Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 12–26 czerwca 2016

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 12–26 czerwca 2016

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. 18 33 11 660

Kadra:
Tomasz Cieśla, Maciej Gawron, Andrzej Grzesik, Michał Kieza, Mikołaj Leonarski, Marcin Michorzewski, Konrad Paluszek, Michał Pilipczuk i Dominika Regiec.

Uczestnicy:
Radomił Baran, Bartłomiej Bollin, Jakub Brojacz, Damian Burczyk, Aleksandra Cynk, Maciej Dziuba, Jan Fornal, Filip Gawron, Katarzyna Kępińska, Adrian Koźluk, Jakub Kubacki, Jan Lebioda, Wojciech Mitros, Bogna Pawlus, Tomasz Przybyłowski, Michał Pychtin, Philip Smolenski-Jensen, Szymon Stolarczyk, Mariusz Trela, Jakub Węgrecki i Barbara Zięba.

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`www.om.edu.pl`
`www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 12–26 czerwca 2016 w Mszanie Dolnej, w Ośrodku Sportowo-Rekreacyjnym „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Tomasz Cieśla, Maciej Gawron, Andrzej Grzesik, Michał Kieza, Mikołaj Leonarski, Marcin Michorzewski, Konrad Paluszek, Michał Pilipczuk i Dominika Regiec.

W dniach 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 23 i 24 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 22 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 18 i 25 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań (ostatniego dnia wyjątkowo tylko trzech zadań). Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny czterech zadań i trwały od rana do wieczora, a mecz matematyczny — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 210 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 153, 134 i 127 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyły się dwie wycieczki: 19 czerwca na Ćwilin, a 22 czerwca do Rabki-Zdroju.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z Obozu wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`.

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	8	1	0	10
2.	13	2	0	4
3.	5	3	0	11
4.	1	1	1	16
5.	18	0	0	1
6.	7	3	7	2
7.	6	2	0	11
8.	5	2	0	12
9.	18	1	0	0
10.	18	1	0	0
11.	10	0	0	9
12.	3	0	0	16
13.	7	4	0	8
14.	7	0	0	12
15.	9	2	1	7
16.	2	0	0	17
17.	11	8	1	1
18.	5	1	0	15
19.	3	4	0	14
20.	0	0	0	21
21.	17	0	0	4
22.	14	4	0	3
23.	2	2	2	15
24.	1	0	2	18
25.	16	0	0	4
26.	9	1	3	7
27.	10	1	0	9
28.	1	0	0	19
29.	16	3	0	2
30.	4	0	0	17
31.	0	0	0	21
32.	9	0	0	12
33.	16	0	0	5
34.	4	0	1	16
35.	0	0	0	21

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$, nie wszystkie równe 0. Dowieść, że równanie

$$\sqrt{1+a_1x} + \ldots + \sqrt{1+a_nx} = n$$

ma nie więcej niż 2 pierwiastki rzeczywiste.

2. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC. Punkt D leży na boku AC, przy czym $AD = BD$. Punkt E leży na prostej AM, przy czym proste DE i AB są równoległe. Wykazać, że $\sphericalangle DBE = \sphericalangle ACB$.

3. Rozwiązać równanie

$$x^2 = y^3 - 9$$

w liczbach całkowitych x, y.

4. Dla ustalonej liczby całkowitej dodatniej n znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią $m > n$ taką, że zbiór $\{n, n+1, n+2, \ldots, m\}$ może zostać podzielony na rozłączne podzbiory w taki sposób, że w każdym podzbiorze jedna z liczb jest równa sumie wszystkich pozostałych.

5. W każdym polu planszy 2016×2016 znajduje się pewna liczba całkowita. Liczby na sąsiadujących bokami polach różnią się o co najwyżej 100. Wykazać, że istnieje liczba, która występuje na planszy co najmniej 11 razy.

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x)f(y) = |x-y| f\left(\frac{xy+1}{x-y}\right)$$

dla dowolnych $x \neq y$.

7. Niech D, E, F będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio z bokami BC, CA i AB. Dla każdych dwóch trójkątów spośród $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, $\triangle CDE$ narysowano wspólną styczną zewnętrzną okręgów wpisanych w te trójkąty różną od boków trójkąta ABC. Wykazać, że te trzy styczne przecinają się w jednym punkcie.

8. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, że liczba $2^m + m$ dzieli się przez n.

9. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich równanie

$$(x + 2y + 3z)(2x + 3y + z)(3x + y + 2z) = 17^k.$$

10. Dana jest liczba nieparzysta $n \geqslant 3$ i plansza $n \times n$. W każde pole planszy wpisana jest liczba rzeczywista o module mniejszym niż 1. Suma liczb w każdym kwadracie 2×2 jest równa 0. Wykazać, że suma liczb na planszy jest mniejsza niż n.

11. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniona jest nierówność

$$\frac{a-b}{ab+2b+1} + \frac{b-c}{bc+2c+1} + \frac{c-d}{cd+2d+1} + \frac{d-a}{da+2a+1} \geqslant 0.$$

12. Punkty B', C' i D' są środkami odpowiednio krawędzi AB, AC i AD czworościanu $ABCD$, zaś G_B, G_C i G_D są środkami ciężkości odpowiednio trójkątów ACD, ABD, ABC. Punkt G jest środkiem ciężkości danego czworościanu. Dowieść, że punkty A, G, G_B, G_C, G_D leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, G, B', C', D' leżą na jednej sferze.

13. Dane są dwa wielomiany P i Q o współczynnikach rzeczywistych takie, że

$$P(x) \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow Q(x) \in \mathbb{Z}.$$

Wykazać, że co najmniej jeden z wielomianów $P - Q, P + Q$ jest stały.

14. Dana jest liczba pierwsza $p = 4k+3$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Dowieść, że

$$\prod_{i=1}^{p-1} (i^2 + 1) \equiv 4 \pmod{p}.$$

15. Gracze $1, 2, 3, \ldots, n$ siedzą przy okrągłym stole, przy czym każdy z nich ma początkowo dokładnie jeden żeton. Gracz 1 przekazuje żeton graczowi 2, który następnie przekazuje dwa żetony graczowi 3. Potem gracz 3 przekazuje żeton graczowi 4, który przekazuje dwa żetony graczowi 5, i tak dalej. W momencie, gdy gracz pozbędzie się wszystkich swoich żetonów, odchodzi od stołu. Gra kończy się, gdy przy stole zostanie dokładnie jeden gracz. Wyznacz wszystkie liczby n, dla których gra się zakończy.

16. Odcinki BE i CF są wysokościami w trójkącie ostrokątnym różnobocznym ABC. Punkty X, Y, Z są punktami styczności boków trójkąta do okręgów dopisanych do tego trójkąta. Prosta EF jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wykazać, że punkty A, X, Y, Z leżą na jednym okręgu.

17. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$ taka, że liczby 2^n i 5^n zaczynają się taką samą cyfrą c w zapisie dziesiętnym. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c.

18. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie E, zaś proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Wykazać, że prosta EF jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie EMN.

19. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach rzeczywistych spełniające dla każdej liczby rzeczywistej x zależność

$$P\left(x^2\right) = P(x) \cdot P(x+2).$$

20. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$ oraz n-kąt foremny. Pewne $n-3$ przekątne pokolorowano na błękitno, a inne $n-3$ na złoto w taki sposób, że przekątne jednego koloru nie przecinają się wewnątrz wielokąta. Wyznaczyć maksymalną liczbę punktów przecięcia przekątnych różnych kolorów wewnątrz wielokąta.

21. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzi równość $AB = AD$. Punkty M i N należą odpowiednio do odcinków CD i BC, przy czym zachodzi równość $DM + BN = MN$. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie AMN leży na odcinku AC.

22. Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 5$. Liczby całkowite dodatnie a, b spełniają równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{p-3}{p-1} = \frac{a}{b}.$$

Dowieść, że $p \mid a$.

23. Niech A będzie skończonym zbiorem dodatnich liczb całkowitych. Powiemy, że podział A na dwa niepuste podzbiory X i Y jest *dobry*, jeśli najmniejsza wspólna wielokrotność liczb ze zbioru X jest równa największemu wspólnemu dzielnikowi liczb ze zbioru Y. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość n, dla której istnieje n-elementowy zbiór dodatnich liczb całkowitych mający dokładnie 2015 dobrych podziałów.

24. Liczby a, b, c należą do przedziału $(0,2)$ i spełniają warunek

$$a+b+c=ab+bc+ca.$$

Wykazać, że

$$\frac{a^2}{a^2-a+1}+\frac{b^2}{b^2-b+1}+\frac{c^2}{c^2-c+1}\leqslant 3.$$

25. Ustawienie 2016 skoczków na szachownicy 2016×2016 nazwiemy *układem*, jeśli w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy znajduje się dokładnie jeden skoczek. Natomiast *dobrą zmianą* nazwiemy równoczesne wykonanie pojedynczego ruchu każdym skoczkiem. Udowodnić, że dla każdego układu istnieje taka dobra zmiana, że po jej wykonaniu dalej jest układ.

(*Uwaga*: Ruch skoczka polega na przestawieniu go o dwa pola w poziomie i jedno w pionie, lub o dwa pola w pionie i jedno w poziomie.)

26. Dane są parami różne, niezerowe liczby rzeczywiste a,b,c. Wiadomo, że wielomiany ax^3+bx+c, bx^3+cx+a i cx^3+ax+b mają wspólny pierwiastek rzeczywisty. Wykazać, że co najmniej jeden z tych wielomianów ma trzy (niekoniecznie różne) pierwiastki rzeczywiste.

27. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś ω jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg styczny do odcinków AC, BC jest styczny do okręgu ω w punkcie P, a S jest środkiem tego łuku AB okręgu ω, na którym leży punkt C. Wykazać, że punkty P, I, S są współliniowe.

28. Ciągi dodatnich liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, ... oraz b_1, b_2, b_3, ... spełniają równości

$$a_{n+1}=\mathrm{NWD}(a_n,b_n)+1 \qquad \text{oraz} \qquad b_{n+1}=\mathrm{NWW}(a_n,b_n)-1$$

dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n. Wykazać, że ciąg a_1, a_2, a_3, ... jest od pewnego miejsca okresowy, tj. istnieją takie dodatnie liczby całkowite N i t, że $a_{n+t}=a_n$ dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant N$.

29. Na płaszczyźnie znajduje się $n>1$ odcinków o sumie długości nie mniejszej niż $2\sqrt{n}$, przy czym wszystkie te odcinki są zawarte w kole o promieniu 1 i środku w punkcie O. Wykazać, że istnieje okrąg o środku w punkcie O, który przecina co najmniej dwa z tych odcinków.

30. Liczba całkowita dodatnia jest *gorszego sortu*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze w co najmniej dwunastej potędze. Liczba całkowita dodatnia jest *najlepszego sortu*, jeżeli nie jest gorszego sortu, ani nie jest sumą dwóch liczb gorszego sortu. Udowodnić, że istnieje 2016! kolejnych liczb najlepszego sortu.

31. Rozważmy zbiór $\mathcal{S}$ wielomianów postaci $x^k y^l - 1$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich k, l. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą oraz $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$. Dowieść, że jeśli $n \geqslant 2p - 1$, to

$$S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n = p \cdot P(x, y) + (x^p - 1) \cdot Q(x, y) + (y^p - 1) \cdot R(x, y)$$

dla pewnych wielomianów P, Q, R o współczynnikach całkowitych.

32. Punkt O jest środkiem okręgu ω opisanego na trójkącie ABC, punkt K jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a X punktem na półprostej $AK^{\rightarrow}$. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg ω w punkcie D różnym od A. Punkt M jest środkiem odcinka DX. Prosta przechodząca przez O równoległa do AD przecina prostą DX w punkcie N. Udowodnić, że $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$.

33. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $HABD$ jest równoległobokiem (to znaczy $AB \parallel HD$ oraz $AH \parallel BD$). Niech E będzie takim punktem na prostej DH, że prosta AC przechodzi przez środek odcinka HE. Punkt F jest drugim punktem przecięcia prostej AC z okręgiem opisanym na trójkącie DCE. Udowodnić, że $EF = AH$.

34. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ dodatnich liczb rzeczywistych spełnia nierówność

$$a_{k+1} \geqslant \frac{k a_k}{a_k^2 + k - 1}$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej k. Wykazać, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$$

dla każdego $n \geqslant 2$.

35. Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem pewnych dodatnich liczb całkowitych. Powiemy, że dodatnia liczba całkowita n jest *specjalna*, jeśli istnieje dokładnie jeden podzbiór $\mathcal{B}$ zbioru $\mathcal{A}$ spełniający następujące warunki:

(i) liczba elementów zbioru $\mathcal{B}$ jest nieparzysta;

(ii) suma wszystkich elementów zbioru $\mathcal{B}$ wynosi n.

Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych, które nie są specjalne.

Zawody drużynowe

1. Dany jest graf planarny G i dodatnia liczba całkowita d. Podzbiór X wierzchołków grafu G nazwiemy *d-rozproszonym*, jeśli dla każdych dwóch różnych wierzchołków u, v ze zbioru X nie istnieje ścieżka składająca się z co najwyżej d krawędzi, prowadząca z u do v. Podzbiór d-rozproszony X nazwiemy *lokalnie maksymalnym*, jeśli nie istnieje podzbiór d-rozproszony X' spełniający warunki $|X'| > |X|$ oraz $|X \setminus X'| \leqslant 2$. Udowodnić, że każdy lokalnie maksymalny podzbiór d-rozproszony jest co najwyżej 100 razy mniejszy od największego podzbioru d-rozproszonego.

(*Uwaga*: Graf planarny to taki, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi.)

2. Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 1$ oraz ciąg parami różnych liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k+1}$. Udowodnić, że liczba

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2^k+1} (a_i + a_j)$$

ma co najmniej $k+1$ różnych czynników pierwszych.

3. Wyznaczyć wszystkie ściśle rosnące ciągi dodatnich liczb całkowitych $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ spełniające następujące warunki:

(i) Dla każdej trójki (niekoniecznie różnych) dodatnich liczb całkowitych i, j, k, zachodzi $a_i + a_j \neq a_k$.

(ii) Istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych k, dla których $a_k = 2k - 1$.

4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, zaś P, Q, R, S punktami leżącymi odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA. Odcinki PR i QS przecinają się w punkcie O. W każdy z czworokątów $APOS$, $BQOP$, $CROQ$, $DSOR$ można wpisać okrąg. Wykazać, że proste AC, PQ i RS mają punkt wspólny lub są równoległe.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Udowodnić, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \cdot (xyz + 1)$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy $n = a^2 + b^2$ dla pewnych całkowitych dodatnich a, b.

2. Dana jest liczba n podzielna przez kwadrat liczby pierwszej. Liczbę całkowitą dodatnią a nazwiemy *φ-kuśną*, gdy $n \mid a^{n-1} - 1$. Udowodnić, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest co najwyżej $\frac{\varphi(n)}{2}$ liczb φ-kuśnych.

3. Niech m i n będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że $m > n$. Niech

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Wykazać, że jeśli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ są całkowite, to $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} - 1$ jest liczbą podzielną przez nieparzystą liczbę pierwszą.

4. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Karolek i Lesio grają w grę. W każdej turze gracz wybiera liczbę całkowitą dodatnią $k \leqslant n$. Zasady gry są następujące:
- Gracz nie może wybrać liczby wybranej wcześniej przez pewnego z graczy.
- Gracz nie może wybrać liczby różniącej się o 1 od liczby, którą wybrał w którymkolwiek poprzednim ruchu.
- Gra kończy się remisem, jeśli wszystkie liczby zostały wybrane; w przeciwnym wypadku gracz, który nie może wybrać żadnej liczby, przegrywa grę.

Karolek rozpoczyna grę. Wyznaczyć w zależności od n wynik gry, zakładając, że gracze grają optymalnie.

5. Wykazać, że wierzchołki grafu można pokolorować k kolorami bez tworzenia monochromatycznej krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie tego grafu da się tak skierować, aby nie istniała skierowana ścieżka składająca się z $k+1$ różnych wierzchołków.

6. Wyznaczyć wartość ilorazu

$$\frac{\sum_{k=1}^{n^2-1} \sqrt{n+\sqrt{k}}}{\sum_{k=1}^{n^2-1} \sqrt{n-\sqrt{k}}}$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

7. Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych takie, że

$$W(\sin x) = \sin(W(x))$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki podzbiór przestrzeni euklidesowej, że każda płaszczyzna przecina ten podzbiór w skończonej, dodatniej liczbie punktów?

9. W trójkącie ABC punkt H jest ortocentrum, O środkiem okręgu opisanego, zaś R promieniem tego okręgu. Punkt D jest symetryczny do punktu A względem BC, punkt E jest symetryczny do B względem CA, zaś punkt F jest symetryczny do C względem AB. Wykazać, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $OH = 2R$.

10. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Punkt Q leży wewnątrz tego czworokąta, przy czym $\sphericalangle CDQ = \sphericalangle ADB$ oraz $\sphericalangle CBQ = \sphericalangle ABD$. Wykazać, że rzuty prostokątne punktu Q na proste BC, CD, DB oraz punkt P leżą na jednym okręgu.

11. Dane są okręgi W_1, W_2 przecinające się w punktach P i K. Niech XY będzie wspólną styczną do obu okręgów bliższą punktowi P taką, że X leży na W_1, zaś Y leży na W_2. XP przecina W_2 drugi raz w punkcie C, zaś YP przecina W_1 drugi raz w punkcie B. Niech A będzie punktem przecięcia BX oraz CY. Udowodnić, że jeśli Q jest drugim punktem przecięcia okręgów opisanych na ΔABC i ΔAXY, to $\sphericalangle QXA = \sphericalangle QKP$.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$. Ponadto

$$abc + bcd + cda + dab + a + b + c + d = 0.$$

Wykazać, że

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

2. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f\left(x^2 + y + f(y)\right) = 2y + f(x)^2.$$

3. Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą dającą resztę 1 z dzielenia przez 4, zaś $a = \dfrac{1+\sqrt{k}}{2}$. Udowodnić, że jeśli k nie jest kwadratem liczby całkowitej, to

$$\left\{ \lfloor a^2 n \rfloor - \lfloor a \lfloor an \rfloor \rfloor \mid n = 1, 2, 3, \ldots \right\} = \{ 1, 2, \ldots, \lfloor a \rfloor \}.$$

4. Na płaszczyźnie dane są parami różne punkty $P_1, P_2, \ldots, P_n$, przy czym $n \geqslant 2$. Niech $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |P_i P_j|$. Udowodnić, że istnieje co najwyżej n takich par indeksów $i < j$, że $|P_i P_j| = M$.

5. Na płaszczyźnie danych jest 2016 parami różnych okręgów o promieniu 1. Udowodnić, że można z nich wybrać takie 27 okręgów, że albo każde dwa z nich się przecinają, albo każde dwa z nich są rozłączne.

6. Dane są dodatnie liczby całkowite a, n. Udowodnić, że liczba

$$\sum_{k=1}^{n} a^{\mathrm{NWD}(k,n)}$$

jest podzielna przez n.

7. Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech $D(n)$ oznacza liczbę tych dzielników d liczby $\dbinom{n}{k}$, które spełniają nierówności $n - k + 1 \leqslant d \leqslant n$. Wyznaczyć $\max\limits_{n \geqslant k} D(n)$.

8. Ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ spełnia warunki

$$a_0 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Niech m będzie dodatnią liczbą całkowitą, p liczbą pierwszą, zaś q i r liczbami całkowitymi nieujemnymi. Udowodnić, że liczba

$$a_{p^m q+r} - a_{p^{m-1} q+r}$$

jest podzielna przez p^m.

9. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, a punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do boku BC w tym trójkącie. Punkty D, E są rzutami odpowiednio punktów I, J na bok BC. Punkt M jest środkiem odcinka IJ. Rozważmy okrąg styczny do prostej BC w punkcie D oraz do łuku BAC okręgu ω w punkcie T. Prosta IT przecina ω ponownie w punkcie S. Udowodnić, że proste ME i SJ przecinają się na okręgu ω.

10. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. Punkt P leży wewnątrz tego czworokąta, a jego rzuty na boki leżą na okręgu o środku S. Wykazać, że $BS = DS$.

11. Dany jest okrąg ω o środku O oraz punkt S różny od O leżący wewnątrz niego. Rozważamy okręgi o_1, o_2 styczne zewnętrznie w punkcie S i styczne wewnętrznie do ω. Punkt X jest środkiem jednokładności o skali dodatniej przekształcającej o_1 na o_2. Przy ustalonym okręgu ω oraz ustalonym punkcie S wyznaczyć zbiór wszystkich takich punktów X.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$, nie wszystkie równe 0. Dowieść, że równanie

$$\sqrt{1+a_1x} + \ldots + \sqrt{1+a_nx} = n$$

ma nie więcej niż 2 pierwiastki rzeczywiste.

Rozwiązanie:

Sposób I

Przekształćmy równoważnie równanie dane w treści zadania:

$$\left(\sqrt{1+a_1x}-1\right) + \left(\sqrt{1+a_2x}-1\right) + \ldots + \left(\sqrt{1+a_nx}-1\right) = 0,$$

$$\frac{a_1x}{\sqrt{1+a_1x}+1} + \frac{a_2x}{\sqrt{1+a_2x}+1} + \ldots + \frac{a_nx}{\sqrt{1+a_nx}+1} = 0,$$

$$x \cdot \left(\frac{a_1}{\sqrt{1+a_1x}+1} + \frac{a_2}{\sqrt{1+a_2x}+1} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{1+a_nx}+1}\right) = 0. \qquad (1)$$

Liczba $x = 0$ jest jednym z pierwiastków danego równania, wystarczy więc wykazać że wyrażenie w nawiasie przyjmuje wartość 0 dla co najwyżej jednego argumentu x.

Wykażemy najpierw, że funkcja

$$f(x) = \frac{a}{\sqrt{1+ax}+1}$$

jest ściśle malejąca dla $a \neq 0$. W tym celu wystarczy dowieść, że dla $x < y$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{1+ax}+1} > \frac{a}{\sqrt{1+ay}+1}.$$

Jeśli $a > 0$, to otrzymujemy kolejno

$$y > x,$$

$$1+ay > 1+ax,$$

$$\sqrt{1+ay}+1 > \sqrt{1+ax}+1,$$

$$\frac{a}{\sqrt{1+ax}+1} > \frac{a}{\sqrt{1+ay}+1}.$$

W przypadku, gdy $a < 0$ dostajemy zaś

$$\begin{gathered}
y > x, \\
1 + ay < 1 + ax, \\
\sqrt{1+ay} + 1 < \sqrt{1+ax} + 1, \\
\frac{1}{\sqrt{1+ax}+1} < \frac{1}{\sqrt{1+ay}+1}, \\
\frac{a}{\sqrt{1+ax}+1} > \frac{a}{\sqrt{1+ay}+1}.
\end{gathered}$$

To zaś kończy dowód, że funkcja $f(x)$ jest ściśle malejąca.

Wyrażenie w nawiasie równości (1) jest sumą pewnej liczby funkcji ściśle malejących (co najmniej jednej, skoro co najmniej jedna z liczb a_i jest różna od 0) i pewnej liczby funkcji stałych (gdy $a_i = 0$), więc jest funkcją ściśle malejącą. W takim razie przyjmuje ono wartość 0 dla co najwyżej jednego argumentu x.

Sposób II

Dla $a_i \neq 0$ funkcja

$$f_i(x) = \sqrt{1 + a_i x}$$

jest ściśle wklęsła, gdyż

$$f_i''(x) = -\frac{a_i^2}{4\sqrt{(1+a_i x)^3}} < 0,$$

zaś dla $a_i = 0$ jest funkcją stałą.

Dane równanie przepiszmy w postaci

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = n.$$

Lewa strona jest sumą funkcji ściśle wklęsłych (taka jest co najmniej jedna) i funkcji stałych, więc jest funkcją ściśle wklęsłą. W takim razie ustaloną wartość może przyjmować dla co najwyżej dwóch argumentów x, skąd otrzymujemy tezę zadania.

2. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC. Punkt D leży na boku AC, przy czym $AD = BD$. Punkt E leży na prostej AM, przy czym proste DE i AB są równoległe. Wykazać, że $\sphericalangle DBE = \sphericalangle ACB$.

Rozwiązanie:

Niech A' będzie obrazem symetrycznym punktu A względem punktu M. Wówczas proste $A'C$ i AB są równoległe oraz $A'C = AB$. Z twierdzenia Talesa dostajemy

$$\frac{DE}{BD} = \frac{DE}{AD} = \frac{A'C}{AC} = \frac{AB}{AC},$$

co wraz z równością

$$\sphericalangle EDB = \sphericalangle DBA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle CAB$$

prowadzi do wniosku, że trójkąty ACB i DBE są podobne. W takim razie $\sphericalangle DBE = \sphericalangle ACB$.

3. Rozwiązać równanie

$$x^2 = y^3 - 9$$

w liczbach całkowitych x, y.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie ma rozwiązań.

Lewa strona danego równania jest kwadratem liczby całkowitej, więc daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4. Jeśli y jest liczbą parzystą, to prawa strona danego równania daje resztę 3 z dzielenia przez 4, jeśli zaś y daje resztę 3 z dzielenia przez 4, to prawa strona daje resztę 2 z dzielenia przez 4. W obu przypadkach równanie nie może mieć zatem rozwiązań w liczbach całkowitych.

Załóżmy więc, że y daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Dane równanie zapiszmy w postaci

$$x^2 + 1 = y^3 - 8 = (y-2)\left(y^2 + 2y + 4\right).$$

Wówczas $y - 2$ jest liczbą postaci $4k + 3$, a więc ma dzielnik pierwszy p tej postaci. Wykażemy, że lewa strona danego równania takiego dzielnika pierwszego mieć nie może, co będzie oznaczać, że równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. Przypuśćmy przeciwnie, czyli dla pewnej liczby pierwszej $p = 4k + 3$ zachodzi

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Wówczas korzystając z małego twierdzenia Fermata możemy napisać

$$1 \equiv x^{p-1} = x^{4k+2} = \left(x^2\right)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} = -1 \pmod{p}.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi fałszywości uczynionego przypuszczenia i kończy rozwiązanie zadania.

4. Dla ustalonej liczby całkowitej dodatniej n znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią $m > n$ taką, że zbiór $\{n, n+1, n+2, \ldots, m\}$ może zostać podzielony na rozłączne podzbiory w taki sposób, że w każdym podzbiorze jedna z liczb jest równa sumie wszystkich pozostałych.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $m = 7n - 4$.

Niech $M_1, M_2, \ldots, M_k$ będą podzbiorami M spełniającymi warunki zadania. Skoro dla $i = 1, 2, \ldots, k$ elementy zbioru M_i są parami różne oraz istnieje element będący sumą pozostałych, to zbiór M_i jest co najmniej trzyelementowy. Stąd $k \leqslant \frac{m-n+1}{3}$. Niech S oznacza sumę wszystkich elementów zbioru M. Wtedy

$$S = \frac{(m+n)(m-n+1)}{2}.$$

Ponadto niech a_i oznacza największy element zbioru M_i dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Wtedy a_i jest sumą pozostałych elementów M_i, skąd suma elementów M_i wynosi $2a_i$. Dodatkowo a_i są parami różne dla $i = 1, 2, \ldots, k$, zatem

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=1}^{k} 2a_i &\leqslant 2 \cdot (m + (m-1) + (m-2) + \ldots + (m-k+1)) = \\ &= 2 \cdot \frac{(2m-k+1) \cdot k}{2} = (2m+1-k) \cdot k \leqslant \\ &\leqslant \left(2m+1-\frac{m-n+1}{3}\right) \cdot \frac{m-n+1}{3} = \frac{(5m+n+2)(m-n+1)}{9}, \end{aligned}$$

ponieważ $k \leqslant \frac{m-n+1}{3} \leqslant \frac{m+1}{3} \leqslant \frac{2m+1}{2}$, a funkcja $(2m+1-x) \cdot x$ jest rosnąca dla $x \leqslant \frac{2m+1}{2}$. Stąd

$$\frac{(m+n)(m-n+1)}{2} \leqslant \frac{(5m+n+2)(m-n+1)}{9},$$
$$9(m+n) \leqslant 2 \cdot (5m+n+2),$$
$$m \geqslant 7n-4.$$

Pozostało zauważyć, że zbiory

M_1	M_2	M_3	$\ldots$	M_{n-1}	M_n
$7n-4$	$7n-5$	$7n-6$	$\ldots$	$6n-2$	$6n-3$
$5n-3$	$5n-5$	$5n-7$	$\ldots$	$3n+1$	$3n-1$
$2n-1$	$2n$	$2n+1$	$\ldots$	$3n-3$	$3n-2$

M_{n+1}	M_{n+2}	M_{n+3}	$\ldots$	M_{2n-2}	M_{2n-1}
$6n-4$	$6n-5$	$6n-6$	$\ldots$	$5n-1$	$5n-2$
$5n-4$	$5n-6$	$5n-8$	$\ldots$	$3n+2$	$3n$
n	$n+1$	$n+2$	$\ldots$	$2n-3$	$2n-2$

spełniają warunki zadania.

5. W każdym polu planszy 2016×2016 znajduje się pewna liczba całkowita. Liczby na sąsiadujących bokami polach różnią się o co najwyżej 100. Wykazać, że istnieje liczba, która występuje na planszy co najmniej 11 razy.

Rozwiązanie:

Weźmy najmniejszą i największą liczbę na planszy. Odległość między nimi nie przekracza $2 \cdot 2015$, więc ich różnica nie przekracza $2 \cdot 2015 \cdot 100$, czyli na planszy występuje co najwyżej $2 \cdot 2015 \cdot 100 + 1 = 403001$ różnych liczb. Wszystkich pól na planszy jest $2016 \cdot 2016 = 4064256$, czyli więcej niż $403001 \cdot 10$, więc na mocy zasady szufladkowej Dirichleta któraś liczba występuje co najmniej 11 razy.

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x)f(y) = |x - y| f\left(\frac{xy + 1}{x - y}\right)$$

dla dowolnych $x \neq y$.

Rozwiązanie:

Niech $f(0) = a$. Podstawiając $x = 1$, $y = 0$ otrzymujemy

$$af(1) = f(1).$$

Załóżmy najpierw, że $f(1) = 0$. Wtedy podstawiając $y = 1$ dostajemy

$$0 = |x - 1| \cdot f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right),$$

skąd $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \neq 1$ (gdyż zbiorem wartości funkcji $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ jest $\mathbb{R} \setminus \{1\}$). Zatem tym przypadku f jest funkcją stale równą 0.

Przyjmijmy teraz, że $f(1) \neq 0$. Wtedy $f(0) = a = 1$. Podstawiając w miejsce x i y kolejno pary $(x, 0)$ i $(0, x)$ $(x \neq 0)$ otrzymujemy równości

$$f(x) = |x| f\left(\frac{1}{x}\right)$$

oraz

$$f(x) = |x| f\left(-\frac{1}{x}\right), \tag{2}$$

co prowadzi do wniosku, że

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(-\frac{1}{x}\right),$$

czyli $f(x) = f(-x)$ dla $x \neq 0$. Podstawiając teraz w miejsce x i y parę $\left(x, -\frac{1}{x}\right)$ otrzymujemy

$$f(x)f\left(-\frac{1}{x}\right) = \left|x + \frac{1}{x}\right| \cdot f(0) = \left|x + \frac{1}{x}\right|,$$

co po uwzględnieniu równości (2) daje

$$f(x)^2 = |x| \cdot \frac{|x^2+1|}{|x|} = x^2 + 1. \tag{3}$$

Podstawiając wreszcie parę $(x, -x)$ i korzystając z parzystości funkcji f dostajemy

$$f(x)^2 = |2x| \cdot f\left(\frac{x^2-1}{2x}\right),$$

więc

$$f\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) \geqslant 0.$$

Ponieważ funkcja $h(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ jest "na", to dostajemy, że

$$f(x) \geqslant 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

W takim razie z równości (3) otrzymujemy drugie rozwiązanie $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że obie znalezione funkcje spełniają dane równanie.

7. Niech D, E, F będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio z bokami BC, CA i AB. Dla każdych dwóch trójkątów spośród $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, $\triangle CDE$ narysowano wspólną styczną zewnętrzną okręgów wpisanych w te trójkąty różną od boków trójkąta ABC. Wykazać, że te trzy styczne przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech S będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Wykażemy, że każda ze stycznych rozważanych w treści zadania przechodzi przez punkt S. Dowód przeprowadzimy dla trójkątów AEF i BDF (w pozostałych przypadkach postępujemy analogicznie).

Niech P będzie środkiem łuku EF niezawierającego punktu D. Wtedy

$$\sphericalangle EFP = \sphericalangle FEP = \sphericalangle AFP,$$

skąd wniosek, że punkt P leży na dwusiecznej kąta AFE. Analogicznie uzasadniamy, że punkt P leży na dwusiecznej kąta AEF, więc w efekcie pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt AEF. Podobnie dowodzimy, że środek Q łuku DF niezawierającego punktu E pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BDF. W takim razie z lematu o trójliściu otrzymujemy

$$PF = PS \quad \text{oraz} \quad QF = QS.$$

Symetria względem prostej PQ przekształca zatem punkt F na punkt S, zaś prostą AB styczną do okręgów wpisanych w trójkąty AEF i BDF na styczną do tych okręgów rozważaną w treści zadania. W takim razie należy do niej punkt S, co kończy rozwiązanie zadania.

8. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, że liczba $2^m + m$ dzieli się przez n.

Rozwiązanie:

Udowodnimy więcej: wykażemy, że dla dowolnego n możemy dobrać dowolnie dużą liczbę całkowitą dodatnią m o postulowanej własności.

Stosujemy indukcję ze względu na n. Jeżeli $n = 1$, to dowolna liczba m spełnia $n \mid 2^m + m$ i teza jest spełniona.

Załóżmy, że $n \geqslant 2$. Z założenia indukcyjnego zastosowanego do liczby $\varphi(n)$ wnioskujemy o istnieniu takiej liczby całkowitej k, że

$$k \geqslant n \quad \text{oraz} \quad 2^k \equiv -k \pmod{\varphi(n)}.$$

Udowodnimy, że dowolna liczba m, dla której

$$m \equiv -2^k \pmod{n\varphi(n)} \quad \text{oraz} \quad m \geqslant n$$

spełnia tezę indukcyjną.

Zapiszmy $n = 2^u(2v + 1)$ dla pewnych liczb naturalnych u, v. Ponieważ $k \geqslant n \geqslant u$, to z warunku $m \equiv -2^k \pmod{n\varphi(n)}$ wynika, że $m \equiv -2^k \pmod{2^u}$ lub równoważnie $2^u \mid m$. Oznacza to, że $2^u \mid 2^m + m$.

Skoro $m \equiv -2^k \pmod{n\varphi(n)}$, to $m \equiv -2^k \pmod{\varphi(2v + 1)}$. Podobnie z kongruencji $2^k \equiv -k \pmod{\varphi(n)}$ wnioskujemy, że $k \equiv -2^k \pmod{\varphi(2v+1)}$. W konsekwencji $m \equiv k \pmod{\varphi(2v+1)}$ i stąd $2^m \equiv 2^k \pmod{2v+1}$. Ponieważ $m \equiv -2^k \pmod{n\varphi(n)}$, to $m \equiv -2^k \pmod{2v + 1}$. Ostatecznie otrzymujemy $2^m + m \equiv 2^k + (-2^k) = 0 \pmod{2v + 1}$. Z podzielności $2^u \mid 2^m + m$ oraz $2v + 1 \mid 2^m + m$ wnioskujemy, że $n \mid 2^m + m$.

Wykazaliśmy, że jeżeli $m \equiv -2^k \pmod{n\varphi(n)}$ oraz $m \geqslant n$, to $n \mid 2^m + m$. Czyli teza indukcyjna jest spełniona.

9. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich równanie

$$(x + 2y + 3z)(2x + 3y + z)(3x + y + 2z) = 17^k.$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie ma rozwiązań.

Przypuśćmy przeciwnie i spośród wszystkich czwórek liczb całkowitych dodatnich (x, y, z, k) spełniających dane równanie wybierzmy taką, dla której suma $x + y + z$ jest najmniejsza. Skoro $x, y, z \geqslant 1$, to każda z liczb $x + 2y + 3z$,

$2x+3y+z$, $3x+y+2z$ jest większa od 1. Jeśli iloczyn trzech liczb jest potęgą 17, to każda z nich też, skąd wniosek, że 17 jest dzielnikiem każdej z liczb $x+2y+3z$, $2x+3y+z$, $3x+y+2z$. Wobec tego

$$17 \mid -5(x+2y+3z)+(2x+3y+z)+7(3x+y+2z)-17x = x.$$

Analogicznie dowodzimy, że $17 \mid y$ i $17 \mid z$, zatem czwórka $(\frac{x}{17}, \frac{y}{17}, \frac{z}{17}, k-3)$ także jest rozwiązaniem równania danego w treści zadania. Jednakże

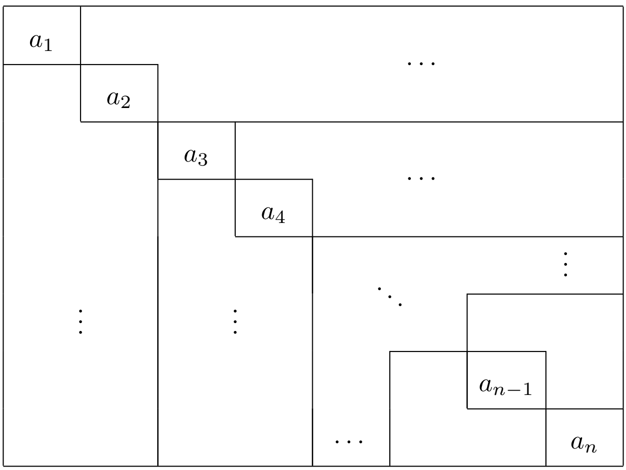
$$\frac{x}{17}+\frac{y}{17}+\frac{z}{17} < x+y+z,$$

co przeczy temu, że czwórka (x, y, z, k) była rozwiązaniem o najmniejszej sumie. To kończy rozwiązanie zadania.

10. Dana jest liczba nieparzysta $n \geqslant 3$ i plansza $n \times n$. W każde pole planszy wpisana jest liczba rzeczywista o module mniejszym niż 1. Suma liczb w każdym kwadracie 2×2 jest równa 0. Wykazać, że suma liczb na planszy jest mniejsza niż n.

Rozwiązanie:

Niech S oznacza sumę liczb na planszy oraz niech $(a_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ będzie ciągiem wyrazów z głównej przekątnej planszy. Z założenia zadania wiemy, że $-1 < a_i < 1$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Rozmieśćmy na planszy $\frac{n-1}{2}$ prostokątów o wymiarach $2 \times 2i$ dla $i = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ oraz $\frac{n-1}{2}$ prostokątów o wymiarach $2i \times 2$ dla $i = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ w sposób przedstawiony na rysunku.



Oczywiście suma liczb w każdym prostokącie jest równa zeru, skąd

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots - a_{n-1} + a_n < n,$$

co chcieliśmy otrzymać.

11. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniona jest nierówność

$$\frac{a-b}{ab+2b+1}+\frac{b-c}{bc+2c+1}+\frac{c-d}{cd+2d+1}+\frac{d-a}{da+2a+1}\geqslant 0.$$

Rozwiązanie:
Sposób I
Zauważmy, że

$$\frac{a-b}{ab+2b+1}+1=\frac{a-b+ab+2b+1}{ab+2b+1}=\frac{(a+1)(b+1)}{b(a+1)+(b+1)}=\frac{1}{\frac{b}{b+1}+\frac{1}{a+1}}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a-b}{ab+2b+1}+\frac{b-c}{bc+2c+1}+\frac{c-d}{cd+2d+1}+\frac{d-a}{da+2a+1}+4\right)=\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{b}{b+1}+\frac{1}{a+1}}+\frac{1}{\frac{c}{c+1}+\frac{1}{b+1}}+\frac{1}{\frac{d}{d+1}+\frac{1}{c+1}}+\frac{1}{\frac{a}{a+1}+\frac{1}{d+1}}\right)\geqslant\\
&\geqslant\frac{4}{\frac{b}{b+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{d}{d+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{a}{a+1}+\frac{1}{d+1}}=\\
&=1
\end{aligned}$$

na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną. Zatem

$$\frac{a-b}{ab+2b+1}+\frac{b-c}{bc+2c+1}+\frac{c-d}{cd+2d+1}+\frac{d-a}{da+2a+1}\geqslant 0,$$

co chcieliśmy otrzymać.

Sposób II
Wykażemy najpierw, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\frac{a-b}{ab+2b+1}\geqslant\frac{1}{b+1}-\frac{1}{a+1}. \tag{4}$$

Rzeczywiście, przekształcając równoważnie otrzymujemy kolejno

$$\begin{gathered}
\frac{a-b}{ab+2b+1}\geqslant\frac{a-b}{ab+a+b+1},\\
(a-b)(ab+a+b+1)\geqslant(a-b)(ab+2b+1),\\
(a-b)(a-b)\geqslant 0.
\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, co kończy dowód nierówności (4).

Szacując w analogiczny sposób pozostałe ułamki otrzymujemy

$$\frac{a-b}{ab+2b+1}+\frac{b-c}{bc+2c+1}+\frac{c-d}{cd+2d+1}+\frac{d-a}{da+2a+1} \geqslant \left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{a+1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{b+1}\right)+\left(\frac{1}{d+1}-\frac{1}{c+1}\right)+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{d+1}\right) \geqslant 0.$$

12. Punkty B', C' i D' są środkami odpowiednio krawędzi AB, AC i AD czworościanu $ABCD$, zaś G_B, G_C i G_D są środkami ciężkości odpowiednio trójkątów ACD, ABD, ABC. Punkt G jest środkiem ciężkości danego czworościanu. Dowieść, że punkty A, G, G_B, G_C, G_D leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, G, B', C', D' leżą na jednej sferze.

Rozwiązanie:

Lemat. *Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie BCD, zaś niech punkty A i E będą tak położone w przestrzeni, że odcinek AE przecina płaszczyznę BCD w punkcie P leżącym wewnątrz okręgu ω. Wtedy punkty A, B, C, D, E leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy $-AP \cdot PE = Pot(P,\omega)$.*

Dowód. Niech $F \neq B$ będzie punktem przecięcia prostej BP z okręgiem ω.

Jeśli punkty A, B, C, D, E leżą na jednej sferze, to punkty A, B, E i F leżą na okręgu, skąd $-AP \cdot PE = -BP \cdot PF = \mathrm{Pot}(P,\omega)$.

Jeśli teraz $-AP\cdot PE = \mathrm{Pot}(P,\omega)$, to $AP\cdot PE = BP\cdot PF$, zatem punkty A, B, E i F leżą na okręgu ω'. Niech O będzie środkiem okręgu ω, zaś O' środkiem okręgu ω'. Prosta k przechodząca przez punkt O i prostopadła do płaszczyzny BCD oraz prosta ℓ przechodząca przez punkt O' i prostopadła do płaszczyzny ABE mają punkt wspólny S. Wówczas $CS = DS = BS = AS = ES$, skąd wniosek, że A, B, C, D, E leżą na jednej sferze (o środku S). □

Przechodzimy do dowodzenia tezy zadania. Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie BCD, zaś G_A środkiem ciężkości tego trójkąta.

Uzasadnimy najpierw, że punkty A, G, B', C', D' leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Pot}(G_A,\omega) = -\frac{1}{2}AG_A^2$. Niech P będzie obrazem symetrycznym punktu A względem punktu G. Mamy wtedy $AG = 3GG_A$, skąd $G_AP = \frac{1}{2}AG_A$. Jednokładność o środku A i skali 2 przeprowadza punkty B', C', D', G na punkty B, C, D, P, skąd wniosek, że punkty A, G, B', C', D' leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, P, B, C, D leżą na jednej sferze. To zaś na mocy lematu jest równoważne zależności $\mathrm{Pot}(G_A,\omega) = -AG_A \cdot G_AP = -\frac{1}{2}AG_A^2$.

Teraz wykażemy, że punkty A, G, G_B, G_C, G_D leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Pot}(G_A,\omega) = -\frac{1}{2}AG_A^2$, co zakończy rozwiązanie zadania.

Jednokładność o środku G i skali 3 przeprowadza punkty G_B, G_C, G_D odpowiednio na punkty B, C, D, zaś punkt A na taki punkt Q, że $GQ = 3AG$. Wykorzystując jeszcze raz zależność $AG = 3GG_A$ otrzymujemy $GG_A = \frac{1}{4}AG_A$, zaś $G_AQ = 2AG_A$. Wówczas punkty A, G, G_B, G_C, G_D leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy punkty Q, G, B, C, D leżą na jednej sferze. To zaś na mocy lematu jest równoważne zależności $\mathrm{Pot}(G_A, \omega) = -GG_A \cdot G_AQ = -\frac{1}{2}AG_A^2$.

13. Dane są dwa wielomiany P i Q o współczynnikach rzeczywistych takie, że

$$P(x) \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow Q(x) \in \mathbb{Z}.$$

Wykazać, że co najmniej jeden z wielomianów $P - Q, P + Q$ jest stały.

Rozwiązanie:

Jeśli któryś z wielomianów P, Q jest stały, to teza jest oczywista. Niech teraz $\deg P = m \geqslant 1$, $\deg Q = n \geqslant 1$ i niech bez straty ogólności $m \geqslant n$.

Załóżmy najpierw, że współczynniki wiodące wielomianów P, Q są większe niż 0. Wówczas istnieje taka liczba rzeczywista M, że P i Q są rosnące na przedziale $[M, +\infty)$ a ponadto $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty = \lim_{x\to\infty} Q(x)$. Niech więc $a_0 > M$ będzie taką liczbą, że $P(a_0) = b \in \mathbb{Z}$. Z warunków zadania wynika, że $Q(a_0) = c \in \mathbb{Z}$. Przez indukcję udowodnimy, że istnieje rosnący ciąg liczb rzeczywistych $a_0, a_1, \ldots, a_m$ spełniający równości

$$P(a_i) = b + i \ \text{ oraz } \ Q(a_i) = c + i \ \text{ dla } \ i = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Baza indukcji jest spełniona. Załóżmy teraz, że $P(a_{k-1}) = b + k - 1$ oraz $Q(a_{k-1}) = c + k - 1$. Ponieważ wielomian P jest rosnącą funkcją ciągłą na przedziale $[M, +\infty)$ oraz $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$, to istnieje dokładnie jedna liczba $a'_k > a_{k-1}$, dla której $P(a'_k) = b + k$. Analogicznie, istnieje dokładnie jedna liczba $a''_k > a_{k-1}$, dla której $Q(a''_k) = c + k$. Z warunku

$$P(x) \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow Q(x) \in \mathbb{Z}$$

oraz z równości $P(a_{k-1}) = b+k-1$, $P(a'_k) = b+k$ wynika więc, że dla dowolnej liczby x z przedziału $[a_{k-1}, a'_k)$ liczba $Q(x)$ jest niecałkowita. W szczególności $a''_k \geqslant a'_k$. Analogicznie uzasadniamy, że $a'_k \geqslant a''_k$. Wobec tego $a'_k = a''_k$. Aby otrzymać tezę indukcyjną wystarczy położyć $a_k = a'_k$.

Otrzymaliśmy więc ciąg $a_0 < a_1 < \ldots < a_m$ spełniający równości

$$P(a_i) - Q(a_i) = b - c \ \text{ dla } \ i = 0, 1, \ldots, m.$$

Ponieważ wielomian $P - Q$ ma stopień co najwyżej m i przyjmuje tę samą wartość dla $m + 1$ różnych argumentów, więc wielomian ten jest stały.

W przypadku, gdy współczynniki wiodące wielomianów P, Q są ujemne, stosujemy powyższe rozumowanie do wielomianów $-P$, $-Q$ i wnioskujemy, że wielomian $-P-(-Q)=-P+Q$ jest stały. Stąd wielomian $P-Q=-(-P+Q)$ też jest stały.

W przypadku, gdy współczynniki wiodące wielomianów P, Q są różnych znaków, to wielomiany P, $-Q$ mają współczynniki wiodące tych samych znaków. Możemy zastosować do nich powyższe rozumowanie i wywnioskować, że wielomian $P-(-Q)=P+Q$ jest stały. Kończy to rozwiązanie zadania.

14. Dana jest liczba pierwsza $p=4k+3$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Dowieść, że

$$\prod_{i=1}^{p-1}(i^2+1)\equiv 4 \pmod p.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Dla $i\neq\pm1$ zachodzi równość $i^2+1=\frac{i^4-1}{i^2-1}$. Udowodnimy, że multizbiory

$$M_2=\{\,1^2 \pmod p, 2^2 \pmod p, 3^2 \pmod p, \ldots, (p-1)^2 \pmod p\,\}$$

oraz

$$M_4=\{\,1^4 \pmod p, 2^4 \pmod p, 3^4 \pmod p, \ldots, (p-1)^4 \pmod p\,\}$$

są równe. Wykażemy najpierw, że każdy ich element występuje w nich dokładnie dwa razy. Ustalmy $1\leqslant x\leqslant p-1$.

Szukamy teraz wszystkich y takich, że

$$x^2\equiv y^2 \pmod p.$$

Jest to równoważne temu, że $(x+y)(x-y)\equiv 0 \pmod p$, czyli $y\equiv\pm x \pmod p$. Skoro $x\not\equiv -x \pmod p$ (bo liczba p jest nieparzysta), to rozważana kongruencja ma dokładnie dwa rozwiązania w zbiorze $\{1,2,3,\ldots,p-1\}$.

Rozważmy teraz kongruencję $x^4\equiv y^4 \pmod p$. Ponieważ

$$x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2),$$

więc jest ona równoważna temu, że

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\equiv 0 \pmod p. \tag{5}$$

Liczba pierwsza postaci $4k+3$ nie może być dzielnikiem sumy kwadratów liczb niepodzielnych przez nią. Istotnie, gdyby $a^2+b^2\equiv 0 \pmod p$ dla a,b niepodzielnych przez p, to $a^2\equiv -b^2 \pmod p$, skąd $(ab^{-1})^2\equiv -1 \pmod p$. Tak jednak być nie może, co zostało wykazane w rozwiązaniu zadania trzeciego. Zatem jedyne rozwiązania kongruencji (5) to $y\equiv x$ i $y\equiv -x$.

Oczywiście każda liczba, która jest czwartą potęgą jest również kwadratem. Wobec tego każdy element multizbioru M_4 jest elementem multizbioru M_2. Ponadto każdy element tych multizbiorów występuje w nich dokładnie dwa razy, zaś M_2 i M_4 mają tyle samo elementów (licząc z krotnościami). Wynika stąd, że $M_2 = M_4$. Ponieważ

$$1^2 \equiv (p-1)^2 \equiv 1 \equiv 1^4 \equiv (p-1)^4 \pmod p,$$

więc multizbiory

$$M_2' = \{\, 2^2 \pmod p, 3^2 \pmod p, \ldots, (p-2)^2 \pmod p \,\}$$

oraz

$$M_4' = \{\, 2^4 \pmod p, 3^4 \pmod p, \ldots, (p-2)^4 \pmod p \,\}$$

są równe. Wobec tego

$$\prod_{i=2}^{p-2} (i^4 - 1) \equiv \prod_{i=2}^{p-2} (i^2 - 1) \pmod p.$$

Stąd

$$\prod_{i=1}^{p-1} (i^2 + 1) = 4 \prod_{i=2}^{p-2} \frac{i^4 - 1}{i^2 - 1} = 4 \cdot \frac{\prod\limits_{i=2}^{p-2} (i^4 - 1)}{\prod\limits_{i=2}^{p-2} (i^2 - 1)} \equiv 4 \pmod p.$$

Sposób II

Podobnie jak w sposobie I dowodzimy, że w multizbiorze liczb M_2 jeśli jakaś liczba występuje, to występuje dokładnie 2 razy. Rozważmy wielomian $P(x) = (x-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1$. Wówczas

$$P(i^2 + 1) = (i^2 + 1 - 1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 = i^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

na mocy małego twierdzenia Fermata. Zatem pierwiastkami tego wielomianu są liczby postaci $i^2 + 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Wielomian ten ma stopień $\frac{p-1}{2}$, więc są to wszystkie jego pierwiastki. Wyraz wolny tego wielomianu jest równy -2, a współczynnik wiodący 1. Ze wzorów Viete'a wynika, że iloczyn pierwiastków wielomianu P daje resztę $(-2) \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 2$ z dzielenia przez p.

W iloczynie $\prod\limits_{i=1}^{p-1} (i^2 + 1) \pmod p$ każdy z tych pierwiastków pojawia się dokładnie 2 razy, więc wartość tego iloczynu jest równa kwadratowi iloczynu wszystkich pierwiastków, czyli przystaje do $4 \pmod p$.

15. Gracze $1, 2, 3, \ldots, n$ siedzą przy okrągłym stole, przy czym każdy z nich ma początkowo dokładnie jeden żeton. Gracz 1 przekazuje żeton graczowi 2, który następnie przekazuje dwa żetony graczowi 3. Potem gracz 3 przekazuje żeton graczowi 4, który przekazuje dwa żetony graczowi 5, i tak dalej. W momencie, gdy gracz pozbędzie się wszystkich swoich żetonów, odchodzi od stołu. Gra kończy się, gdy przy stole zostanie dokładnie jeden gracz. Wyznacz wszystkie liczby n, dla których gra się zakończy.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Gra zakończy się wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$, $n = 2^m + 1$ lub $n = 2^m + 2$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej m.

Przyjmijmy najpierw, że gra znajduje się w następującym położeniu dla pewnego $k \geqslant 2$:

1. Przy stole znajduje się s graczy.
2. Oprócz gracza, który właśnie ma wykonać ruch, wszyscy mają dokładnie k żetonów.
3. Gracz, który właśnie ma wykonać ruch, ma $k+1$ żetonów, jeśli rozpoczyna od oddania 2 żetonów, lub $k + 2$, jeśli rozpoczyna od oddania jednego żetonu.

Wykażemy, że gra kończy się wtedy i tylko wtedy, gdy liczba s jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym.

Załóżmy najpierw, że liczba graczy jest parzysta. Wówczas, jeśli gracz rozpoczynający oddaje 2 żetony, to po k turach przy stole zostaną tylko gracze siedzący na miejscach parzystych, przy czym każdy z nich będzie miał $2k$ żetonów, oprócz gracza, który będzie miał wykonać następny ruch, który będzie miał $2k+1$ żetonów i w następnej turze będzie musiał oddać 2 żetony. Jeśli natomiast gracz rozpoczynający oddaje 1 żeton, to po k turach przy stole zostaną tylko gracze siedzący na miejscach nieparzystych i każdy z nich będzie miał $2k$ żetonów, za wyjątkiem gracza, który będzie miał wykonać następny ruch — będzie on miał $2k+2$ żetony i w następnym ruchu będzie oddawał jeden żeton. Stąd jeśli liczba graczy jest parzysta, po pewnym czasie sprowadzamy sytuację przy stole do analogicznej, zmniejszając liczbę graczy o połowę, więc jeśli s jest potęgą dwójki, gra się zakończy. Jeśli jednak s nie jest potęgą dwójki, po pewnym czasie doprowadzimy do sytuacji, gdy przy stole siedzi nieparzysta liczba graczy większa od 1 i każdy z nich ma co najmniej 2 żetony, za wyjątkiem gracza, który rozpoczyna grę, który ma ich co najmniej 3. W tym wypadku jednak po dwóch turach gra wróci do ustawienia początkowego, czyli się nie zakończy.

Powróćmy do gry z zadania. Oczywiście dla $n = 1, 2$ gra się zakończy. Zauważmy teraz, że dla $n \geqslant 3$, po jednej pełnej rundzie pozostanie $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ graczy. Każdy z nich będzie miał po 2 żetony, za wyjątkiem gracza, który ma wykonać ruch, który ma 3 żetony, jeśli w następnym ruchu oddaje 2 żetony, lub 4 żetony, jeśli w następnym ruchu przekazuje 1 żeton. Stąd gra się zakończy wtedy i tylko wtedy, gdy $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 2^m$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej m, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^m + 1$ lub $n = 2^m + 2$.

16. Odcinki BE i CF są wysokościami w trójkącie ostrokątnym różnobocznym ABC. Punkty X, Y, Z są punktami styczności boków trójkąta do okręgów dopisanych do tego trójkąta. Prosta EF jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wykazać, że punkty A, X, Y, Z leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC.

Sposób I

Oznaczmy przez H, I, M, O, S odpowiednio: ortocentrum trójkąta ABC, środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC, środek odcinka BC, środek okręgu opisanego na trójkącie ABC, odbicie A względem O.

Lemat. *Punkty H, I, M, S są współliniowe.*

Dowód. Niech P będzie punktem przecięcia prostych BC, EF.

Skoro $\sphericalangle BEC = 90^\circ = \sphericalangle BFC$, to czworokąt $BCEF$ jest wpisany w okrąg, którego środkiem jest punkt M. Z własności biegunowych wynika, że prosta AP jest biegunową punktu H względem tego okręgu. W szczególności $HM \perp AP$.

Oznaczmy okrąg wpisany w trójkąt ABC przez ω. Prosta EF jest styczna do ω, więc okrąg ten jest wpisany w czworokąt $BCEF$. Oznaczmy punkty styczności okręgu ω z bokami BC, CE, EF, FB odpowiednio przez P_1, P_2, P_3, P_4. Z twierdzenia Brianchona zastosowanego w (zdegenerowanym) sześciokącie BP_1CEP_3F wynika, że odcinki BE, CF, P_1P_3 przecinają się w jednym punkcie, czyli że H leży na odcinku P_1P_3. Analogicznie uzasadniamy, że H leży na odcinku P_2P_4.

Z własności biegunowych wynika, że prosta P_1P_3 jest biegunową punktu P względem ω, a prosta P_2P_4 — biegunową punktu A względem ω. Z twierdzenia o wzajemności biegunowych wynika, że prosta AP jest biegunową punktu H względem ω. W szczególności $HI \perp AP$.

Ponieważ $HM \perp AP$ oraz $HI \perp AP$, więc punkty H, I, M są współliniowe.

Skoro S jest odbiciem punktu A względem O, to AS jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC. Stąd $SB \perp AB$. Ponadto $CH \perp AB$, co oznacza, że $SB \parallel HC$. Analogicznie dowodzimy, że $SC \parallel HB$. Stąd czworokąt $BHCS$ jest równoległobokiem. Przekątne dowolnego równoległoboku przecinają się w połowie, skąd wnioskujemy, że punkt M leży na odcinku HS.

Z powyższych rozważań wynika teza lematu — dowiedliśmy bowiem, że punkty I, S leżą na prostej HI.

□

Oznaczmy przez s symetrię środkową względem punktu O. Przyjmijmy oznaczenia $X' = s(X)$, $Y' = s(Y)$ i $Z' = s(Z)$.

Punkty X i P_1 są symetryczne względem M, gdyż

$$BP_1 = \frac{a-b+c}{2} = CX.$$

Ponadto $OM \perp BC$, zatem $P_1X' \perp BC$.

Rozważmy jednokładność o środku A przekształcającą okrąg dopisany do boku BC trójkąta ABC na okrąg ω. Obrazem punktu X w tej jednokładności jest taki punkt T leżący na ω (różny od P_1), że styczna w punkcie T do ω jest równoległa do BC. Wobec tego P_1T jest średnicą okręgu ω. Stąd I jest środkiem odcinka P_1T. Ponadto M jest środkiem P_1X. Wobec tego prosta IM jest równoległa do prostej TX, czyli do prostej AX.

Wnioskujemy stąd, że punkt X' leży na prostej równoległej do AX przechodzącej przez punkt S. Z lematu wynika, że prostą tą jest IS. Z drugiej strony $P_1X' \perp BC$. Wobec tego X' jest punktem przecięcia prostej IS z prostą prostopadłą do BC przechodzącą przez P_1. Stąd $X' = I$.

Podobnie wykazujemy, że Y' leży na prostej P_2I oraz na prostej równoległej do AC przechodzącej przez S. Wynika stąd, że $SY' \perp Y'I$, czyli punkt Y' leży na okręgu o średnicy IS. Analogicznie dowodzimy, że Z' również leży na tym okręgu.

Ponieważ obrazami punktów S, I, Y', Z' w symetrii s są odpowiednio punkty A, X, Y, Z, więc punkty A, X, Y, Z leżą na okręgu o średnicy AX.

Sposób II

Oznaczmy przez a, b, c długości odpowiednio boków BC, CA, AB, a przez α, β, γ miary kątów $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle ACB$. Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, czyli $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Zatem

$$AF = AC\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

Analogicznie wykazujemy, że

$$BF = \frac{c^2+a^2-b^2}{2c} \quad \text{oraz} \quad CE = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}.$$

Trójkąt AEF jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{AF}{AC}$, zatem

$$EF = BC \cdot \frac{AF}{AC} = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}.$$

Czworokąt $BCEF$ jest opisany na okręgu, zatem $EF + BC = BF + EC$. Oznaczmy przez T_b drugi punkt przecięcia okręgu opisanego na AXZ z bokiem BC, a przez T_c drugi punkt przecięcia okręgu opisanego na AXY z bokiem BC. Z potęgi punktu względem okręgu wynika, że

$$BT_b = \frac{BZ \cdot BA}{BX} \quad \text{oraz} \quad CT_c = \frac{CY \cdot CA}{CX}.$$

Ponadto

$$BZ = \frac{b+c-a}{2},\ BX = \frac{a+b-c}{2},\ CX = \frac{a-b+c}{2},\ CY = \frac{b+c-a}{2}.$$

Teza zadania jest równoważna temu, że punkty T_b i T_c się pokrywają. Wystarczy więc wykazać, że $BT_b + CT_c = BC$. Podstawiając wyliczone wartości odcinków otrzymujemy, że założenie o styczności jest równoważne warunkowi

$$\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc} + a = \frac{c^2+a^2-b^2}{2c} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2b},$$

a teza jest równoważna równości

$$c \cdot \frac{b+c-a}{a+b-c} + b \cdot \frac{b+c-a}{a-b+c} = a.$$

Wymnażając obie równości przez mianowniki i redukując wyrazy podobne przekonujemy się, że są one równoważne. Kończy to rozwiązanie zadania.

17. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$ taka, że liczby 2^n i 5^n zaczynają się taką samą cyfrą c w zapisie dziesiętnym. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c.

Rozwiązanie:

Jedyną możliwą wartością c jest $c = 3$.

W oczywisty sposób c nie jest zerem. Załóżmy, że liczby 2^n i 5^n zaczynają się taką samą cyfrą $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ w zapisie dziesiętnym. Wówczas istnieją liczby całkowite $k, l \geqslant 0$ takie, że

$$c \cdot 10^k \leqslant 2^n < (c+1) \cdot 10^k \quad \text{oraz} \quad c \cdot 10^l \leqslant 5^n < (c+1) \cdot 10^l.$$

Mnożąc te nierówności stronami i dzieląc przez 10^{k+l} otrzymujemy

$$c^2 \leqslant 10^{n-k-l} < (c+1)^2.$$

Stąd istnieje liczba będąca potęgą liczby 10 o całkowitym wykładniku, nie mniejsza niż c^2 i mniejsza niż $(c+1)^2$. Skoro $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, to $c = 1$ lub $c = 3$.

Dla $c = 1$ mamy $n - k - l = 0$, skąd

$$2^k \cdot 5^k = 10^k \leqslant 2^{k+l} \quad \text{oraz} \quad 2^l \cdot 5^l = 10^l \leqslant 5^{k+l}.$$

Stąd

$$5^k \leqslant 2^l \leqslant 5^k,$$

skąd $k = l = 0$. Ale wtedy $n = 0$, co stoi w sprzeczności z założeniem zadania.

Pozostaje zauważyć, że $2^5 = 32$, $5^5 = 3125$, skąd istnieje liczba n taka, że 2^n i 5^n zaczynają się cyfrą 3 w zapisie dziesiętnym.

18. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie E, zaś proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Wykazać, że prosta EF jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie EMN.

Rozwiązanie:

Niech K i L będą obrazami symetrycznymi punktu E odpowiednio względem punktów M i N. Rozważmy złożenie jednokładności o środku F i skali $\frac{AF}{CF}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta AFB. Wówczas obrazami punktów C i D są odpowiednio punkty A i B, gdyż $AF \cdot DF = BF \cdot CF$. Zauważmy teraz, że

$$\sphericalangle LCD = \sphericalangle CDE = \sphericalangle BAE = \sphericalangle ABK$$

oraz

$$\sphericalangle LDC = \sphericalangle DCE = \sphericalangle ABE = \sphericalangle KAB.$$

Wobec tego obrazem punktu L w rozważanym przekształceniu jest punkt E, zaś obrazem punktu E jest punkt K. W takim razie

$$\sphericalangle LFD = \sphericalangle EFC = \sphericalangle KFA,$$

skąd wniosek, że punkty F, K, L są współliniowe. Ponadto prosta LE przechodzi w danym przekształceniu na prostą EK, a prosta FE na prostą FK, więc $\sphericalangle FEL = \sphericalangle FKE = \sphericalangle NME$ (ostatnia równość wynika z równoległości prostych KL i MN). To zaś jest równoważne tezie zadania.

19. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach rzeczywistych spełniające dla każdej liczby rzeczywistej x zależność

$$P\left(x^2\right) = P(x) \cdot P(x+2).$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyne wielomiany spełniające warunki zadania to: $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$ oraz $P(x) = (x-1)^n$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej n.

Sposób I

Załóżmy najpierw, że P jest wielomianem stałym, czyli że

$$P(x) = c$$

dla każdego x oraz pewnej liczby rzeczywistej c. Podstawiając to do równości z zadania, otrzymujemy

$$c^2 = c,$$

zatem $c = 0$ lub $c = 1$. Stąd otrzymujemy wielomiany $P(x) \equiv 0$ i $P(x) \equiv 1$ spełniające warunki zadania.

Niech teraz P będzie wielomianem stopnia $n > 0$. Niech a będzie współczynnikiem wiodącym wielomianu P. Wówczas a jest współczynnikiem wiodącym wielomianu $P\left(x^2\right)$ oraz a^2 jest współczynnikiem wiodącym wielomianu $P(x) \cdot P(x+2)$, skąd $a = a^2$, a skoro a jest różne od 0, to $a = 1$. Niech więc $P(x) = (x-1)^n + Q(x)$, gdzie $k = \deg Q < n$. Stąd

$$
\begin{aligned}
\left(x^2-1\right)^n + Q\left(x^2\right) = P\left(x^2\right) = \\
&= P(x) \cdot P(x+2) = \\
&= ((x-1)^n + Q(x)) \cdot ((x+1)^n + Q(x+2)) = \\
&= \left(x^2-1\right)^n + (x-1)^n Q(x+2) + (x+1)^n Q(x) + Q(x)Q(x+2),
\end{aligned}
$$

a więc

$$Q\left(x^2\right) = (x-1)^n Q(x+2) + (x+1)^n Q(x) + Q(x)Q(x+2).$$

Przypuśćmy, że Q nie jest wielomianem stale równym zeru. Wtedy

$$
\begin{aligned}
2k = \deg Q(x^2) = \\
&= \deg\left((x-1)^n Q(x+2) + (x+1)^n Q(x) + Q(x)Q(x+2)\right) = \\
&= n + k < \\
&< 2k.
\end{aligned}
$$

Stąd $Q(x) \equiv 0$, czyli $P(x) = (x-1)^n$. Bezpośrednio sprawdzamy, że wielomian ten spełnia warunki zadania dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

Sposób II

W przypadku wielomianów stałych postępujemy jak w sposobie I. Dalej zakładamy, że P jest wielomianem stopnia $n \geqslant 1$. Wówczas wielomian ten ma n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami). Załóżmy, że liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu P. Podstawiając w danej równości $x = z$ wnosimy, że z^2 jest także pierwiastkiem wielomianu P. Przyjmując zaś $x-2 = z$ otrzymujemy, że liczba $(z-2)^2$ jest także pierwiastkiem wielomianu P.

Przypuśćmy, że wielomian P ma pierwiastki zespolone o module większym niż 1 i wśród nich wybierzmy z_0 o największym module. Wówczas liczba z_0^2 także jest pierwiastkiem wielomianu P, a ma większy moduł. W takim razie wielomian P nie może mieć pierwiastków zespolonych o module większym niż 1. W analogiczny sposób uzasadniamy, że wielomian ten nie ma pierwiastków zespolonych o module należącym do przedziału $(0,1)$ (wystarczy rozpatrzyć pierwiastek o najmniejszym module). Ponadto jeśli liczba 0 byłaby pierwiastkiem wielomianu P, to wówczas pierwiastkiem wielomianu P byłaby także liczba 4, co jest niemożliwe. W takim razie wszystkie pierwiastki P leżą na okręgu jednostkowym o środku w 0. Przypuśćmy teraz, że wielomian P ma pierwiastek

$z_0 \neq 1$ leżący na okręgu jednostkowym o środku w 0. Wtedy liczba $z_0 - 2$ nie leży na tym okręgu i to samo dotyczy liczby $(z_0 - 2)^2$, która jest pierwiastkiem wielomianu P. Otrzymana sprzeczność prowadzi do wniosku, że jedynym pierwiastkiem zespolonym wielomianu P jest 1. W takim razie $P(x) = (x-1)^n$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że ten wielomian spełnia daną w treści zadania równość dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

20. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$ oraz n-kąt foremny. Pewne $n - 3$ przekątne pokolorowano na błękitno, a inne $n - 3$ na złoto w taki sposób, że przekątne jednego koloru nie przecinają się wewnątrz wielokąta. Wyznaczyć maksymalną liczbę punktów przecięcia przekątnych różnych kolorów wewnątrz wielokąta.

Rozwiązanie:

Weźmy dwie nie przecinające się złote przekątne. Dzielą one wielokąt na 3 części. Niech k oznacza liczbę wierzchołków w dwóch zewnętrznych częściach. Każda błękitna przekątna przecinająca obie te przekątne musi mieć oba końce w jednym z tych k wierzchołków. Błękitne przekątne nie tworzą cykli, więc przekątnych o końcach wśród ustalonych k wierzchołków jest co najwyżej $k - 1$. Wszystkich błękitnych przekątnych jest $n - 3$, więc wszystkich punktów przecięcia błękitnych przekątnych z dwoma wyróżnionymi złotymi przekątnymi jest co najwyżej $k - 1 + n - 3 = n + k - 4$. Weźmy dwie złote przekątne, dzielące wielokąt na dwa trójkąty i $(n-2)$-kąt. Na mocy założenia mają one co najwyżej $n+2-4$ punkty przecięcia. Weźmy następnie dwie przekątne dzielące otrzymany $(n - 2)$ kąt na dwa trójkąty i $(n - 4)$-kąt, następnie dzielące $(n - 4)$-kąt na dwa trójkąty i $(n-6)$-kąt itd. aż zostanie nam trójkąt lub czworokąt. Przekątne wybrane w k-tym kroku odcinają od wielokąta co najwyżej $2k$ wierzchołków, więc mają co najwyżej $n + 2k - 4$ punkty przecięcia z błękitnymi przekątnymi. Jeśli n jest parzyste, to na koniec zostanie nam jedna przekątna mająca co najwyżej $n - 3$ punkty przecięcia. Zatem maksymalna liczba punktów przecięcia wszystkich przekątnych jest równa: dla n nieparzystego

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} (n + 2k - 4) = \frac{n-3}{2}(n-4) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} k,$$

a dla n parzystego jest równa

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} (n + 2k - 4) + (n-3) = \frac{n-4}{2}(n-4) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} k + (n-3).$$

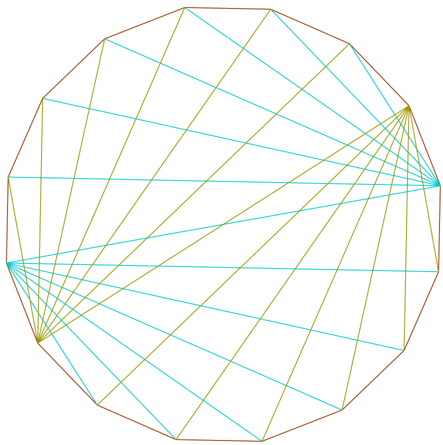
W obu przypadkach suma ta jest równa $\left\lceil \dfrac{3(n-3)^2}{4} \right\rceil$.

Pozostaje wskazać układ przekątnych osiągający właśnie taką liczbę punktów przecięcia. Niech $A_1, A_2 \dots A_n$ będą wierzchołkami wielokąta i przyjmijmy $l = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Pokolorujmy na złoto przekątne

$$A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_l, A_lA_{l+2}, A_lA_{l+3}, \dots, A_lA_n,$$

a na błękitno

$$A_2A_{l+1}, A_2A_{l+2}, \dots, A_2A_n, A_{l+1}A_3, A_{l+1}A_3, \dots, A_{l+1}A_{l-1}.$$



Wówczas złote przekątne A_1A_{k+2} i A_lA_{l+k+1} mają w sumie $n + 2k - 4$ punkty przecięcia z błękitnymi przekątnymi. Jeśli n jest parzyste, to oprócz tego przekątna A_1A_l przecina wszystkie błękitne przekątne. Zatem łączna liczba punktów przecięcia wynosi

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} (n - 2k + 4)$$

dla n nieparzystego oraz

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} (n - 2k + 4) + (n - 3)$$

dla n parzystego. W obu przypadkach konfiguracja osiąga liczbę przecięć równą oszacowaniu dolnemu równemu $\left\lceil \frac{3(n-3)^2}{4} \right\rceil$.

21. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzi równość $AB = AD$. Punkty M i N należą odpowiednio do odcinków CD i BC, przy czym zachodzi równość $DM + BN = MN$. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie AMN leży na odcinku AC.

Rozwiązanie:

Niech P będzie takim punktem na półprostej $CD^{\rightarrow}$ poza odcinkiem CD, że $DP = BN$. Wtedy

$$\sphericalangle PDA = 180^\circ - \sphericalangle CDA = \sphericalangle NBA,$$

co wraz z równościami $DP = BN$ i $AD = AB$ dowodzi, że trójkąty ADP i ABN są przystające. W takim razie $AP = AN$, co wraz z zależnością

$$MP = MD + DP = MD + BN = MN$$

prowadzi do wniosku, że trójkąty AMP i AMN mające dodatkowo wspólny bok AM są przystające. Zatem

$$\sphericalangle ANM = \sphericalangle APM = \sphericalangle ANB$$

(ostatnia równość wynika z przystawania trójkątów ADP i ABM). Analogicznie uzasadniamy, że $\sphericalangle AMN = \sphericalangle AMD$. Punkt A jest więc środkiem okręgu dopisanego do trójkąta CNM, a prosta CA jest dwusieczną kąta MCN. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt MCN. Punkt I leży na prostej AC oraz $\sphericalangle AMI = \sphericalangle ANI = 90^\circ$. W takim razie środek okręgu opisanego na czworokącie $AMIN$ jest środkiem odcinka AI, więc leży na prostej AC, skąd bezpośrednio wynika teza zadania.

22. Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 5$. Liczby całkowite dodatnie a, b spełniają równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{p-3}{p-1} = \frac{a}{b}.$$

Dowieść, że $p \mid a$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że (wszystkie przystawania są modulo p):

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{p-3}{p-1} = \\
&= \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{2}{4}\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{2}{p-1}\right) = \\
&= p - 3 + 3 - 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right) = \\
&= p - 2\left(1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1} + \ldots + (p-1)^{-1}\right) \equiv \\
&\equiv p - 2\left(1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1)\right) = p - 2 \cdot \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0,
\end{aligned}$$

ponieważ zbiór niezerowych reszt modulo p jest równy zbiorowi ich odwrotności. Stąd też $p \mid a$, co chcieliśmy otrzymać.

23. Niech A będzie skończonym zbiorem dodatnich liczb całkowitych. Powiemy, że podział A na dwa niepuste podzbiory X i Y jest *dobry*, jeśli najmniejsza wspólna wielokrotność liczb ze zbioru X jest równa największemu wspólnemu dzielnikowi liczb ze zbioru Y. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość n, dla której istnieje n-elementowy zbiór dodatnich liczb całkowitych mający dokładnie 2015 dobrych podziałów.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $n = 3024$.

Wpierw wykażemy, że dowolny zbiór A mający dokładnie 2015 dobrych podziałów ma co najmniej 3024 elementy.

Rozważmy dowolny dobry podział (X, Y) zbioru A oraz $x \in X$ i $y \in Y$. Wówczas

$$x \mid \mathrm{NWW}(X) = \mathrm{NWD}(Y) \mid y. \tag{6}$$

Rozważmy teraz dowolny inny dobry podział (X', Y') zbioru A i załóżmy, że zbiory $X \setminus X'$ oraz $X' \setminus X$ są oba niepuste. Wówczas, dla dowolnych $x \in X \setminus X'$ i $x' \in X' \setminus X$, mamy $x \mid x'$, gdyż $x \in X$ oraz $x' \in Y$, oraz $x' \mid x$, gdyż $x' \in X'$ oraz $x \in Y'$. Zatem $x = x'$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że elementy zbioru A są parami różne. Otrzymujemy, że dla każdej pary dobrych podziałów (X, Y) i (X', Y') zbioru A, albo zachodzi $X \subseteq X'$ i $Y \supseteq Y'$, albo $X \supseteq X'$ i $Y \subseteq Y'$.

Na mocy wyżej wysnutego wniosku możemy oznaczyć dobre podziały zbioru A jako

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_{2015}, Y_{2015}),$$

gdzie $X_i \subsetneq X_j$ i $Y_i \supsetneq Y_j$ dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant 2015$. Oznaczając dodatkowo $(X_0, Y_0) = (\emptyset, A)$ oraz $(X_{2016}, Y_{2016}) = (A, \emptyset)$, możemy rozszerzyć powyższą własność również na indeksy 0 i 2016. Będziemy również oznaczać $\mathrm{NWW}(\emptyset) = \mathrm{NWD}(A)$ oraz $\mathrm{NWD}(\emptyset) = \mathrm{NWW}(A)$ tak, by powyższe podziały spełniały również warunek wymagany od dobrych podziałów.

Wykażemy teraz, że dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant 2015$ zachodzi:

$$|X_i \setminus X_{i-1}| + |X_{i+1} \setminus X_i| \geqslant 3. \tag{7}$$

W przeciwnym razie mielibyśmy $X_i \setminus X_{i-1} = \{x\}$ oraz $X_{i+1} \setminus X_i = \{y\}$ dla pewnych liczb x, y. Ponieważ (X_{i-1}, Y_{i-1}) spełnia warunek dobrego podziału, na mocy (6) mamy, że dla każdego $x' \in X_{i-1}$ zachodzi $x' \mid x$. Wynika stąd, że $\mathrm{NWW}(X_i) = x$. Podobnie, ponieważ (X_{i+1}, Y_{i+1}) spełnia warunek dobrego podziału, otrzymujemy $\mathrm{NWD}(Y_i) = y$. Ale skoro (X_i, Y_i) jest dobrym podziałem, to

$$x = \mathrm{NWW}(X_i) = \mathrm{NWD}(Y_i) = y,$$

co stoi w sprzeczności z założeniem, że liczby w zbiorze A są parami różne.

Na mocy (7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} |A| &= |X_{2016} \setminus X_0| = \sum_{i=0}^{2015} |X_{i+1} \setminus X_i| = \\ &= \sum_{i=1}^{1008} |X_{2i-1} \setminus X_{2i-2}| + |X_{2i} \setminus X_{2i-1}| \geqslant 3 \cdot 1008 = 3024. \end{aligned}$$

Pozostało nam wskazać przykład zbioru 3024-elementowego, który ma dokładnie 2015 dobrych podziałów. W tym celu rozważmy

$$A = \bigcup_{i=1}^{1008} A_i \quad \text{gdzie} \quad A_i = \{\, 2^{i-1}3^i, 2^i 3^{i-1}, 2^i 3^i \,\}.$$

Wówczas $|A| = 3024$. Na mocy (6) otrzymujemy, że jeśli (X, Y) jest dobrym podziałem A, to nie istnieją takie indeksy $1 \leqslant i < j \leqslant 1008$, że $X \cap A_j \neq \emptyset$ i $Y \cap A_i \neq \emptyset$. Stąd już łatwo sprawdzić, że dobre podziały zbioru A to

$$\left(\bigcup_{j \leqslant i} A_j, \bigcup_{j > i} A_i \right) \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, 1007$$

oraz

$$\left(\{2^{i-1}3^i, 2^i 3^{i-1}\} \cup \bigcup_{j<i} A_j, \{2^i 3^i\} \cup \bigcup_{j>i} A_i \right) \quad \text{dla } j = 0, 1, \ldots, 1007.$$

Tych dobrych podziałów istotnie jest dokładnie 2015.

24. Liczby a, b, c należą do przedziału $(0, 2)$ i spełniają warunek

$$a + b + c = ab + bc + ca.$$

Wykazać, że

$$\frac{a^2}{a^2 - a + 1} + \frac{b^2}{b^2 - b + 1} + \frac{c^2}{c^2 - c + 1} \leqslant 3.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$a = \frac{1}{a'}, \quad b = \frac{1}{b'}, \quad c = \frac{1}{c'}.$$

Wówczas $a', b', c' > \frac{1}{2}$ oraz $a' + b' + c' = a'b' + b'c' + c'a'$, zaś dana nierówność przyjmuje postać

$$\frac{1}{a'^2 - a' + 1} + \frac{1}{b'^2 - b' + 1} + \frac{1}{c'^2 - c' + 1} \leqslant 3.$$

Niech teraz $a' = x + \frac{1}{2}$, $b' = y + \frac{1}{2}$, $c' = z + \frac{1}{2}$. Wtedy liczby x, y, z są dodatnie i spełniają warunek $xy + yz + zt = \frac{3}{4}$. Lewą stronę powyższej nierówności możemy przepisać w postaci

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a'^2 - a' + 1} + \frac{1}{b'^2 - b' + 1} + \frac{1}{c'^2 - c' + 1} = \\
&\quad = \frac{1}{\left(a' - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{\left(b' - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{\left(c' - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\
&\quad = \frac{1}{x^2 + xy + yz + zx} + \frac{1}{y^2 + xy + yz + zx} + \frac{1}{z^2 + xy + yz + zx} = \\
&\quad = \frac{1}{(x+y)(x+z)} + \frac{1}{(y+z)(y+x)} + \frac{1}{(z+x)(z+y)} = \\
&\quad = \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \\
&\quad = \frac{2(x+y+z)}{(x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz} = \\
&\quad = \frac{8(x+y+z)}{3(x+y+z) - 4xyz}.
\end{aligned}$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\frac{3}{4}(x+y+z) = (xy+yz+zx)(x+y+z) \geqslant 9xyz.$$

Stąd

$$x + y + z \geqslant 12xyz,$$

czyli

$$\frac{8(x+y+z)}{3(x+y+z) - 4xyz} \leqslant 3,$$

co chcieliśmy otrzymać.

25. Ustawienie 2016 skoczków na szachownicy 2016×2016 nazwiemy *układem*, jeśli w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy znajduje się dokładnie jeden skoczek. Natomiast *dobrą zmianą* nazwiemy równoczesne wykonanie pojedynczego ruchu każdym skoczkiem. Udowodnić, że dla każdego układu istnieje taka dobra zmiana, że po jej wykonaniu dalej jest układ.

(*Uwaga*: Ruch skoczka polega na przestawieniu go o dwa pola w poziomie i jedno w pionie, lub o dwa pola w pionie i jedno w poziomie.)

Rozwiązanie:

Ponumerujmy wiersze i kolumny szachownicy kolejno $1, 2, \ldots, 2016$. Przestawmy skoczków z wierszy o numerach nieparzystych na wiersze o numerach większych o 1, a z wierszy o numerach parzystych na wiersze o numerach mniejszych o 1. Podobnie, skoczków z kolumn o numerach postaci $4n+1$ i $4n+2$ na kolumny o numerach większych o 2, a skoczków z kolumn o numerach postaci $4n+3$ i $4n$ na kolumny o numerach mniejszych o 2. W ten sposób każdy skoczek wykonał prawidłowy ruch, więc zrobiliśmy dobrą zmianę, a wciąż jest układ.

26. Dane są parami różne, niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c. Wiadomo, że wielomiany ax^3+bx+c, bx^3+cx+a i cx^3+ax+b mają wspólny pierwiastek rzeczywisty. Wykazać, że co najmniej jeden z tych wielomianów ma trzy (niekoniecznie różne) pierwiastki rzeczywiste.

Rozwiązanie:

Oznaczmy wspólny pierwiastek naszych wielomianów przez ξ. Sumując nasze równości stronami otrzymujemy $(a+b+c)(\xi^3+\xi+1)=0$. Rozważmy dwa przypadki $a+b+c=0$ oraz $\xi^3+\xi+1=0$.

W pierwszym przypadku, pewne dwie liczby spośród a, b, c są tego samego znaku, możemy założyć, że są to b i c. Udowodnimy, że wówczas wielomian $W(x) = cx^3+ax+b = cx^3-(b+c)x+b$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że b i c są dodatnie. Wówczas zachodzi nierówność $W(0)=b>0$, ponadto $W(1)=0$. Z własności Darboux wynika, że W ma pierwiastek rzeczywisty w przedziale $(-\infty, 0)$. Oznacza to, że W ma co najmniej dwa pierwiastki rzeczywiste: jeden ujemny, a drugi równy 1. Ze wzorów Viete'a wynika, że wszystkie pierwiastki są rzeczywiste.

W drugim przypadku z równości $a\xi^3+b\xi+c=0$ oraz $\xi^3+\xi+1=0$ wnioskujemy, że $b\xi+c=a\xi+a$. Co jest równoważne $\xi=\frac{a-c}{b-a}$. Analogicznie otrzymujemy $\xi=\frac{b-a}{c-b}$ oraz $\xi=\frac{c-b}{a-c}$. Mnożąc powyższe równości stronami dostajemy $\xi^3=1$ i w konsekwencji $\xi=1$. Ponieważ w takim przypadku $\xi^3+\xi+1=3\neq 0$, to uzyskujemy sprzeczność.

27. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś ω jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg styczny do odcinków AC, BC jest styczny do okręgu ω w punkcie P, a S jest środkiem tego łuku AB okręgu ω, na którym leży punkt C. Wykazać, że punkty P, I, S są współliniowe.

Rozwiązanie:

Sposób I

Jeśli $AC=BC$, to punkty C i S pokrywają się i punkty P, I, S leżą na dwusiecznej CI.

Załóżmy teraz, że $AC\neq BC$. Wówczas punkty C i S są różne, zaś proste CS i AB nie są równoległe. Niech o będzie drugim rozważanym w treści zadania okręgiem. Rozważmy przekształcenie φ będące złożeniem inwersji o środku C i promieniu $\sqrt{AC\cdot BC}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta ACB. Przekształcenie φ, podobnie jak inwersja, jest inwolucją, tzn. złożenie $\varphi\circ\varphi$ jest identycznością. Przekształcenie to zamienia punkty A i B, więc także zamienia proste CA i CB oraz prostą AB z okręgiem ω. Obrazem okręgu o jest okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny do boku AB w punkcie P', który jest obrazem punktu P w tym przekształceniu. Ponieważ proste CS i CI są prostopadłe, to obrazem punktu S jest punkt S' przecięcia prostej CS z prostą AB. Niech I' będzie obrazem punktu I. Wtedy

$$CI \cdot CI' = CA \cdot CB,$$

czyli

$$\frac{CI}{CA} = \frac{CB}{CI'}.$$

Stąd i z równości $\sphericalangle ACI = \sphericalangle I'CB$ wnosimy, że trójkąty ACI i $I'CB$ są podobne, zatem $\sphericalangle AIC = \sphericalangle I'BC$. Skoro $\sphericalangle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$, to mamy

$$90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABI',$$

skąd $\sphericalangle ABI' = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$. W takim razie BI' jest dwusieczną kąta zewnętrznego ABC, więc punkt I' jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC. W takim razie $\sphericalangle S'P'I' = 90^\circ$, co wraz z równością $\sphericalangle S'CI' = 90^\circ$ (bo $CS \perp CI$) prowadzi do wniosku, że punkty P', I', S' i C leżą na jednym okręgu. To jest jednak równoważne z tym, że punkty P, I, S są współliniowe.

Sposób II

Niech o będzie drugim rozważanym w treści zadania okręgiem, a D i E punktami jego styczności odpowiednio z odcinkami AC i BC. Niech ponadto K będzie środkiem łuku AC niezawierającego punktu B, zaś L środkiem łuku BC niezawierającego punktu A. Styczna do okręgu ω w punkcie K jest równoległa do AC. Rozważając jednokładność o środku P przekształcającą okrąg o na okrąg ω stwierdzamy więc, że punkty P, D, K leżą na jednej prostej. Analogicznie zauważamy, że punkty P, E, L są współliniowe. Stosując teraz twierdzenie Pascala dla sześciokąta $ACBKPL$ otrzymujemy, że punkty $D = AC \cap KP$, $E = CB \cap PL$, $I = BK \cap LA$ leżą na jednej prostej. Ponieważ CI jest dwusieczną w trójkącie równoramiennym CDE, więc $DI = IE$.

Skoro C jest punktem przecięcia stycznych do okręgu o w punktach D i E, to prosta PC jest symedianą w trójkącie PDE. Stąd i z tego, że PI jest środkową w tym trójkącie wynika, że

$$\sphericalangle LPI = \sphericalangle EPI = \sphericalangle CPD = \sphericalangle CPK.$$

Z drugiej strony

$$\sphericalangle LPS = \sphericalangle BPS - \sphericalangle BPL = \frac{1}{2}\sphericalangle APB - \sphericalangle BPL =$$
$$= \frac{1}{2}\sphericalangle APC + \frac{1}{2}\sphericalangle BPC - \sphericalangle BPL = \frac{1}{2}\sphericalangle APC = \sphericalangle CPK.$$

To zaś oznacza, że punkty P, I, S są współliniowe.

28. Ciągi dodatnich liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, $\ldots$ oraz b_1, b_2, b_3, $\ldots$ spełniają równości

$$a_{n+1} = \mathrm{NWD}(a_n, b_n) + 1 \qquad \text{oraz} \qquad b_{n+1} = \mathrm{NWW}(a_n, b_n) - 1$$

dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n. Wykazać, że ciąg a_1, a_2, a_3, $\ldots$ jest od pewnego miejsca okresowy, tj. istnieją takie dodatnie liczby całkowite N i t, że $a_{n+t} = a_n$ dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant N$.

Rozwiązanie:

Definiujemy

$$W_n = \{m \in \mathbb{Z}_+ \mid m \geqslant a_n \text{ oraz } m \nmid (a_n + b_n)\} \qquad \text{oraz} \qquad w_n = \min W_n.$$

Udowodnimy, że tak określony ciąg $(w_n)_{n\geqslant 1}$ jest nierosnący. W tym celu rozważymy dwa przypadki: $a_n \mid b_n$ oraz $a_n \nmid b_n$.

W pierwszym przypadku $a_{n+1} = a_n + 1$ oraz $b_{n+1} = b_n - 1$ i wobec tego $a_n + b_n = a_{n+1} + b_{n+1}$. Ponadto $a_n \mid a_n + b_n$, więc $a_n \notin W_n$. Oznacza to, że $W_n = W_{n+1}$ i w konsekwencji $w_n = w_{n+1}$.

W drugim przypadku $a_n \nmid a_n + b_n$, skąd $a_n \in W_n$ oraz $w_n = a_n$. Udowodnimy, że $a_n \in W_{n+1}$. Ponieważ $a_n \nmid b_n$ to $a_{n+1} = \mathrm{NWD}(a_n, b_n) + 1 \leqslant a_n$. Ponadto $a_n \mid \mathrm{NWW}(a_n, b_n)$, $a_n \nmid \mathrm{NWD}(a_n, b_n)$ oraz

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \mathrm{NWD}(a_n, b_n) + \mathrm{NWW}(a_n, b_n).$$

Wynika stąd, że $a_n \nmid a_{n+1} + b_{n+1}$. Oznacza to, że istotnie $a_n \in W_{n+1}$ i w konsekwencji $w_{n+1} \leqslant w_n$.

Wykazaliśmy, że ciąg $(w_n)_{n\geqslant 1}$ jest nierosnący, ponadto dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n \leqslant w_n$. Oznacza to, że $w_1 \geqslant a_n$ dla dowolnego n i w konsekwencji ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony. Zapiszmy $M = w_1 + 1$ jako ograniczenie ciągu $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

Udowodnimy, że wartości a_{n+1} oraz b_{n+1} (mod $M!$) zależą jedynie od a_n i reszty z dzielenia b_n przez $M!$. Istotnie, ponieważ $a_n \mid M!$ dla dowolnego n, to dla dowolnej liczby całkowitej k zachodzi równość

$$a_{n+1} = \mathrm{NWD}(a_n, b_n) + 1 = \mathrm{NWD}(a_n, b_n + kM!) + 1.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} b_{n+1} = \mathrm{NWW}(a_n, b_n) - 1 = \frac{a_n}{\mathrm{NWD}(a_n, b_n)} b_n - 1 \equiv \\ \equiv \frac{a_n}{\mathrm{NWD}(a_n, b_n + kM!)}(b_n + kM!) - 1 \pmod{M!}. \end{aligned}$$

Ponieważ liczba par postaci $(a_n, b_n \pmod{M!})$ jest skończona oraz każda para $(a_n, b_n \pmod{M!})$ wyznacza jednoznacznie parę $(a_n, b_{n+1} \pmod{M!})$, to ciąg par $(a_n, b_n \pmod{M!})_{n\geqslant 1}$ jest od pewnego miejsca okresowy. Wynika stąd, że również ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ jest od pewnego miejsca okresowy.

29. Na płaszczyźnie znajduje się $n > 1$ odcinków o sumie długości nie mniejszej niż $2\sqrt{n}$, przy czym wszystkie te odcinki są zawarte w kole o promieniu 1 i środku w punkcie O. Wykazać, że istnieje okrąg o środku w punkcie O, który przecina co najmniej dwa z tych odcinków.

Rozwiązanie:

Ponumerujmy odcinki liczbami od 1 do n. Niech x_i oznacza minimalną a y_i maksymalną odległość punktu na i-tym odcinku od O. Z założeń zadania wynika, że $[x_i, y_i] \subset [0, 1]$. Załóżmy nie wprost, że żaden okrąg nie przecina więcej niż jednego odcinka. Wówczas przedziały $[x_i, y_i]$ są parami rozłączne. Wobec tego także przedziały $[x_i^2, y_i^2]$ są parami rozłączne. Zatem skoro zawierają się w przedziale o długości 1 to suma ich długości jest mniejsza od 1.

Dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$ i-ty odcinek zawiera się w pierścieniu o środku w O, promieniu zewnętrznym y_i i wewnętrznym x_i. Najdłuższym odcinkiem zawartym w takim pierścieniu jest odcinek o końcach na zewnętrznym okręgu styczny do wewnętrznego okręgu. Możemy więc bez straty ogólności założyć, że każdy odcinek jest tak położony.

Oznaczmy przez X_i, Y_i końce i-tego odcinka, a przez M_i punkt styczności do okręgu o środku O i promieniu x_i. Wówczas $\sphericalangle OMX = \sphericalangle OMY = 90°$, bo odcinek X_iY_i jest styczny w punkcie M_i do okręgu o promieniu OM_i. Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa $M_iX_i = M_iY_i = \sqrt{OX_i^2 - OM_i^2} = \sqrt{y_i^2 - x_i^2}$. Przeto $X_iY_i = 2\sqrt{y_i^2 - x_i^2}$. Korzystając z nierówności między średnimi oszacujmy sumę długości wszystkich odcinków:

$$2\sum_{i=1}^{n} \sqrt{y_i^2 - x_i^2} = 2n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{y_i^2 - x_i^2} \leqslant 2n\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - x_i^2}{n}} < 2n\sqrt{\frac{1}{n}} = 2\sqrt{n}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, kończy to dowód nie wprost.

30. Liczba całkowita dodatnia jest *gorszego sortu*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze w co najmniej dwunastej potędze. Liczba całkowita dodatnia jest *najlepszego sortu*, jeżeli nie jest gorszego sortu, ani nie jest sumą dwóch liczb gorszego sortu. Udowodnić, że istnieje 2016! kolejnych liczb najlepszego sortu.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jeżeli liczba n jest gorszego sortu, to da się ją przedstawić w postaci a^4b^5 dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b. Zauważmy, że każdą liczbę naturalną nie mniejszą od 12 da się przedstawić w postaci $4k+5l$, gdzie k,l są całkowite nieujemne. Można to udowodnić przez indukcję lub skorzystać z ogólnego twierdzenia mówiącego, że każdą liczbę naturalną większą od $ab-a-b$ da się przedstawić w postaci $ak+bl$ gdzie $k,l\in\mathbb{N}_{\geqslant 0}$ $(5\cdot 4-5-4=11)$. Oznacza to, że jeżeli $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_s^{e_s}$ to dla dowolnego $i=1,2,\ldots,s$ zachodzi równość postaci $e_i=4k_i+5l_i$ dla pewnych k_i,l_i całkowitych nieujemnych. W konsekwencji

$$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_s^{e_s}=\left(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}\right)^4\left(p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}\right)^5.$$

Istotnie przedstawiliśmy n w postaci a^4b^5.

Niech N będzie liczbą naturalną. Zauważmy, że z powyższych rozważań wynika, że w przedziale $[1,N]$ znajduje się co najwyżej

$$(N^{1/4}\cdot N^{1/5})^2+(N^{1/4}\cdot N^{1/5})\leqslant 2N^{9/10}$$

liczb, które są gorszego sortu lub są sumą dwóch liczb gorszego sortu. Dobieramy liczbę naturalną N tak, aby $2N^{9/10}<\frac{N}{2016!}$ oraz $2016!\mid N$. Wówczas z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w pewnym przedziale postaci

$$(t(2016)!,(t+1)2016!],\quad \text{gdzie}\ \ t=0,1,\ldots,\frac{N}{2016!}-1$$

znajdują się wyłącznie liczby najlepszego sortu.

31. Rozważmy zbiór $\mathcal{S}$ wielomianów postaci x^ky^l-1 dla pewnych liczb całkowitych dodatnich k,l. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą oraz $S_1,S_2,\ldots,S_n\in\mathcal{S}$. Dowieść, że jeśli $n\geqslant 2p-1$, to

$$S_1\cdot S_2\cdot\ldots\cdot S_n=p\cdot P(x,y)+(x^p-1)\cdot Q(x,y)+(y^p-1)\cdot R(x,y)$$

dla pewnych wielomianów P,Q,R o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$(x-1)^p=x^p-1+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}(-1)^{p-k}x^k.$$

Dla $k=1,2,\ldots,p-1$ liczba $\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}$ jest podzielna przez p, gdyż jej licznik dzieli się przez p, a mianownik nie. Wobec tego $(x-1)^p=x^p-1+p\cdot A(x,y)$, gdzie $A(x,y)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}(-1)^{p-k}x^k$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Podobnie dowodzimy, że $(y-1)^p=y^p-1+p\cdot B(x,y)$ dla pewnego wielomianu B o współczynnikach całkowitych.

Zauważmy też, że

$$\begin{aligned}x^k y^l - 1 &= x^k(y^l - 1) + x^k - 1 = \\ &= (y-1)x^k(1 + \ldots + y^{l-1}) + (x-1)(1 + \ldots + x^{k-1}) = \\ &= (y-1)\cdot C(x,y) + (x-1)\cdot D(x,y),\end{aligned}$$

gdzie $C(x,y) = x^k(1+\ldots+y^{l-1})$ oraz $D(x,y) = 1+\ldots+x^{k-1}$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych.

Rozważmy teraz wielomiany $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$. Zapiszmy każdy z wielomianów S_k w postaci $(y-1)C_k(x,y) + (x-1)D_k(x,y)$, gdzie C_k, D_k są pewnymi wielomianami o współczynnikach całkowitych. Wówczas

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} S_k &= \prod_{k=1}^{n}((y-1)C_k(x,y) + (x-1)D_k(x,y)) \\ &= \sum_{l=0}^{n}(x-1)^l(y-1)^{n-l}E_l(x,y),\end{aligned}$$

przy czym wielomian

$$E_l(x,y) = \sum_{\substack{M\subset\{1,2,\ldots,n\}\\|M|=l}}\left(\prod_{m\in M} D_m(x,y)\right)\cdot\left(\prod_{m\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus M} C_m(x,y)\right)$$

ma współczynniki całkowite.

Dla $l = 0, 1, \ldots, p-1$ mamy $n - l - p \geqslant 2p - 1 - l - p \geqslant 0$ i wobec tego spełniona jest równość

$$\begin{aligned}(x-1)^l(y-1)^{n-l}E_l(x,y) &= (y-1)^p \cdot F_l(x,y) = \\ &= (y^p - 1 + p\cdot B(x,y))F_l(x,y) = \\ &= (y^p - 1)F_l(x,y) + p\cdot G_l(x,y),\end{aligned}$$

gdzie $F_l(x,y) = (x-1)^l(y-1)^{n-l-p}E_l(x,y)$ i $G_l(x,y) = B(x,y)F_l(x,y)$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych. Podobnie, dla $l = p, p+1, \ldots, n$ zapisujemy

$$\begin{aligned}(x-1)^l(y-1)^{n-l}E_l(x,y) &= (x-1)^p \cdot F_l(x,y) = \\ &= (x^p - 1 + p\cdot A(x,y))F_l(x,y) = \\ &= (x^p - 1)F_l(x,y) + p\cdot G_l(x,y),\end{aligned}$$

przy czym $F_l(x,y) = (x-1)^{l-p}(y-1)^{n-l}E_l(x,y)$ i $G_l(x,y) = A(x,y)F_l(x,y)$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych.

Ostatecznie dostajemy żądaną postać:

$$\prod_{k=1}^{n} S_k = \sum_{l=0}^{n} (x-1)^l (y-1)^{n-l} E_l(x,y) =$$
$$= p \cdot P(x,y) + (x^p - 1) \cdot Q(x,y) + (y^p - 1) \cdot R(x,y),$$

gdzie wielomiany P, Q, R dane są wzorami

$$P(x,y) = \sum_{l=0}^{n} G_l(x,y), \ \ Q(x,y) = \sum_{l=p}^{n} F_l(x,y) \ \text{ oraz } \ R(x,y) = \sum_{l=0}^{p-1} F_l(x,y).$$

32. Punkt O jest środkiem okręgu ω opisanego na trójkącie ABC, punkt K jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a X punktem na półprostej $AK^{\rightarrow}$. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg ω w punkcie D różnym od A. Punkt M jest środkiem odcinka DX. Prosta przechodząca przez O równoległa do AD przecina prostą DX w punkcie N. Udowodnić, że $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$.

Rozwiązanie:

Niech Y będzie takim punktem, że czworokąt $AONY$ jest równoległobokiem. Ponieważ $AD \parallel ON$, więc Y leży na prostej AD.

Przypomnijmy, że ortocentrum i środek okręgu opisanego są punktami izogonalnie sprzężonymi w każdym trójkącie. Wynika stąd w szczególności, że dwusieczne kątów BAC i OAK pokrywają się. Ponadto odpowiednie boki trójkątów OND i ADX są równoległe, wobec tego trójkąty te są podobne. Zatem

$$\frac{ON}{OD} = \frac{AD}{AX}.$$

Ponieważ $OD = OA$ i $ON = AY$, więc

$$\frac{AY}{AO} = \frac{AD}{AX}.$$

Skoro zaś kąty OAY, DAX są równe, to trójkąty AOY, AXD są podobne.

Ponieważ prosta AN połowi odcinek OY, a prosta AM połowi odcinek DX, więc z podobieństwa trójkątów AOY, AXD wynika, że $\sphericalangle OAN = \sphericalangle MAX$. Stąd łatwo otrzymujemy tezę zadania.

33. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $HABD$ jest równoległobokiem (to znaczy $AB \parallel HD$ oraz $AH \parallel BD$). Niech E będzie takim punktem na prostej DH, że prosta AC przechodzi przez środek odcinka HE. Punkt F jest drugim punktem przecięcia prostej AC z okręgiem opisanym na trójkącie DCE. Udowodnić, że $EF = AH$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $HD \parallel AB$ i $BD \parallel AH$, więc $BD \perp BC$ i $CH \perp DH$. Wobec tego czworokąt $BDCH$ jest wpisany w okrąg o średnicy CD. Ponieważ H jest ortocentrum trójkąta ABC, więc $\sphericalangle HAC = 90^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CBH$. Korzystając z tego, że czworokąty $BDCH$ i $CDFE$ są wpisywalne w okrąg otrzymujemy

$$\sphericalangle CFE = \sphericalangle CDH = \sphericalangle CBH = \sphericalangle HAC.$$

Niech M będzie punktem przecięcia prostych AC i DH, a $G \neq A$ takim punktem na prostej AC, że $AH = HG$. Wówczas $\sphericalangle MFE = \sphericalangle HAC = \sphericalangle MGH$.

Z równości

$$\sphericalangle MFE = \sphericalangle MGH, \quad \sphericalangle EMF = \sphericalangle HMG, \quad EM = MH$$

wynika, że trójkąty EMF i HMG są przystające (kąt–bok–kąt). Wobec tego $EF = HG = AH$.

34. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ dodatnich liczb rzeczywistych spełnia nierówność

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej k. Wykazać, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$$

dla każdego $n \geqslant 2$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ spełniona jest nierówność

$$a_k \geqslant \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k}.$$

Istotnie, korzystając z warunku danego w zadaniu otrzymujemy

$$\frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \leqslant \frac{k}{k \cdot \dfrac{a_k}{a_k^2 + k - 1}} - \frac{k-1}{a_k} = \frac{a_k^2 + k - 1 - (k-1)}{a_k} = a_k.$$

Przejdźmy do dowodu tezy zadania. Zastosujemy indukcję ze względu na n.

Niech $n = 2$. Warunek dany w zadaniu sprowadza się do postaci $a_1 \geqslant \frac{1}{a_2}$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną wynika, że $a_1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1 a_2} \geqslant 2$.

Niech teraz $n > 2$. Jeżeli $a_n \geqslant 1$, to teza wynika wprost z założenia indukcyjnego. Jeżeli $a_n < 1$, to otrzymujemy

$$a_1 + \ldots + a_n \geqslant \left(\frac{1}{a_2} - \frac{0}{a_1}\right) - \left(\frac{2}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right) + \ldots + \left(\frac{n-1}{a_n} - \frac{n-2}{a_{n-1}}\right) + a_n = \\ = \frac{n-1}{a_n} + a_n.$$

Wykażemy najpierw, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej t mniejszej od 1 spełniona jest nierówność

$$\frac{n-1}{t} + t \geqslant n.$$

Istotnie, po przekształceniach otrzymujemy nierówność równoważną w postaci $(t-1)(t-(n-1)) \geqslant 0$, która jest prawdziwa dla $t \in (0,1)$.

Stosując teraz udowodnioną przed chwilą nierówność dla $t = a_n$ dostajemy

$$\frac{n-1}{a_n} + a_n \geqslant n.$$

Oznacza to, że i w tym przypadku teza indukcyjna jest spełniona. Kończy to dowód kroku indukcyjnego i tezy zadania.

35. Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem pewnych dodatnich liczb całkowitych. Powiemy, że dodatnia liczba całkowita n jest *specjalna*, jeśli istnieje dokładnie jeden podzbiór $\mathcal{B}$ zbioru $\mathcal{A}$ spełniający następujące warunki:

(i) liczba elementów zbioru $\mathcal{B}$ jest nieparzysta;

(ii) suma wszystkich elementów zbioru $\mathcal{B}$ wynosi n.

Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych, które nie są specjalne.

Rozwiązanie:

Załóżmy przeciwnie, że taki zbiór $\mathcal{A}$ istnieje. Dla dodatniej liczby całkowitej n, przez *reprezentację* będziemy rozumieć podzbiór $X \subseteq \mathcal{A}$, którego suma elementów wynosi n. Reprezentacja jest *parzysta* jeśli posiada parzystą liczbę elementów, oraz *nieparzysta* w przeciwnym przypadku. Założyliśmy, że istnieje tylko skończenie wiele dodatnich liczb całkowitych niemających dokładnie jednej nieparzystej reprezentacji. Zatem istnieje taka dodatnia liczba całkowita N, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n > N$, n ma dokładnie jedną reprezentację nieparzystą. Zauważmy, że zbiór $\mathcal{A}$ musi być nieskończony, gdyż w przeciwnym razie sumy jego elementów byłyby ograniczone.

Wykażemy teraz serię strukturalnych lematów opisujących własności parzystych i nieparzystych reprezentacji.

Lemat 1. *Każda dodatnia liczba całkowita n ma co najwyżej jedną parzystą i co najwyżej jedną nieparzystą reprezentację.*

Dowód. Przypuśćmy wpierw, że n ma dwie różne reprezentacje parzyste X_1, X_2. Skoro $\mathcal{A}$ jest nieskończony, możemy dobrać liczbę $s \in \mathcal{A}$ spełniającą warunek $s > \max(n, N)$. Wówczas $s \notin X_1$ oraz $s \notin X_2$, a zatem $X_1 \cup \{s\}$ oraz $X_2 \cup \{s\}$ są dwiema różnymi nieparzystymi reprezentacjami liczby $s + n$. Ale $s+n > s > N$, co przeczy założeniu, że każda liczba większa od N ma dokładnie jedną reprezentacją nieparzystą.

Przypuśćmy teraz, że n ma dwie różne reprezentacje nieparzyste X_1, X_2. Podobnie jak poprzednio, możemy dobrać takie liczby $s_1, s_2 \in \mathcal{A}$, $s_1 \neq s_2$, że $s_1, s_2 > \max(n, N)$, a więc $s_1, s_2 \notin X_1 \cup X_2$. Dostajemy wtedy, że $X_1 \cup \{s_1, s_2\}$ oraz $X_2 \cup \{s_1, s_2\}$ są dwiema różnymi nieparzystymi reprezentacjami liczby $s_1 + s_2 + n$, co daje sprzeczność analogicznie jak w poprzednim przypadku. $\square$

Lemat 2. *Ustalmy dowolną liczbę $s \in \mathcal{A}$. Jeśli dodatnia liczba całkowita $n > N$ nie ma parzystej reprezentacji, to dla każdego $a \in \mathbb{Z}^+$ liczba $n+2as$ ma parzystą reprezentację.*

Dowód. Wpierw wykażemy następującą implikację: jeśli liczba $m > N$ nie posiada parzystej reprezentacji niezawierającej s, to $m + 2s$ ma parzystą reprezentację zawierającą s. Rozważmy liczbę $m + s$. Skoro jest ona większa niż N, to posiada pewną nieparzystą reprezentację X. Zauważmy, że $s \notin X$, gdyż w przeciwnym razie $X \setminus \{s\}$ byłoby parzystą reprezentacją m niezawierającą s. Zatem $X \cup \{s\}$ jest parzystą reprezentacją liczby $m + 2s$, zawierającą s.

Przejdźmy teraz do dowodu lematu. Skoro n nie ma żadnej parzystej reprezentacji, to na mocy powyższej implikacji, liczba $n + 2s$ ma parzystą reprezentację zawierającą s. Na mocy Lematu 1 mamy, że jest to jedyna parzysta reprezentacja liczby $n + 2s$, a zatem $n + 2s$ nie posiada parzystej reprezentacji niezawierającej s. Używając znów powyższej implikacji wnioskujemy, że $n + 4s$ ma parzystą reprezentację zawierającą s. Postępując dalej analogicznie dostajemy, że wszystkie liczby $n + 2s, n + 4s, n + 6s, \ldots$ posiadają parzyste reprezentacje zawierające s. $\square$

Lemat 3. *Istnieje tylko skończenie wiele dodatnich liczb całkowitych nie posiadających parzystej reprezentacji.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie. Ustalmy dowolną liczbę $s \in \mathcal{A}$. Skoro liczb nie posiadających parzystej reprezentacji jest nieskończenie wiele, to istnieje liczba $r \in \{0, 1, \ldots, 2s - 1\}$ taka, że istnieje nieskończenie wiele liczb dających resztę r z dzielenia przez $2s$, które nie posiadają parzystej reprezentacji. Wybierzmy dwie takie liczby n, n' tak, by $N < n < n'$. Wówczas $n' = n + 2as$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej a, więc na mocy Lematu 2 otrzymujemy, że n' jednak posiada parzystą reprezentację, co stoi w sprzeczności z wyborem n'. $\square$

Na mocy Lematu 3, istnieje takie N', że dla każda dodatnia liczba całkowita $n > N'$ ma parzystą reprezentację. Zamieniając wartość N na $\max(N, N')$ możemy od teraz zakładać, że każda dodatnia liczba całkowita $n > N$ ma dokładnie jedną parzystą i dokładnie jedną nieparzystą reprezentację. Jedyność reprezentacji wynika bowiem z Lematu 1.

Lemat 4. *Przypuśćmy, że liczby $s, t \in \mathcal{A}$ spełniają $N < s < t$. Wówczas parzysta reprezentacja t zawiera s.*

Dowód. Niech X będzie parzystą reprezentacją liczby s, zaś Y będzie parzystą reprezentacją liczby t. Załóżmy, wbrew tezie, że Y nie zawiera s. Zauważmy, że skoro $s < t$, to X nie zawiera t. Zatem $X \cup \{t\}$ jest nieparzystą reprezentacją liczby $s+t$. Podobnie, skoro Y nie zawiera s, to $Y \cup \{s\}$ również jest nieparzystą reprezentacją liczby $s + t$. Reprezentacja $X \cup \{t\}$ zawiera t, zaś reprezentacja $Y \cup \{s\}$ nie zawiera t, w związku z czym te reprezentacje są różne. Uzyskaliśmy dwie różne nieparzyste reprezentacje liczby $s + t$, co stoi w sprzeczności z Lematem 1. $\square$

Oznaczmy $\mathcal{A} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$, gdzie $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$

Niech k będzie najmniejszym takim indeksem, że $s_k > N$. Z Lematu 4 otrzymujemy, że dla wszystkich indeksów i, j spełniających $k < i < j$ mamy, że parzysta reprezentacja liczby s_j zawiera liczbę s_i. W związku z tym mamy, że

$$s_j = s_{j-1} + s_{j-2} + \ldots + s_k + r_j, \tag{8}$$

gdzie r_j jest sumą elementów pewnego podzbioru $\{s_{k-1}, s_{k-2}, \ldots, s_1\}$. Skoro liczby r_j są nieujemne, możemy dobrać takie j, że spełnione są warunki:

(i) $r_{j+1} \geqslant r_j$ oraz

(ii) $s_j > s_{k-1} + s_{k-2} + \ldots + s_1$.

Z warunku (i) wynika, że

$$\begin{aligned} s_{j+1} &= s_j + s_{j-1} + s_{j-2} + \ldots + s_k + r_{j+1} = \\ &= 2s_j + r_{j+1} - r_j \geqslant 2s_j \end{aligned}$$

Niech X będzie parzystą reprezentacją liczby $2s_j$. Oczywiście X nie zawiera s_{j+1}, gdyż albo $s_{j+1} > 2s_j$, albo $s_{j+1} = 2s_j$ i liczba s_{j+1} musiałaby być jedyną liczbą w reprezentacji X.

Przypuśćmy, że X nie zawiera liczby s_j. Wówczas $X \subseteq \{s_{j-1}, s_{j-2}, \ldots, s_1\}$, a więc na mocy równości (8) i warunku (ii) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2s_j &= \sum_{x \in X} x \leqslant s_{j-1} + s_{j-2} + \ldots + s_1 \leqslant \\ &\leqslant (s_{j-1} + s_{j-2} + \ldots + s_k) + (s_{k-1} + s_{k-2} + \ldots + s_1) < \\ &< s_j + s_j = 2s_j \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, co wykazuje, że X zawiera liczbę s_j. W związku z tym, $X \setminus \{s_j\}$ jest nieparzystą reprezentacją liczby s_j. Ale $\{s_j\}$ jest również nieparzystą reprezentacją liczby s_j, i te reprezentacje są różne, gdyż jedna zawiera liczbę s_j, a druga nie. Otrzymaliśmy sprzeczność z Lematem 1, a więc początkowe założenie o tym, że tylko skończenie wiele liczb nie posiada dokładnie jednej nieparzystej reprezentacji, musiało być błędne.

Zawody drużynowe

1. Dany jest graf planarny G i dodatnia liczba całkowita d. Podzbiór X wierzchołków grafu G nazwiemy *d-rozproszonym*, jeśli dla każdych dwóch różnych wierzchołków u, v ze zbioru X nie istnieje ścieżka składająca się z co najwyżej d krawędzi, prowadząca z u do v. Podzbiór d-rozproszony X nazwiemy *lokalnie maksymalnym*, jeśli nie istnieje podzbiór d-rozproszony X' spełniający warunki $|X'| > |X|$ oraz $|X \setminus X'| \leqslant 2$. Udowodnić, że każdy lokalnie maksymalny podzbiór d-rozproszony jest co najwyżej 100 razy mniejszy od największego podzbioru d-rozproszonego.

(*Uwaga*: Graf planarny to taki, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi.)

Rozwiązanie:

Przez V będziemy oznaczać zbiór wierzchołków grafu G, zaś dla ścieżki P w G, przez $|P|$ będziemy oznaczać jej długość, czyli liczbę krawędzi odwiedzonych przez P. Wystarczy wykazać, że jeśli $X, Z \subseteq V$ są dowolnymi podzbiorami d-rozproszonymi, zaś X jest lokalnie maksymalny, to $|Z| \leqslant 100|X|$. Wykażemy silniejsze oszacowanie, mianowicie, $|Z| < 9|X|$.

Skonstruujmy pomocniczy graf H w następujący sposób. Wierzchołkami H są wierzchołki ze zbiorów X i Z, przy czym każdy wierzchołek z $X \cap Z$ dostaje w H dwie kopie: jedną pochodzącą z X i drugą z Z. W ten sposób H ma $|X| + |Z|$ wierzchołków. Ponadto, dla każdego $x \in X$ i $z \in Z$ kładziemy krawędź xz w grafie H wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między x i z w G jest nie większa niż d. Zauważmy, że graf H jest dwudzielny, gdzie X stanowi jedną stronę podziału a Z drugą.

Lemat 1. *Graf H jest planarny.*

Dowód. Dla każdej krawędzi xz grafu H, gdzie $x \in X$ i $z \in Z$, wybierzmy najkrótszą ścieżkę P_{xz} prowadzącą z x do z w G; wówczas P_{xz} na długość nie większą niż d. Tego wyboru możemy tak dokonać, by ścieżki wychodzące z jednego wierzchołka x tworzyły drzewo, gdyż jeśli dwie takie ścieżki, po wyjściu z x wpierw się rozchodzą, a potem spotykają ponownie, to fragment pomiędzy pierwszym rozejściem a ostatnim punktem ponownego przecięcia na jednej z nich możemy podmienić na odpowiadający fragment na drugiej.

Twierdzimy, że jeśli xz i $x'z'$ są krawędziami w H, gdzie $x, x' \in X$, $z, z' \in Z$, $x \neq x'$ i $z \neq z'$, to ścieżki P_{xz} i $P_{x'z'}$ się nie przecinają. Przypuśćmy przeciwnie, że pewien wierzchołek w należy zarówno do P_{xz} jak i do $P_{x'z'}$. Niech P_{xw}, P_{zw}, $P_{x'w}$, $P_{z'w}$ będą fragmentami ścieżek P_{xz} i $P_{x'z'}$ pomiędzy w a odpowiednio wierzchołkami x, z, x', z'. Jako, że $|P_{xz}|, |P_{x'z'}| \leqslant d$, to

$$|P_{xw}| + |P_{zw}| + |P_{x'w}| + |P_{z'w}| \leqslant 2d$$

Zatem $|P_{xw}| + |P_{x'w}| \leqslant d$ lub $|P_{zw}| + |P_{z'w}| \leqslant d$. W pierwszym przypadku otrzymujemy, że x i x' są w odległości nie większej niż d, co stoi w sprzeczności z założeniem, że X jest d-rozproszony. Podobnie, drugi przypadek stoi w sprzeczności z założeniem, że Z jest d-rozproszony.

Zauważmy ponadto, że dla każdego wierzchołka u ze zbioru $X \cap Z$, w grafie H jego dwie kopie są połączone krawędzią oraz nie są połączone krawędziami z żadnymi innymi wierzchołkami. Istotnie, istnienie takiej krawędzi przeczyłoby albo d-rozproszoności X albo d-rozproszoności Z.

Widzimy więc, że na podstawie planarnego rysunku grafu G możemy uzyskać planarny rysunek grafu H w następujący sposób. Wierzchołki H rysujemy tak samo jak w G, pokrywające się wierzchołki z $X \cap Z$ odrobinę rozsuwamy i od razu łączymy krawędzią. Następnie, dla każdej krawędzi xz grafu H, rysujemy ją wzdłuż ścieżki P_{xz}. Ponieważ ścieżki wychodzące z każdego wierzchołka x tworzą drzewo, łatwo zobaczyć, że możemy je tak odrobinę rozsunąć, by się nie przecinały poza x. □

Podzielmy wierzchołki Z na cztery zbiory w zależności od liczby sąsiadów w grafie H:

(a) Z_0 obejmuje wierzchołki Z nie mające żadnego sąsiada w X.

(b) Z_1 obejmuje wierzchołki Z mające dokładnie jednego sąsiada w X.

(c) Z_2 obejmuje wierzchołki Z mające dokładnie dwóch sąsiadów w X.

(d) $Z_{\geqslant 3}$ obejmuje wierzchołki Z mające trzech lub więcej sąsiadów w X.

Będziemy teraz po kolei szacowali wielkość każdego z powyższych zbiorów.

Lemat 2. *$Z_0 = \emptyset$.*

Dowód. Jeśli istniałby $z \in Z_0$, to zbiór $X \cup \{z\}$ byłby również d-rozproszony. Przeczyłoby to lokalnej maksymalności zbioru X. □

Lemat 3. *$|Z_1| \leqslant |X|$.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, wówczas istnieją takie $z, z' \in Z$, $z \neq z'$, że jedyny sąsiad zarówno z jak i z' w X jest ten sam; nazwijmy go x. Wówczas zbiór $(X \setminus \{x\}) \cup \{z, z'\}$ byłby również d-rozproszony, co znów przeczyłoby lokalnej maksymalności zbioru X. □

Lemat 4. *$|Z_2| \leqslant 6|X|$.*

Dowód. Powiemy, że dwa wierzchołki $z, z' \in Z_2$ są *bliźniakami* jeśli mają dokładnie tych samych dwóch sąsiadów w X. Oczywiście, bycie bliźniakami jest relacją równoważności. Twierdzimy, że nie mogą istnieć trzy wierzchołki z_1, z_2, z_3, które wszystkie są bliźniakami. Istotnie, jeśli x_1, x_2 byłyby ich dwoma sąsiadami w X, to zbiór $(X \setminus \{x_1, x_2\}) \cup \{z_1, z_2, z_3\}$ byłby d-rozproszony, co przeczyłoby lokalnej maksymalności zbioru X. Wystarczy więc pokazać, że klas abstrakcji relacji bycia bliźniakiem jest co najwyżej $3|X|$.

Rozważmy graf H' o zbiorze wierzchołków $|X|$, gdzie wierzchołki $x, x' \in X$ są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $z \in Z_2$ sąsiadujący z x i x'. Każda krawędź H' odpowiada jednej klasie abstrakcji relacji bycia bliźniakiem, więc wystarczy pokazać, że H' ma co najwyżej $3|X|$ krawędzi. Zauważmy jednak, że graf H' jest planarny, gdyż jego planarny rysunek możemy uzyskać z planarnego rysunku grafu H poprzez narysowanie każdej krawędzi xx' wzdłuż pary krawędzi xz i $x'z$, gdzie $z \in Z_2$ jest wierzchołkiem sąsiadującym z x i x'. Teraz wystarczy jedynie użyć znanego faktu, wynikającego z wzoru Eulera, że graf planarny bez wielokrotnych krawędzi o n wierzchołkach ma co najwyżej $3n$ krawędzi. $\square$

Aby oszacować wielkość $Z_{\geqslant 3}$ będziemy potrzebowali pomocniczego lematu.

Lemat 5. *Graf R jest planarny i dwudzielny, przy czym A i B to strony podziału, oraz nie ma wielokrotnych krawędzi. Załóżmy ponadto, że każdy wierzchołek B ma co najmniej 3 sąsiadów w A. Wówczas $|B| < 2|A|$.*

Dowód. Bez utraty ogólności zakładamy, że R jest spójny, gdyż możemy zastosować rozumowanie do każdej spójnej składowej R, po czym dodać stronami uzyskane oszacowania. Przez $V(R)$, $E(R)$ oraz $F(R)$ będziemy oznaczać zbiory wierzchołków, krawędzi i ścian R (w dowolnym planarnym rysunku tego grafu). Ponieważ R jest planarny i spójny, ze wzoru Eulera otrzymujemy, że

$$|V(R)| - |E(R)| + |F(R)| = 2. \tag{9}$$

Ponieważ każdy wierzchołek z B ma co najmniej trzech sąsiadów w A, mamy również

$$|E(R)| \geqslant 3|B|. \tag{10}$$

Ponadto, skoro R jest dwudzielny, to każda ściana grafu R ma obwód co najmniej 4. Sumując obwody ścian grafu R zliczamy każdą krawędź R dwukrotnie, a zatem

$$4|F(R)| \leqslant 2|E(R)|. \tag{11}$$

Łącząc ze sobą (9), (10), (11) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &< |V(R)| - |E(R)| + |F(R)| \leqslant |V(R)| - |E(R)| + \frac{1}{2}|E(R)| = \\ &= |V(R)| - \frac{1}{2}|E(R)| \leqslant |A| + |B| - \frac{3}{2}|B| = |A| - \frac{1}{2}|B|, \end{aligned}$$

a zatem istotnie $|B| < 2|A|$. $\square$

Lemat 6. $|Z_{\geqslant 3}| < 2|X|$.

Dowód. Rozważmy graf H'' uzyskany z H poprzez usunięcie wszystkich wierzchołków z Z poza $Z_{\geqslant 3}$. Wówczas H'' jest nadal planarny i dwudzielny, i ponadto spełnia założenia Lematu 5, gdzie X odpowiada stronie A a $Z_{\geqslant 3}$ odpowiada stronie B. Z lematu otrzymujemy zatem, że $|Z_{\geqslant 3}| \leqslant 2|X|$. $\square$

Na mocy lematów 2, 3, 4, 6 dostajemy

$$|Z| = |Z_0| + |Z_1| + |Z_2| + |Z_{\geqslant 3}| < 0 + |X| + 6|X| + 2|X| = 9|X|,$$

co kończy dowód.

2. Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 1$ oraz ciąg parami różnych liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k+1}$. Udowodnić, że liczba

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2^k+1} (a_i + a_j)$$

ma co najmniej $k+1$ różnych czynników pierwszych.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że ponieważ $2^k + 1 \geqslant 3$, to pewne dwie liczby w naszym ciągu dają tę samą resztę z dzielenia przez dwa, co oznacza, że dwójka jest czynnikiem pierwszym naszej liczby.

Przypuśćmy, że nasza teza nie jest spełniona i ustalmy czynniki pierwsze $2 = p_1, p_2, \ldots, p_l$ naszej liczby. Przy czym zakładamy, że $l \leqslant k$. Dla nieparzystej liczby pierwszej p liczbę n nazwiemy *p-małą*, gdy $n = p^s(ap + r)$ dla pewnych liczb naturalnych s, a, r spełniających warunek $0 < 2r < p$ oraz *p-dużą* w przeciwnym przypadku.

Udowodnimy, że możemy tak wybrać trzy liczby $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ z naszego ciągu, że dla dowolnego p_i, gdzie $i \geqslant 2$, liczby $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ są albo wszystkie jednocześnie p_i-małe, albo wszystkie jednocześnie p_i-duże. Istotnie, każdej liczbie a_j dla $j = 1, 2, \ldots, 2^k + 1$ przypisujemy $(l-1)$-elementowy ciąg zer i jedynek $(z_i(a_j))_{i=2}^{l}$ w ten sposób, że $z_i(a_j) = 0$, gdy a_j jest p_i-mała oraz $z_i(a_j) = 1$, gdy a_j jest p_i-duża. Ponieważ $2^k + 1 > 2 \cdot 2^{l-1}$, to z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że możemy wybrać trzy liczby $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$, którym przypisano ten sam ciąg zer i jedynek. Wskazane liczby spełniają nasze warunki.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że nasze liczby to a_1, a_2, a_3. Mamy

$$a_1 + a_2 = 2^e \prod_{i=2}^{l} p_i^{r_i}, \quad a_1 + a_3 = 2^f \prod_{i=2}^{l} p_i^{s_i}, \quad a_2 + a_3 = 2^g \prod_{i=2}^{l} p_i^{t_i}.$$

Rozważmy pierwszą równość. Zauważmy, że ponieważ liczby a_1 i a_2 są jednocześnie p_i-małe lub jednocześnie p_i-duże, to $\nu_{p_i}(a_1 + a_2) = \min\{\nu_{p_i}(a_1), \nu_{p_i}(a_2)\}$. W konsekwencji $p_i^{r_i} \mid a_1$ oraz $p_i^{r_i} \mid a_2$ dla dowolnego $i \geqslant 2$.

Zauważmy również, że $\nu_2(a_1) = \nu_2(a_2)$. Istotnie, gdyby $\nu_2(a_1) > \nu_2(a_2) = t$ to liczba

$$a_1 \cdot 2^{-t} \cdot \left(\prod_{i=2}^{l} p_i^{-r_i}\right) + a_2 \cdot 2^{-t} \cdot \left(\prod_{i=2}^{l} p_i^{-r_i}\right) = 2^{e-t}$$

byłaby nieparzysta i większa od jedynki, co jest oczywistą sprzecznością. Analogicznie $\nu_2(a_2) = \nu_2(a_3)$. Oznaczmy $t = \nu_2(a_1) = \nu_2(a_2) = \nu_2(a_3)$. Mamy

$$a_1 2^{-t} + a_2 2^{-t} = 2^{e-t} \prod_{i=2}^{l} p_i^{r_i},$$

$$a_1 2^{-t} + a_3 2^{-t} = 2^{f-t} \prod_{i=2}^{l} p_i^{s_i},$$

$$a_2 2^{-t} + a_3 2^{-t} = 2^{g-t} \prod_{i=2}^{l} p_i^{t_i}.$$

Udowodnimy, że $e - t \geqslant 2$. Istotnie, liczby

$$a_1 \cdot 2^{-t} \cdot \left(\prod_{i=2}^{l} p_i^{-r_i}\right), \quad a_2 \cdot 2^{-t} \cdot \left(\prod_{i=2}^{l} p_i^{-r_i}\right)$$

są różne i nieparzyste, więc ich suma wynosi co najmniej 4. Analogicznie $f - t \geqslant 2$ oraz $g - t \geqslant 2$. Otrzymaliśmy więc trzy takie liczby nieparzyste $a_1 2^{-t}, a_2 2^{-t}, a_3 2^{-t}$, że suma dowolnych dwóch jest podzielna przez cztery. Jest to niemożliwe. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

3. Wyznaczyć wszystkie ściśle rosnące ciągi dodatnich liczb całkowitych $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ spełniające następujące warunki:

(i) Dla każdej trójki (niekoniecznie różnych) dodatnich liczb całkowitych i, j, k, zachodzi $a_i + a_j \neq a_k$.

(ii) Istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych k, dla których $a_k = 2k - 1$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyny ciąg spełniający warunki zadania to $a_n = 2n - 1$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n.

Niech $a_1 = m$. Przypuśćmy, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że zachodzi nierówność $a_{k+m} - a_k < 2m$. Wówczas liczby $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}$ należą do zbioru $S = \{a_k, a_k + 1, \ldots, a_k + 2m - 1\}$. Podzielmy S na m dwuelementowych zbiorów postaci $\{b, b + m\}$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wśród tych zbiorów istnieje taki, że oba jego elementy występują w ciągu, czyli

$a_{i_1} + a_1 = a_{i_1} + m = a_{i_2}$ dla pewnych $k \leqslant i_1, i_2 \leqslant k+m$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a_{k+m} - a_k \geqslant 2m$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k.

Przypuśćmy teraz, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita j, że zachodzi nierówność $a_k > 2k-1$ dla $k = j, j+1, \ldots, j+m-1$. Skoro istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych k takich, że $a_k = 2k-1$, to istnieje dodatnia liczba całkowita $i > j$ taka, że $a_i = 2i - 1$. Niech $i - j = qm + r$ dla liczb całkowitych nieujemnych q, r takich, że $r < m$. Stąd

$$2i - 1 = a_i \geqslant 2m + a_{i-m} \geqslant \ldots \geqslant 2qm + a_{i-qm} = \\ = 2qm + a_{j+r} > 2qm + 2(j+r) - 1 = 2i - 1.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wśród dowolnych m kolejnych elementów ciągu istnieje taki, że $a_k \leqslant 2k - 1$.

Skoro ciąg jest ściśle rosnący, to $a_k \geqslant m + k - 1$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k. Stąd $a_i \geqslant m + i - 1 > 2i - 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$ oraz $a_m \geqslant 2m - 1$. Ponieważ $a_k \leqslant 2k - 1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej $k \leqslant m$, to $a_m = 2m - 1$, a skoro ciąg jest ściśle rosnący, to $a_i = m + i - 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.

Podobnie, $a_{m+i} \geqslant 2m + a_i > 2(m+i) - 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$ oraz $a_{2m} \geqslant 2m + a_m = 4m - 1$. Skoro $a_{m+k} \leqslant 2(m+k) - 1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej $k \leqslant m$, to $a_{2m} = 4m - 1$, a skoro ciąg jest ściśle rosnący, to $a_{m+i} = 3m + i - 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.

Przypuśćmy teraz, że $m > 1$. Wtedy

$$a_{2m-1} = a_{m+(m-1)} = 3m + (m-1) - 1 = 4m - 2 = a_m + a_m,$$

co stoi w sprzeczności z założeniem zadania. Stąd $a_1 = m = 1$.

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k mamy więc $a_k \leqslant 2k-1$. Ponadto, $a_{k+1} - a_k \geqslant 2$. Stąd $a_k \geqslant 2(k-1) + a_1 = 2k - 1$. Mamy więc $a_k = 2k - 1$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k. Pozostało sprawdzić, że otrzymany ciąg spełnia warunki zadania. Istotnie, jest on w oczywisty sposób ściśle rosnący oraz istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych k takich, że $a_k = 2k-1$. Ponadto $2 \mid a_i + a_j$, $2 \nmid a_k$ dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych i, j, k, skąd $a_i + a_j \neq a_k$, co kończy rozwiązanie zadania.

4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, zaś P, Q, R, S punktami leżącymi odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA. Odcinki PR i QS przecinają się w punkcie O. W każdy z czworokątów $APOS$, $BQOP$, $CROQ$, $DSOR$ można wpisać okrąg. Wykazać, że proste AC, PQ i RS mają punkt wspólny lub są równoległe.

Rozwiązanie:

Zapisując twierdzenie Menelaosa w trójkątach ABC, ADC dla odpowiednio prostych PQ i RS otrzymujemy, że proste PQ, RS, AC przecinają się w jednym punkcie (być może w punkcie w nieskończoności — wtedy te trzy proste są równoległe) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$

Lemat. *Czworokąt* $EFGH$ *jest opisany na okręgu o środku* M*. Wówczas*

$$\frac{EF\cdot FG}{GH\cdot HE}=\frac{FM^2}{HM^2}.$$

Dowód. Zachodzą równości $\measuredangle EMH+\measuredangle GMF=\measuredangle FME+\measuredangle HMG=180°$, $\measuredangle FGM=\measuredangle MGH$ oraz $\measuredangle HEM=\measuredangle MEF$. Korzystając z twierdzenia sinusów otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{EF}{FM}\cdot\frac{FG}{FM}&=\frac{\sin\measuredangle FME\cdot\sin\measuredangle GMF}{\sin\measuredangle MEF\cdot\sin\measuredangle FGM}=\\&=\frac{\sin\measuredangle HMG\cdot\sin\measuredangle EMH}{\sin\measuredangle MGH\cdot\sin\measuredangle HEM}=\\&=\frac{GH}{HM}\cdot\frac{HE}{HM}.\end{aligned}$$

Wynika stąd teza lematu. □

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Oznaczmy przez I, J, K, L odpowiednio środki okręgów wpisanych w czworokąty $APOS$, $BQOP$, $CROQ$, $DSOR$. Stosując lemat do każdego z tych czworokątów i mnożąc otrzymane równości stronami otrzymujemy

$$\frac{AP\cdot PO}{OS\cdot SA}\cdot\frac{BQ\cdot QO}{OP\cdot PB}\cdot\frac{CR\cdot RO}{OQ\cdot QC}\cdot\frac{DS\cdot SO}{OR\cdot RD}=\frac{PI^2}{SI^2}\cdot\frac{QJ^2}{PJ^2}\cdot\frac{RK^2}{QK^2}\cdot\frac{SL^2}{RL^2},$$

co po skróceniu ułamków przyjmuje postać

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=\frac{PI^2}{SI^2}\cdot\frac{QJ^2}{PJ^2}\cdot\frac{RK^2}{QK^2}\cdot\frac{SL^2}{RL^2}.$$

Zachodzą równości $\measuredangle IPJ=\measuredangle JOI=90°$. Wobec tego czworokąt $IPJO$ można wpisać w okrąg. Podobnie uzasadniamy, że czworokąt $JQKO$ można wpisać w okrąg i ponadto $\measuredangle JQK=90°$. Stąd $\measuredangle QKJ=\measuredangle QOJ=\measuredangle JOP=\measuredangle JIP$. Wobec tego trójkąty prostokątne IPJ, KQJ są podobne. Stąd $\frac{PI}{PJ}=\frac{QK}{QJ}$. Analogicznie uzasadniamy, że $\frac{RK}{RL}=\frac{SI}{SL}$. Z równości tych wynika, że

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=\frac{PI^2}{SI^2}\cdot\frac{QJ^2}{PJ^2}\cdot\frac{RK^2}{QK^2}\cdot\frac{SL^2}{RL^2}=1,$$

co kończy dowód.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Udowodnić, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \cdot (xyz + 1)$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy $n = a^2 + b^2$ dla pewnych całkowitych dodatnich a, b.

Rozwiązanie:

Załóżmy wpierw, że $n = a^2 + b^2$ dla pewnych a, b całkowitych dodatnich. Podstawiając $y = a$, $z = b$ i $x = ab(a^2 + b^2)$ otrzymujemy

$$a^2b^2(a^2 + b^2)^2 + a^2 + b^2 = (a^2 + b^2) \cdot (ab(a^2 + b^2) \cdot a \cdot b + 1) = n \cdot (xyz + 1).$$

Załóżmy teraz, że jakaś czwórka liczb (x, y, z, n) spełnia to równanie. Bez straty ogólności załóżmy, że $x \geqslant y \geqslant z$ (równanie jest wszakże symetryczne). Weźmy teraz taką czwórkę liczb (x_0, y, z, n), że x_0 jest najmniejsze. Niech

$$f(x) = x^2 - xnyz + y^2 + z^2 - n.$$

Oczywiście funkcja f jest funkcją kwadratową zmiennej x. Ponadto $f(x_0) = 0$. Niech x_1 będzie drugim pierwiastkiem funkcji f. Ze wzorów Viete'a mamy, że

$$x_1 = nyz - x_0.$$

Z tego wynika, że x_1 jest liczbą całkowitą. Jeżeli $x_1 < 0$ to dla $x_1 \leqslant -1 \leqslant x_0$ mamy

$$0 \geqslant f(-1) = 1 + nyz + y^2 + z^2 - n \geqslant 1 + y^2 + z^2 \geqslant 1.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $x_1 \geqslant 0$. Gdy $x_1 = 0$ to

$$0 = f(0) = y^2 + z^2 - n,$$

czyli $n = y^2 + z^2$, co spełnia warunki zadania. Gdy $x_1 > 0$ to $x_1 \geqslant x_0 \geqslant y$ ($x_1 \geqslant x_0$, bo x_0 jest najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią taką, że $f(x) = 0$, zaś $x_0 \geqslant y$ z założenia). Wówczas

$$0 \leqslant f(y) = y^2 - ny^2z + y^2 + z^2 - n,$$

czyli

$$z^2 - n \geqslant y^2 \cdot (nz - 2).$$

Dla $nz \geqslant 3$ mamy

$$z^2 - n \geqslant y^2 \geqslant z^2,$$

co daje sprzeczność. Gdy $n = 2$ to teza zachodzi. W przeciwnym wypadku $(z, n) = (1, 1)$ lub $(z, n) = (2, 1)$.

W pierwszym przypadku otrzymujemy $x^2 - xy + y^2 = 0$, czyli

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0,$$

skąd $x = y = 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczby x, y miały być dodatnie.

W drugim przypadku otrzymujemy $x^2+y^2+4 = 2xy+1$, czyli równoważnie

$$(x - y)^2 + 3 = 0,$$

co daje sprzeczność.

Zatem szukane liczby n to takie, dla których istnieją a, b całkowite dodatnie spełniające równość $n = a^2 + b^2$.

2. Dana jest liczba n podzielna przez kwadrat liczby pierwszej. Liczbę całkowitą dodatnią a nazwiemy φ-*kuśną*, gdy $n \mid a^{n-1} - 1$. Udowodnić, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest co najwyżej $\frac{\varphi(n)}{2}$ liczb φ-kuśnych.

Rozwiązanie:

Niech $M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ będzie zbiorem wszystkich liczb względnie pierwszych z n i mniejszych od n. Liczba elementów tego zbioru jest równa $\varphi(n)$, ponadto każda liczba φ-kuśna należy do zbioru M.

Niech p będzie liczbą pierwszą dzielącą n w co najmniej drugiej potędze, o której mowa w treści zadania. Zapiszmy $n = p^k t$, gdzie t jest liczbą względnie pierwszą z p i rozważmy generator g modulo p^k. Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje liczba x ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ spełniająca układ kongruencji

$$\begin{cases} x \equiv g \pmod{p^k}, \\ x \equiv 1 \pmod{t}. \end{cases}$$

Jest jasne, że liczba x jest względnie pierwsza z n. Gdyby x była liczbą φ-kuśną, to mielibyśmy

$$x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

a więc też

$$x^{n-1} \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Z drugiej strony liczba x jest także generatorem modulo p^k, co w połączeniu z twierdzeniem Eulera prowadzi do wniosku, że liczba $n - 1$ dzieli się przez $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$, a więc przez też p (bo $k \geqslant 2$). To jest jednak niemożliwe, więc liczba x nie może być φ-kuśna.

Niech $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ będzie zbiorem wszystkich liczb φ-kuśnych należących do zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (a więc także do zbioru M). Rozważmy liczby

$xs_1, xs_2, \ldots, xs_r$. Liczby te dają parami różne reszty z dzielenia przez n, gdyż podzielność $n \mid xs_i - xs_j = x(s_i - s_j)$ pociąga za sobą $n \mid s_i - s_j$, czyli $s_i = s_j$. Ponadto dla każdego i mamy

$$(xs_i)^{n-1} \equiv x^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}.$$

W takim razie żadna z r liczb $xs_1 \pmod{n}, xs_2 \pmod{n}, \ldots, xs_r \pmod{n}$ (należących do zbioru M) nie jest φ-kuśna, więc $r \leqslant \frac{\varphi(n)}{2}$, co kończy dowód.

3. Niech m i n będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że $m > n$. Niech

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Wykazać, że jeśli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ są całkowite, to $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} - 1$ jest liczbą podzielną przez nieparzystą liczbę pierwszą.

Rozwiązanie:

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ będą liczbami całkowitymi. Oznaczmy

$$a_k = x_k - 1 = \frac{m+k}{n+k} - 1 = \frac{m-n}{n+k} > 0.$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Wówczas $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ są liczbami całkowitymi.

Niech $P = x_1 x_2 \ldots x_{n+1} - 1$. Musimy wykazać, że istnieje nieparzysta liczba pierwsza, która dzieli P, czyli że P nie jest potęgą liczby 2.

Niech d będzie największą dodatnią liczbą całkowitą taką, że 2^d dzieli $m-n$ oraz niech c będzie największą dodatnią liczbą całkowitą taką, że $2^c \leqslant 2n+1$. Wówczas $2n+1 \leqslant 2^{c+1} - 1$, czyli $n+1 \leqslant 2^c$. Stąd 2^c należy do zbioru $\{n+1, n+2, \ldots, 2n+1\}$ i jest jednocześnie jedyną wielokrotnością liczby 2^c należącą do tego zbioru. Niech więc $2^c = n + \ell$. Skoro $\frac{m-n}{n+\ell}$ jest liczbą całkowitą, to $d \geqslant c$. Stąd $2^{d-c+1} \nmid a_\ell = \frac{m-n}{n+\ell}$ oraz $2^{d-c+1} \mid a_k$ dla każdej liczby k należącej do zbioru $\{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus \{\ell\}$.

Zauważmy, że

$$P = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n+1}+1) - 1 \equiv (a_\ell+1) \cdot 1^n - 1 \equiv a_\ell \not\equiv 0 \pmod{2^{d-c+1}}.$$

Stąd $2^{d-c+1} \nmid P$.

Z drugiej strony dla dowolnej liczby k ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus \{\ell\}$ mamy $2^{d-c+1} \mid a_k$. Stąd $P \geqslant a_k \geqslant 2^{d-c+1}$, a więc P nie jest potęgą liczby 2, co chcieliśmy wykazać.

4. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Karolek i Lesio grają w grę. W każdej turze gracz wybiera liczbę całkowitą dodatnią $k \leqslant n$. Zasady gry są

następujące:
• Gracz nie może wybrać liczby wybranej wcześniej przez pewnego z graczy.
• Gracz nie może wybrać liczby różniącej się o 1 od liczby, którą wybrał w którymkolwiek poprzednim ruchu.
• Gra kończy się remisem, jeśli wszystkie liczby zostały wybrane; w przeciwnym wypadku gracz, który nie może wybrać żadnej liczby, przegrywa grę.
Karolek rozpoczyna grę. Wyznaczyć w zależności od n wynik gry, zakładając, że gracze grają optymalnie.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Gra kończy się remisem, gdy $n = 1, 2, 4, 6$; w przeciwnym wypadku Lesio ma strategię wygrywającą.

Udowodnimy najpierw następujący fakt.

Lemat. *Jeżeli w pierwszym ruchu Lesio wybrał liczbę n oraz Karolek wykonał k-ty ruch, gdzie $k \geqslant 2$, to Lesio również może wykonać k-ty ruch.*

Dowód. Odcinkiem będziemy nazywać niepusty zbiór następujących po sobie liczb całkowitych. Dwa odcinki będą *niezależne*, jeśli są rozłączne i istnieje całkowita liczba, która jest większa od wszystkich liczb należących do jednego z odcinków oraz jest mniejsza od wszystkich liczb należących do drugiego z nich.

Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem pierwszych k liczb wybranych przez Karolka. Skoro $\mathcal{S}$ nie zawiera następujących po sobie liczb całkowitych, to zbiór $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathcal{S}$ składa się z k parami niezależnych odcinków, jeśli $1 \in \mathcal{S}$, lub $k + 1$ parami niezależnych odcinków w przeciwnym wypadku. Skoro Lesio wybrał tylko $k - 1$ liczb, to istnieje co najmniej jeden odcinek składający się z liczb, których Lesio jeszcze nie wybrał. Stąd Lesio może wybrać liczbę należącą do tego odcinka. □

Opiszemy teraz strategię wygrywającą dla Lesia, gdy $n \neq 1, 2, 4, 6$. Dzięki symetrii możemy założyć, że pierwsza liczba wybrana przez Karolka nie przekracza $\frac{n+1}{2}$. Wtedy Lesio wybiera liczbę n w swoim pierwszym ruchu. Rozważmy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. *$n \geqslant 3$ jest liczbą nieparzystą.* Jedyna możliwość, by gra zakończyła się remisem to sytuacja, w której Karolek wybiera wszystkie nieparzyste liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, co nie może się zdarzyć, bo Lesio wybrał liczbę nieparzystą n. Stąd na podstawie lematu wnioskujemy, że Lesio może wybierać liczby aż do momentu, gdy Karolek nie będzie mógł wykonać ruchu.

Przypadek 2. *$n \geqslant 8$ jest liczbą parzystą.* Skoro Lesio wybrał liczbę n, to gra może zakończyć się remisem tylko wtedy, gdy Karolek wybierze wszystkie nieparzyste liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Niech więc Lesio w swoim drugim ruchu wybierze liczbę ze zbioru $\{1, 3, 5, \ldots, n-3\}$, niewybraną przez Karolka w jego pierwszych dwóch ruchach. Jest to oczywiście możliwe, ponieważ zbiór ten składa się z $\frac{n-2}{2} \geqslant 3$ liczb. Stąd Lesio może stosować lemat aż do momentu, gdy Karolek nie będzie mógł wykonać ruchu.

Pozostało rozważyć przypadki $n = 1, 2, 4, 6$. Gra w oczywisty sposób kończy się remisem, gdy $n = 1, 2$. Gdy $n = 4$, Karolek musi wybrać 1, by nie przegrać. Podobnie, Lesio musi wybrać 4. Stąd gra w tym wypadku zakończy się remisem.

W przypadku gdy $n = 6$, Lesio może uzyskać co najmniej remis wykonując stale ruchy symetryczne do ruchów Karolka względem środka przedziału $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Podobnie, Karolek może uzyskać remis grając w następujący sposób: w pierwszym ruchu Karolek wybiera 1. Po wybraniu przez Lesia liczby b w pierwszym ruchu, Karolek rezerwuje liczbę $c \neq 1$ sąsiadującą z b, nie większą niż 6, na wykonanie trzeciego ruchu. W drugim ruchu wybiera on liczbę różną od $1, 2, c-1, c, c+1$. Jest to oczywiście możliwe, a skoro Lesio nie może wybrać liczby c oraz Karolek nie wybrał wcześniej żadnej z liczb $c-1, c+1$, to może wykonać trzeci ruch, czyli nie przegra gry.

5. Wykazać, że wierzchołki grafu można pokolorować k kolorami bez tworzenia monochromatycznej krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie tego grafu da się tak skierować, aby nie istniała skierowana ścieżka składająca się z $k + 1$ różnych wierzchołków.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że dany graf da się tak pokolorować kolorami od 1 do k. Dla każdej pary wierzchołków połączonych krawędzią, pomalowanych kolorami i, j, gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant k$, skierujmy krawędź pomiędzy nimi z wierzchołka o kolorze i do wierzchołka o kolorze j. Łatwo zauważyć, że takie skierowanie spełnia warunki zadania.

Teraz załóżmy, że graf skierowany $G = (V, E)$ nie zawiera ścieżki o $k + 1$ wierzchołkach.

Najpierw dodatkowo załóżmy, że graf ten jest acykliczny. Dla każdego wierzchołka v z V niech $f(v)$ oznacza długość najdłuższej ścieżki kończącej się w tym wierzchołku. Udowodnimy, że dla każdych dwóch wierzchołków $v, w \in V$ połączonych krawędzią zachodzi $f(v) \neq f(w)$, a wtedy już wystarczy każdy wierzchołek v pokolorować na kolor $f(v)$, aby otrzymać k-kolorowanie tego grafu (f przyjmuje wartości całkowite od 0 do $k - 1$ z założenia o największej możliwej długości ścieżki w tym grafie).

Załóżmy nie wprost, że $f(v) = f(w)$. Bez straty ogólności załóżmy, że krawędź między tymi wierzchołkami jest skierowana z v do w. Wtedy albo istnieje cykl zawierający v i w, co wykluczyliśmy, albo najdłuższa ścieżka kończąca się w v przedłużona o krawędź z v do w ma długość $f(v) + 1 = f(w) + 1 > f(w)$, co daje sprzeczność z wyborem $f(w)$.

Wreszcie przejdźmy do ogólnego przypadku. Wybierzmy maksymalny podgraf acykliczny A grafu G. Pokolorujmy A tak jak wyżej. Udowodnimy, że jest to poprawne kolorowanie G.

Weźmy $v, w \in V$, $(v, w) \in E$ i załóżmy nie wprost, że $f(v) = f(w)$. Zatem A po dodaniu krawędzi (v, w) zawiera cykl, więc istnieje ścieżka z w do v zawarta w A, jednak najdłuższa ścieżka wchodząca do w przedłużona o ścieżkę z w do v ma długość większą niż najdłuższa ścieżka wchodząca do v, co daje sprzeczność z definicją f.

6. Wyznaczyć wartość ilorazu

$$\frac{\sum_{k=1}^{n^2-1}\sqrt{n+\sqrt{k}}}{\sum_{k=1}^{n^2-1}\sqrt{n-\sqrt{k}}}$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ zachodzą równości

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos 2x} &= \sqrt{1+2\cos^2 x - 1} = \sqrt{2}\cos x,\\
\sqrt{1-\cos 2x} &= \sqrt{1-1+2\sin^2 x} = \sqrt{2}\sin x,\\
\sqrt{1+\sin 2x} &= \sqrt{1+2\sin x\cos x} = \sqrt{(\sin x+\cos x)^2} = \sin x + \cos x,\\
\sqrt{1-\sin 2x} &= \sqrt{1-2\sin x\cos x} = \sqrt{(\sin x-\cos x)^2} = \cos x - \sin x.
\end{aligned}$$

Niech $k \in \left\{1, 2, 3, \ldots, n^2-1\right\}$. Wówczas istnieje taka liczba $0 < t < \frac{\pi}{4}$, że $k = n^2\sin^2 2t$.

Stąd

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n+\sqrt{k}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-k}}}{\sqrt{n-\sqrt{k}}+\sqrt{n-\sqrt{n^2-k}}} &= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n^2\sin^2 2t}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-n^2\sin^2 2t}}}{\sqrt{n-\sqrt{n^2\sin^2 2t}}+\sqrt{n-\sqrt{n^2-n^2\sin^2 2t}}} =\\
&= \frac{\sqrt{1+\sqrt{\sin^2 2t}}+\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 2t}}}{\sqrt{1-\sqrt{\sin^2 2t}}+\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2 2t}}} =\\
&= \frac{\sqrt{1+\sin 2t}+\sqrt{1+\cos 2t}}{\sqrt{1-\sin 2t}+\sqrt{1-\cos 2t}} =\\
&= \frac{\sin t + \left(\sqrt{2}+1\right)\cos t}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sin t + \cos t} =\\
&= \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sin t + \left(\sqrt{2}+1\right)\cos t}{\sin t + \left(\sqrt{2}+1\right)\cos t} =\\
&= 1+\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że jeśli a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi dodatnimi oraz $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to $k = \frac{a+b}{c+d}$.

Stąd ostatecznie

$$\frac{\sum_{k=1}^{n^2-1}\sqrt{n+\sqrt{k}}}{\sum_{k=1}^{n^2-1}\sqrt{n-\sqrt{k}}}=\frac{2\cdot\sum_{k=1}^{n^2-1}\sqrt{n+\sqrt{k}}}{2\cdot\sum_{k=1}^{n^2-1}\sqrt{n-\sqrt{k}}}=$$
$$=\frac{\sum_{k=1}^{n^2-1}\left(\sqrt{n+\sqrt{k}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-k}}\right)}{\sum_{k=1}^{n^2-1}\left(\sqrt{n-\sqrt{k}}+\sqrt{n-\sqrt{n^2-k}}\right)}=$$
$$=1+\sqrt{2}.$$

7. Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych takie, że

$$W(\sin x)=\sin(W(x))$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyne wielomiany spełniające warunki zadania to $W(x)=x$, $W(x)=-x$, $W(x)\equiv 0$.

Oznaczmy

$$W(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n.$$

Wykażemy, że $\deg W=n<2$. Załóżmy nie wprost, że $n\geqslant 2$. Niech

$$H(x)=W(x+\frac{\pi}{2})-W(x).$$

Wówczas $\deg H=n-1\geqslant 1$ bowiem współczynniki przy n-tych potęgach redukują się, zaś przy x^{n-1} stoi $na_n\cdot\frac{\pi}{2}\neq 0$. Zatem H jest wielomianem co najmniej pierwszego stopnia. Wobec tego dla dostatecznie dużych t zachodzi nierówność

$$|H(t)|\geqslant 2\pi(n+1).$$

W szczególności, istnieje taka liczba całkowita k, że $|H(2\pi k)|\geqslant 2\pi(n+1)$. Załóżmy bez straty ogólności, że $H(2\pi k)\geqslant 0$. Z ciągłości wielomianu W wnioskujemy, że istnieją takie liczby $x_0,x_1,\ldots,x_{n+1}$ z przedziału $[2\pi k,2\pi k+\frac{\pi}{2}]$, że

$$x_0=2\pi k\quad\text{oraz}\quad W(x_i)=W(x_0)+2\pi i\quad\text{dla}\quad i=1,2,\ldots,n+1.$$

Wówczas dla dowolnego $i=0,1,\ldots,n+1$ zachodzi ciąg równości

$$W(\sin(x_i))=\sin(W(x_i))=\sin(W(x_0)+2\pi i)=\sin(W(x_0)).$$

Skoro zaś na przedziale $[2\pi k,2\pi k+\frac{\pi}{2}]$ funkcja sin jest różnowartościowa, to oznacza, że wielomian W przyjmuje jakąś wartość co najmniej $(n+1)$ razy, co jest sprzeczne z tym, że $\deg W=n$. Zatem $n\leqslant 1$.

Zauważmy, że podstawiając $x = 0$ w wyjściowym równaniu, otrzymujemy

$$a_0 = \sin(a_0).$$

Stąd wynika, że $a_0 = 0$. Jeżeli $a_1 \neq 0$, to wyrażenie $a_1 x$ może przyjąć każdą wartość rzeczywistą, zatem $\sin(a_1 x)$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[-1, 1]$. Jeżeli $|a_1| > 1$, to podstawiając $x = 2\pi l + \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy sprzeczność, zaś dla $0 < |a_1| < 1$ dostajemy sprzeczność dla $x = \frac{2\pi l + \frac{\pi}{2}}{a_1}$. Stąd $a_1 = -1$, $a_1 = 0$ lub $a_1 = 1$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie trzy otrzymane wielomiany spełniają zadaną równość.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki podzbiór przestrzeni euklidesowej, że każda płaszczyzna przecina ten podzbiór w skończonej, dodatniej liczbie punktów?

Rozwiązanie:

Wykażemy, że zbiór $A = \{(t, t^3, t^5) \mid t \in \mathbb{R}\}$ spełnia warunki zadania.

Ustalmy płaszczyznę Π o równaniu $ax + by + cz + d = 0$. Wówczas któraś z liczb a, b, c jest niezerowa. Wtedy $A \cap \Pi$ to zbiór punktów postaci (t, t^3, t^5) takich, że $at^5 + bt^3 + ct + d = 0$, czyli zbiór rzeczywistych pierwiastków wielomianu $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx + d$. Skoro P jest wielomianem nieparzystego stopnia, to ma skończoną, niezerową liczbę pierwiastków rzeczywistych. Stąd każda płaszczyzna przecina zbiór A w skończonej dodatniej liczbie punktów, co chcieliśmy otrzymać.

9. W trójkącie ABC punkt H jest ortocentrum, O środkiem okręgu opisanego, zaś R promieniem tego okręgu. Punkt D jest symetryczny do punktu A względem BC, punkt E jest symetryczny do B względem CA, zaś punkt F jest symetryczny do C względem AB. Wykazać, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $OH = 2R$.

Rozwiązanie:

Niech G będzie środkiem ciężkości trójkąta ABC, zaś K, L, M obrazami odpowiednio punktów A, B, C w jednokładności o środku G i skali 4. Wówczas punkt D leży na prostej LM, punkt E leży na prostej MK, zaś punkt F leży na prostej KL. Warunek $OH = 2R$ jest równoważny stwierdzeniu, że środek X odcinka OH leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Punkty O, G, H leżą w tej właśnie kolejności na jednej prostej oraz $GH = 2OG$ (prosta Eulera). Skoro X jest środkiem odcinka OH, to $GH = 4GX$, więc punkt H jest obrazem punktu X w rozważanej jednokładności. Teza zadania jest zatem równoważna stwierdzeniu, że punkt H leży na okręgu opisanym na trójkącie KLM. Zauważmy teraz, że punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu H na proste zawierające boki trójkąta KLM. Z twierdzenia o prostej Simsona wnosimy więc, że warunek leżenia punktów K, L, M, H na jednym okręgu jest równoważny współliniowości punktów D, E, F, co kończy rozwiązanie zadania.

10. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Punkt Q leży wewnątrz tego czworokąta, przy czym $\sphericalangle CDQ = \sphericalangle ADB$ oraz $\sphericalangle CBQ = \sphericalangle ABD$. Wykazać, że rzuty prostokątne punktu Q na proste BC, CD, DB oraz punkt P leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech K, L, M będą rzutami prostokątnymi punktu Q odpowiednio na proste BC, CD, DB. Skoro $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180°$, to istnieje elipsa wpisana w czworokąt $ABCD$, której jednym z ognisk jest punkt P. Z równości

$$\sphericalangle CDQ = \sphericalangle ADB = \sphericalangle ADP \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBQ = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ABP$$

wnosimy zaś, że drugim ogniskiem tej elipsy jest punkt Q. W takim razie

$$\sphericalangle KCP = \sphericalangle BCP = \sphericalangle DCQ = \sphericalangle LCQ.$$

Skoro $\sphericalangle CKQ = \sphericalangle CLQ = 90°$, to na czworokącie $CLQK$ można opisać okrąg. Stąd wniosek, że

$$\sphericalangle KCP = \sphericalangle LCQ = \sphericalangle LKQ = 90° - \sphericalangle CKL,$$

zatem prosta KL jest prostopadła do prostej CP i równoległa do prostej BD. Środek odcinka CQ leży na symetralnej odcinka KL, która jest równoległa do prostej CP, więc punkty P i Q są jednakowo oddalone od tej symetralnej. W takim razie rzut prostokątny M punktu Q na prostą BD i punkt P są symetryczne względem symetralnej odcinka KL, skąd wniosek, że czworokąt $KLMP$ jest trapezem równoramiennym, a więc można na nim opisać okrąg.

11. Dane są okręgi W_1, W_2 przecinające się w punktach P i K. Niech XY będzie wspólną styczną do obu okręgów bliższą punktowi P taką, że X leży na W_1, zaś Y leży na W_2. XP przecina W_2 drugi raz w punkcie C, zaś YP przecina W_1 drugi raz w punkcie B. Niech A będzie punktem przecięcia BX oraz CY. Udowodnić, że jeśli Q jest drugim punktem przecięcia okręgów opisanych na ΔABC i ΔAXY, to $\sphericalangle QXA = \sphericalangle QKP$.

Rozwiązanie:

Niech $\lambda = \frac{BQ}{XQ}$, a $\alpha = \sphericalangle BQX$. Rozważmy przekształcenie φ będące złożeniem jednokładności o środku Q i skali λ z obrotem o tym samym środku o kąt α — tak, aby prosta XQ przeszła na prostą BQ (takie przekształcenie nazywamy podobieństwem spiralnym). Zauważmy, że $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle ACQ$ oraz

$$\sphericalangle BXQ = 180° - \sphericalangle AXQ = 180° - \sphericalangle AYQ = \sphericalangle CYQ,$$

skąd wniosek, że trójkąty BXQ i CYQ są podobne i jednakowo zorientowane. Zatem $\sphericalangle YQC = \sphericalangle XQB = \alpha$ i $\frac{CQ}{YQ} = \frac{BQ}{XQ} = \lambda$. Punkt C jest więc obrazem punktu Y przekształceniu φ.

Niech L będzie obrazem punktu K w przekształceniu φ. Trójkąt XYK przechodzi na trójkąt BCL w tym przekształceniu. Stąd i z twierdzenia o stycznej i cięciwie otrzymujemy

$$\sphericalangle CLB = \sphericalangle YKX = \sphericalangle YKP + \sphericalangle PKX = \sphericalangle PYX + \sphericalangle PXY = \sphericalangle BPX,$$

zatem punkty B, P, C, L leżą więc na jednym okręgu. Stąd i jeszcze raz z podobieństwa trójkątów XYK i BCL dostajemy

$$\sphericalangle BPL = \sphericalangle BCL = \sphericalangle XYK = \sphericalangle YCK = \sphericalangle BPK.$$

W takim razie punkty P, K, L są współliniowe i w konsekwencji z równości $\sphericalangle LKQ = \sphericalangle BXQ$ wynika teza zadania.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$. Ponadto

$$abc + bcd + cda + dab + a + b + c + d = 0.$$

Wykazać, że

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Rozwiązanie:

Zapiszmy $x = \frac{a+1}{a-1}$, $y = \frac{b+1}{b-1}$, $z = \frac{c+1}{c-1}$ oraz $t = \frac{d+1}{d-1}$. Z warunku zadania wynika, że liczby x, y, z, t są dodatnie i różne od 1. Równość z treści zadania można przepisać jako

$$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

lub równoważnie $xyzt = 1$. Ponieważ $\frac{1}{a-1} = \frac{x-1}{2}$, to mamy do okazania

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = \frac{x+y+z+t-4}{2} > 0.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy, że

$$\frac{x+y+z+t}{4} \geqslant \sqrt[4]{xyzt} = 1. \tag{12}$$

Ponieważ $x, y, z, t \neq 1$, to równość w nierówności (12) nie może zachodzić. W konsekwencji $\frac{x+y+z+t-4}{2} > 0$ i teza jest spełniona.

2. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f\left(x^2 + y + f(y)\right) = 2y + f(x)^2.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = x$. Podstawiając $y := \frac{t-f(x)^2}{2}$ w wyjściowym równaniu otrzymujemy

$$f(x^2 + y + f(y)) = t,$$

i stąd zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. W szczególności istnieje liczba a spełniająca warunek $f(a) = 0$. Kładąc $x := 0$ oraz $y := a$ otrzymujemy $0 = 2a + f(0)^2$, czyli $a = -\frac{f(0)^2}{2}$. Liczba a jest więc jedynym miejscem zerowym funkcji f.

Dla dowolnych x, y mamy też

$$f(x)^2 = f\left(x^2 + y + f(y)\right) - 2y = f\left((-x)^2 + y + f(y)\right) - 2y = f(-x)^2.$$

W szczególności $f(-a)^2 = f(a)^2 = 0$, czyli $f(-a) = 0$. Ponieważ a jest jedynym miejscem zerowym f, więc musi zachodzić równość $-a = a$, co oznacza, że $a = 0$. W szczególności $f(0) = 0$.

Podstawiając $x := 0$ w równości danej w treści zadania otrzymujemy, że dla dowolnej liczby y

$$f\left(y + f(y)\right) = 2y, \tag{13}$$

zaś podstawienie $y := 0$ w wyjściowej równości prowadzi do $f(x)^2 = f\left(x^2\right)$ (słusznej dla wszelkich $x \in \mathbb{R}$).

Podstawiając $y := \frac{-f(x)^2}{2}$ dostajemy $f\left(x^2 + y + f(y)\right) = 0$ i stąd mamy $x^2 + y + f(y) = 0$ (bo 0 jest jedynym miejscem zerowym f). W takim razie

$$-x^2 = \frac{-f(x)^2}{2} + f\left(\frac{-f(x)^2}{2}\right). \tag{14}$$

Przykładając f do obu stron powyższej równości i korzystając z (13) otrzymujemy

$$f(-x^2) = f\left(\frac{-f(x)^2}{2} + f\left(\frac{-f(x)^2}{2}\right)\right) = 2 \cdot \frac{-f(x)^2}{2} = -f(x)^2.$$

Dla dowolnego $t \geqslant 0$ mamy więc

$$f(t) = f\left(\left(\sqrt{t}\right)^2\right) = f\left(\sqrt{t}\right)^2 = -f\left(-\left(\sqrt{t}\right)^2\right) = -f(-t).$$

Funkcja f jest więc nieparzysta.

Dla $x \neq 0$ mamy $f\left(x^2\right) = f(x)^2 > 0$, więc f przyjmuje wartości dodatnie dla dodatnich argumentów. Łącząc to z nieparzystością f wnioskujemy, że f przyjmuje wartości ujemne dla argumentów ujemnych. Innymi słowy, dla dowolnego x liczby x, $f(x)$ są tego samego znaku.

Jeśli $f(b) = f(c)$, to z równości (14) wynika, że $b^2 = c^2$. Wnioskujemy stąd, że $b = c$, gdyż zarówno b jak i c mają ten sam znak co $f(b) = f(c)$. Udowodniliśmy więc, że funkcja f jest różnowartościowa.

Funkcja f jest więc bijekcją. To, wraz z równością $f\left(y + f(y)\right) = 2y$ prawdziwą dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ pozwala wnioskować, że zbiorem wartości funkcji $t \mapsto t + f(t)$ jest $\mathbb{R}$.

Udowodnimy teraz, że funkcja f jest addytywna, tj. dla wszelkich x, y zachodzi równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Rozważymy dwa przypadki: $x \geqslant 0$ oraz $x < 0$. Jeśli $x \geqslant 0$, to $x = b^2$ dla pewnego $b \in \mathbb{R}$. Istnieje też takie $c \in \mathbb{R}$, że $y = c + f(c)$. Wobec tego

$$f(x+y) = f\left(b^2 + c + f(c)\right) = f(b)^2 + 2c = f\left(b^2\right) + f\left(c + f(c)\right) = f(x) + f(y).$$

W drugim przypadku (gdy $x < 0$) mamy $-x > 0$. Korzystając z nieparzystości f i z przypadku pierwszego otrzymujemy

$$f(x+y) = -f(-x-y) = -(f(-x) + f(-y)) = f(x) + f(y).$$

W szczególności $f(x) + f(f(x)) = f(x + f(x)) = 2x$ dla dowolnego x.

Niech f^n oznacza n-tą iterację f, tzn. $f^0(x) = x$ oraz $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$f^n(x) + f^{n+1}(x) = 2f^{n-1}(x) \text{ dla } n = 1, 2, \ldots$$

Udowodnimy przez indukcję, że

$$f^n(x) = \frac{2x + f(x)}{3} + (-2)^n \cdot \frac{x - f(x)}{3} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dla $n = 0$ i $n = 1$ bezpośrednio sprawdzamy, że równość jest spełniona. Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} &f^{n+1}(x) = -f^n(x) + 2f^{n-1}(x) = \\ &= -\frac{2x + f(x)}{3} - (-2)^n \cdot \frac{x - f(x)}{3} + 2 \cdot \frac{2x + f(x)}{3} + 2 \cdot (-2)^n \cdot \frac{x - f(x)}{3} = \\ &= \frac{2x + f(x)}{3} + (-2)^n \cdot \frac{x - f(x)}{3}. \end{aligned}$$

Jeżeli $x \neq f(x)$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$, to z powyższej zależności wynika, że dla dostatecznie dużej liczby całkowitej n liczby $f^{n+1}(x)$, $f^n(x)$ mają przeciwne znaki, co daje sprzeczność. Wobec tego $f(x) = x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcja f dana wzorem $f(x) = x$ spełnia równanie dane w treści zadania.

Uwaga

Liniowość funkcji f można uzyskać inaczej. Z addytywności f oraz z warunku $f(x) > 0$ dla $x > 0$ wynika, że f jest funkcją rosnącą (gdyż jeśli $a > b$, to $f(a) = f(b) + f(a-b) > f(b)$). Przez prostą indukcję można udowodnić, że $f(nx) = nf(x)$ dla n naturalnych. Korzystając z nieparzystości f można uzyskać, że $f(nx) = nf(x)$ dla n całkowitych. Wobec tego

$$f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = \frac{m}{n} f(n \cdot \frac{1}{n}) = \frac{m}{n} f(1)$$

dla dowolnych m, n całkowitych, $n \neq 0$. Ustalmy teraz $x \in \mathbb{R}$. Ustalmy ciągi liczb wymiernych $a_1 < a_2 < \ldots$ oraz $b_1 > b_2 > \ldots$ zbieżne do x. Ponieważ f jest funkcją rosnącą i $f(1) > 0$, to

$$a_n f(1) = f(a_n) < f(x) < f(b_n) = b_n f(1) \text{ dla } n = 1, 2, \ldots$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $f(x) = x \cdot f(1)$.

3. Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą dającą resztę 1 z dzielenia przez 4, zaś $a = \dfrac{1+\sqrt{k}}{2}$. Udowodnić, że jeśli k nie jest kwadratem liczby całkowitej, to

$$\{\, \lfloor a^2 n \rfloor - \lfloor a \lfloor an \rfloor \rfloor \mid n = 1, 2, 3, \ldots \,\} = \{\, 1, 2, \ldots, \lfloor a \rfloor \,\}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $K = \frac{k-1}{4}$. Zauważmy, że $a^2 = a + \frac{k-1}{4} = a + K$. Niech $\varepsilon_n = \{an\}$. Mamy ciąg równości

$$\begin{aligned}
\lfloor a^2 n \rfloor - \lfloor a \lfloor an \rfloor \rfloor &= \lfloor an + Kn \rfloor - \lfloor a(an - \varepsilon_n) \rfloor = \\
&= Kn + an - \varepsilon_n - \lfloor a^2 n - a\varepsilon_n \rfloor = \\
&= Kn + an - \varepsilon_n - \lfloor an + Kn - \varepsilon_n + \varepsilon_n - a\varepsilon_n \rfloor = \\
&= -\lfloor (1-a)\varepsilon_n \rfloor.
\end{aligned}$$

Ponieważ a jest liczbą niewymierną, to z twierdzenia Weyla zbiór $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $[0,1]$. W szczególności, oznacza to, że zbiór $\{(1-a)\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $[(1-a), 0]$. W konsekwencji wyrażenie $\lfloor (1-a)\varepsilon_n \rfloor$ przyjmuje wszystkie wartości całkowite z przedziału $[\lfloor (1-a) \rfloor, -1]$. Ponieważ $\lfloor (1-a) \rfloor = -\lfloor a \rfloor$, więc otrzymujemy tezę.

4. Na płaszczyźnie dane są parami różne punkty $P_1, P_2, \ldots, P_n$, przy czym $n \geqslant 2$. Niech $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |P_i P_j|$. Udowodnić, że istnieje co najwyżej n takich par indeksów $i < j$, że $|P_i P_j| = M$.

Rozwiązanie:

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że teza nie jest spełniona. Weźmy taki zbiór $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, który nie spełnia tezy oraz $|\mathcal{P}|$ jest minimalne możliwe. Zauważmy, że jeżeli dla pewnego punktu P_i istnieje dokładnie jeden taki punkt P_j, że $|P_i P_j| = M$, to zbiór $\mathcal{P} \setminus \{P_i\}$ nie spełnia tezy i ma mniejszą moc, wbrew naszemu wyborowi $\mathcal{P}$.

Ponadto, jeżeli dla dowolnego punktu P_i istnieją dokładnie dwa punkty P_j, P_k, że $|P_i P_j| = |P_i P_k| = M$, to z lematu o podawaniu dłoni mamy dokładnie n takich par $i < j$, że $|P_i P_j| = M$.

Oznacza to, że musi istnieć taki punkt P_i, że dla co najmniej trzech pozostałych P_j, P_k, P_ℓ zachodzi $|P_i P_j| = |P_i P_k| = |P_i P_\ell| = M$. Możemy założyć, że punkty P_j, P_k, P_ℓ leżą w tej właśnie kolejności na okręgu o środku w P_i i promieniu M, przy czym miara kąta $\sphericalangle P_j P_i P_\ell$ jest nie większa od $60°$. Zauważmy, że dowolne dwa odcinki długości M o końcach w naszych punktach muszą mieć punkt wspólny (w przeciwnym razie pewne cztery punkty tworzyłyby czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB = CD = M$. Jeśli przez E oznaczymy punkt przecięcia odcinków AC i BD, to z nierówności trójkąta mielibyśmy $AC + BD = AE + EC + BE + ED > AB + CD = 2M$, skąd $AC > M$ lub $BD > M$). Jeżeli istnieje taki punkt P_m, że $|P_kP_m| = M$, to to odcinek P_kP_m musi przecinać zarówno P_iP_j jak i P_iP_ℓ stąd $P_m = P_i$. Oznacza to, że dla punktu P_k istnieje dokładnie jedna taka liczba s, że $|P_kP_s| = M$, przeczy to naszej wcześniejszej obserwacji. Uzyskana sprzeczność kończy dowód tezy zadania.

5. Na płaszczyźnie danych jest 2016 parami różnych okręgów o promieniu 1. Udowodnić, że można z nich wybrać takie 27 okręgów, że albo każde dwa z nich się przecinają, albo każde dwa z nich są rozłączne.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że nie istnieje 27 spośród danych okręgów, które przecinają się wzajemnie. Rozważmy dane okręgi w układzie współrzędnych. Wybierzmy ten z okręgów, którego środek ma największą możliwą współrzędną x.

Udowodnimy, że ten okrąg przecina co najwyżej $3 \cdot 25$ pozostałych okręgów. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że nasz okrąg jest przecinany przez co najmniej $3 \cdot 25 + 1$ pozostałych okręgów. Oznaczmy przez P środek naszego okręgu. Środki $3 \cdot 25 + 1$ okręgów przecinających nasz okrąg leżą w kole środku w P i promieniu 2, na lewo od P. Obszar ten możemy podzielić na trzy kąty o mierze 60° i środku w P. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w pewnym z tych obszarów znajduje się co najmniej 26 środków pozostałych okręgów. Ponieważ średnica tego obszaru wynosi 2, to każde dwa spośród wybranych okręgów przecinają się. Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

Dostajemy, że nasz okrąg przecina co najwyżej $3 \cdot 25$ danych okręgów. Dla pozostałych $2016 - 3 \cdot 25 - 1 = 2016 - 76$ stosujemy analogiczne rozumowanie. W ten sposób skonstruujemy ciąg $\lceil \frac{2016}{76} \rceil = 27$ parami nieprzecinających się okręgów. Oznacza to, że teza zadania jest spełniona.

6. Dane są dodatnie liczby całkowite a, n. Udowodnić, że liczba

$$\sum_{k=1}^{n} a^{\mathrm{NWD}(k,n)}$$

jest podzielna przez n.

Rozwiązanie:

Sposób I

Dla $n = 1$ teza zachodzi w oczywisty sposób. W dalszej części rozwiązania założymy, że $n > 1$.

Zauważmy najpierw, że spełniona jest równość

$$\sum_{k=1}^{n} a^{\mathrm{NWD}(k,n)} = \sum_{d|n} \varphi(n/d)a^d.$$

Istotnie, jest to konsekwencja faktu, że liczba tych liczb $1 \leqslant k \leqslant n$, dla których $\mathrm{NWD}(k,n) = d$ wynosi $\varphi(n/d)$.

Udowodnimy najpierw, że teza zadania jest spełniona jeżeli $n = p^s$ dla pewnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej nieujemnej s. Istotnie, mamy ciąg równości

$$\sum_{k=1}^{n} a^{\mathrm{NWD}(k,n)} = \sum_{d|p^s} \varphi\left(p^s/d\right) a^d = \sum_{i=0}^{s-1} \left(p^{s-i} - p^{s-i-1}\right) a^{p^i} + a^{p^s} =$$
$$= p^s a + \sum_{i=1}^{s} p^{s-i} \left(a^{p^i} - a^{p^{i-1}}\right) \equiv 0 \pmod{p^s}.$$

Udowodnimy teraz, że jeżeli teza zadania zachodzi dla względnie pierwszych liczb całkowitych n_1, n_2, to zachodzi również dla $n = n_1 n_2$. Istotnie, mamy

$$\sum_{k=1}^{n} a^{\mathrm{NWD}(k,n)} = \sum_{d|n} \varphi(n/d)a^d = \sum_{d_1|n_1} \sum_{d_2|n_2} \varphi(n_1/d_1)\varphi(n_2/d_2)a^{d_1 d_2} =$$
$$= \sum_{d_1|n_1} \varphi(n_1/d_1) \left(\sum_{d_2|n_2} \varphi(n_2/d_2) \left(a^{d_1}\right)^{d_2} \right).$$

Zauważmy, że z tego, że teza zachodzi dla n_2 wynika, że n_2 dzieli wyrażenie w nawiasie. Oznacza to, że całe nasze wyrażenie jest podzielne przez n_2. Analogicznie wykazujemy, że jest ono podzielne przez n_1 i w końcu korzystając ze względnej pierwszości liczb n_1, n_2 dostajemy, że jest ona podzielna przez $n = n_1 n_2$.

Ostatecznie zauważamy, że na mocy naszych rozważań teza zadania jest spełniona dla dowolnego n, co wynika z zasadniczego twierdzenia arytmetyki.

Sposób II

Rozważmy kolorowania wierzchołków n-kąta foremnego a kolorami. Policzmy kolorowania, które przechodzą same na siebie w obrocie tego wielokąta o $\frac{k}{n} \cdot 360°$.

Dla dowolnego i wierzchołki $i, i+k, i+2k, \ldots \pmod{n}$ muszą mieć ten sam kolor. Za pomocą rozszerzonego algorytmu Euklidesa możemy znaleźć takie liczby całkowite x i y, że $kx + ny = \mathrm{NWD}(k,n)$. Wówczas, dla dowolnego i

wierzchołki i oraz $i+kx \equiv i+\mathrm{NWD}(k,n) \pmod n$ muszą mieć ten sam kolor. Stąd, jeśli $i \equiv j \pmod{\mathrm{NWD}(k,n)}$, to wierzchołki i oraz j muszą mieć ten sam kolor.

Z drugiej strony $\mathrm{NWD}(k,n) \mid k$, więc jeśli każde dwa wierzchołki o numerach dających tą samą resztę modulo $\mathrm{NWD}(k,n)$ mają ten sam kolor, to całe kolorowanie przechodzi samo na siebie w obrocie o $\frac{k}{n} \cdot 360°$.

Reszt modulo $\mathrm{NWD}(k,n)$ jest $\mathrm{NWD}(k,n)$, a każdej reszcie możemy przyporządkować niezależnie jeden z a kolorów, więc takich kolorowań jest $a^{\mathrm{NWD}(k,n)}$. Rozważmy kolorowania z utożsamieniem kolorowań różniących się jedynie o obrót. Na mocy lematu Burnside'a ich liczba jest równa $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a^{\mathrm{NWD}(k,n)}$. Ale liczba kolorowań jest całkowita, więc $n \mid \sum\limits_{k=1}^{n} a^{\mathrm{NWD}(k,n)}$.

7. Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech $D(n)$ oznacza liczbę tych dzielników d liczby $\binom{n}{k}$, które spełniają nierówności $n-k+1 \leqslant d \leqslant n$. Wyznaczyć $\max\limits_{n \geqslant k} D(n)$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $k-1$.

Udowodnimy najpierw, że $D(k!) \geqslant k-1$.

Niech $n = k!$, wówczas

$$\binom{n}{k} = \frac{k!(k!-1)\cdot\ldots\cdot(k!-(k-1))}{k!} = (k!-1)\cdot\ldots\cdot(k!-(k-1)).$$

Oznacza to, że każda liczba d spełniająca nierówność $k!-(k-1) \leqslant d \leqslant k!-1$ jest dzielnikiem $\binom{n}{k}$. W konsekwencji $D(k!) \geqslant k-1$.

Udowodnimy, że $D(n) \leqslant k-1$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant k$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje taka liczba naturalna n, że $D(n) = k$. Oznacza to, że wszystkie liczby postaci $\frac{1}{n-j}\binom{n}{k}$ dla $j = 0, 1, \ldots, k-1$ są całkowite. Rozważmy kombinację liniową o współczynnikach całkowitych tych liczb

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j-1}\binom{k-1}{j} \cdot \frac{1}{n-j}\binom{n}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{i \neq j}\frac{n-i}{j-i}. \tag{15}$$

Rozważmy wielomian $W(x) = \sum\limits_{i=0}^{k-1}\prod\limits_{i \neq j}\frac{x-i}{j-i}$. Przyjmuje on wartość 1 dla argumentów $0, 1, \ldots, k-1$ i ma stopień nie większy niż $k-1$. Wobec tego $W(x) \equiv 1$.

W konsekwencji $W(n) = 1$ i wyrażenie (15) wynosi $\frac{1}{k}$. Ponieważ liczba $\frac{1}{k}$ nie jest całkowita, to otrzymujemy sprzeczność.

8. Ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ spełnia warunki

$$a_0 \;=\; 1 \quad \text{oraz} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Niech m będzie dodatnią liczbą całkowitą, p liczbą pierwszą, zaś q i r liczbami całkowitymi nieujemnymi. Udowodnić, że liczba

$$a_{p^m q+r} - a_{p^{m-1} q+r}$$

jest podzielna przez p^m.

Rozwiązanie:

Lemat 1. *Załóżmy, że $W \in \mathbb{Q}[t]$ ma tę własność, że $W(n) \in \mathbb{Z}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas W można zapisać w postaci*

$$W(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i \binom{t}{i},$$

dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej m oraz liczb całkowitych $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

Dowód. Stosujemy indukcję ze względu na stopień wielomianu W. Jeżeli W jest stały to teza jest oczywista. Przyjmijmy, że $\deg W \geqslant 1$. Z założenia indukcyjnego zastosowanego do wielomianu $Q(t) = W(t+1) - W(t)$ dostajemy, że

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{m} d_i \binom{t}{i},$$

dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej m oraz liczb całkowitych $d_1, d_2, \ldots, d_m$. Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $W(n) = W(0) + Q(0) + \ldots + Q(n-1)$. W konsekwencji

$$\begin{aligned} W(n) \quad &= \quad W(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m} d_i \binom{j}{i} = \\ &= \quad W(0) + \sum_{i=0}^{m} d_i \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j}{i} = \\ &= \quad W(0) + \sum_{i=0}^{m} d_i \binom{n}{i+1}. \end{aligned}$$

Ponieważ, równość wielomianów

$$W(t) = \sum_{i=0}^{m} d_i \binom{t}{i+1} + W(0)$$

zachodzi dla nieskończenie wielu liczb rzeczywistych, to jest tożsamością. Otrzymaliśmy żądany zapis wielomianu W. Oznacza to, że teza indukcyjna jest spełniona. $\square$

Rozważmy funkcję F określoną na zbiorze wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, która dowolnemu wielomianowi $W(t) = c_n t^n + \ldots + c_1 t + c_0$ przypisuje liczbę rzeczywistą daną wzorem

$$F\left(c_n t^n + \ldots + c_1 t + c_0\right) = c_n a_n + \ldots + c_1 a_1 + c_0 a_0.$$

Zauważmy, że

$$F\left((t+1)^n\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i = 2a_n = 2F\left(t^n\right).$$

W konsekwencji, ponieważ funkcja F jest liniowa, to dla dowolnego wielomianu W zachodzi równość

$$F\left(W(t+1)\right) = 2F\left(W(t)\right) - W(0).$$

Udowodnimy, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ spełniona jest równość $F\left(\binom{t}{k}\right) = 1$. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Dla $k = 1$ zachodzą równości

$$F\left(\binom{t}{1}\right) = F(t) = a_1 = 1.$$

Jeżeli $k \geqslant 2$, to

$$F\left(\binom{t}{k}\right) = F\left(\binom{t-1}{k}\right) + F\left(\binom{t-1}{k-1}\right) = \frac{1}{2}F\left(\binom{t}{k}\right) + \frac{1}{2}F\left(\binom{t}{k-1}\right).$$

W konsekwencji $F\left(\binom{t}{k}\right) = F\left(\binom{t}{k-1}\right) = 1$ i teza indukcyjna jest spełniona.

Z Lematu 1 wynika, że jeśli wielomian przyjmuje wartości całkowite w punktach całkowitych to jest kombinacją liniową wielomianów postaci $\binom{t}{k}$. Korzystając ponownie z liniowości F, otrzymujemy że wartość funkcji F na wielomianach o tej własności jest całkowita.

Rozważmy wielomian

$$W(t) = \frac{1}{p^m}\left(t^{p^m q+r} - t^{p^{m-1}q+r}\right) = \frac{1}{p^m} t^{p^{m-1}q+r}\left(t^{\left(p^m - p^{m-1}\right)q} - 1\right).$$

Ponieważ $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$, to z twierdzenia Eulera wynika, że W przyjmuje wartości całkowite w punktach całkowitych. Wobec naszych wcześniejszych rozważań liczba

$$F(W(t)) = \frac{1}{p^m}\left(a_{p^m q+r} - a_{p^{m-1}q+r}\right)$$

jest całkowita, co kończy dowód.

9. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, a punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do boku BC w tym trójkącie. Punkty D, E są rzutami odpowiednio punktów I, J na bok BC. Punkt M jest środkiem odcinka IJ. Rozważmy okrąg styczny do prostej BC w punkcie D oraz do łuku BAC okręgu ω w punkcie T. Prosta IT przecina ω ponownie w punkcie S. Udowodnić, że proste ME i SJ przecinają się na okręgu ω.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\sphericalangle JBI = \sphericalangle JCI = 90°$, więc punkty B, C, I, J leżą na okręgu o średnicy JI. Z lematu o trójliściu wynika, że środek tego okręgu, czyli punkt M, jest środkiem łuku BC okręgu ω.

Rozważmy jednokładność o środku w punkcie T, która przekształca okrąg ω na okrąg ω_1 styczny do prostej BC. Z treści zadania wynika, że punktem styczności ω_1 z prostą BC jest D. Prosta ℓ styczna do ω w punkcie M przejdzie przy tej jednokładności na styczną ℓ_1 do ω_1, równoległą do ℓ. Prostą tą musi być prosta BC, bowiem M jest środkiem łuku BC. Oznacza to, że obrazem punktu M w tej jednokładności jest D. Stąd punkty T, D, M leżą na jednej prostej.

Niech $T' \neq M$ będzie punktem przecięcia prostej ME z okręgiem ω. Ponieważ

$$BD = \frac{AB + BC - CA}{2} = CE,$$

więc punkty D i E są symetryczne względem symetralnej ℓ_2 odcinka BC. Ponieważ $M \in \ell_2$, więc proste MD i ME są symetryczne względem ℓ_2. Ponadto ℓ_2 jest osią symetrii okręgu ω. Wynika stąd, że punkty T i T' są symetryczne względem ℓ_2. Odnotujmy też, że punkty B i C są symetryczne względem ℓ_2. Z powyższych obserwacji wynika w szczególności, że $BE = CD$ i $DT = ET'$.

Mamy $\sphericalangle MBD = \sphericalangle BTM$, gdyż kąty te są oparte na równych łukach okręgu ω. Wobec tego z cechy podobieństwa kąt–kąt wynika, że trójkąty MBD i MTB są podobne. Stąd

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MT}{MB}.$$

Skoro $MB = MI$, to
$$\frac{MI}{MD} = \frac{MT}{MI}.$$
Z cechy podobieństwa bok–kąt–bok wynika, że trójkąty MID i MTI są podobne.

Ponieważ
$$\sphericalangle JBE = \frac{180^\circ - \sphericalangle CBA}{2} = 90^\circ - \sphericalangle DBI = \sphericalangle BID,$$
więc trójkąty BDI, JEB są podobne. Wobec tego
$$\frac{BD}{DI} = \frac{JE}{EB}, \quad \text{zatem} \quad DB \cdot EB = JE \cdot DI.$$

Zapisując potęgę punktu D względem okręgu ω na dwa sposoby otrzymujemy $DM \cdot DT = DB \cdot DC$. Zatem $DM \cdot ET' = DB \cdot EB = JE \cdot DI$. Stąd
$$\frac{DM}{DI} = \frac{JE}{ET'}.$$
Ponadto $\sphericalangle MDI = 180^\circ - \sphericalangle IDT = 180^\circ - \sphericalangle MEJ = \sphericalangle JET'$. Wnioskujemy, że trójkąty MDI, JET' są podobne (bok–kąt–bok). Zatem
$$\sphericalangle ET'J = \sphericalangle DIM = \sphericalangle MTI = \sphericalangle MT'S.$$
Powyższa równość oznacza, że punkty T', S, J są współliniowe. Zatem proste ME i JS przecinają się w punkcie T' leżącym na okręgu ω.

10. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. Punkt P leży wewnątrz tego czworokąta, a jego rzuty na boki leżą na okręgu o środku S. Wykazać, że $BS = DS$.

Rozwiązanie:

Niech Q będzie obrazem punktu P w symetrii względem punktu S. Niech X będzie rzutem punktu P na bok AB. Oznaczmy odbicie P względem AB przez Y. Wówczas $QY \parallel SX$ oraz $QY = 2SX$, gdyż SX jest linią środkową w trójkącie PQY.

Oznaczmy punkt przecięcia odcinków AB, QY przez Z. Wówczas
$$PZ + ZQ = YZ + ZQ = QY = 2SX,$$
zatem Z leży na elipsie $\mathcal{E}$ o ogniskach P, Q i osi wielkiej równej średnicy okręgu przechodzącego przez rzuty punktu P na boki czworokąta $ABCD$. Ponadto, dla dowolnego punktu $T \neq Z$ na prostej AB mamy $PT = YT$. Stąd i z nierówności trójkąta wynika, że
$$PT + TQ = YT + TQ > YQ = 2SX.$$

Oznacza to, że prosta AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą $\mathcal{E}$. Stąd odcinek AB jest styczny do $\mathcal{E}$ w punkcie X.

Analogicznie uzasadniamy, że elipsa $\mathcal{E}$ jest styczna do pozostałych boków czworokąta $ABCD$. Innymi słowy, $\mathcal{E}$ jest wpisana w czworokąt $ABCD$.

Oznaczmy środki odcinków AC, BD przez M, N i załóżmy, że $M \neq N$. Z twierdzenia Newtona wynika, że punkty M, N, S są współliniowe. Skoro $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90°$, to $BM = \frac{1}{2}AC = DM$. Ponadto $BN = DN$. Prosta MN jest więc symetralną odcinka BD i wobec tego $BS = DS$.

Jeżeli zaś punkty M i N się pokrywają, to czworokąt $ABCD$ jest prostokątem. Oznaczmy rzuty prostokątne punktu P odpowiednio na boki BC, CD, DA przez K, L, M. Symetralna odcinka XL pokrywa się z symetralną ℓ_1 odcinka BC, a symetralna odcinka KM pokrywa się z symetralną ℓ_2 odcinka AB. Wobec tego punkt S będący przecięciem prostych ℓ_1 i ℓ_2 jest środkiem prostokąta $ABCD$, skąd $BS = DS$.

11. Dany jest okrąg ω o środku O oraz punkt S różny od O leżący wewnątrz niego. Rozważamy okręgi o_1, o_2 styczne zewnętrznie w punkcie S i styczne wewnętrznie do ω. Punkt X jest środkiem jednokładności o skali dodatniej przekształcającej o_1 na o_2. Przy ustalonym okręgu ω oraz ustalonym punkcie S wyznaczyć zbiór wszystkich takich punktów X.

Rozwiązanie:

Sposób I

Oznaczmy przez k i ℓ wspólne styczne zewnętrzne do okręgów o_1 i o_2. Punkt X jest środkiem jednokładności o skali dodatniej przekształcającej o_1 na o_2, więc k i ℓ przechodzą przez X. Rozważmy inwersję względem okręgu o_3 o środku X i promieniu XS. Obrazami prostych k, ℓ są one same, gdyż przechodzą one przez środek okręgu o_3. Ponadto punkt S jest punktem stałym tej inwersji. Obrazami okręgów o_1, o_2 są okręgi styczne do prostych k, ℓ styczne w punkcie S. Jeden z nich leży wewnątrz okręgu o_3, a drugi na zewnątrz. Oznacza to, że obrazem o_1 jest o_2 a obrazem o_2 jest o_1. Rozważana inwersja przekształca okrąg ω na okrąg styczny do obrazów o_1 i o_2, (czyli do o_2 i o_1) oraz leżący w kącie wyznaczonym przez styczne poprowadzone z punktu X do ω. Stąd wniosek, że obrazem okręgu ω jest on sam. Oznacza to, że $\mathrm{Pot}(X, \omega) = |XS|^2$, czyli X leży na osi potęgowej m okręgu ω i okręgu o środku S i promieniu 0. Zatem szukany zbiór punktów jest zawarty w prostej m.

Obierzmy dowolny punkt X na prostej m. Rozważmy prostą n prostopadłą do XS przechodzącą przez S. Rozważmy okręgi o_1, o_2 styczne do prostej n w punkcie S i do okręgu ω. Wówczas okręgi o_1 i o_2 są styczne w punkcie S, a środek jednokładności o skali dodatniej przekształcającej o_1 na o_2 leży na prostej SX oraz na prostej m. Pokrywa się on zatem z punktem X. Z dowolności wyboru punktu X wynika, że szukany zbiór punktów zawiera prostą m.

Zatem zbiór punktów X spełniających warunki zadania jest osią potęgową okręgu ω i okręgu zdegenerowanego do punktu S.

Sposób II

Oznaczmy przez O_1, O_2 środki odpowiednio okręgów o_1, o_2, przez r, r_1 odpowiednio promienie okręgów ω, o_1. Okrąg o_1 jest styczny wewnętrznie do okręgu ω, więc $|O_1O| = r - r_1$. Zatem $SO_1 + O_1O = r_1 + r - r_1 = r$, czyli punkt O_1 leży na elipsie $\mathcal{E}$ o ogniskach S, O i osi wielkiej r. Podobnie dowodzimy, że O_2 leży na tej elipsie. Punkt S jest środkiem jednokładności o skali ujemnej przekształcającej o_1 na o_2, a punkt X jest środkiem jednokładności o skali dodatniej przekształcającej o_1 na o_2. Wobec tego $(X, S; O_1, O_2) = -1$. Zatem X leży na biegunowej punktu S względem $\mathcal{E}$.

Na odwrót, rozważmy dowolny punkt X leżący na biegunowej punktu S względem elipsy $\mathcal{E}$. Niech prosta XS przecina elipsę $\mathcal{E}$ w punktach O_1 i O_2. Rozważmy okręgi o_1, o_2 o środkach O_1, O_2 przechodzące przez S. Są one styczne zewnętrznie, gdyż punkt S leży pomiędzy punktami O_1, O_2. Ponieważ oś wielka elipsy $\mathcal{E}$ wynosi r, więc $OO_1 + O_1S = r$. Stąd $OO_1 = r - O_1S$. Ponieważ odległość między środkami okręgów ω, o_1 jest równa różnicy długości ich promieni, więc okręgi te są styczne wewnętrznie. Podobnie uzasadniamy, że okręgi ω, o_2 są styczne wewnętrznie. Z dowolności wyboru punktu X wynika, że każdy punkt na biegunowej punktu S względem $\mathcal{E}$ ma żądane własności.

Zatem szukanym zbiorem jest biegunowa punktu S względem $\mathcal{E}$.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.
13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści