. \end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$(ac + nbd)(ad + bc) = (a^2 + nb^2)cd + (c^2 + nd^2)ab = p(ab + cd).$$

Zatem jedna z liczb $ac + nbd$ lub $ad + bc$ jest podzielna przez p, a więc nie mniejsza niż p.

Jeśli $ac + bnd \geqslant p$, to

$$p^2 = (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2 \geqslant p^2,$$

skąd wniosek, że drugi składnik jest równy 0, czyli $ad = bc$. Ponieważ zachodzą równości $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$ i $\mathrm{NWD}(c, d) = 1$, to $a = c$ i $b = d$, co przeczy uczynionemu przypuszczeniu.

Jeśli natomiast $ad + bc \geqslant p$, to

$$p^2 = (ac - nbd)^2 + n(ad + bc)^2 \geqslant np^2,$$

co jest niemożliwe.

W takim razie uczynione na początku przypuszczenie było fałszywe, co kończy rozwiązanie zadania.

16. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Udowodnić, że wielomian $x^n - x - 1$ jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje rozkład $x^n - x - 1 = f(x)g(x)$ dla pewnych niestałych wielomianów f i g o współczynnikach całkowitych.

Korzystając z pochodnej nietrudno zweryfikować, że wielomian $x^n - x - 1$ nie posiada pierwiastków podwójnych. Niech zatem $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ będą parami różnymi pierwiastkami zespolonymi tego wielomianu. Udowodnimy, że dla dowolnego $z \in \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ prawdziwa jest nierówność

$$2\Re\left(z - \frac{1}{z}\right) > \frac{1}{|z|^2} - 1.$$

Wystarczy zapisać $z = re^{it}$ i wówczas nierówność sprowadza się do $(1 + 2r\cos t)(r^2 - 1) > 0$. Ale

$$r^{2n} = |z|^{2n}| = |z+1|^2 = 1 + 2r\cos t + r^2,$$

a więc potrzebujemy tak naprawdę $(r^{2n} - r^2)(r^2 - 1) > 0$, a to jest jasne.

Niech $1 \leqslant s \leqslant n-1$ będzie stopniem $f(x)$ i załóżmy, że $z_1, z_2, \ldots, z_s$ to pierwiastki f. Korzystając z wcześniej udowodnionej nierówności dostajemy

$$2\Re\left(z_1 - \frac{1}{z_1}\right) + \ldots + 2\Re\left(z_s - \frac{1}{z_s}\right) > \frac{1}{|z_1|^2} + \ldots + \frac{1}{|z_s|^2} - s \geqslant 0,$$

gdzie druga nierówność wynika z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną, bo $|z_1 z_2 \ldots z_s| = |f(0)| = 1$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że liczba

$$\Re\left(z_1 - \frac{1}{z_1} + \ldots + z_s - \frac{1}{z_s}\right)$$

jest dodatnia. Zauważmy teraz, że z faktu iż wielomian f jest unormowany, o współczynnikach całkowitych i $|f(0)| = 1$ ze wzorów Viete'a łatwo wynika, że powyższa liczba jest również całkowita. A więc jest nie mniejsza niż 1.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla wielomianu g dochodzimy do wniosku, że

$$\Re\left(z_1 - \frac{1}{z_1} + \ldots + z_n - \frac{1}{z_n}\right) \geqslant 2.$$

To jest jednak sprzeczność, gdyż ze wzorów Viete'a łatwo wynika, że

$$z_1 - \frac{1}{z_1} + \ldots + z_n - \frac{1}{z_n} = 1.$$

Kończy to rozwiązanie zadania.

17. Znaleźć wszystkie funkcje różnowartościowe $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ spełniające warunek

$$2f(f(n)) \leqslant f(n) + n.$$

Rozwiązanie:

Udowodnijmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $f(n) \leqslant n$. Załóżmy przeciwnie niech $f(a) > a$ dla pewnej liczby naturalnej a. Zdefiniujmy ciąg $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Udowodnijmy, przez indukcję, że dla dowolnego $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $a_n < f(a)$. Nierówność ta jest spełniona dla $n = 2$. Krok indukcyjny wygląda następująco $a_{n+2} \leqslant \frac{a_{n+1}+a_n}{2} < \frac{f(a)+f(a)}{2} = f(a)$. Oznacza to, ze pewne dwie liczby w tym ciągu są równe, powiedzmy $a_k = a_{k+l}$, dla $l \geqslant 1$. Z różnowartościowości dostajemy $a_0 = a_l$, czyli $f(a) = a_{l+1} < f(a)$, sprzeczność. Wobec tego dla dowolnego n zachodzi nierówność $n \geqslant f(n)$, a stąd wynika już, że dla dowolnego n zachodzi równość $f(n) = n$.

18. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi o i ω są opisane odpowiednio na trójkątach ABC i KLM. Okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 są styczne wewnętrznie do okręgu o i styczne zewnętrznie do okręgu ω, przy czym punktami styczności okręgów o_1 i o_2 z o są punkty B i C, a punktami styczności okręgów o_3 i o_4 z ω są L i M. Udowodnić, że środki okręgów o_1, o_2, o_3, o_4 są wierzchołkami równoległoboku.

Rozwiązanie:

Niech O_1, O_2, O_3, O_4 będą środkami odpowiednio okręgów O_1, O_2, O_3, O_4. Niech ponadto G będzie punktem przecięcia środkowych BL i CM, zaś O — środkiem okręgu o. Jednokładność j o środku G i skali $-\frac{1}{2}$ przekształcającą trójkąt ABC na trójkąt KLM przekształca okrąg o na okrąg ω.

Niech B' będzie punktem styczności okręgów o_1 i ω, zaś L' będzie punktem styczności okręgów o_3 i ω. Zauważmy, że jednokładność j jest złożeniem jednokładności o środku B i skali dodatniej przekształcającej okrąg o na okrąg o_1 oraz jednokładności o środku B' i skali ujemnej przekształcającej okrąg o_1 na okrąg ω. Z twierdzenia o złożeniu jednokładności wynika więc, że punkty B, B' i G leżą na jednej prostej, do której należy także punkt L. Analogicznie dowodzimy, że punkty L', L i G są współliniowe. W takim razie punkty B, B', G, L i L' leżą na jednej prostej. Analogicznie udowodnimy, że punkty C, C', G, M i M' są współliniowe.

Punkty O_1, B' i G są współliniowe oraz punkty O, L', O_3 są współliniowe, skąd wniosek, że $GO_1 || L'O_3$. Podobnie uzasadniamy, że $GO_3 || OO_1$. W takim razie czworokąt OO_3GO_1 jest równoległobokiem, czyli środek odcinka O_1O_3 pokrywa się ze środkiem odcinka GO. W analogiczny sposób wykażemy, że środek odcinka O_2O_4 pokrywa się ze środkiem odcinka GO. W takim razie środki okręgów o_1, o_2, o_3, o_4 są wierzchołkami równoległoboku.

19. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich (m, n) równanie

$$m^6 = n^{n+1} + n - 1.$$

Rozwiązanie:

Jeżeli $n=1$ to dostajemy rozwiązanie $(m,n)=(1,1)$. Przyjmijmy, że $n \geqslant 2$. Jeżeli $n+1$ jest liczbą parzystą to korzystając z nierówności

$$(n^{\frac{n+1}{2}}+1)^2 = n^{n+1}+2n^{\frac{n+1}{2}}+1 > n^{n+1}+n-1 > (n^{\frac{n+1}{2}})^2,$$

prawdziwej dla dowolnego $n \geqslant 2$, dostajemy sprzeczność, gdyż mielibyśmy kwadrat pomiędzy dwoma kolejnymi kwadratami liczb naturalnych.

Podobnie, jeżeli $3|n+1$ to korzystając z nierówności

$$(n^{\frac{n+1}{3}}+1)^3 = n^{n+1}+3n^{\frac{2(n+1)}{3}}+3n^{\frac{n+1}{3}}+1 > n^{n+1}+n-1 > (n^{\frac{n+1}{3}})^3,$$

prawdziwej dla dowolnego $n \geqslant 2$, dostajemy sprzeczność, gdyż mielibyśmy sześcian między dwoma kolejnymi sześcianami liczb naturalnych.

Jeżeli $6|n$ to $m^6 \equiv n^{n+1}+n-1 \equiv -1 \pmod 3$ i dostajemy sprzeczność.

Pozostaje przypadek $n=6k+4$. Rozważmy dowolny dzielnik pierwszy p postaci $3l+2$ liczby $n+1=6k+5$, mamy

$$m^6 = n^{n+1}+n-1 \equiv -3 \pmod p.$$

Czyli -3 jest resztą kwadratową modulo p. Korzystając z własności symbolu Legendre'a otrzymujemy

$$1 = \left(\frac{-3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że również w tym przypadku nie ma rozwiązań.

20. Danych jest $2n+1$ punktów na płaszczyźnie, przy czym żadne trzy nie leżą na jednej prostej, oraz żadne cztery nie leżą na jednym okręgu. Udowodnić, że liczba okręgów przechodzących przez trzy z wybranych punktów, które dzielą pozostałe $2n-2$ punktów na połowy wynosi n^2.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że liczba szukanych okręgów nie zależy od konfiguracji punktów na płaszczyźnie. Pokażemy, że jeżeli ustalimy położenie $2n$ punktów i będziemy przesuwać jeden punkt P po płaszczyźnie to liczba szukanych okręgów się nie zmieni. Jest jasne, że liczba to może się zmienić, jedynie jeżeli punkt P przecina wyznaczoną przez pozostałe punkty prostą lub okrąg. Ponadto powiemy że okrąg jest (a,b)-dzielący jeżeli dokładnie a wyróżnionych punktów jest wewnątrz okręgu, zaś b wydzielonych punktów jest na zewnątrz okręgu.

Rozważmy sytuację w której zmieniamy punkt P na punkt Q przy czym odcinek PQ przecina prostą AB, oraz nie przecina żadnej innej prostej, ani żadnego okręgu. Okrąg ABP zawiera wszystkie wyróżnione punkty które leżą po tej samej stronie prostej AB co punkt P, podobnie trójkąt ABQ. Jeśli więc a wyróżnionych punktów leży po jednej stronie prostej zaś b po drugiej, to okrąg ABP jest (a, b)-dzielący zaś okrąg ABQ jest (b, a) dzielący. Pozostałe okręgi nie zmieniają liczby punktów wewnątrz. Wynika stąd, że liczba połowiących okręgów nie zmienia się.

Rozważmy sytuację w której zmieniamy punkt P na punkt Q przy czym odcinek PQ przecina łuk AB okręgu ABC oraz nie przecina żadnej innej prostej, ani żadnego innego okręgu. Załóżmy również, że punkt P leży na zewnątrz okręgu ABC. Wówczas wyróżnione punkty mogą leżeć tylko na zewnątrz okręgu ABP i ABQ, lub wewnątrz obu tych okręgów. W przeciwnym razie po drodze z P do Q przecinalibyśmy jeszcze inny okrąg. Niech będzie a punktów wewnątrz obu tych okręgów, zaś b punktów na zewnątrz. Okrąg ABC z $(a, b+1)$ dzielącego staje się $(a+1, b)$-dzielący, okrąg ABP jest $(a, b+1)$-dzielący, zaś okrąg ABQ jest $(a+1, b)$ dzielący, okrąg BCP jest $(a+1, b)$-dzielący, zaś okrąg BCQ jest $(a, b+1)$-dzielący, podobnie okręgi ACP i ACQ. Pozostałe okręgi nie zmieniają liczby punktów wewnątrz. W związku z tym liczba okręgów połowiących nie zmieniła się.

Pozostaje podać pewną konfigurację, dla której policzymy liczbę szukanych okręgów. Umieśćmy punkty na ramieniu paraboli, dokładniej nadajmy im współrzędne (i, i^2) dla $i = 0, 1, \dots, 2n$. Wówczas okrąg opisany na trójkącie $P_iP_jP_k$, gdzie $i < j < k$ zawiera dokładnie $k - j - 1 + i$ punktów wewnątrz. Chcemy aby $k - j + i = n$, ustalmy i, wówczas jeżeli $i < n$ to $(i, i+s, n+s)$ dla $s = 1, 2, \dots, n$ są rozwiązaniami. Jeżeli $i \geqslant n$ to $k - j \leqslant 0$ co jest niemożliwe. Ostatecznie mamy n możliwości na wybór i a przy ustalonym wyborze mamy n rozwiązań. W sumie jest więc $n \cdot n = n^2$ połowiących okręgów.

21. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c, r, s, t spełniające warunki

$$ab + 1 = r^2, \quad bc + 1 = s^2, \quad ca + 1 = t^2.$$

Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $\frac{rs}{t}, \frac{st}{r}, \frac{tr}{s}$ nie jest całkowita.

Rozwiązanie:

Załóżmy, bez straty ogólności, że $a \leqslant b \leqslant c$. Jeżeli $s|rt$ to również $s^2|r^2t^2$ czyli dostajemy

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (ac+1)(ab+1) = a^2bc + ab + ac + 1 \\ &\equiv ab + ac - a^2 + 1 = a(b+c-a) + 1 \pmod{bc+1}. \end{aligned}$$

Czyli liczba $a(b+c-a)+1$ jest podzielna przez $bc+1$. Ponadto $0 < a(b+c-a)+1 < b \cdot 2c + 2 = 2(bc+1)$. Wynika stąd, że $ab + ac - a^2 + 1 = bc + 1$ lub równoważnie $(b-a)(a-c) = 0$. Otrzymujemy, że dwie liczby spośród a, b, c są równe, bez starty ogólności przyjmijmy, że $a = b$. Wówczas $r^2 = ab+1 = a^2+1$ i mamy dwa kwadraty liczb całkowitych dodatnich różniące się o jeden, co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

22. Liczby rzeczywiste a, b, c są długościami boków trójkąta o obwodzie 1. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rozwiązanie:

Jako, że a, b, c są długościami boków trójkąta to istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, z, że $a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{y+z}{2}, c = \frac{z+x}{2}$. Z warunku $a+b+c = 1$ wynika, że również $x+y+z = 1$. Nasza nierówność przybiera postać

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{x^2+y^2+2z(x+y+z)} < 2 + \sqrt{2}.$$

Udowodnijmy pomocniczą nierówność

$$\sqrt{x^2+y^2+2z(x+y+z)} < x + y + \sqrt{2}z.$$

Po podniesieniu do kwadratu dostajemy

$$x^2+y^2+2z(x+y+z) < (x+y+\sqrt{2}z)^2 = x^2+y^2+2z^2+2xy+2\sqrt{2}z(x+y).$$

Po przeniesieniu na jedną stronę dostajemy $0 < 2xy + (2\sqrt{2}-2)z(x+y)$ co jest oczywiste.

Po zsumowaniu stronami pomocniczej nierówności i jej dwóch cyklicznych przesunięć uzyskujemy tezę.

23. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AD i BC. Okrąg o jest styczny do odcinków AB i AC i przecina odcinek BC w punktach E i F. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt BCD. Punkty X i Y są punktami przecięcia okręgu ω z odcinkami DE i DF, które leżą bliżej punktu D. Udowodnić, że $XY \parallel AD$.

Rozwiązanie:

Niech K i L będą punktami styczności okręgu o odpowiednio z odcinkami AB i AC. Niech K' będzie takim punktem leżącym na półprostej $DB^{\rightarrow}$ poza odcinkiem BD, że $BK' = BK$, zaś L' takim punktem leżącym na półprostej $DC^{\rightarrow}$ poza odcinkiem CD, że $CL' = CL$. Wtedy

$$DK' = DB + BK' = AC + BK = CL + AL + BK = CL + AK + BK$$
$$= CL + AB = CL + CD = CL' + CD = DL'.$$

W takim razie okrąg o' przechodzący przez punkty K' i L' oraz styczny do prostej BD jest też styczny do prostej CD. Równości $BK = BK'$ i $CL = CL'$ prowadzą do wniosku, że prosta BC jest osią potęgową okręgów o i o'. Punkty E i F należą do niej oraz do okręgu o, więc muszą leżeć także na okręgu o'.

Jednokładność o środku w punkcie D przekształcająca okrąg o' na okrąg ω przekształca punkty E i F odpowiednio na punkty X i Y, skąd wniosek, że $EF||XY$. Pozostaje jeszcze zauważyć, że $EF||AD$, co kończy rozwiązanie zadania.

24. Na przyjęciu urodzinowym u Bogny jubilatka gra z gośćmi w następującą grę. Na początku na stole leży n^2+2015 ciastek, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 2015. Następnie naprzemiennie Bogna i jeden z gości zjadają pewną liczbę ciastek. Liczba ciastek zjedzonych w jednym ruchu musi wynosić 1, być liczba pierwszą mniejszą niż n, lub być wielokrotnością n. Wygrywa gracz, który zje ostatnie ciastko. Rozstrzygnąć, czy Bogna ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że Bogna ma strategię wygrywającą. Powiemy, że liczba ciastek k jest przegrywająca jeżeli w grze z początkową liczbą ciastek k drugi gracz ma strategię wygrywającą, w przeciwnym razie powiemy, że k jest wygrywająca. Jest jasne, że jednym ruchem z liczby przegrywającej ciastek, można dojść jedynie do liczby wygrywającej, oraz, że z dowolnej wygrywającej liczby ciastek istnieje ruch do przegrywającej liczby ciastek.

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby $k > n^2$, liczba k jest wygrywająca. Przypuśćmy przeciwnie, niech $k > n^2$ będzie przegrywająca. Wówczas wszystkie liczby $k-n, k-2n, \ldots, k-[\frac{k}{n}]n$ ciastek są wygrywające. Oznacza, to że z każdej z tych liczb ciastek da się wykonać ruch do pewnej przegrywającej liczby ciastek. Oczywiście nie może być to ruch o podzielną przez n liczbę ciastek. Udowodnijmy, że dla dowolnych dwóch pozycji postaci $k-an, k-bn$, gdzie $a < b$ ruch do przegrywającej pozycji musi być o inną liczbę ciastek. Przypuśćmy przeciwnie, wówczas $k-an-r$ oraz $k-bn-r$ są obie przegrywające, jednak z $k-an-r$ można zrobić ruch do $k-bn-r$ zabierając $(b-a)n$ ciastek i uzyskujemy sprzeczność. Oznacza to, że każdej z liczb $k-n, k-2n, \ldots, k-[\frac{k}{n}]n$ można przypisać inny ruch, będący jedynką bądź liczbą pierwszą mniejszą od n. Jest to niemożliwe, gdyż $[\frac{k}{n}] \geqslant n$, a możliwych ruchów mniejszych od n jest mniej niż n.

Z powyższych rozważań wynika, że każda liczba $k > n^2$ jest wygrywająca, w szczególności n^2+2015 jest wygrywająca. Oznacza to, że Bogna ma strategię wygrywającą.

25. Dany jest trójkąt ABC i punkt P w jego wnętrzu. Proste AP, BP, CP przecinają boki BC, CA, AB w punktach odpowiednio X, Y, Z. Udowodnić, że jeśli pola trójkątów APY i APZ są równe, to punkt X jest środkiem odcinka BC.

Rozwiązanie:

Niech Q będzie punktem przecięcia odcinków AP i YZ. Wtedy daną w treści zadania równość pól możemy przepisać w postaci

$$\frac{1}{2}AP \cdot QY \sin\sphericalangle AQY = \frac{1}{2}AP \cdot QZ \sin\sphericalangle AQZ,$$

skąd wobec równości $\sphericalangle AQY + \sphericalangle AQZ = 180^\circ$ dostajemy $QY = QZ$.

Stosując twierdzenie Cevy dla trójkąta AYZ otrzymujemy

$$\frac{ZQ}{YQ} \cdot \frac{YC}{AC} \cdot \frac{AB}{AZ} = 1,$$

czyli

$$\frac{YC}{AC} = \frac{ZB}{AB}$$

albo

$$\frac{YC}{AY} = \frac{ZB}{AZ}.$$

Wykorzystując teraz twierdzenie Cevy dla trójkąta ABC dostajemy

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{YC}{AY} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1,$$

co w połączeniu z poprzednią równością daje $BX = CX$.

26. Udowodnić, że jeśli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczonym ściśle rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych, to ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dany wzorem

$$b_n = \frac{a_2 - a_1}{a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}$$

jest nieograniczony.

Rozwiązanie:

Ponieważ ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony i ściśle rosnący, więc istnieje taki ciąg liczb naturalnych $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, że dla dowolnego indeksu k mamy $a_{n_{k+1}} > 2a_{n_k}$ a ponadto $a_{n_0} > 0$. Zauważmy, że dla dowolnego indeksu k mamy

$$\begin{aligned} b_{n_{k+1}} - b_{n_k} &= \frac{a_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}-1}}{a_{n_{k+1}}} + \cdots + \frac{a_{n_k+1} - a_{n_k}}{a_{n_k}} \\ &> \frac{a_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}-1}}{a_{n_{k+1}}} + \cdots + \frac{a_{n_k+1} - a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} = \frac{a_{n_{k+1}} - a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wobec tego $b_{n_k} > \frac{k}{2} + b_{n_0}$ a zatem ciąg b_{n_k} jest nieograniczony i stąd również ciąg b_n jest nieograniczony.

27. W szachownicy 2015×2015 wpisujemy kolejno wierszami liczby od 1 do 2015^2. W jednym ruchu można wybrać trzy kolejne pola w wierszu lub kolumnie, i zwiększyć liczbę w środkowym polu o dwa jednocześnie zmniejszając skrajne pola o jeden, lub zmniejszyć środkową liczbę o dwa jednocześnie zwiększając liczby w skrajnych polach o jeden. Po pewnej liczbie ruchów w tablicy ponownie wpisane są liczby od 1 do 2015^2. Udowodnić, że znajdują się one w początkowej konfiguracji.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $a_1, a_2, \ldots, a_{2015^2}$ liczby wpisane w kolejnych komórkach rozważanej tablicy (początkowo mamy $a_i = i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2015^2$). Niech $S = \sum\limits_{i=1}^{2015^2} i \cdot a_i$. Zauważmy, że wykonywanie dozwolonych operacji nie zmienia wartości S. Zgodnie z warunkami zadania dla końcowej konfiguracji zachodzi $a_i = \pi(i)$, gdzie π jest pewną permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, 2015^2\}$. Możemy zatem zapisać $\sum\limits_{i=1}^{2015^2} i \cdot \pi(i) = \sum\limits_{i=1}^{2015^2} i^2$. Z nierówności o ciągach jednomonotonicznych wiemy jednak, że jest to możliwe tylko gdy $\pi(i) = i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2015^2$, co kończy dowód.

28. Dane są wielomian f o współczynnikach całkowitych oraz liczba pierwsza p takie, że $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$ oraz dla dowolnej liczby całkowitej k liczba $f(k)$ daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez p.
Udowodnić, że $\deg(f) \geqslant p - 1$.

Rozwiązanie:

Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $\deg(f) < p - 1$. Niech $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-2} x^{p-2}$. Rozważmy sumę $f(0) + f(1) + \ldots + f(p-1)$. Z założenia wynika, że

$$1 \leqslant f(0) + \ldots + f(p-1) \leqslant p - 1.$$

Z drugiej strony mamy

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(k) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{p-2} a_i k^i = \sum_{i=0}^{p-2} a_i \sum_{k=0}^{p-1} k^i \equiv 0 \pmod{p}.$$

Gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu $\sum_{k=0}^{p-1} k^i \equiv 0 \pmod{p}$ dla dowolnego $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, (przyjmujemy $0^0 = 1$). Kongruencję tę można łatwo dowieść wybierając pewien generator g modulo p. Mamy wówczas

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^i \equiv \sum_{k=0}^{p-2} g^{ki} = \frac{g^{(p-1)i}-1}{g^i-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Udowodniliśmy, że nasza suma jest podzielna przez p, oraz leży między 1 a $p-1$. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

29. Na obóz matematyczny ma przyjechać 2015 uczestników. Wiadomo, że każdy z nich nie lubi dokładnie 3 spośród pozostałych uczestników i relacja nielubienia nie jest symetryczna (tzn. osoba A może nie lubić B i jednocześnie B może lubić A). Kierownik obozu chce zakwaterować uczestników w pokojach w taki sposób, żeby każdy lubił wszystkie osoby w swoim pokoju. Jaka jest najmniejsza liczba pokoi, dla której jest to zawsze możliwe?

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że szukaną liczbą pokoi jest siedem. W celu pokazania, że nie może być ich mniej rozważmy siedem takich osób o numerach $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, że osoba i nie lubi osób $i+1, i+2, i+3$ modulo 7. Jest jasne, że żadne dwie spośród tych osób nie mogą być w jednym pokoju.

Udowodnimy przez indukcję że dla dowolnej liczby osób $n \geqslant 7$, takich, że każda nie lubi co najwyżej 3 osób, siedem pokoi wystarczy. Dla $n = 7$ jest to oczywiste. Weźmy dowolne $n > 7$ osób. Wybierzmy osobę, która nie jest lubiana przez najmniejszą liczbę osób. Nie lubią jej co najwyżej trzy osoby. Pozostałe $n-1$ osób rozstawiamy po pokojach z założenia indukcyjnego. Nasza wyróżniona osoba, nie lubi co najwyżej trzech osób i nie jest lubiana przez co najwyżej trzy osoby. Mamy do dyspozycji siedem pokoi, z czego co najwyżej sześć zawiera osobę z którą nasza osoba nie może być w pokoju. Możemy zatem dokwaterować wyróżnioną osobę do jednego z pokoi.

30. Dane są dwa wielomiany $P(x), Q(x)$, których wszystkie współczynniki wynoszą 1 lub 2015. Wiadomo, że $Q(x) \mid P(x)$.
Udowodnić, że $\deg Q + 1 \mid \deg P + 1$.

Rozwiązanie:

Niech $P(x) = Q(x)R(x)$, dla pewnego wielomianu $R(x)$. Oznaczmy kolejno $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k$, oraz $R(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-k}x^{n-k}$. Przyrównajmy współczynniki w równości $P(x) = Q(x)R(x)$ modulo 2 otrzymamy wówczas

$$1 + x + \ldots + x^n = (1 + x + \ldots + x^k)(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-k}x^{n-k}) \pmod{2}.$$

Mnożąc stronami przez $x-1$ dostaniemy

$$x^{n+1} - 1 = (x^{k+1} - 1)(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-k}x^{n-k}) \pmod{2}.$$

Przyjmujemy konwencję, że $b_s = 0$ dla $s < 0$. Pokażemy indukcyjnie, że z naszego równania wynika że $b_s = 1 \pmod 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi kongruencja $s \equiv 0 \pmod{k+1}$. Jest to prawda dla $s = 0, -1, -2, \ldots, -k$. Rozważmy $s > 0$ przyrównując współczynniki przy x^s w obu stronach równania dostaniemy

$$b_s + b_{s-k+1} \equiv 0 \pmod 2.$$

Oznacza to, że $b_s \equiv b_{s-k+1} \pmod 2$, i dostajemy naszą tezę z założenia indukcyjnego. Jako, że $b_{n-k} = 1 \pmod 2$, to $k+1|n-k$ skąd $k+1|n+1$.

31. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Udowodnić, że istnieje taka permutacja $k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}$ liczb $1, 2, \ldots, p-1$, że zachodzi podzielność

$$p \mid 1^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + (p-1)^{k_{p-1}}.$$

Rozwiązanie:

Niech g będzie generatorem modulo p. Udowodnimy, że istnieje permutacja k_i liczb od $1, 2, \ldots, p-1$, że spełniona jest kongruencja $\sum_{i=1}^{p-1} g^{ik_i} \equiv 0 \pmod p$. Definiujemy ciąg k_i jako $k_i = \frac{p+1}{2} - i$ oraz $k_{i+\frac{p-1}{2}} = p - i$ dla $i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Obliczamy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p-1} g^{ik_i} &= \sum_{i+j=\frac{p+1}{2}} (g^{ij} + g^{(p-i)(p-j)}) = \sum_{i+j=\frac{p+1}{2}} g^{ij}(1 + g^{p^2 - \frac{p(p+1)}{2}}) \\ &= \sum_{i+j=\frac{p+1}{2}} g^{ij}(1 + g^{\frac{p-1}{2}}) \equiv 0 \pmod p,\end{aligned}$$

przy czym ostatnia kongruencja wynika z tego, że g nie jest resztą kwadratową modulo p.

32. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty X, Y, Z leżą na bokach odpowiednio BC, CA, AB, przy czym XYZ jest trójkątem równobocznym o najmniejszym możliwym polu. Udowodnić, że proste prostopadłe do YZ, ZX, XY przechodzące przez odpowiednio A, B, C są współpękowe.

Rozwiązanie:

Rozważmy trójkąt równoboczny DEF, którego wierzchołki leżą na odcinkach odpowiednio BC, CA, AB. Niech punkt P będzie drugim punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach BDF i CDE. Zauważmy, że mamy równość kątów $\sphericalangle BFP = \sphericalangle CDP = \sphericalangle AEP$. Wobec tego okrąg opisany na trójkącie AEF również przechodzi przez punkt P.

Zauważmy, że położenie punktu P nie zależy od wyboru trójkąta równobocznego DEF. Istotnie, $\sphericalangle ABP + \sphericalangle PCA = \sphericalangle FPD + \sphericalangle PDE = \sphericalangle FDE = 60°$ i analogicznie $\sphericalangle PCB + \sphericalangle BAP = 60° = \sphericalangle PAC + \sphericalangle CBP$. Równości tych kątów jednoznacznie wyznaczają punkt P.

Oznaczmy rzuty punktu P na boki BC, CA, AB jako odpowiednio K, L, M. Wówczas trójkąty PDK, PEL, PFM są prostokątne, podobne i tak samo zorientowane. Zatem istnieje podobieństwo spiralne o środku w punkcie P, które przeprowadza punkty D, E, F na punkty odpowiednio K, L, M. Skala tego podobieństwa jest równa $\frac{PD}{PX} \leqslant 1$, więc pole trójkąta KLM nie przekracza pola trójkąta DEF. Wobec tego punkty K, L, M pokrywają się z punktami X, Y, Z.

Niech punkt Q będzie izogonalnie sprzężony do punktu P w trójkącie ABC. Ponieważ AP jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie AYZ, więc $AQ \perp YZ$. Analogicznie uzasadniamy, że $BQ \perp ZX$ oraz $CQ \perp XY$. Wobec tego proste prostopadłe do prostych YZ, ZX, XY przechodzące przez punkty odpowiednio A, B, C przecinają się w punkcie Q, co kończy dowód.

33. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $\frac{x^2}{x+y}$ i $\frac{x+y}{4}$ dostajemy $\frac{x^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geqslant x$. Sumując tę nierówność z podstawionym $(x, y) = (a, b)$ oraz $(x, y) = (b, c)$ dostajemy tezę.

34. Grzybiarz Wojciech hoduje 2015 grzybów $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_{2015}$, każdy w oddzielnej doniczce, i podejrzewa, że niektóre z nich zachorowały (ale nie jest w stanie stwierdzić które, bo ma wybity palec). Może jednak wybrać pewne dwa grzyby G_i, G_j, gdzie $i \neq j$, i przesadzić G_j na godzinę do doniczki G_i. Po tym czasie grzyba G_j przesadza z powrotem do jego doniczki. Jeśli G_i był chory, a G_j zdrowy, to po tej operacji grzyb G_i wyzdrowieje, a grzyb G_j zachoruje. W pozostałych trzech przypadkach stan grzybów nie zmieni się. Wojciech wykonuje pewną liczbę takich operacji.
Czy pod koniec zawsze jest w stanie wybrać pewne dwa grzyby i mieć pewność, że są oba zdrowe albo oba chore?

Rozwiązanie:

Pokażemy, że Wojciech nie jest w stanie tego zrobić. Przyporządkujmy grzybom różne liczby rzeczywiste. Podczas wykonywania operacji przesadzenia grzyba A, z przyporządkowaną liczbą a, do doniczki grzyba B, z przyporządkowaną liczbą b, zamieniamy te liczby miejscami wtedy i tylko wtedy, gdy $a > b$.

Załóżmy, że Wojciech wykonuje pewien ciąg operacji i rozważmy dowolne 2 grzyby. Niech $x > y$ będą liczbami przypisanymi tym grzybom po wykonaniu wszystkich przesadzeń. Zauważmy, że jeśli w początkowej konfiguracji chore są grzyby z przypisanymi liczbami $\geqslant x$, to również po wykonaniu dowolnej liczby przesadzeń jedynymi chorymi grzybami będą te z przypisanymi liczbami $\geqslant x$. Oznacza to jednak, że w parze wybranej przez Wojciecha może występować dokładnie 1 chory grzyb, co kończy dowód.

35. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg ω o środku w punkcie O. Punkt D jest środkiem łuku BC okręgu ω niezawierającego punktu A, natomiast punkt M środkiem boku BC. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt Q jest symetryczny do I względem punktu M. Półprosta QD przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie T. Udowodnić, że $\sphericalangle ACT = \sphericalangle DOI$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez L drugi punkt przecięcia prostej DO z okręgiem ω, a przez K – punkt symetryczny do punktu D względem punktu M. Zauważmy, że $\sphericalangle DBM = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB = \sphericalangle DLB$, czyli trójkąty DBM i DLB są podobne. Z faktu, że DL jest średnicą ω, mamy więc

$$DB^2 = DM \cdot DL = DM \cdot 2DO = 2DM \cdot DO = DK \cdot DO.$$

Z równości tej wynika podobieństwo trójkątów DKL i DIO, zatem $\sphericalangle DOI = \sphericalangle DIK$. Czworokąt $DQKI$ jest równoległobokiem, czyli $\sphericalangle DIK = \sphericalangle DQK = \sphericalangle TDA = \sphericalangle TCA$, co należało udowodnić.

36. Powiemy, że liczba naturalna *ma tę moc*, jeżeli jest postaci a^n, gdzie $a \in \{3, 4, 5, 6\}$, zaś n jest liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że każdą liczbę całkowitą większą od 2 można przedstawić jako sumę parami różnych liczb mających tę moc.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że każdą liczbę całkowitą n większą od 6 możemy zapisać w postaci sumy parami różnych liczb mających tę moc, z których żadna nie jest równa n. Zastosujemy indukcję ze względu na n. Dla $n = 7, 8$ mamy odpowiednio $7 = 3+4$ oraz $8 = 3+5$. Dla n z przedziału $[9, 11]$ zapisujemy $n = 6+(n-6)$. Dla liczby n z przedziału $[12, 17]$ zapisujemy $n = 9+(n-9)$ i zamieniamy $(n-9)$

na uzyskany wcześniej zapis. Dla $n = 18$ mamy $18 = 3+6+9$, dla liczb z przedziału $[19, 31]$ zapisujemy $n = 16+(n-16)$ i zamieniamy $(n-16)$ na uzyskany wcześniej zapis. Dla n z przedziału $[32, 39]$ zapisujemy $n = 27 + (n - 27)$ i zamieniamy $(n - 27)$ na uzyskany wcześniej zapis.

Weźmy dowolną liczbę $n \geqslant 39$. Rozważmy największe potęgi liczb $3, 4, 5, 6$, które są nie większe niż $n - 3$, oznaczmy je jako $a < b < c < d$. Z założenia $n \geqslant 39$ wynika, że $a > 6$. Rozważmy przedstawienie $n = (n - d) + d$. Liczbę $n - d$ możemy zapisać przy pomocy założenia indukcyjnego, jeżeli $n - d > 6$. W przeciwnym razie liczba $n - d \leqslant 6$ i zostawiamy ją tak jak jest. Jeżeli zapis $n-d$ nie zawiera d to mamy szukane przedstawienie. Załóżmy przeciwnie, wtedy $(n-d)$ ma d w swojej reprezentacji, co za tym idzie $n-d \geqslant d+3$ lub $n-d = d$ i $d \leqslant 6$. Gdyż liczby mniejsze d oraz $d + 1, d + 2$ nie mają w rozkładzie liczby d. Jednak wiemy, że $d > a > 6$, stąd $n - d \geqslant d+3$, czyli również $n - d - c \geqslant 3$. Rozważmy zapis $n = (n - d - c) + c + d$, jeżeli $n - d - c$ nie zawiera w swoim zapisie liczb c i d to mamy szukany zapis, w przeciwnym razie $n-d-c \geqslant c+3$ lub $n - d - c = c$ i $c \leqslant 6$. Ponownie $c > a > 6$ stąd $n - d - c \geqslant c + 3$. Idąc tak dalej dostajemy $n - d - c - a - b \geqslant a + 3$. Uzyskujemy sprzeczność, gdyż

$$\begin{aligned} n &\geqslant 2a + b + c + d + 3 \geqslant \frac{n-3}{3} + \frac{n-3}{4} + \frac{n-3}{5} + 2 \cdot \frac{n-3}{6} + 3 \\ &> (n-3)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + 3 > n. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że podczas podanej procedury uzyskaliśmy żądane przedstawienie liczby n.

Zawody drużynowe

1. Jarosław bawi się pionkami. Ma przed sobą dwie trasy długości k centymetrów. Na starcie każdej z nich stoi tyle samo pionków. Chciałby doprowadzić swoje pionki do mety – jednak przeszkadza mu w tym złośliwy Antoni. Co jakiś czas, Jarosław wybiera po jednym pionku na obu trasach i przesuwa je o centymetr do przodu. Po każdym ruchu Jarosława, Antoni niszczy dokładnie jeden pionek na jednej z tras.

Wyznaczyć taką funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że Jarosław, ustawiwszy na starcie obu tras po $f(k)$ pionków, może zawsze doprowadzić chociaż jednego pionka do mety, niezależnie od strategii Antoniego.

Funkcja f nie powinna rosnąć istotnie szybciej niż funkcje w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

Rozwiązanie:

Przedstawimy rozumowanie dla $f(k) = k!$. Udowodnimy indukcyjnie, że jeżeli Jarosław ma na obu trasach po $k!$ pionków (niekoniecznie na starcie), to jest doprowadzić przynajmniej jeden pionek do pola k. Dla $k = 1, k = 2$ teza indykcyjna jest oczywista.

Podamy strategię dla Jarosława która zapewni mu zwycięstwo. W pierwszym kroku, Jarosław wielokrotnie przesuwa dwa pionki z najniższych pól w obu rzędach na wyższe pole. Wykonuje ten manewr $2(k-1)!$ razy. Niech po tej operacji ma na trasach odpowiednio a i b pionków, które są wyżej niż w początkowym ustawieniu. Bez straty ogólności przyjmujemy $a \geqslant b$. Jeżeli $a, b \geqslant (k-1)!$ to Jarosław wygra na mocy założenia indukcyjnego.

Jest jasne, że $a + b \geqslant 2(k-1)!$. Gdyż za każdym ruchem w pierwszej fazie, liczba pionków, które są wyżej niż w początkowym ustawieniu wzrasta o co najmniej jeden. Jeżeli $a - b = 0$ to $a, b \geqslant (k-1)!$ i zgodnie z założeniem indukcyjnym wygraliśmy. Jeżeli $a > b$, to udowodnimy, że używając $(k-2)$ ruchów możemy zmniejszyć różnicę $a - b$ oraz nie zmniejszyć ich sumy. Jarosław przesuwa najwyższy pionek pierwszego rzędu i najniższy pionek drugiego rzędu do przodu, tak długo, aż Antoni nie zabije pionka z pierwszego rzędu. Antoni musi zbić pionek z pierwszego rzędu po co najwyżej $k-2$ ruchach, gdyż w przeciwnym razie Jarosław dojdzie do mety. Wówczas liczba b wzrosła o jeden, zaś liczba a zmalała o jeden. Wykonujemy serię takich ruchów dopóki $b < (k-1)!$. W tym momencie $a+b \geqslant 2(k-1)!$ oraz $b = (k-1)!$ stąd $a \geqslant (k-1)!$ i stosujemy założenie indukcyjne. Łączna liczba ruchów w opisanej procedurze wynosi co najwyżej $2(k-1)! + (k-2) \cdot (k-1)! = k!$.

Uwaga. Najlepsze znane ograniczenie na funkcję f wynosi $f(k) = O((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k)$. Dowód tego ograniczenia znajduje się w pracy L. Duraja, G. Gutowskiego i J. Kozika.

2. Maciek i Teodor grają w następującą grę na szachownicy 100×100. Maciek wybiera dowolne puste pole, następnie Teodor kładzie domino 1×2 na planszy tak aby pokryć wybrane przez pierwszego gracza pole. Domina nie mogą na siebie nachodzić. Gra kończy się gdy któryś z graczy nie może wykonać ruchu. Maciek wygrywa jeżeli cała plansza jest pokryta, w przeciwnym razie wygrywa Teodor. Rozstrzygnąć, który z graczy ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Maciek ma strategię wygrywającą.

Pole leżące w i-tym wierszu i j-jtej kolumnie będziemy nazywać polem (i, j). Powiemy, że pole (i, j) leży na k-tej przekątnej wtedy i tylko wtedy, gdy $i + j - 1 = k$.

Jeżeli nie wszystkie pola przekątnych o numerach $1, 2, \ldots, 99$ są pokryte, to Maciek wskazuje wolne pole (i, j) leżące na przekątnej o możliwie niskim numerze, którego pierwsza współrzędna jest najmniejsza możliwa. Teodor wtedy może wykonać ruch, bowiem pole $(i + 1, j)$ jest niepokryte.

Jeżeli wszystkie pola przekątnych $1, 2, \ldots, 99$ są pokryte, to Maciek nieco modyfikuje swoją strategię. Znajduje przekątną o najniższym numerze k, w której istnieje wolne pole i wskazuje kolejno pola $(k - 100, 100)$, $(k - 99, 99)$, $(k - 98, 98)$ tak długo, aż natrafi na pole, które jest już pokryte. (Jeżeli pole $(k - 100, 100)$ jest pokryte, to nie wskazuje żadnego z powyższych pól.) Teodor jest w stanie położyć kostki domina na tych polach, gdyż w momencie wskazania pola $(k - i, i)$ pole $k - i + 1, i)$ jest niepokryte. Następnie Maciek po kolei wskazuje pola $(100, k - 100), (99, k - 99), \ldots$ omijając pola, które zostały wcześniej pokryte aż do momentu, gdy wszystkie pola k-tej przekątnej zostaną pokryte. Teodor wciąż może kłaść kostki domina, gdyż w momencie wskazania pola $(i, k - i)$ pole $(i, k - i + 1)$ jest niepokryte.

Zauważmy, że w sytuacji z poprzedniego akapitu pokryte pole w k-tej przekątnej musi istnieć. Istotnie, pokolorujmy planszę w szachownicę złożoną z pól białych i czarnych tak, że pole $(1, 1)$ jest czarne. Przekątne o numerach nieparzystych składają się wyłącznie z pól czarnych, a pozostałe przekątne z pól białych. Łatwo sprawdzić, że jeśli k jest liczbą parzystą, to przekątne $1, 2, \ldots, k - 1$ zawierają więcej pól czarnych niż białych, a jesli k jest liczbą nieparzystą, to przekątne te zawierają więcej pól białych. Skoro zaś każde domino pokrywa dokładnie jedno pole białe i jedno pole czarne, to niektóre pola k-tej przekątnej muszą być pokryte.

Opisany powyżej algorytm prowadzi do całkowitego wypełnienia planszy, co dowodzi, że Maciek jest w stanie zapewnić sobie wygraną.

3. Dana jest liczba rzeczywista a różna od 0 i 1. Janek i Tomek grają w następującą grę. Gracze naprzemiennie, począwszy od Janka, zamieniają jedną gwiazdkę w wielomianie

$$\star x^4 + \star x^3 + \star x^2 + \star x + \star$$

na dowolną liczbę postaci a^n, gdzie n jest liczbą całkowitą. Janek wygrywa, jeżeli powstały wielomian nie ma pierwiastka rzeczywistego, w przeciwnym razie wygrywa Tomek. Wyznaczyć, w zależności od a który z graczy ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Udowodnijmy, że dla $a > 0$ Janek ma strategię wygrywającą. Zauważmy, że Janek może zapewnić sobie, aby w ostatnim ruchu ustalać współczynnik przy parzystej potędze. Istotnie, mamy do dyspozycji trzy ruchy a współczynników przy nieparzystych potęgach jest tylko dwa.

Jeżeli Janek w ostatnim ruchu ustala współczynnik przy x^0 to wygrywa, gdyż powstały dotąd wielomian posiada minimum globalne.

Jeżeli Janek w ostatnim ruchu ustala współczynnik przy x^4 to rozpatrując w miejsce $W(x)$ wielomian $x^4W(\frac{1}{x})$ sprowadzamy sytuację do poprzedniej.

Jeżeli Janek w ostatnim ruchu ustala współczynnik przy x^2 to również wygrywa. Niech dotychczasowy wielomian wynosi $P(x) = bx^4 + cx^3 + ex + f$. Możemy dobrać współczynnik przy x^2 tak by był większy niż $\frac{c^2}{4b} + \frac{f^2}{4e} + 1$, wówczas dla dowolnego x zachodzi nierówność

$$W(x) > bx^4 + cx^3 + \left(\frac{c^2}{4b} + \frac{e^3}{4f} + 1\right)x^2 + ex + f$$
$$= x^2 + bx^2\left(x + \frac{c}{2b}\right)^2 + e\left(x + \frac{f}{2e}\right)^2 > 0.$$

Jeżeli $a = -1$ to również wygrywa Janek. Wtedy każdy współczynnik może być równy 1 lub -1. W pierwszym ruchu Janek gra jedynkę jako współczynnik przy x^2, a następnie na współczynnik przy x i x^3 odpowiada przeciwnym odpowiednio przy x^3 i x, zaś na współczynnik przy x^0 lub x^4 odpowiada tym samym odpowiednio przy x^4 lub x^0. Powstały wielomian będzie jednym z $x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$, lub $x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$, lub przeciwnym do któregoś z wymienionych. Jak łatwo sprawdzić, żaden z wymienionych wielomianów nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Jeżeli $a < 0$ i $a \neq -1$ to Tomek ma strategię wygrywającą. Zauważmy, że jeżeli wyraz wolny i współczynnik wiodący wielomianu są różnych znaków, to wielomian ma pierwiastek. Wobec tego Janek nie może zagrać jako pierwszy przy x^0 ani przy x^4, gdyż wtedy Tomek odpowie odpowiednio przy x^4 lub x^0, liczbą o przeciwnym znaku. Rozważmy dwa przypadki.

Jeżeli Janek zgrał swój pierwszy ruch przy x^3 (przypadek x^1 jest analogiczny poprzez zastąpienie $W(x)$ przez $x^4W(\frac{1}{x})$), to Tomek odpowiada $a^0 = 1$ przy x^4 zaś Janek musi w następnym ruchu zagrać liczbę dodatnią przy x^0. Oznaczmy przez $g(x) = x^4 + ux^3 + v$ dotychczasowy wielomian. Niech ponadto $m = \max\{g(-1), g(1)\}$. Tomek w swoim ruchu wybiera współczynnik przy x^2, powiedzmy d, tak aby $d < -m$. Wtedy $g(1) + d \cdot 1^2 < m + d < 0$, oraz

$g(-1) + d \cdot (-1)^2 < m + d < 0$. Powstały dotąd wielomian ma ujemne wartości w -1 i 1, niezależnie od ostatniego ruchu Tomka jedna z tych wartości się zwiększy a druga zmniejszy, i przynajmniej jedna z nich zostanie ujemna. Wynika stąd, że wielomian ma pierwiastek i Tomek wygra.

Jeżeli Janek zagrał swój pierwszy ruch przy x^2 to Tomek odpowiada $a^0 = 1$ przy x^4 zaś Janek musi w następnym ruchu zagrać liczbę dodatnią przy x^0. Oznaczmy przez $g(x) = x^4 + ux^2 + v$ dotychczasowy wielomian. Niech ponadto $k = \max\{g(-1), g(\frac{1}{2})\}$.

Jeżeli $k < 0$ to Tomek wybiera dowolne c spełniające warunki $-k > c > 0$ i stawia przy x^3. Wtedy $g(-1) + c(-1)^3 = g(-1) - c < g(-1) \leqslant k < 0$, oraz $g(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^3 c < g(\frac{1}{2}) - \frac{1}{8}k \leqslant \frac{7}{8}k < 0$. Powstały dotąd wielomian ma ujemne wartości w -1 i $\frac{1}{2}$, niezależnie od ostatniego ruchu Tomka jedna z tych wartości się zwiększy a druga zmniejszy, i przynajmniej jedna z nich zostanie ujemna. Wynika stąd, że wielomian ma pierwiastek i Tomek wygra.

Jeżeli $k \geqslant 0$ to Tomek wybiera dowolne c spełniające warunki $c > 4k$ i stawia przy x^3. Wówczas $g(-1) - c \leqslant k - c$ oraz $g(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8}c \leqslant k + \frac{1}{8}c$. Aby wygrać Janek musi tak dobrać współczynnik przy x^1, powiedzmy e, aby spełnione były warunki

$$k - c - e > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{8}c + k + \frac{1}{2}e > 0.$$

Z których wynika $k - c > e > -\frac{1}{4}c - 2k$ czyli $4k > c$ co jest sprzeczne z doborem c.

Ostatecznie Janek wygra gdy $a > 0$ lub $a = -1$, zaś Tomek dla $a < 0$ i $a \neq -1$.

4. Krystyna i Stefan grają w nietypową wersję gry w kółko i krzyżyk. Plansza składa się z 3×3 dużych kwadratów, a każdy z nich zawiera mniejszą planszę złożoną z 3×3 pól. Grę zaczyna Krystyna stawiając znak X w dowolnym spośród 81 pól. Następnie gracze naprzemiennie stawiają swój znak w dowolnym polu leżącym wewnątrz dużego kwadratu odpowiadającemu ostatniemu ruchowi przeciwnika. Przykładowo, jeśli Krystyna postawi X w lewym górnym polu któregokolwiek z 9 dużych kwadratów, to Stefan musi zagrać w pewne wolne pole w dużym kwadracie leżącym w lewym górnym rogu planszy. Jeśli kwadrat, w którym jest się zmuszonym zagrać jest już całkowicie wypełniony, to można zagrać w dowolnym wolnym polu na planszy. Gracz, który wygra grę w którymś dużym kwadracie, wygrywa ten duży kwadrat. Całą grę wygrywa gracz, który jako pierwszy wygra trzy duże kwadraty leżące w linii. Rozstrzygnąć, czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą i jeśli tak, to który.

Pytanie pozakonkursowe. Zmieńmy trochę zasady, zakładając, że jeśli gracz jest zmuszony zagrać w dużym kwadracie, który już został przez kogoś wygrany, to może zagrać w dowolne wolne pole na planszy. Rozstrzygnąć, czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą i jeśli tak, to który.

Rozwiązanie:

Numerujemy duże kwadraty kolejno wierszami, liczbami od 1 do 9. Podobnie numerujemy pola każdej małej planszy. Do pola odnosimy się najpierw podając numer dużego kwadratu, a następnie podając numer pola na planszy w tym kwadracie.

Pokażemy, że Krystyna ma strategię wygrywającą. W pierwszym ruchu gramy w środek, środkowego kwadratu czyli w pole $(5, 5)$. Następnie wykonujemy siedem kolejnych ruchów w środki wskazanych przez Stefana pól. Innymi słowy na ruch $(5, i)$ odpowiadamy ruchem $(i, 5)$. W rezultacie duże pole numer 5 należy do Stefana, i jest całkowicie wypełnione. Natomiast wszystkie środki pozostałych dużych pól poza jednym należą do Krystyny, bez starty ogólności przyjmijmy, że to pole ma numer 1.

W następnym ruchu Krystyna gra w pole $(1, 1)$. Następnie na każdy ruch postaci $(1, i)$ odpowiadamy $(i, 1)$, gdy $i \neq 5$, zaś na $(1, 5)$ odpowiadamy $(9, 1)$, gramy w ten sposób dopóki Stefan nie zajmie obu pól $(1, 5)$ i $(1, 9)$.

Na drugi z tych ruchów odpowiadamy $(9, 9)$. Następnie na każdy ruch $(1, i)$ lub $(9, i)$ odpowiadamy $(i, 1)$, jeśli to pole nie jest jeszcze zajęte lub $(i, 9)$ w przeciwnym razie. W pewnym momencie oba duże kwadraty 1 i 9 się zapełnią. Zauważmy, że wówczas duże pola 1 i 5 należą do Stefana, zaś duże pola $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ należą do Krystyny. Wobec tego Krystyna wygrała.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz takie dwa podzbiory A, B zbioru $\{0, 1, \ldots, n\}$, że spełniony jest warunek $|A| + |B| \geqslant n + 2$. Udowodnić, że istnieją takie elementy $a \in A, b \in B$, że $a + b$ jest potęgą dwójki.

Rozwiązanie:

Niech $I_m = \{0, 1, \ldots, m\}$. Pokażemy najpierw indukcyjnie, że dla dowolnego m naturalnego istnieje funkcja różnowartościowa $f : I_m \to I_m$ taka, że dla dowolnego $x \in I_m$ liczba $x + f(x)$ jest potęgą dwójki. Dla $m = 1$ wystarczy przyjąć $f(0) = 1$ i $f(1) = 0$.

Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla wszystkich $k \leqslant l - 1$ i rozważmy I_l, gdzie $2^{a-1} \leqslant l < 2^a$ dla pewnego a naturalnego. Konstruujemy f w następujący sposób: dla $2^a - l \leqslant t \leqslant l$ niech $f(t) = 2^a - t$. Z założenia indukcyjnego wiemy natomiast, że istnieje g takie, że $t + g(t)$ jest potęgą dwójki dla $t < 2^a - l$. Dookreślamy $f(t) = g(t)$ dla $t < 2^a - l$ i mamy szukane f, co kończy dowód indukcyjny.

Niech $f : I_n \to I_n$ będzie funkcją o opisanych wyżej własnościach. Ponieważ jest ona bijekcją, mamy $|f(A)| = |A|$, czyli z warunków zadania

$$|f(A)| + |B| = |A| + |B| \geqslant n + 2 > |I_n|.$$

Oznacza to, że istnieje $s \in f(A) \cap B$ i wtedy $f^{-1}(s) + s$ jest potęgą dwójki i jednocześnie $f^{-1}(s) \in A$ i $s \in B$, co kończy dowód.

2. Danych jest $5n$ punktów na płaszczyźnie, przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe. Niektóre z tych punktów połączono $10n^2 + 1$ odcinkami, a następnie każdy z narysowanych odcinków pomalowano na zielono lub czerwono. Udowodnić, że istnieje trójkąt, którego boki są tego samego koloru.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Turana wiemy, że maksymalna liczba krawędzi w grafie o $5n$ wierzchołkach bez sześcioelementowej kliki wynosi $(1 - \frac{1}{5})\frac{(5n)^2}{2} = 10n^2$. Wobec tego w naszej konfiguracji istnieje sześć punktów z których każde dwa są połączone odcinkiem pewnego koloru. Liczba Ramseya $R(3) = 6$, dlatego wśród tych sześciu punktów pewne trzy są połączone odcinkami tego samego koloru.

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla których istnieje taka funkcja $F : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}_+$, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c oraz dla dowolnego n zachodzi podzielność

$$P(n) \mid \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} F(a + i, b + j, c + k).$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedynymi wielomianami spełniającymi warunki zadania są $P(x) = cx^n$ dla pewnych liczb całkowitych $c > 0, n \geqslant 0$.

Dowiedziemy najpierw, że jeżeli wielomian nie jest tej postaci to nie spełnia warunków zadania. Niech $P(x) = x^k Q(x)$ gdzie $Q(0) \neq 0$ i $\deg Q \geqslant 1$. Niech M będzie minimalną wartością funkcji $F(x,y,z)$. Weźmy taką liczbę całkowitą dodatnią k, aby istniała liczba pierwsza p spełniająca warunki $p|Q(k)$ oraz $p > \max(Q(0), M)$. Gdyby taka liczba pierwsza nie istniała, to zbiór czynników pierwszych wartości Q byłby skończony, co jest niemożliwe.

Z twierdzenia Dirichleta istnieją takie liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_8$, że $p_i \equiv k \pmod p$. Wiemy, że suma wartości funkcji F w każdym sześcianie $p_i \times p_i \times p_i$ jest podzielna przez $P(p_i) \equiv P(k) = 0 \pmod p$, czyli jest podzielna przez p. Wynika stąd, że przez p jest podzielna suma wartości funkcji F w dowolnym prostopadłościanie $p_1p_2p_3p_4 \times p_1p_2 \times p_1$ oraz w dowolnym prostopadłościanie $p_1p_2p_3p_4 \times p_1p_2 \times p_2$. Z tego, że p_1 i p_2 są względnie pierwsze wynika, że istnieją takie liczby całkowite x, y, że $p_1x + yp_2 = 1$. Dostajemy, że suma wartości funkcji F w dowolnym prostopadłościanie $p_1p_2p_3p_4 \times p_1p_2 \times 1$. Analogicznie pokazujemy, że suma wartości funkcji F w dowolnym prostopadłościanie o długościach boków kolejno $p_1p_2p_3p_4 \times p_3p_4 \times 1$, $p_1p_2p_3p_4 \times 1 \times 1$, $p_5p_6p_7p_8 \times 1 \times 1$, oraz $1 \times 1 \times 1$ jest podzielna przez p. Liczba M jest więc podzielna przez p, jednak $p > M$ co prowadzi do sprzeczności.

Niech $P(x) = x^k$, udowodnimy, że taka funkcja F istnieje. Wskażemy, taką funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$, że $n^k | f(a) + f(a+1) + \ldots + f(a+n-1)$ dla dowolnej liczby n całkowitej dodatniej oraz dowolnej liczby całkowitej a. Wówczas wystarczy wstawić $F(x,y,z) = f(x)$.

Definiujemy funkcję f następująco $f(0) = 1$,$f(1) = 2^n - 1$, następnie definiujemy w kolejności liczby $f(-1)$,$f(2)$,$f(-2)$, $f(3), \ldots$. Załóżmy, że mamy już zdefiniowane liczby

$$f(-(k-1)), \ldots, f(-1), f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$$

i definiujemy $f(k)$. Musimy zadbać o to by spełniony był układ kongruencji postaci

$$\begin{cases} f(k) - f(k-2) \equiv 0 \pmod{2^n} \\ f(k) - f(k-3) \equiv 0 \pmod{3^n} \\ \ldots \\ f(k) - f(-(k-1)) \equiv 0 \pmod{(2k-1)^n} \\ f(k) + f(k-1) + \ldots + f(-(k-1)) \equiv 0 \pmod{(2k)^n} \end{cases}.$$

Aby skorzystać z chińskiego twierdzenia o resztach, musimy sprawdzić, że układ ten nie jest sprzeczny, czyli, że dla dowolnych $i, j = 1, 2, \ldots, 2k-1$ zachodzi

$$\begin{cases} f(k-i) \equiv f(k-j) \pmod{\mathrm{NWD}(i,j)^n} \\ f(k-i) + f(k-1) + \ldots + f(-(k-1)) \equiv 0 \pmod{\mathrm{NWD}(2k,i)^n} \end{cases}.$$

Pierwsza kongruencja wynika z założenia indukcyjnego, gdyż wiemy, że $f(k-i) \equiv f(k-j) \pmod{(i-j)^n}$. Druga wynika z zsumowania kongruencji

$$\begin{cases} f(k-i) + f(k-i+1) + \ldots + f(k-1) \equiv 0 \pmod{i^n} \\ f(k-i) + f(k-i-1) + \ldots + f(-(k-1)) \equiv 0 \pmod{(2k-i)^n} \end{cases}.$$

gdyż oczywiście $\mathrm{NWD}(i, 2k-i) = \mathrm{NWD}(2k, i)$. Układ jest więc niesprzeczny i z chińskiego twierdzenia o resztach dobieramy $f(k)$. Analogicznie rozumujemy dla $f(-k)$.

Ostatecznie pokazaliśmy, że jeżeli $P(x) = cx^n$ to warunki zadania są spełnione.

4. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich (m, n) równanie

$$3^n = 2m^2 + 1.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy dwa przypadki ze względu na parzystość liczby n. Jeżeli liczba n jest parzysta to możemy zapisać $n = 2k$ i mamy

$$(3^k - 1)(3^k + 1) = 2m^2.$$

Liczby $3^k - 1$ oraz $3^k + 1$ są kolejnymi liczbami parzystymi wobec czego $\mathrm{NWD}(3^k-1, 3^k+1) = 2$. Z poprzedniej równości wnosimy, że jedna z liczb $3^k - 1$ lub $3^k + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej. Liczba $3^k - 1$ daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2, czyli nie może być kwadratem. Dostajemy $3^k + 1 = t^2$ dla pewnego t całkowitego. Przekształcając równość do postaci $3^k = (t-1)(t+1)$ otrzymujemy, że liczby $t-1, t+1$ są potęgami trójki, których różnica wynosi 2, stąd $t = 2$, $k = 1$ oraz $n = 2$. Co prowadzi do rozwiązania $(m, n) = (2, 2)$.

Jeżeli liczba n jest nieparzysta to zapisujemy $n = 2k + 1$. Podstawiamy $t = 3^k$ i dostajemy równanie

$$3t^2 - 2m^2 = 1.$$

Podstawiając $t = 2v + u$ oraz $m = 3v + u$, otrzymujemy równanie Pella postaci

$$u^2 - 6v^2 = 1.$$

Rozwiązania tego równania wyrażają się wzorami rekurencyjnymi

$$(u_0, v_0) = (5, 2), \quad (u_{\nu+1}, v_{\nu+1}) = (5u_\nu + 12v_\nu, 2u_\nu + 5v_\nu).$$

Możemy stąd uzyskać wzory rekurencyjne na $t_\nu = 2v_\nu + u_\nu$ postaci

$$t_{-1} = 1, t_0 = 9, \quad t_{\nu+2} = 10t_{\nu+1} - t_\nu.$$

Rozpatrując reszty z dzielenie podanego ciągu przez 27 otrzymujemy,

$$t_\nu \equiv 0 \pmod{27} \iff \nu \equiv 3 \pmod 9.$$

Rozpatrując reszty z dzielenia podanego ciągu przez 17 otrzymujemy,

$$t_\nu \equiv 0 \pmod{17} \iff \nu \equiv 3 \pmod 9.$$

Wynika stąd, że w ciągu $(t_\nu)_{\nu \geqslant 0}$ jedynymi potęgami trójki są 1 i 9. Otrzymujemy rozwiązania wyjściowego równania $(m, n) = (1, 1), (5, 11)$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania są pary liczb (m, n) równe $(1, 1)$,$(2, 2)$, oraz $(5, 11)$.

5. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $p = 2^{2^k} + 1$, dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k. Wyznaczyć liczbę par liczb całkowitych (m, n) spełniających warunki $0 \leqslant m < n < p - 1$ oraz kongruencję

$$2^n + 3^n \equiv 2^m + 3^m \pmod p.$$

Rozwiązanie:

Udowodnijmy, że każda niereszta kwadratowa modulo p jest generatorem modulo p. Oczywiście reszta kwadratowa nie może być generatorem modulo p. Ponadto liczba generatorów wynosi

$$\varphi(p-1) = \varphi(2^{2^k}) = 2^{2^k - 1} = \frac{p-1}{2}$$

i jest równa liczbie niereszt kwadratowych, skąd wynika nasza teza.

Sprawdźmy, że 3 jest nieresztą kwadratową modulo p

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \left(\frac{p}{3}\right) \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Wobec powyższego stwierdzenia, dostajemy, że 3 jest generatorem modulo p.

Daną w zadaniu kongruencję, możemy przepisać jako

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m \equiv -\frac{2^{n-m} - 1}{3^{n-m} - 1} \pmod p.$$

Zauważmy, że $p \equiv 1 \pmod 8$, czyli 2 jest resztą kwadratową modulo p. Wynika stąd, że $\frac{3}{2}$ jest nieresztą kwadratową modulo p, czyli generatorem. Podstawmy $l = (n-m)$, zamiast szukać par (n, m) obliczymy liczbę par (l, m) spełniających naszą kongruencję. Warunki $0 \leqslant m < n < p-1$ są równoważne $0 \leqslant m < p-1, 0 < l < p-1$, oraz $l + m < p-1$.

Z tego, że $\frac{3}{2}$ jest generatorem modulo p wynika, że dla dowolnego l takiego, że $-\frac{2^l-1}{3^l-1} \not\equiv 0 \pmod p$ możemy dobrać dokładnie jedno $0 \leqslant m < p-1$ takie, że

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m \equiv -\frac{2^l-1}{3^l-1} \pmod p.$$

Oznaczmy to m przez $m(l)$. Przypuśćmy, że dla pewnego l zachodzi $l + m(l) \geqslant p-1$, wówczas po przekształceniu powyższej kongruencji dostaniemy.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m(l)+l-(p-1)} \equiv -\frac{2^{p-1-l}-1}{3^{p-1-l}-1} \pmod p.$$

Czyli $m(p-1-l) = m(l) + l - (p-1) < p-1$. Udowodniliśmy, że jeżeli $m(l) + l \geqslant p-1$ to $m(p-1-l) + (p-1-l) < p-1$. Podobnie dostajemy, że jeżeli $m(l) + l < p-1$ to $m(p-1-l) + (p-1-l) \geqslant p-1$. Co za tym idzie dokładnie do połowy l spełniających warunek $-\frac{2^l-1}{3^l-1} \not\equiv 0 \pmod p$, możemy dobrać m tak aby $m + l < p-1$.

Zastanówmy się jeszcze ile liczb z przedziału $0 < l < p-1$ spełnia kongruencję $-\frac{2^l-1}{3^l-1} \equiv 0 \pmod p$. Powyższy warunek jest równoważny $2^l \equiv 1 \pmod p$. Zauważmy, że $\mathrm{ord}_p(2) = 2^k + 1$. Nie może być mniejszy, gdyż $1 < 2^{2^k} = p-1 < p$. Natomiast $2^{2^k+1} = (p-1)^2 \equiv 1 \pmod p$. Otrzymujemy, że liczba rozwiązań kongruencji $2^l \equiv 1 \pmod p$ wynosi $\frac{p-1}{\mathrm{ord}_p(2)} = 2^{2^k-k-1}$.

Ostatecznie jest $2^{2^k} - 2^{2^k-k-1}$ liczb l dla których można dobrać $m(l)$, oraz dla dokładnie połowy z nich zachodzi warunek $m(l) + l < p-1$. Szukana liczba par wynosi wobec tego $2^{2^k-1} - 2^{2^k-k-2}$.

6. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$3(x+y+z) \geqslant 2\left(\sqrt{x^2+yz} + \sqrt{y^2+zx} + \sqrt{z^2+xy}\right).$$

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $x \geqslant y \geqslant z$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową wynika, że

$$\sqrt{y^2+xz} + \sqrt{z^2+xy} \leqslant 2\sqrt{\frac{y^2+z^2+xy+xz}{2}}.$$

Wobec tego wystarczy udowodnić, że

$$3(x+y+z) - 2\sqrt{x^2+yz} \geqslant 4\sqrt{\frac{y^2+z^2+xy+xz}{2}}.$$

Obie strony powyższej nierówności są nieujemne, dlatego możemy równoważnie podnieść stronami do kwadratu. Po przekształceniach dostaniemy

$$(x-(y+z))^2 + 20yz \geqslant 12(x+y+z)(\sqrt{x^2+yz} - x).$$

Zauważmy, że

$$\sqrt{x^2+yz} - x = \frac{yz}{\sqrt{x^2+yz}+x} \leqslant \frac{yz}{2x}.$$

Mamy następujący ciąg nierówności

$$\begin{aligned}
&(x-(y+z))^2 + 20yz - 12(x+y+z)(\sqrt{x^2+yz} - x) \geqslant \\
&\geqslant (x-(y+z))^2 + 20yz - 6(x+y+z)\frac{yz}{x} \\
&= (x-(y+z))^2 + 2yz + 12\left(x - \frac{y+z}{2}\right)\frac{yz}{x} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

7. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n istnieje taka liczba całkowita a, że $P(a) = 2^n$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedynymi wielomianami spełniającymi warunki zadania są $P(x) = \pm x + b$ gdzie b jest dowolną liczbą całkowitą.

Niech $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Jeżeli n jest liczbą parzystą to oczywiście $a_n > 0$, jeżeli n jest liczbą nieparzystą to zamieniając ewentualnie $P(x)$ na $P(-x)$ zakładamy, że $a_n > 0$.

Z własności wielomianów istnieje taka liczba naturalna N, że $P(x)$ jest monotoniczny na przedziałach $(-\infty, -N)$ oraz (N, ∞). Ponadto, możemy tak dobrać stałą całkowitą C aby dla $|x| > M_1$ zachodziło

$$2^n P(x) \in (P(2x-C), P(2x+C)),$$

Istotnie, aby to pokazać rozpatrzmy równość

$$2^n P(x) - P(2x \pm C) = (a_{n-1} \pm Cna_n)2^{n-1}x^{n-1} + \cdots .$$

Dla dostatecznie dużych n znak tego wyrażenia zależy jedynie od znaku $(a_{n-1} \pm Cna_n)$, a ten możemy ustalić dobierając odpowiednio duże C. Ponadto, jeżeli n jest liczbą parzystą to niech D będzie taką liczbą całkowitą, że dla $|x| > M_2$ zachodzi

$$2^n P(x) \in (P(-2x - D), P(-2x + D)).$$

Weźmy a, b takie, że $P(a) = 2^k, P(b) = 2^n P(a)$ oraz zachodzą nierówności $|a|, |b| > \max\{M_1, M_2, N\}$. Wówczas $P(b) \in (P(2a - C), P(2a + C))$ gdy a i b są tego samego znaku, lub $P(b) \in (P(-2a - D), P(-2a + D))$. W pierwszym przypadku oznacza to, że $b - 2a \in (-C, C)$, zaś w drugim, że $b + 2a \in (-D, D)$. Wynika stąd, że jedno z równań

$$P(2x + A) = 2^n P(x) \text{ lub } P(-2x + A) = 2^n P(x),$$

gdzie A jest ustaloną liczbą całkowitą, ma nieskończenie wiele rozwiązań. Jak wiadomo równość wielomianowa posiadająca nieskończenie wiele rozwiązań jest tożsamością. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $P(2x + A) = 2^n P(x)$ dla każdego x. Niech z będzie pewnym, być może zespolonym, pierwiastkiem $P(x)$, wówczas $2z + A$ również jest pierwiastkiem. Gdyby $z \neq -A$, to ciąg $z, 2z + A, 4z + 3A, 8z + 7A, \ldots,$ zawierałby nieskończenie wiele pierwiastków P, co jest niemożliwe. Oznacza to, że P ma co najwyżej jeden pierwiastek, jest więc postaci $P(x) = a(px - q)^n$. Zauważmy, że $n = 1$, gdyż liczby $(px - q)^n$ mogą mieć tylko podzielną przez n liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze. Dostajemy $P(x) = ux + v$ dla pewnych liczb całkowitych u, v. Wiemy, że 1 i 2 są wartościami $P(x)$, a każde dwie kolejne wartości różnią się o dokładnie u, stąd $u = \pm 1$.

Ostatecznie jedynymi rozwiązaniami są $P(x) = \pm x + b$, gdzie b jest liczbą całkowitą.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian $P(x, y)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $P(x, y) \geqslant 0$, ale P nie daje się zapisać jako suma kwadratów wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że wielomian $P(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + \frac{1}{27}$ ma żądane własności.

Jeżeli $x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0$, to $P(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)x^2y^2 + \frac{1}{27} \geqslant \frac{1}{27} > 0$. Jeżeli zaś $x^2 + y^2 - 1 < 0$, to na mocy nierówności między średnimi otrzymujemy

$$\frac{1}{27} = \left(\frac{(1 - x^2 - y^2) + x^2 + y^2}{3} \right)^3 \geqslant (1 - x^2 - y^2)x^2y^2$$

i wobec tego $P(x, y) \geqslant 0$.

Udowodnimy teraz, że wielomian P nie daje się przedstawić w postaci sumy kwadratów wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. Przypuśćmy nie wprost, że $P(x,y) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(x,y)$. Ponieważ $\deg P = 6$, więc $\deg Q_k \leqslant 3$ dla wszelkich k. Zapiszmy

$$Q_k(x,y) = a_k x^3 + b_k y^3 + c_k x^2 y + d_k x y^2 + e_k x^2 + f_k y^2 + g_k xy + h_k x + i_k y + j_k.$$

Porównując współczynniki w równości $P(x,y) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(x,y)$ stojące przy x^6 i y^6 dochodzimy do wniosku, że $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$ oraz $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$, wobec tego dla dowolnego k mamy $a_k = b_k = 0$.

Porównanie współczynników stojących przy x^4 i y^4 prowadzi do równości $\sum_{k=1}^{n} e_k^2 = 0$ i $\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = 0$, zatem $e_k = f_k = 0$ dla wszystkich k, a porównanie współczynników stojących przy x^2 i y^2 prowadzi do równości $h_k = i_k = 0$.

Porównujemy teraz współczynniki stojące przy x^2y^2 i dostajemy $\sum_{k=1}^{n} g_k^2 = -1$, co nie może być prawdą, gdyż kwadraty liczb rzeczywistych są liczbami nieujemnymi. Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

9. Dany jest czworościan $ABCS$ wpisany w sferę s. Sfera s' przechodząca przez punkt S przecina krawędzie AS, BS, CS odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty X, Y, Z są symetryczne do punktów D, E, F odpowiednio względem środków krawędzi AS, BS, CS. Udowodnić, że jeśli sfery s i s' przecinają się wzdłuż okręgu leżącego w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny ABC, to punkty A, B, C, X, Y, Z leżą na jednej sferze.

Rozwiązanie:

Wystarczy udowodnić, że

$$AS \cdot XS = BS \cdot YS = CS \cdot ZS.$$

Z treści zadania wynika, że

$$AD = XS, \quad BE = YS, \quad CF = ZS,$$

więc wystarczy dowieść, że

$$(*) \qquad AD \cdot AS = BE \cdot BS = CF \cdot CS.$$

Skoro sfery s i s' przecinają się wzdłuż okręgu leżącego w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny ABC, to ich środki leżą na prostej ℓ prostopadłej do płaszczyzny ABC i płaszczyzny tego okręgu. Obrót wokół tej prostej przekształcający punkt A na punkt B przeprowadza sferę s' na siebie. W takim razie obrazy D' i S' punktów D i S należą do sfery s'. Zatem

$$AD \cdot AS = BD' \cdot BS' = BE \cdot BS.$$

Analogicznie dowodzimy, że $BE \cdot BS = CF \cdot CS$, co wraz z powyższą równością pociąga za sobą zależność $(*)$.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Prosta prostopadła do prostej BC przechodząca przez A przecina okrąg o średnicy BC w punktach K i M, przy czym $AK < AM$. Prosta prostopadła do prostej AC przechodząca przez B przecina okrąg o średnicy AC w punktach L i N, przy czym $BL < BN$. Udowodnić, że proste AB, KN, ML przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez D, E, F spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C oraz przez H - ortocentrum trójkąta ABC. Zauważmy, że $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BEC = 90°$, czyli punkty B, F, K, E, C, M leżą na jednym okręgu. Stąd $KH \cdot HM = CH \cdot HF$. Analogicznie $CH \cdot HF = EH \cdot HL$, czyli czworokąt $KLMN$ jest wpisany w okrąg. Wiemy też, że symetralne KM i LN przecinają się w punkcie C, czyli C jest środkiem tego okręgu. Z równoramienności trójkąta CKM oraz tego, że czworokąt $CKFM$ jest wpisany w okrąg mamy odpowiednio $\sphericalangle CKM = \sphericalangle CMK = \sphericalangle CFK$, czyli trójkąty CKH oraz CFK są podobne, zatem $CK^2 = CH \cdot CK$. Oznacza to, że punkt K jest obrazem punktu H w inwersji o środku w punkcie C i promieniu CK. Wiemy też, że $AB \perp CF$, czyli AB jest biegunową punktu H względem okręgu o środku w C i promieniu CK. Z tw. Brocarda punkt przecięcia KN i LM leży na tej biegunowej, co kończy dowód.

11. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF, a R — jego promieniem. Udowodnić, że

$$[ABC] \geqslant 3\sqrt{3}R\sqrt{R^2 - OP^2},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat. Dany jest kąt wypukły BAC. Punkty X i Y leżą wewnątrz tego kąta. Punkty K i L są rzutami punktu X odpowiednio na AB i AC, a punkty M i N są rzutami punktu Y odpowiednio na AB i AC. Jeżeli punkty K, L, M, N leżą na okręgu, to proste AX i AY są izogonalnie sprzężone w kącie BAC.

Dowód lematu. Zauważmy, że czworokąty $AKXL$ i $AMYN$ są wpisane w okręgi o średnicach AX i AY. Wobec tego

$$\sphericalangle AXK = \sphericalangle ALK = \sphericalangle NMA = \sphericalangle NYA, \text{ zatem}$$

$$\sphericalangle KAX = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle AXK = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle NYA = \sphericalangle YAN,$$

co kończy dowód lematu.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Niech punkt Q będzie odbiciem symetrycznym punktu P względem punktu O. Niech K, L, M będą rzutami punktu Q odpowiednio na boki BC, CA, AB. Wówczas punkty K, L, M leża na okręgu opisanym na trójkącie DEF. Z lematu wynika więc, że punkty P i Q są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC. Wobec tego istnieje elipsa $\mathcal{E}$ o ogniskach P i Q styczna do boków trójkąta ABC, której oś wielka ma długość $2R$. Jej druga oś ma długość $2\sqrt{R^2 - OP^2}$, więc $[\mathcal{E}] = \pi R\sqrt{R^2 - OP^2}$. Nierówność z zadania jest więc równoważna temu, że

$$\frac{[ABC]}{[\mathcal{E}]} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Rozważmy przekształcenie afiniczne, które przekształca elipsę $\mathcal{E}$ na koło $\mathcal{E}'$ i niech A', B', C' będą obrazami punktów A, B, C przy tym przekształceniu. Wówczas $\mathcal{E}'$ jest kołem wpisanym w trójkąt $A'B'C'$. Ponieważ przekształcenia afiniczne zachowują stosunek pól, więc teza zadania jest równoważna nierówności

$$\frac{[A'B'C']}{[\mathcal{E}]} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Oznaczmy boki oraz promień okręgu wpisanego trójkąta $A'B'C'$ odpowiednio przez a, b, c, r. Niech $2p = a + b + c$. Ponieważ zachodzą równości $[A'B'C'] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$ oraz $[\mathcal{E}'] = \pi r^2$, więc

$$\frac{[A'B'C']}{[\mathcal{E}']} = \frac{[A'B'C']^2}{[A'B'C'][\mathcal{E}']} = \frac{p^2r^2}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\pi r^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Nierówność, której chcemy dowieść jest więc równoważna następującej:

$$\frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} \geqslant 27.$$

To zaś jest równoważne nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną zastosowanej dla liczb $p-a, p-b, p-c$.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wykazać, że równanie $x^4 - 17y^2 = 2w^2$ nie ma rozwiązań we względnie pierwszych liczbach całkowitych dodatnich (x, y, w).

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że liczby x, y, w są rozwiązaniem danego równania. Dla dowolnej liczby pierwszej p dzielącej w liczba 17 jest resztą kwadratową, zatem z prawa wzajemności dla reszt kwadratowych

$$\left(\frac{p}{17}\right) = \left(\frac{17}{p}\right) = 1,$$

skąd wynika, że p jest reszta kwadratową modulo 17. W takim razie w jest resztą kwadratową modulo 17, czyli istnieje takie t, że

$$w \equiv t^2 \pmod{17}.$$

Z drugiej strony z danego równania otrzymujemy

$$2w^2 \equiv x^4 \pmod{17} \quad \text{albo} \quad t^4 \equiv w^2 \equiv 9x^4 \pmod{17}.$$

W takim razie

$$17 | (t^2 - 3x^2)(t^2 + 3x^2),$$

czyli któraś z liczb 3 lub -3 musiałaby być resztą kwadratową modulo 17. To jednak jest nieprawdą, bowiem z własności symbolu Legendre'a otrzymujemy

$$\left(\frac{3}{17}\right) = \left(\frac{17}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

oraz

$$\left(\frac{-3}{17}\right) = (-1)^{\frac{17-1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{17}\right) = \left(\frac{3}{17}\right) = -1.$$

2. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią, zaś m liczbą nieparzystą. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba $m^n + n^m$ ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Rozwiązanie:

Niech $n = m(2l+1)$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej l. Mamy wówczas $m^{2l+1} + (2l+1) | m^n + n^m$. Wystarczy dobrać tak liczbę całkowitą l, żeby liczba $m^{2l+1} + 2l + 1 = m^{2l+1} - 1 + 2(l+1)$ miała co najmniej k różnych dzielników pierwszych. Wybierzmy k różnych liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k > m$, spełniających dodatkowo warunki $\mathrm{nwd}(p_i, p_j - 1) = 1$ dla dowolnych i, j. Wybierzemy l tak, aby zachodziły kongruencje

$$l \equiv 0 \pmod{\prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)} \text{ oraz } l \equiv -1 \pmod{\prod_{i=0}^{p-1} p_i}.$$

Układ ten ma rozwiązanie z chińskiego twierdzenia o resztach. Dla tak dobranego l oraz dowolnego $i = 1, 2, \ldots, k$ mamy

$$(m^{2l+1} - 1) + 2(l + 1) \equiv (1 - 1) + 2 \cdot 0 = 0 \pmod{p_i}.$$

Teza zadania została udowodniona.

3. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz taka liczba całkowita a, że $p | a^2+a+1$. Udowodnić, że zachodzi podzielność

$$p \mid (p-1)!\left(a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \ldots - \frac{a^{p-1}}{p-1}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ zachodzi kongruencja $\binom{p-1}{i} \equiv (-1)^i \pmod{p}$. Wobec tego możemy napisać

$$\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \frac{a^i}{i} \equiv \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-1}{i}\frac{a^i}{i} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}a^i = \frac{1}{p}((a+1)^p - a^p - 1) \pmod{p}.$$

Wobec tego wystarczy pokazać, że $(a + 1)^p - a^p - 1$ jest podzielne przez p^2. Rozważmy wielomian $(x+1)^p - x^p - 1$, oczywiście wszystkie jego współczynniki są podzielne przez p. Z warunków zadania wynika, że p jest postaci $p = 3k + 1$. Rozważmy nasz wielomian modulo $x^2 + x + 1$. Mamy

$$\begin{aligned}(x + 1)^p - x^p - 1 &\equiv (-x^2)^p - x^p - 1 \equiv -x^{2p} - x^p - 1 \\ &= -x^{6k+2} - x^{3k+1} - 1 \equiv -x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{x^2 + x + 1}.\end{aligned}$$

Wobec tego wielomian $(x + 1)^p - x^p - 1$ jest podzielny przez $p(x^2 + x + 1)$ co za tym idzie

$$p^2 \quad | \quad p(a^2 + a + 1) \quad | \quad (a + 1)^p - a^p - 1.$$

Co jest równoważne tezie, na mocy powyższych rozważań.

4. Danych jest $2n+1$ liczb niewymiernych. Udowodnić, że można tak wybrać $n + 1$ z nich, aby suma dowolnego niepustego podzbioru wybranych liczb była niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po n. Dla $n = 1$ mamy liczby niewymierne a, b, c. Jeśli $a + b + c$ jest liczbą wymierną, to niewymierna jest liczba $a + b = (a + b + c) - c$, czyli $\{a, b\}$ jest szukanym podzbiorem. Jeśli $a + b + c$ jest niewymierna, to $(a+b)+(b+c)+(c+a) = 2(a+b+c)$, czyli jedna z liczb $a + b, b + c, c + a$ jest niewymierna i również istnieje szukany podzbiór.

Załóżmy, że dla pewnego m naturalnego teza jest prawdziwa dla wszystkich naturalnych $k \leqslant m$ i rozważmy przypadek $m + 1$. Rozważmy pewną bazę $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ nad liczbami wymiernymi rozważanych $2(m + 1) + 1$ liczb niewymiernych $a_1, a_2, \ldots a_{2m+3}$ (można ją skonstruować rozważając przestrzenie liniowe nad $\mathbb{Q}$ rozpięte przez $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}$, itd).

Niech a spośród rozważanych liczb ma dodatnią współrzędną stojącą przy x_1 oraz b - ujemną współrzędną stojącą przy x_1. Możemy bez straty ogólności założyć, że $a \geqslant b$, bo wszystkie liczby można przemnożyć przez -1. Z założenia indukcyjnego wiemy, że ze zbioru liczb mających pierwszą współrzędną równą 0 można wybrać $\lfloor\frac{2m+3-a-b+1}{2}\rfloor \geqslant \lfloor\frac{2m+4-2a}{2}\rfloor = m + 2 - a$ liczb spełniających warunki zadania. Zauważmy, że rozważając te $m+2-a$ liczb wraz z a liczbami mającymi dodatnią pierwszą współrzędną otrzymamy $m + 2 - a + a = m + 2$ - elementowy podzbiór spełniający warunki zadania, co kończy dowód.

5. Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą C taką, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych spełniających warunek $x + y + z = 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{x}{1 + 9yz + C(y - z)^2} + \frac{y}{1 + 9zx + C(z - x)^2} + \frac{z}{1 + 9xy + C(x - y)^2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $C = 4$.

Wykażemy najpierw, że $C \leqslant 4$. Jeśli weźmiemy $x = 0$, $y = z = \frac{1}{2}$, to dana nierówność przyjmuje postać

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}C} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}C} \geqslant \frac{1}{2},$$

skąd wniosek, że $C \leqslant 4$.

Teraz udowodnimy, że dana nierówność zachodzi dla $C = 4$. Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza otrzymujemy

$$(1) \quad \left(\sum_{cyc} \frac{x}{1 + 9yz + 4(y - z)^2}\right)\left(\sum_{cyc} a(1+9yz+4(y-z)^2)\right) \geqslant (x+y+z)^2 = 1.$$

Z drugiej strony mamy

$$\sum_{cyc} a(1+9yz+4(y-z)^2) = x+y+z+3xyz+4(x^2y+x^2z+y^2x+yz^2+z^2x+z^2y).$$

Stosując nierówność Schura uzyskujemy

$$\begin{aligned}
&3xyz + 4(x^2y + x^2z + y^2x + yz^2 + z^2x + z^2y) \leqslant \\
&\leqslant x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3(x^2y + x^2z + y^2x + yz^2 + z^2x + z^2y) = \\
&= (x + y + z)^3.
\end{aligned}$$

W takim razie

$$\sum_{cyc} a(1 + 9yz + 4(y - z)^2) \leqslant x + y + z + (x + y + z)^3 = 2. \tag{2}$$

Wykorzystując zależności (1) i (2) otrzymujemy daną nierówność dla stałej $C = 4$.

6. Niech a_0, b_0 będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Dla $n \geqslant 0$ definiujemy $a_{n+1} = a_n + \lfloor\sqrt{b_n}\rfloor$ oraz $b_{n+1} = b_n + \lfloor\sqrt{a_n}\rfloor$. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że $a_n = b_n$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a_0 > b_0$. Wówczas dla każdego n będzie zachodzić $a_n \geqslant b_n$. Istotnie, jeżeli $a_n > b_n$ to mamy

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - b_{n+1} &= (a_n - b_n) + (\lfloor\sqrt{b_n}\rfloor - \lfloor\sqrt{a_n}\rfloor) > a_n - b_n + (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) - 1 \\
&= (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n} - 1) - 1 \geqslant (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) - 1 > -1.
\end{aligned}$$

Jako, że a_{n+1}, b_{n+1} są całkowite to $a_{n+1} \geqslant b_{n+1}$. Ponadto ciąg $a_{n+1} - b_{n+1}$ jest nie rosnący. Istotnie

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n - b_n) + (\lfloor\sqrt{b_n}\rfloor - \lfloor\sqrt{a_n}\rfloor) \leqslant a_n - b_n.$$

Wynika stąd, że od pewnego miejsca ciąg $a_{n+1} - b_{n+1}$ jest stały, czyli $\lfloor\sqrt{b_n}\rfloor = \lfloor\sqrt{a_n}\rfloor$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $a_{n+1} - b_{n+1} = C > 0$. Bez straty ogólności, zmieniając ewentualnie a_0, b_0 możemy przyjąć, że powyższe równości zachodzą dla dowolnego n. Niech $a_n = x_n^2 + r_n$ gdzie $0 \leqslant r_n < 2x_n + 1$. Jeżeli dla pewnego $r_n = 0$ to oczywiście $\lfloor\sqrt{b_n}\rfloor \neq \lfloor\sqrt{a_n}\rfloor$ i mamy sprzeczność. Jeżeli $0 < r_n \leqslant x_n$ to mamy kolejno $a_{n+1} = (x_n^2 + r_n) + x_n$, $a_{n+2} = (x_n^2 + r_n + x_n) + x_n = (x_n + 1)^2 + (r_n - 1)$. Czyli $x_{n+2} = x_n + 1$ oraz $r_{n+2} = r_n - 1$. Co za tym idzie $r_{n+2r_n} = 0$ i mamy sprzeczność jak wyżej. Jeżeli $x_n < r_n \leqslant 2x_n$ to mamy $a_{n+1} = (x_n^2 + r_n) + x_n = (x_n + 1)^2 + (r_n - x_n - 1)$. Jednak $(r_n - x_n - 1) <$

$2x_n - x_n - 1 = x_n - 1$, czyli $x_{n+1} = x_n + 1$ oraz $r_{n+1} = r_n - x_n - 1$ i zachodzi $x_{n+1} > r_{n+1}$, co sprowadzamy do poprzedniego przypadku.

7. Szachownicę 2015×2015 pokryto kostkami domina w ten sposób, że lewe górne pole jest puste. Jeżeli w pewnym wierszu lub pewnej kolumnie znajdują się trzy pola, z których jedno jest puste, a dwa pozostałe są zajęte przez jedno domino, to domino możemy przesunąć, zmieniając puste pole. Udowodnić, że można tak poprzesuwać kostki domina aby puste pole znajdowało się w prawym dolnym rogu.

Rozwiązanie:

Pokolorujmy pola o obu współrzędnych nieparzystych na czerwono (w szczególności czerwone są lewe górne i prawe dolne pole). Rozważmy graf, którego wierzchołkami są czerwone kwadraty jednostkowe. Pola A i B są połączone krawędzią, jeśli sąsiadują ze wspólnym polem C oraz istnieje kostka domina pokrywająca C i jedno z A, B. Zauważmy, że graf ten nie zmienia się, kiedy puste pole się przemieszcza.

Wystarczy pokazać, że w takim grafie górne lewe pole jest połączone ścieżką z prawym dolnym polem. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. Istnieje wtedy ścieżka składająca się z ciągu sąsiadujących niepokolorowanych kwadratów, która dzieli nasz graf na dwie części (w jednej jest lewe górne, a w drugiej - prawe dolne pole). Łatwo zauważyć, że ścieżka ta jest nieparzystej długości zarówno w przypadku, kiedy łączy równoległe jak i prostopadłe krawędzie szachownicy.

Pierwsze pole takiej ścieżki jest pokryte pewną kostką domina. Kostka ta nie może pokrywać żadnego czerwonego pola (bo nasza ścieżka dzieli graf na dwie części), czyli musi pokrywać następne pole naszej ścieżki. Rozważając trzecie pole na ścieżce dochodzimy w analogiczny sposób do wniosku, że pokrywające je domino pokrywa również czwarte pole ścieżki. Kontynuując w ten sposób pokażemy, że nasza ścieżka składa się w całości z kostek domina, co przeczy temu, że jej długość jest nieparzysta. Lewe górne pole jest zatem połączone w naszym grafie ścieżką w prawym dolnym, czyli istnieje szukany ciąg przesunięć kostek, co kończy dowód.

8. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. W każdym wierzchołku n-kąta foremnego znajduje się liczba -1. Ruch polega na pomnożeniu liczby w pewnym wierzchołku przez liczbę znajdującą się w poprzednim wierzchołku. Andrzej wykonuje ruchy na kolejnych wierzchołkach n-kąta. Okazało się, że po wykonaniu k ruchów Andrzej powrócił do początkowego układu n liczb równych -1. Udowodnić, że gdyby Andrzej postępował analogicznie z $(2^n - 1)$-kątem, w którego wierzchołkach były wpisane liczby -1, to po $2^k - 1$ ruchach również powróciłby do początkowego układu liczb.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ kolejne liczby leżące na okręgu. Zauważmy, że wykonanie opisanego w zadaniu ruchu prowadzi do otrzymanie nowej n-ki równej $(a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \cdot a_{n-2})$.

Rozważanej n-ce liczb na okręgu przyporządkujmy wielomian

$$f_0 + f_1x + \ldots + f_{n-1}x^{n-1},$$

gdzie $f_k = 0$ jeśli $a_k = 1$ i $f_k = 1$ jeśli $a_k = -1$.

Od tego momentu będziemy pracowali na wielomianach w $\mathbb{F}_2[X]$. Zauważmy, że jeżeli wykonanie ruchu dla n-ki odpowiadającej wielomianowi

$$f(x) = f_0 + f_1x + \ldots + f_{n-1}x^{n-1}$$

prowadzi do otrzymania n-ki odpowiadającej wielomianowi

$$f_0 + f_1x + \ldots + f_{n-2}x^{n-2} + (f_{n-2} + f_{n-1})x^{n-1} = xf(x) + (1 + x^{n-1} + x^n)f_{n-1}.$$

Możemy zatem zauważyć, że po wykonaniu k kroków, nasze liczby na okręgu będą odpowiadały wielomianowi postaci $x^kf(x) + p_k(x)(1 + x^{n-1} + x^n)$, gdzie $p_k(x)$ jest pewnym wielomianem. Widzimy zatem, że wielomian odpowiadający n-ce znajdującej się na okręgu po k krokach jest resztą z dzielenie wielomianu $x^kf(x)$ przez $1 + x^{n-1} + x^n$. Warunkiem, na powrót po k krokach do sytuacji początkowej jest zatem

$$1 + x^{n-1} + x^n \mid q(x)(1 + x^k),$$

gdzie $q(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1}$ jest wielomianem odpowiadającym samym -1. Wiemy jednak, że $1 + x^{n-1} + x^n$ i $q(x)$ są względnie pierwsze, czyli warunkiem równoważnym temu, że n liczb przekształcamy w k krokach z powrotem w same -1 jest

$$1 + x^{n-1} + x^n \mid x^k + 1.$$

Chcemy zatem pokazać, że powyższa podzielność implikuje podzielność

$$1 + x + x^{2^n-1} \mid 1 + x^{2^k-1}.$$

Rozważmy przekształcenie ϕ zadane wzorem

$$\phi(f_0 + f_1x + \ldots + f_mx^m) = f_0x^{2^0} + f_1x^{2^1} + \ldots f_mx^{2^m}.$$

Zauważmy, że $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$ oraz $\phi(fg) = \phi(f(\phi(g)))$, ponieważ $(f + g)^2 = f^2 + g^2$. Stosując przekształcenie ϕ dla obu stron równości $1 + x^k = r(x)(1 + x + x^n)$ otrzymamy zatem

$$x + x^{2^k} = r_1(x + x^2 + x^{2^n}),$$

gdzie $r_1(x) = \phi(r(x))$. Zauważmy, że $x \mid r_1(x)$, czyli $x + x^2 + x^{2^n} \mid x + x^{2^k}$, co należało dowieść.

9. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ostrokątny ABC i styczny do jego boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt S jest punktem przecięcia prostych przechodzących przez B i C równoległych do odpowiednio DF i DE. Punkt K jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą EF, a punkt G — środkiem ciężkości trójkąta DEF. Punkt P jest punktem przecięcia półprostej GK i ω. Udowodnić, że punkty S, D i P leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Jeśli $AB = AC$, to nie ma czego dowodzić. Dalej przyjmijmy bez straty dla ogólności, że $AB < AC$.

Niech L, M, N będą odpowiednio środkami odcinków EF, FD, DE. Niech Q będzie drugim punktem przecięcia prostej PG z okręgiem ω. Niech styczna do okręgu ω w punkcie P przecina prostą BC w punkcie R.

Punkty K, L, M, N leżą na okręgu dziewięciu punktów trójkąta DEF. Jednokładność o środku G i skali -2 przeprowadza więc ten okrąg na ω i wobec tego obrazem K jest Q, a proste DQ i EF są równoległe. Mamy

$$\sphericalangle PKD = \sphericalangle PKF + 90^\circ = \sphericalangle PQD + 90^\circ = \sphericalangle PDR + 90^\circ = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle DRP.$$

Skoro $RP = RD$, to powyższa równość kątów oznacza, że punkty P, K, D leżą na okręgu o środku R. Wobec tego punkty R, M, N są współliniowe – leżą na symetralnej odcinka DK.

Z własności biegunowych wynika, że prosta BS jest biegunową punktu M względem okręgu ω i prosta CS jest biegunową punktu N względem ω. Stąd prosta MN jest biegunową punktu S. Zauważmy jeszcze, że proste PR i DR są biegunowymi punktów R i D. Ponieważ proste MN, DR, PR są współpękowe (w punkcie R), to bieguny tych prostych (czyli punkty S, D, P) leżą na biegunowej punktu R. Dowodzi to tezy zadania.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg o środku O. Punkty D i E leżą na odcinkach BO i CO, przy czym $BD = OE$. Okręgi o_1 i o_2 są opisane na trójkątach odpowiednio ADO i AEO. Punkt M jest środkiem łuku AD zawierającego punkt O okręgu o_1. Punkt N jest środkiem łuku AE zawierającego punkt O okręgu o_2. Udowodnić, że

$$\sphericalangle DNO + \sphericalangle EMO = 2\sphericalangle BAC.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy punkt symetryczny do punktu A względem prostej BC przez F. Skoro $AC = CF$, $AO = OB$ oraz $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACF$, to trójkąty ACF i AOB są podobne (cecha podobieństwa bok–kąt–bok). Analogicznie uzasadniamy, że $\triangle ABF \sim \triangle AOC$.

Obierzmy takie punkty P i Q odpowiednio na odcinkach BF i CF, że $\frac{BP}{PF} = \frac{BD}{DO} = \frac{OE}{EC} = \frac{FQ}{QC}$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa dostajemy, że $DP \parallel OF \parallel EQ$.

Z określenia punktu M wynika, że $AM = MD$ oraz $\sphericalangle AMD = \sphericalangle AOD$, zatem ponownie z cechy podobieństwa bok–kąt–bok wnioskujemy, że $\triangle AMD \sim \triangle AOB$. Stąd $\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AO}$. Zauważmy jeszcze, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAO - \sphericalangle DAO = \sphericalangle DAM - \sphericalangle DAO = \sphericalangle OAM$. Wobec tego z cechy podobieństwa bok–kąt–bok wynika, że $\triangle ABD \sim \triangle AOM$, więc w szczególności $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AOM$.

Z podobieństwa $\triangle AOC \sim \triangle ABF$ i z faktu, że punkty E i P dzielą odcinki OC i BF w tych samych stosunkach wynika, że $\triangle AOE \sim \triangle ABP$. Mamy więc $\frac{OM}{BD} = \frac{AO}{AB} = \frac{OE}{BP}$. Ponadto $\sphericalangle EOM = \sphericalangle EOA - \sphericalangle MOA = \sphericalangle PBA - \sphericalangle DBA = \sphericalangle PBD$. Z cechy podobieństwa bok–kąt–bok wnioskujemy, że $\triangle MOE \sim \triangle DBP$.

Analogicznie dowodzimy, że $\triangle NOD \sim \triangle ECQ$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\sphericalangle DNO + \sphericalangle EMO &= \sphericalangle PDB + \sphericalangle QEC = \sphericalangle FOB + \sphericalangle FOC = \\ &= \sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC.\end{aligned}$$

11. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym przeciwległe boki są równe. Ponadto prawdziwe są zależności

$$\sphericalangle ABC \geqslant \sphericalangle CDE \geqslant \sphericalangle EFA, \quad \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFA < 360^\circ$$

$$\text{oraz} \quad \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFA > \sphericalangle ABC.$$

Wykazać, że $2[ACE] < [ABCDEF]$.

Rozwiązanie:

Każdy z trzech kątów danych w treści zadania jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych, więc istnieje kąt trójścienny $SKLM$ taki, że

$$\sphericalangle KSL = \sphericalangle B, \quad \sphericalangle LSM = \sphericalangle D, \quad \sphericalangle MSK = \sphericalangle F.$$

Niech P, Q, R będą takimi punktami odpowiednio na półprostych $SK^{\rightarrow}$, $SL^{\rightarrow}$, $SM^{\rightarrow}$, że

$$SP = BC, \quad SQ = DE, \quad SR = FA.$$

Wtedy trójkąty PSQ, QSR, RSP i PQR przystają odpowiednio do trójkątów CBA, EDC, AFE i ACE. Aby dokończyć rozwiązanie zadania, wystarczy wykazać, że w czworościanie $PQRS$ pole ściany PQR jest mniejsze od sumy pól jego pozostałych ścian.

Niech P', Q', R' i S' będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $PQRS$ odpowiednio ze ścianami QRS, RSP, SPQ, PQR. Wtedy

$$\Delta PS'Q \equiv \Delta PR'Q, \quad \Delta QS'R \equiv \Delta QP'R, \quad \Delta RS'P \equiv \Delta RQ'P,$$

skąd wniosek, że

$$[PS'Q] = [PR'Q], \quad [QS'R] = [QP'R], \quad [RS'P] = [RQ'P].$$

Powyższe równości prowadzą do wniosku, że

$$[PQR] < [PSQ] + [QSR] + [RSP],$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Parami różne punkty A, B, C, D oraz E leżą w tej kolejności na okręgu o promieniu r, przy czym $AB = CD = DE > r$. Udowodnić, że trójkąt o wierzchołkach w środkach ciężkości trójkątów ABD, BCD oraz ADE jest rozwartokątny.

Rozwiązanie:

Oznaczmy środki ciężkości trójkątów ABD, BCD, ADE odpowiednio przez P, Q, R. Niech K i L będą odpowiednio środkami odcinków BD i AD. Zauważmy, że

$$\frac{AP}{PK} = \frac{CQ}{QK} = 2,$$

a zatem proste PQ i AC są równoległe. Analogicznie możemy dowieść równoległości prostych PR i BE. Jeżeli więc przez X oznaczymy punkt przecięcia prostych AC i BE, to $\sphericalangle QPR = \sphericalangle CXE$. Kąt $\sphericalangle CXE$, wyznaczony przez przekątne czworokąta $ABCE$, nie jest równy 180°. Tym samym $\sphericalangle QPR < 180^\circ$. Niech $\alpha = \sphericalangle AEB$. Z nierówności $AB > r$ wynika, że $\alpha > 30^\circ$ Ponieważ $CD = DE = AB$ mamy też $\sphericalangle CAE = 2\alpha$. A zatem

$$\sphericalangle QPR = \sphericalangle CXE = 180^\circ - \sphericalangle AXE = \alpha + 2\alpha = 3\alpha > 90^\circ.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że $90^\circ < \sphericalangle QPR < \sphericalangle 180^\circ$ skąd wynika, że punkty P, Q, R tworzą wierzchołki trójkąta rozwartokątnego.

2. Rodzinę zbiorów $\mathcal{F}$ nazwiemy *doskonałą* jeśli spełniony jest następujący warunek: Dla każdej trójki zbiorów $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{F}$, co najmniej jeden ze zbiorów

$$(X_1 \setminus X_2) \cap X_3, \qquad (X_2 \setminus X_1) \cap X_3$$

jest pusty. Wykazać, że jeśli $\mathcal{F}$ jest doskonałą rodziną składającą się z podzbiorów pewnego skończonego zbioru U, to $|\mathcal{F}| \leqslant |U| + 1$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód za pomocą indukcji po mocy zbioru U. Jeżeli $|U| = 0$, to U jest zbiorem pustym i posiada on tylko 1 podzbiór. Czyli w szczególności $|\mathcal{F}| \leqslant 1$.

Załóżmy zatem, że teza jest prawdziwa dla wszystkich zbiorów U o mocy mniejszej niż k dla pewnej liczby całkowitej $k > 0$. Niech U będzie dowolnym zbiorem mocy k, zaś $\mathcal{F}$ doskonałą rodziną jego podzbiorów. Wykażemy, że $|\mathcal{F}| \leqslant k + 1$.

Jeżeli $|\mathcal{F}| \leqslant 1$, to nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy więc, że rodzina $\mathcal{F}$ zawiera co najmniej dwa podzbiory. Ze wszystkich par różnych podzbiorów rodziny $\mathcal{F}$ wybierzmy taką parę (Y, Z), że przecięcie $Y \cap Z$ posiada maksymalną możliwą moc.

Ponieważ $Y \neq Z$ jeden ze zbiorów Y, Z posiada element, który nie należy do drugiego z nich. Bez straty ogólności załóżmy, że $y \in Y \setminus Z$.

Rozważmy najpierw przypadek, w którym istnieje zbiór $W \in \mathcal{F}$, $W \neq Y$ taki, że $y \in W$. Ze względu na maksymalność pary (Y, Z) przecięcie $Y \cap W$ posiada nie więcej elementów niż przecięcie $Y \cap Z$. W szczególności istnieje element $z \in Y \cap Z$ taki, że $z \notin W$ – w przeciwnym razie przecięcie $Y \cap W$ zawierałoby więcej elementów niż $Y \cap Z$, gdyż $y \in (Y \cap W) \setminus Z$. Z warunków $y \in (W \setminus Z) \cap Y$ oraz $z \in (Z \setminus W) \cap Y$ otrzymujemy zatem sprzeczność z doskonałością rodziny $\mathcal{F}$. Dowodzi to, że Y jest jedynym zbiorem rodziny $\mathcal{F}$ zawierającym element y.

Zauważmy teraz, że rodzina $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{Y\}$, jest doskonałą rodziną podzbiorów $U' = U \setminus \{y\}$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy zatem, że

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'| + 1 \leqslant (|U'| + 1) + 1 = |U| + 1,$$

co kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

3. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x + y + z = 0$$

oraz żadna z nich nie leży w otwartym przedziale $(-1, 1)$. Znaleźć największą możliwą wartość wyrażenia $x + y + z$.

Rozwiązanie:

Za pomocą bezpośredniego rachunku możemy łatwo zweryfikować, że liczby $x = y = -1$, $z = \sqrt{3} + 2$ spełniają dany warunek. Wówczas $x + y + z = \sqrt{3}$. Wykażemy, że $\sqrt{3}$ jest maksymalną możliwą wartością wyrażenia $x + y + z$. Jasne jest, że liczby x, y, z spełniające dany warunek nie są jednego znaku. Rozważając ewentualnie liczby przeciwne do x, y, z możemy więc założyć, że $x, y \geqslant 1$, $z \leqslant -1$ i wystarczy nam udowodnić nierówność $|x + y + z| \leqslant \sqrt{3}$.

Z danego warunku wynika, że z jest jednym z rozwiązań równania kwadratowego:

$$z^2 + \left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) z + 1 = 0.$$

Ze wzoru na pierwiastki równania kwadratowego wynika, że pierwiastki powyższego równania to

$$\frac{1}{2}\left(-\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) \pm \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 - 4}\right).$$

Zauważmy jednak, że iloczyn pierwiastków to 1, a z jest mniejsze niż -1. Ponieważ $x, y > 0$ wynika stąd łatwo, że

$$z = \frac{1}{2}\left(-\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) - \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 - 4}\right).$$

Pozostaje nam więc wykazać, iż

$$2\sqrt{3} \geqslant 2|x + y + z| = \left|\sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 - 4} - \left(x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y}\right)\right|.$$

Zauważmy, że

$$\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 - 4 > x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$$

W szczególności wyrażenie występujące w module jest dodatnie i wystarczy dowieść, że

$$2\sqrt{3} \geqslant \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 - 4} - \left(x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y}\right).$$

Po elementarnych przekształceniach powyższa nierówność daje się zapisać w postaci

$$2xy + \sqrt{3}x^2y + \sqrt{3}xy^2 \geqslant x^2 + y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{3}y.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że skoro $x, y \geqslant 1$, to prawdziwe są nierówności

$$x^2 \leqslant x^2y, \quad y^2 \leqslant xy^2, \quad \sqrt{3}x \leqslant (\sqrt{3}-1)x^2y+xy, \quad \text{i} \quad \sqrt{3}y \leqslant (\sqrt{3}-1)xy^2+xy,$$

które po zsumowaniu dają żądane oszacowanie i rozwiązanie zadania jest zakończone.

4. Dziwny kalkulator ma tylko dwa przyciski, przy czym na każdym z nich napisana jest pewna dodatnia liczba dwucyfrowa. Na początku wyświetlacz kalkulatora pokazuje liczbę 1. Po naciśnięciu przycisku z liczbą N, kalkulator zamienia obecnie wyświetlaną liczbę X na liczbę $X \cdot N$ lub $X + N$, przy czym mnożenie i dodawanie jest używane naprzemiennie (pierwsze jest mnożenie). Przykładowo, jeśli na pierwszym przycisku widnieje liczba 10, a na drugim liczba 20, to kolejne przyciśnięcia pierwszego, drugiego, pierwszego, i jeszcze raz pierwszego przycisku spowodują kolejne wyświetlanie się liczb $1 \cdot 10 = 10$, $10+20 = 30$, $30 \cdot 10 = 300$, oraz $300+10 = 310$. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie wartości dwucyfrowych liczb znajdujących się na przyciskach kalkulatora, dla których można pokazać na wyświetlaczu nieskończenie wiele liczb kończących się na

(a) 2015,

(b) 5813.

Rozwiązanie:
Udowodnimy następujący:

Lemat. Niech a i b będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że a nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5. Dany jest ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ taki, że $x_0 \in \mathbb{Z}_+$ oraz $x_{n+1} = ax_n + b$ dla $n \geqslant 0$. Wówczas ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest okresowy modulo 10000, czyli istnieje taka liczba całkowita dodatnia k, że $x_{n+k} \equiv x_n \pmod{10000}$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$.

Dowód lematu. Istnieje tylko skończenie wiele reszt z dzielenia przez 10000, a ciąg posiada nieskończenie wiele wyrazów. Wynika stąd istnienie liczb całkowitych dodatnich $m > n$ takich, że $x_m \equiv x_n \pmod{10000}$. Wykażemy, że $k = m - n$ jest okresem ciągu modulo 10000. Mamy bowiem

$$x_{n+1} = ax_n + b \equiv ax_m + b = x_{m+1} \pmod{10000},$$

skąd wynika, że $x_{n+1} \equiv x_{m+1} = x_{n+k+1} \pmod{10000}$. Kontynuując w ten sposób widzimy, że dla dowolnego $i \geqslant 0$ spełniona jest kongruencja

$$x_{n+i} \equiv x_{n+i+k} \pmod{10000}.$$

Pozostaje więc rozpatrzyć indeksy mniejsze niż n. Zauważmy, że skoro

$$ax_{n-1} + b = x_n \equiv x_m = ax_{m-1} + b \pmod{10000},$$

to $10000 | a(x_{n-1} - x_{m-1})$. Ponieważ a nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5, to

$$x_{n-1} \equiv x_{m-1} = x_{n-1+k} \pmod{10000}.$$

Powtarzając to rozumowanie, otrzymujemy ostatecznie, że k jest okresem ciągu $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ modulo 10000.

Przechodzimy do głównej części rozwiązania. Udowodnimy, że w obu punktach (a) i (b) można wpisać liczby na przyciskach w taki sposób, aby spełniony był żądany warunek.

Zauważmy przede wszystkim, że jeżeli wpiszemy liczby a i b, to zaczynając przyciskanie od b, a następnie używając przycisków na przemian dostaniemy w wyniku między innymi elementy ciągu $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowanego rekurencyjnie jako $x_0 = 1$ oraz $x_{n+1} = ax_n + b$ dla $n \geqslant 0$.

W punkcie (a) niech $a = 31$ oraz $b = 34$. Wówczas otrzymujemy ciąg wyników

$$1 \xrightarrow{\cdot\, 31} 31 \xrightarrow{+\, 34} 65 \xrightarrow{\cdot\, 31} 2015.$$

Ponieważ 31 nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5, to udowodniony wcześniej lemat gwarantuje, że liczba kończąca się na 2015 pojawi się nieskończenie wiele razy jako wynik operacji.

W punkcie (b) zauważmy, że wybierając $a = 47$ oraz $b = 62$ możemy postępować następująco

$$1 \xrightarrow{\cdot 62} 62 \xrightarrow{+62} 124 \xrightarrow{\cdot 47} 5828 \xrightarrow{+47} 5875 \xrightarrow{\cdot 47} \_ \xrightarrow{+62} \_ \xrightarrow{\cdot 47} \_ \xrightarrow{+62} \ldots,$$

czyli po otrzymaniu 5875 działamy dalej przyciskami naprzemiennie otrzymując w trakcie między innymi wyrazy ciągu $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowanego rekurencyjnie jako $x_0 = 5875$ oraz $x_{n+1} = 47x_n + 62$ dla $n \geqslant 0$. Ponieważ 47 nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5 udowodniony na początku lemat daje nam istnienie nieskończenie wielu wyrazów ciągu, które kończą się na $5875 = 5813 + 62$. Pozostaje zauważyć, że jedna operacja wcześniej daje nam wynik, który kończy się na 5813. Kończy to rozwiązanie punktu (b) i całego zadania.

5. Trójkąt ABC jest ostrokątny, ale nie równoboczny. Niech O i H będą odpowiednio środkiem okręgu opisanego na nim oraz jego ortocentrum. Okrąg k przechodzi przez punkt B oraz jest styczny do prostej AC w punkcie A. Okrąg l ma środek na półprostej BH oraz jest styczny do prostej AB w punkcie A. Okręgi k i l przecinają się w punkcie X różnym od A. Wykazać, że $\sphericalangle HXO = 180^\circ - \sphericalangle BAC$.

Rozwiązanie:

Niech $E \neq A$ będzie drugim punktem przecięcia okręgu l z prostą AC. Okrąg k leży po tej samej stronie prostej AC co punkt B, zaś okrąg l leży po tej samej stronie prostej AB co punkt C. W efekcie punkt ich przecięcia X znajduje się wewnątrz kąta BAC. Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą mamy zatem $\sphericalangle XAE = \sphericalangle XBA$ oraz $\sphericalangle XAB = \sphericalangle XEA$. Wynika stąd podobieństwo trójkątów ABX oraz EAX.

Oznaczmy $\sphericalangle ACB = \alpha$. Wówczas $\sphericalangle AOB = 2\alpha$, gdyż kąt AOB jest kątem środkowym opartym na łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC

Prosta BH przechodzi przez środek okręgu o oraz jest prostopadła do jego cięciwy AE. Jest zatem symetralną odcinka AE. W szczególności $AH = HE$. Co więcej, ponieważ AH jest wysokością trójkąta ABC, to $\sphericalangle EAH = \sphericalangle CAH = 90^\circ - \alpha$. Stąd $\sphericalangle AHE = 2\alpha$.

Trójkąty równoramienne ABO i EAH są więc podobne. Uzyskaliśmy w ten sposób dwie pary trójkątów podobnych (ABX, EAX) oraz (ABO, EAH) o tej samej skali podobieństwa $\frac{AB}{EA}$. Ponieważ punkty O i X leżą po tej samej stronie prostej AB, zaś punkty H i X leżą po tej samej stronie prostej EA, czworokąty $ABXO$ oraz $EAXH$ są podobne (pozostaje to prawdą również w przypadku kiedy owe czworokąty są zdegenerowane, czyli kiedy trzy z czterech wierzchołków leżą na jednej prostej).

Rozważmy obrót o środku w punkcie X, który przekształca półprostą XB na półprostą XA. W tym obrocie półprosta XO przechodzi na półprostą XH. Mamy zatem

$$\sphericalangle HXO = \sphericalangle AXB = 180^\circ - \sphericalangle BAC,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że kąt $\sphericalangle CAB$ jest kątem pomiędzy styczną i cięciwą AB, zaś kąt AXB jest oparty na cięciwie AB, przy czym punkt X leży po tej samej stronie prostej AB co punkt X. Kończy to rozwiązanie zadania.

6. Niech n będzie parzystą liczbą dodatnią. Na tablicy jest napisane n liczb rzeczywistych. W jednym ruchu możemy wybrać dwie liczby, zmazać je i zastąpić *każdą* z nich ich iloczynem. Udowodnić, że dla każdego początkowego układu n liczb można po skończonej liczbie ruchów uzyskać n równych liczb na tablicy.

Rozwiązanie:

Dla $n = 2$ teza jest oczywista. Dla $n = 4$ mając dowolną czwórkę (a, b, c, d) możemy postępować następująco: $(\underline{a}, \underline{b}, c, d) \to (ab, ab, \underline{c}, \underline{d}) \to (\underline{ab}, ab, \underline{cd}, cd) \to (abcd, \underline{ab}, abcd, \underline{cd}) \to (abcd, abcd, abcd, abcd)$. Przypadek $n = 6$ możemy sprowadzić do sytuacji, w której zaczynamy z szóstką postaci (a, a, a, a, b, b), co wynika z dwóch poprzednich przypadków. Aby uzyskać szóstkę jednakowych liczb postępujemy dalej następująco:

$$\begin{gathered}(a,a,a,\underline{a},\underline{b},b) \to (a,a,\underline{a},\underline{ab},ab,b) \to (a,a,a^2b,\underline{a^2b},\underline{ab},b) \to \\ \to (a,a,\underline{a^2b},a^3b^2,a^3b^2,\underline{b}) \to (\underline{a},\underline{\underline{a}},\underline{\underline{a^2b^2}},a^3b^2,a^3b^2,\underline{a^2b^2}) \to \\ \to (a^3b^2,a^3b^2,a^3b^2,a^3b^2,a^3b^2,a^3b^2).\end{gathered}$$

Aby wykazać tezę dla dowolnej parzystej liczby n przeprowadzimy dowód indukcyjny. Załóżmy, że teza zachodzi dla wszystkich liczb parzystych $n < 4k + 4$, gdzie $k \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą. Wystarczy wykazać, że teza zachodzi również dla $n = 4k + 4$ oraz $n = 4k + 6$.

Dla $n = 4k+4$ postępujemy następująco: z założenia indukcyjnego możemy zrównać ze sobą pierwsze $2k + 2$ liczb jak i drugie $2k + 2$ liczb. Dostajemy więc n-tkę postaci

$$(\underbrace{a, \ldots, a}_{2k+2}, \underbrace{b, \ldots, b}_{2k+2}).$$

Wystarczy teraz wykonać $2k + 2$ kroków aby otrzymać ciąg $(ab, \ldots, ab)$.

Dla $n = 4k + 6$ używając założenia indukcyjnego dla $n = 2k + 2$ oraz $n = 2k + 4$ otrzymujemy n-tkę postaci

$$(\underbrace{a, \ldots, a}_{2k+2}, \underbrace{b, \ldots, b}_{2k+4}).$$

Wykonujemy następnie $2k$ kroków, zawsze wybierając jedno a i jedno b, aby dostać

$$(a, a, \underbrace{ab, \ldots, ab}_{4k}, b, b, b, b).$$

Działając następnie każdym z a z jednym z ab otrzymujemy

$$(a^2b, a^2b, a^2b, a^2b, \underbrace{ab, \ldots, ab}_{4k-2}, b, b, b, b),$$

a następnie po sparowaniu każdego b z jednym z a^2b mamy

$$(a^2b^2, a^2b^2, a^2b^2, a^2b^2, \underbrace{ab, \ldots, ab}_{4k-2}, a^2b^2, a^2b^2, a^2b^2, a^2b^2).$$

Ostatecznie wykonujemy $2k-1$ kroków zastępując dwie liczby ab dwiema liczbami a^2b^2, dostając w efekcie $(a^2b^2, \ldots, a^2b^2)$. Kończy to dowód indukcyjny jak i rozwiązanie zadania.

Uwaga: dla nieparzystych n analogiczna teza nie jest prawdziwa. Łatwo wykazać, że zaczynając od n-tki $(3, 3, \ldots, 3, 2)$, gdzie liczba wystąpień liczby 3 jest parzysta, nigdy nie osiągniemy n-tki jednakowych liczb.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6**–**11**.
13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6**–**11**.
15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści