Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 4–18 czerwca 2017

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 4–18 czerwca 2017

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. 18 33 11 660

Kadra:
Piotr Ambroszczyk, Dominik Burek, Tomasz Cieśla, Maciej Gawron, Andrzej Grzesik, Teodor Jerzak, Michał Kieza, Mateusz Kobak, Mikołaj Leonarski, Michał Pilipczuk i Dominika Regiec.

Uczestnicy:
Damian Burczyk, Aleksandra Cynk, Jadwiga Czyżewska, Jan Fornal, Kamil Galewski, Filip Gawron, Jakub Kamiński, Łukasz Kamiński, Paweł Kolendo, Aleksandra Kowalska, Piotr Kubaty, Weronika Lorenczyk, Maciej Maruszczak, Daniel Murawski, Tomasz Nowak, Jacek Salata, Michał Siennicki, Stanisław Strzelecki, Radosław Żak i Antoni Żewierżejew.

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`www.om.edu.pl`
`www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 4–18 czerwca 2017 w Mszanie Dolnej, w Ośrodku Sportowo-Rekreacyjnym „Słoneczny". Kadrę obozu stanowili: Piotr Ambroszczyk, Dominik Burek, Tomasz Cieśla, Maciej Gawron, Andrzej Grzesik, Teodor Jerzak, Michał Kieza, Mateusz Kobak, Mikołaj Leonarski, Michał Pilipczuk i Dominika Regiec.

W dniach 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14 i 16 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 15 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 10 i 17 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny czterech zadań i trwały od rana do wieczora, a mecz matematyczny — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 177, 147 i 134 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyły się dwie wycieczki: 11 czerwca na Ćwilin, a 15 czerwca do Rabki-Zdroju.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z Obozu wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`.

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	17	1	0	0
2.	9	4	2	3
3.	14	1	2	1
4.	7	0	0	11
5.	17	0	0	2
6.	2	7	0	10
7.	5	3	1	10
8.	6	0	0	13
9.	9	0	1	9
10.	1	2	0	16
11.	11	0	0	8
12.	0	1	0	18
13.	7	4	0	8
14.	8	0	0	11
15.	2	0	0	17
16.	1	0	0	18
17.	13	0	0	7
18.	14	0	1	5
19.	7	0	1	12
20.	0	0	0	20
21.	14	2	0	4
22.	8	1	1	10
23.	3	1	0	16
24.	1	0	2	17
25.	12	0	0	8
26.	18	2	0	0
27.	3	0	0	17
28.	1	0	0	19
29.	16	1	0	4
30.	2	0	0	19
31.	7	1	0	13
32.	1	0	0	20
33.	11	0	0	6
34.	5	0	0	12
35.	3	3	0	11
36.	2	0	0	15

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem. Trójkąty BCX oraz DCY są równoboczne oraz wnętrze każdego z tych dwóch trójkątów ma niepuste przecięcie z wnętrzem prostokąta. Prosta AX przecina prostą CD w punkcie P, a prosta AY przecina prostą BC w punkcie Q. Udowodnić, że trójkąt APQ jest równoboczny.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych dodatnich A o następującej własności: suma elementów dowolnego skończonego podzbioru A **nie** jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku większym od 1.

3. W turnieju rozgrywanym systemem „każdy z każdym" (bez remisów) każdy zawodnik, który każdego innego pokonał bezpośrednio lub pośrednio, otrzymał nagrodę (gracz A pokonał gracza C pośrednio, jeśli pokonał pewnego zawodnika B, który wygrał z C). Dowieść, że jeżeli przyznana została tylko jedna nagroda, to otrzymał ją zawodnik, który wszystkich innych pokonał bezpośrednio.

4. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d takich, że $a+b+c+d=4$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{a^3+4}+\frac{b}{b^3+4}+\frac{c}{c^3+4}+\frac{d}{d^3+4}\leqslant\frac{4}{5}.$$

5. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takie, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x,y zachodzi równość

$$f(x+y)=\max(f(x),y)+\min(f(y),x).$$

6. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC, zaś odcinki AH_A, BH_B i CH_C są jego wysokościami. Punkty O_A, O_B i O_C są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach BOC, COA i AOB. Wykazać, że proste O_AH_A, O_BH_B i O_CH_C mają punkt wspólny.

7. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie m, dla których istnieją liczby całkowite x, y, niepodzielne przez 7, spełniające równość

$$7^m = x^2 + xy + y^2.$$

8. Na jednym polu nieskończonej szachownicy (wypełniającej całą płaszczyznę) stoi pionek, pozostałe pola są wolne. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu wybieramy pole zajęte przez pionek i sąsiadujące (mające boki wspólne) z co najmniej dwoma polami wolnymi, usuwamy pionek z wybranego pola i stawiamy pionki na dowolnych dwóch wolnych polach sąsiednich. Wykazać, że istnieje taki skończony zbiór pól Z, że niezależnie od wykonywanych ruchów zawsze co najmniej jedno z pól zbioru Z będzie zajęte.

9. Rozstrzygnąć, czy można wpisać w pola nieskończonej szachownicy liczby całkowite dodatnie tak, aby suma liczb wpisanych w każdy prostokąt $m \times n$, gdzie $m, n > 2017$, była podzielna przez $m + n$.

10. Niech f będzie unormowanym wielomianem stopnia $n \geqslant 1$ o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że istnieją takie unormowane wielomiany g i h o współczynnikach rzeczywistych, że tożsamość

$$f(x) = \frac{g(x) + h(x)}{2}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x, oraz wielomiany g i h mają komplet pierwiastków rzeczywistych.

Uwaga I: Wielomian nazywamy unormowanym, jeśli jego współczynnik przy najwyższej potędze wynosi 1.

Uwaga II: Wielomian ma komplet pierwiastków rzeczywistych, jeśli można go zapisać w postaci $c(x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$ *dla* $c, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *rzeczywistych.*

11. Dane są okręgi O_1, O_2 styczne wewnętrznie w punkcie M. Na okręgu O_1 wybieramy punkt A różny od M taki, że odcinek MA **nie** jest średnicą O_1. Różne punkty B, C leżą na okręgu O_2 tak, że proste AB, AC są styczne do O_2. Proste BM, CM przecinają O_1 odpowiednio w punktach E, F. Prosta styczna do O_1 w punkcie A przecina prostą EF w punkcie X. Wykazać, że niezależnie od wyboru punktu A tak skonstruowane punkty X leżą na jednej prostej.

12. Ciąg (a_n) jest zdefiniowany rekurencyjnie:

$$a_0 = 4, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2.$$

Udowodnić, że jeśli liczba pierwsza $p > 2$ dzieli a_n, to $2^{n+2} \mid p^2 - 1$.

13. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieją liczby całkowite dodatnie $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ spełniające równanie

$$\frac{1}{10^n} = \frac{1}{n_1!} + \frac{1}{n_2!} + \ldots + \frac{1}{n_k!}.$$

14. Funkcję $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ nazwiemy *gęstą* jeżeli dla dowolnej liczby wymiernej c takiej, że $f(x) < c < f(y)$, dla pewnych całkowitych $x,\ y$, istnieje taka liczba całkowita z, że $f(z) = c$.

Znaleźć wszystkie funkcje gęste f spełniające równanie

$$f(x) + f(y) + f(z) = f(x)f(y)f(z)$$

dla wszystkich liczb całkowitych takich, że $x + y + z = 0$.

15. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. Na płaszczyźnie rysujemy $3n - 1$ punktów tak, że żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Wykazać, że istnieje $2n$ punktów których otoczka wypukła **nie** jest trójkątem.

Uwaga: Otoczka wypukła punktów to wielokąt wypukły o najmniejszym polu zawierający te punkty.

16. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABC. Okręgi o średnicach $AH,\ BH$ i CH przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach $A_1,\ B_1$ i C_1, różnych od wierzchołków trójkąta ABC. Prosta styczna do okręgu ω w punkcie A przecina prostą B_1C_1 w punkcie A_2. Analogicznie definiujemy punkty $B_2,\ C_2$. Wykazać, że punkty $A_2,\ B_2,\ C_2$ leżą na jednej prostej.

17. W grupie osób każdy zna co najmniej jedną osobę (jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A). Udowodnić, że istnieje osoba, dla której średnia liczba znajomych jej znajomych jest nie mniejsza od średniej liczby znajomych wszystkich osób.

18. Dla liczby całkowitej $n \geqslant 1$ przyjmijmy $F_n = 2^{2^n} + 1$. Wykazać, że jeśli liczba

$$3^{\frac{F_n - 1}{2}} + 1$$

dzieli się przez F_n, to F_n jest liczbą pierwszą.

19. Okrąg ω jest wpisany w różnoboczny trójkąt ABC. Punkty A_1, B_1, C_1 są środkami odpowiednio boków BC, CA, AB. Prosta przechodząca przez A_1 i różna od BC jest styczna do okręgu ω w punkcie A_2. Analogicznie definiujemy punkty B_2, C_2. Udowodnić, że proste AA_2, BB_2, CC_2 przecinają się w jednym punkcie.

20. Dowieść, że dla dowolnych liczb nieujemnych $x_1, x_2, \ldots x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2} < \sqrt{n}.$$

21. Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite k, dla których równanie

$$\mathrm{NWW}(m,n) - \mathrm{NWD}(m,n) = k(m-n)$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n spełniających warunek $m \neq n$.

22. Okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie S. Wykazać, że

$$\frac{KS}{MS} = \frac{AK \cdot BK \cdot CD}{AB \cdot CM \cdot DM}.$$

23. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste C spełniające następujący warunek: dla dowolnych (niekoniecznie różnych) dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 istnieją takie parami różne indeksy $i, j, k, l \in \{1,2,3,4,5\}$, że

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leqslant C.$$

24. Dany jest n-kąt wypukły, którego żadne cztery wierzchołki nie leżą na jednym okręgu. Trójkę jego wierzchołków nazwiemy *puszystą*, jeśli koło opisane na trójkącie o tych wierzchołkach przykrywa cały ten wielokąt. Udowodnić, że istnieją dokładnie $n-2$ trójki puszyste.

25. Wykazać, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{b-a}{d+a} + \frac{c-b}{a+b} + \frac{d-c}{b+c} + \frac{a-d}{c+d} \geqslant 0.$$

26. Na tablicy napisano iloczyn

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Wyznaczyć wszystkie takie n, że do niektórych wyrazów tego iloczynu można dopisać symbol ! tak, by wartość uzyskanego iloczynu była kwadratem liczby całkowitej. Dopisanie symbolu ! do wyrazu k zamienia go na wyraz $k!$.

27. Danych jest $2n-1$ dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnić, że można tak wybrać pewne n z tych zbiorów, aby ich suma miała co najwyżej $\frac{2}{3}n + 1$ elementów.

28. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma środek w punkcie I oraz jest styczny do boku BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Prosta przechodząca przez I i prostopadła do AI przecina boki AB, AC odpowiednio w punktach F, E. Okrąg opisany na trójkącie AEF przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie X różnym od A. Wykazać, że proste XD i AM przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

29. Trójkąt równoboczny o boku długości n podzielono odcinkami równoległymi do jego boków na n^2 trójkątów równobocznych o boku długości 1. Wyznaczyć największą możliwą długość takiego ciągu tych trójkątów, że każdy trójkąt występuje w ciągu co najwyżej raz oraz każde dwa kolejne trójkąty w ciągu mają wspólny bok.

30. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_i \geqslant 1$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_i}\right) + \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{x_i + x_{i+1} + \ldots + x_n}\right) \leqslant n + 1.$$

31. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt różnoboczny ABC. Okrąg ω_A przechodzi przez I, jest styczny do boków AB i AC oraz jego środek leży na odcinku AI; analogicznie definiujemy okręgi ω_B i ω_C. Punkty P, Q, R różne od I są punktami przecięcia odpowiednio par okręgów (ω_B, ω_C), (ω_C, ω_A), (ω_A, ω_B). Dowieść, że środki okręgów opisanych na trójkątach AIP, BIQ, CIR są współliniowe.

32. Dany jest ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2017}}$, przy czym dla wszystkich $n = 1, 2, \ldots, 2^{2017}$ spełnione są warunki:

$$a_n \leqslant 2017 \quad \text{oraz} \quad a_1a_2\ldots a_n + 1 \text{ jest kwadratem liczby całkowitej.}$$

Udowodnić, że przynajmniej jedna z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2017}}$ jest równa 1.

33. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta, stycznego do boku BC. Punkt S leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, przy czym AS jest średnicą tego okręgu. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC. Wykazać, że $\sphericalangle ISJ = \sphericalangle IDJ$.

34. Wykazać, że dla każdych dodatnich liczb całkowitych $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{\mathrm{NWW}(a_1, a_2)} + \frac{1}{\mathrm{NWW}(a_1, a_2, a_3)} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_n)} < 2.$$

35. Dana jest taka nieskończona rodzina $\mathcal{F}$ składająca się z czteroelementowych zbiorów, że każde dwa zbiory z $\mathcal{F}$ są różne i mają niepuste przecięcie. Wykazać, że istnieje taki trzyelementowy zbiór X, że każdy zbiór z $\mathcal{F}$ ma niepuste przecięcie z X.

36. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ istnieją dodatnie liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$, spełniające następujące warunki:

- $b_i \geqslant a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$,
- dla dowolnych $i, j = 1, 2, \ldots, n$ co najmniej jeden z ilorazów $\frac{b_i}{b_j}, \frac{b_j}{b_i}$ jest liczbą całkowitą,
- $b_1b_2\ldots b_n \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}} a_1a_2\ldots a_n$.

Zawody drużynowe

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki rosnący ciąg dodatnich liczb całkowitych $(a_n)_{n\geqslant 0}$, że suma dowolnych dwóch różnych wyrazów tego ciągu jest względnie pierwsza z sumą dowolnych trzech parami różnych wyrazów tego ciągu.

2. W turnieju tenisowym wzięło udział n zawodników. Pomiędzy niektórymi z nich rozegrano dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Dla zawodnika v przez $N^+(v)$ oznaczamy zbiór tych zawodników, których v pokonał. Niech

$$N^{++}(v) = \left(\bigcup_{w\in N^+(v)} N^+(w) \right) \setminus N^+(v).$$

Wyznaczyć jak największą stałą c o tej własności, że zawsze istnieje zawodnik v, dla którego zachodzi nierówność

$$|N^{++}(v)| \geqslant c \cdot |N^+(v)|.$$

3. Wyznaczyć jak najmniejszą stałą rzeczywistą $C \in [0,2]$, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$\sum_{\mathrm{sym}} (a^4b^2 + a^{2+C}b^2c^{2-C}) \geqslant \sum_{\mathrm{sym}} (a^4bc + a^3b^3).$$

Uwaga. Symbolem $\sum\limits_{\mathrm{sym}} f(a,b,c)$ oznaczamy następującą sumę:

$$f(a,b,c) + f(a,c,b) + f(b,a,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b) + f(c,b,a).$$

4. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty PAB, PBC, PCD, PDA leżą na jednym okręgu.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia k oraz cyfry $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Udowodnić, że istnieje taka naturalna liczba n, że ostatnie $2k$ cyfr liczby 2^n to (w tej właśnie kolejności) $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ dla pewnych cyfr $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie a, b takie, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $2^a \cdot n - 1$ jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $2^b \cdot n - 1$ jest pierwsza.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian P o współczynnikach całkowitych, który nie posiada pierwiastków wymiernych, a dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita m, że $n \mid P(m)$.

4. *Słowem* nazwiemy dowolny skończony ciąg zer i jedynek. *Konkatenacją* słów $w_1 = (c_1, \ldots, c_n)$ i $w_2 = (d_1, \ldots, d_m)$ nazwiemy słowo $w_1 \cdot w_2 = (c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_m)$. Zbiór słów S nazwiemy *dokładnym*, gdy dla dowolnego słowa w (niekoniecznie należącego do S) istnieje co najwyżej jeden ciąg słów $s_1, \ldots, s_k$ z S spełniający równość $s_1 \cdot \ldots \cdot s_k = w$. Udowodnić, że dla dowolnego skończonego i dokładnego zbioru S zachodzi nierówność

$$\sum_{s \in S} 2^{-|s|} \leqslant 1,$$

gdzie $|s|$ oznacza długość słowa s.

5. Niech T_1, T_2, $\ldots$, T_m będą takimi trzyelementowymi podzbiorami zbioru n-elementowego X, że dla różnych i, j zbiory T_i i T_j mają co najwyżej jeden element wspólny. Dowieść, że istnieje podzbiór S zbioru X, zawierający co najmniej $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ elementów i niezawierający żadnego ze zbiorów T_i.

6. W grupie n osób niektóre pary łączy nieprzyjemna wspólna przeszłość. Wiemy jednak, że dla pewnej liczby $a \geqslant 1$, wśród dowolnych $(a+1)$ z nich znajdziemy takie dwie, których nie łączy nieprzyjemna wspólna przeszłość. Wykazać, że można posadzić te osoby przy a okrągłych stolikach w taki sposób, aby żadna para, którą łączy nieprzyjemna wspólna przeszłość nie siedziała obok siebie.

Uwaga: niektóre stoliki mogą pozostać puste.

7. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon [0,1] \to [0,1]$ spełniające następującą własność: dla dowolnego $x \in [0,1]$ zachodzi $2x - f(x) \in [0,1]$ i $f(2x - f(x)) = x$.

8. Udowodnić, że dla każdego wielomianu $P(x)$ o współczynnikach całkowitych istnieje wielomian $Q(x)$ podzielny przez $P(x)$ o następującej własności: wszystkie niezerowe współczynniki $Q(x)$ stoją przy potęgach x będących liczbami pierwszymi.

9. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a I_A — środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC. Punkt I' jest punktem symetrycznym do I względem boku BC. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt I'_A leży na półprostej OI_A oraz spełnia warunek $OA^2 = OI_A \cdot OI'_A$. Wykazać, że

$$\sphericalangle BAI' = \sphericalangle CAI'_A.$$

10. W trójkącie ABC punkty X, Y, Z są punktami styczności okręgów dopisanych odpowiednio z bokami BC, CA i AB. Udowodnić, że z odcinków AX, BY, CZ można zbudować trójkąt.

11. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio w punktach K, L, M i N. Płaszczyzna π_A jest równoległa do płaszczyzny LMN oraz znajduje się w tej samej odległości od punktu A, co od płaszczyzny LMN. Analogicznie definiujemy płaszczyzny π_B, π_C, π_D. Wykazać, że środek sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ pokrywa się z środkiem sfery opisanej na czworościanie wyznaczonym przez płaszczyzny π_A, π_B, π_C i π_D.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wśród 100 monet jest 70 fałszywych i 30 prawdziwych. Wiadomo, że wszystkie prawdziwe monety ważą tyle samo, zaś wagi fałszywych są parami różne i większe od wagi prawdziwej monety. Ile co najmniej ważeń należy wykonać, aby znaleźć co najmniej jedną prawdziwą monetę?

2. Dana jest liczba nieparzysta n. Kolorujemy wierzchołki n-kąta foremnego trzema kolorami w taki sposób, że istnieje nieparzyście wiele wierzchołków każdego koloru. Wykazać, że spośród wierzchołków tego n-kąta można wybrać takie trzy, które tworzą trójkąt równoramienny, a każdy z nich jest innego koloru.

3. Podzbiór I wierzchołków nieskierowanego grafu G jest *niezależny* jeśli żadne dwa wierzchołki z I nie sąsiadują ze sobą. Zbiór niezależny I w grafie G jest *maksymalny* jeśli każdy wierzchołek G spoza I ma sąsiada w I. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste c o następującej własności: w każdym grafie o n wierzchołkach jest co najwyżej c^n różnych maksymalnych zbiorów niezależnych.

4. Dana jest liczba pierwsza p. Udowodnić, że liczba $\displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor q/p \rfloor} k^{p-1}$ jest podzielna przez q tylko dla skończenie wielu liczb pierwszych q.

5. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz liczba pierwsza p, przy czym $n < p < \frac{4}{3}n$. Udowodnić, że

$$p \mid \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^4 .$$

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ spełniające dla każdego $x > 0$ równość

$$f(f(x)) + f(x) = 6x.$$

7. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany P o współczynnikach rzeczywistych, że dla pewnych wielomianów F, G o współczynnikach rzeczywistych, równość

$$F(G(x)) - G(F(x)) = P(x)$$

jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej x.

8. Wykazać, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

9. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Punkt F leży wewnątrz okręgu ω na prostej AD. Odcinki BF, CF przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach M, N. Udowodnić, że proste AD, BN, CM przecinają się w jednym punkcie.

10. Niech ω będzie okręgiem wpisanym w trójkąt ABC. Prosta styczna do ω i równoległa do BC (różna od BC) przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach S i T. Niech ω' będzie okręgiem wpisanym w trójkąt AST. Dowieść, że okrąg przechodzący przez punkty B, C i styczny do ω jest styczny również do ω'.

11. W czworościanie $ABCD$ przeciwległe krawędzie są równej długości. Wykazać, że dla dowolnych punktów P i Q leżących w przestrzeni zachodzi nierówność

$$AP \cdot AQ + BP \cdot BQ + CP \cdot CQ \geqslant DP \cdot DQ.$$

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem. Trójkąty BCX oraz DCY są równoboczne oraz wnętrze każdego z tych dwóch trójkątów ma niepuste przecięcie z wnętrzem prostokąta. Prosta AX przecina prostą CD w punkcie P, a prosta AY przecina prostą BC w punkcie Q. Udowodnić, że trójkąt APQ jest równoboczny.

Rozwiązanie:

Punkty X i Y są środkami odpowiednio odcinków AP i DQ. Wystarczy więc wykazać, że trójkąt AXY jest równoboczny. Skoro $\sphericalangle XCY = \sphericalangle YCB = 30°$, to prosta CY jest symetralną odcinka BX. W takim razie $AY = BY = XY$. Skoro $DC = CY$, $CX = CB$ i $\sphericalangle DCX = 30° = \sphericalangle YCB$, to trójkąty DCX i YCB są przystające, więc $DX = BY$. Zatem $AX = DX = BY = AY = XY$, czyli trójkąt AXY jest równoboczny, a w związku z tym APQ również.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych dodatnich A o następującej własności: suma elementów dowolnego skończonego podzbioru A **nie** jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku większym od 1.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Istnieje.

Wykażemy, że zbiór $A = \{2^n 3^{n+1} : n \geqslant 2\}$ spełnia warunki zadania. W istocie, dla $n_1 < \ldots < n_k$ możemy zapisać

$$2^{n_1}3^{n_1+1} + \ldots + 2^{n_k}3^{n_k+1} = 2^{n_1}3^{n_1+1}x,$$

gdzie liczba x jest względnie pierwsza z 6. Gdyby więc ta suma była p-tą potęgą liczby całkowitej, p musiałoby dzielić jednocześnie n_1 i n_1+1, co jest niemożliwe dla $p > 1$.

3. W turnieju rozgrywanym systemem „każdy z każdym” (bez remisów) każdy zawodnik, który każdego innego pokonał bezpośrednio lub pośrednio, otrzymał nagrodę (gracz A pokonał gracza C pośrednio, jeśli pokonał pewnego zawodnika B, który wygrał z C). Dowieść, że jeżeli przyznana została tylko jedna nagroda, to otrzymał ją zawodnik, który wszystkich innych pokonał bezpośrednio.

Rozwiązanie:

Niech A będzie jedynym zawodnikiem, który otrzymał nagrodę. Niech U będzie zbiorem tych zawodników, którzy wygrali z A, a V zbiorem tych zawodników, którzy przegrali z A. Przypuśćmy wbrew tezie zadania, że zbiór U jest niepusty. Weźmy pod uwagę gracza $B \in U$, który bezpośrednio pokonał największą liczbę przeciwników ze zbioru U.

Jeżeli C jest dowolnym graczem ze zbioru U, który wygrał z B, to wśród zawodników ze zbioru U, którzy przegrali z B, znajdzie się co najmniej jeden gracz, który wygrał z C (w przeciwnym razie gracz C miałby w zbiorze U więcej przeciwników pokonanych bezpośrednio niż B). Zatem B pokonał bezpośrednio lub pośrednio każdego zawodnika ze zbioru U.

Z drugiej strony B pokonał bezpośrednio zawodnika A, więc pokonał pośrednio wszystkich zawodników ze zbioru V. W takim razie także powinien on dostać nagrodę, wbrew założeniu, że nagrodę otrzymał tylko zawodnik A. Sprzeczność kończy dowód.

4. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d takich, że $a+b+c+d=4$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{a^3+4}+\frac{b}{b^3+4}+\frac{c}{c^3+4}+\frac{d}{d^3+4} \leqslant \frac{4}{5}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I.

Wykażemy najpierw, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi nierówność

$$(*) \qquad \frac{x}{x^3+4} \leqslant \frac{2x+3}{25}.$$

Przekształcając równoważnie otrzymujemy kolejno

$$25x \leqslant (2x+3)(x^3+4),$$

$$25x \leqslant 2x^4+3x^3+8x+12,$$

$$17x \leqslant 2x^4+3x^3+12.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

Wykorzystując wcześniej udowodnioną nierówność dostajemy

$$\frac{a}{a^3+4}+\frac{b}{b^3+4}+\frac{c}{c^3+4}+\frac{d}{d^3+4} \leqslant \frac{2a+3}{25}+\frac{2b+3}{25}+\frac{2c+3}{25}+\frac{2d+3}{25} =$$

$$= \frac{2(a+b+c+d)+12}{25} = \frac{4}{5}.$$

Uwaga.

Nierówność $(*)$ bierze się z pomysłu przeszacowania funkcji $f(x) = \frac{x}{x^3+4}$ przez styczną do tej funkcji w punkcie $x = 1$.

Sposób II.

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy dla każdej liczby dodatniej

$$x^3 + 1 + 1 \geqslant 3x,$$

czyli po przekształceniu

$$\frac{x}{x^3+4} \leqslant \frac{x}{3x+2}.$$

Szacując w ten sposób każdy z ułamków wnosimy, że wystarczy dowieść nierówności

$$\frac{a}{3a+2} + \frac{b}{3b+2} + \frac{c}{3c+2} + \frac{d}{3d+2} \leqslant \frac{4}{5}.$$

Przekształcając równoważnie otrzymujemy kolejno

$$\frac{3a}{3a+2} + \frac{3b}{3b+2} + \frac{3c}{3c+2} + \frac{3d}{3d+2} \leqslant \frac{12}{5},$$

$$4 \leqslant \frac{12}{5} + \frac{2}{3a+2} + \frac{2}{3b+2} + \frac{2}{3c+2} + \frac{2}{3d+2},$$

$$(*) \qquad \frac{4}{5} \leqslant \frac{1}{3a+2} + \frac{1}{3b+2} + \frac{1}{3c+2} + \frac{1}{3d+2}.$$

Wykorzystując nierówność Cauchy'ego-Schwarza dostajemy

$$\frac{1}{3a+2} + \frac{1}{3b+2} + \frac{1}{3c+2} + \frac{1}{3d+2} \geqslant \frac{4^2}{3(a+b+c+d)+8} = \frac{4}{5},$$

co dowodzi nierówności $(*)$ i tym samym kończy rozwiązanie zadania.

5. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x+y) = \max(f(x), y) + \min(f(y), x).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a = f(0)$. Po podstawieniu $y = 0$ oraz $x = 0$ dostajemy równości:

$$\begin{cases} f(x) = \max(f(x), 0) + \min(a, x) \\ f(y) = \max(a, y) + \min(f(y), 0) \end{cases}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y. Podstawiając do otrzymanego układu równości $x = y$ i sumując stronami otrzymujemy

$$2f(x) = (\max(f(x), 0) + \min(f(x), 0)) + (\max(a, x) + \min(a, x)) = f(x) + x + a,$$

co implikuje $f(x) = x + a$. Podstawiając teraz do wyjściowej równości $x = a$, $y = 2a$ dostajemy

$$4a = 2a + \min(3a, a),$$

co daje $a = 0$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcja $f(x) = x$ spełnia warunki zadania.

6. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC, zaś odcinki AH_A, BH_B i CH_C są jego wysokościami. Punkty O_A, O_B i O_C są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach BOC, COA i AOB. Wykazać, że proste O_AH_A, O_BH_B i O_CH_C mają punkt wspólny.

Rozwiązanie:

Z równości $AO_C = OO_C$ i $AO_B = OO_B$ wnosimy, że punkty O_B i O_C leżą na symetralnej odcinka AO, więc $O_BO_C \perp AO$. Skoro

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle H_AAC = 90^\circ - \sphericalangle BCA = 90^\circ - \sphericalangle H_BH_CA,$$

to $AO \perp H_BH_C$, skąd wniosek, że proste O_BO_C i H_BH_C są równoległe. Analogicznie dowodzimy, że proste O_AO_C i H_AH_C są równoległe oraz proste O_AO_B i H_AH_B są równoległe. Trójkąty $O_AO_BO_C$ i $H_AH_BH_C$ nie są przystające, gdyż okrąg ω o środku O i promieniu $R/2$ (gdzie R to promień okręgu opisanego na trójkącie ABC) jest okręgiem wpisanym w trójkąt $O_AO_BO_C$, zaś okrąg opisany na trójkącie $H_AH_BH_C$ to okrąg dziewięciu punktów i ma promień także równy $R/2$, a więc taki sam jak okrąg ω. Stąd i z wcześniejszych równoległości wynika, że trójkąty $O_AO_BO_C$ i $H_AH_BH_C$ są jednokładne — środek tej jednokładności (o skali dodatniej) to szukany punkt wspólny prostych O_AH_A, O_BH_B i O_CH_C.

7. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie m, dla których istnieją liczby całkowite x, y, niepodzielne przez 7, spełniające równość

$$7^m = x^2 + xy + y^2.$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wszystkie liczby całkowite dodatnie m spełniają warunki zadania.

Na początku udowodnimy indukcyjnie, że dla dowolnego całkowitego $m \geqslant 1$, równanie

$$7^m = a^2 + 3b^2$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych niepodzielnych przez 7.

Dla $m = 1$ wystarczy zauważyć, że $7 = 2^2 + 3 \cdot 1^2$.

Załóżmy teraz, że $7^m = a^2 + 3b^2$, gdzie żadna z liczb a, b nie jest podzielna przez 7. Używając tożsamości

$$(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = (ac + 3bd)^2 + 3(ad - bc)^2$$

prawdziwej dla dowolnych a, b, c, d, dostajemy następujące równości:

$$7^{m+1} = 7^m \cdot 7 = (a^2 + 3b^2)(2^2 + 3 \cdot 1^2) = (2a + 3b)^2 + 3(a - 2b)^2,$$

$$7^{m+1} = 7^m \cdot 7 = (a^2 + 3b^2)(2^2 + 3 \cdot (-1)^2) = (2a - 3b)^2 + 3(a + 2b)^2.$$

Zauważmy teraz, że liczby $2a + 3b$ i $2a - 3b$ nie mogą jednocześnie dzielić się przez 7. Gdyby tak było, ich suma równa $4a$ również dzieliłaby się przez 7, co stoi w sprzeczności z założeniem, że a nie jest podzielna przez 7. Wynika z tego, że przynajmniej jedna z powyższych równości daje nam żądane przedstawienie 7^{m+1}, co kończy dowód indukcyjny.

Do zakończenia rozwiązania wystarczy skorzystać z tożsamości

$$a^2 + 3b^2 = (a - b)^2 + (a - b)(2b) + (2b)^2,$$

oraz zauważyć, że jeśli $a^2 + 3b^2 = 7^m$ i liczby a, b nie są podzielne przez 7, to liczby $a - b$, $2b$ również nie są podzielne przez 7.

8. Na jednym polu nieskończonej szachownicy (wypełniającej całą płaszczyznę) stoi pionek, pozostałe pola są wolne. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu wybieramy pole zajęte przez pionek i sąsiadujące (mające boki wspólne) z co najmniej dwoma polami wolnymi, usuwamy pionek z wybranego pola i stawiamy pionki na dowolnych dwóch wolnych polach sąsiednich. Wykazać, że istnieje taki skończony zbiór pól Z, że niezależnie od wykonywanych ruchów zawsze co najmniej jedno z pól zbioru Z będzie zajęte.

Rozwiązanie:

Numerujemy rzędy poziome oraz rzędy pionowe kolejnymi liczbami całkowitymi. Każde pole zostało oznaczone parą liczb całkowitych. Przyjmijmy, że pionek w pozycji startowej stoi na polu $(0, 0)$.

Wagą pola (i, j) nazwijmy liczbę $2^{-|i|-|j|}$, zaś wagą zbioru pól sumę wag wszystkich pól w tym zbiorze. Zauważmy teraz, że waga zbioru pól zajętych przez pionki nie zmniejsza się przy wykonywaniu ruchów opisanych w treści zadania, więc jest równa co najmniej 1.

Waga rzędu poziomego, przechodzącego przez $(0,0)$, wynosi

$$1+2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)=3.$$

Waga każdego z rzędów przyległych do niego jest dwukrotnie mniejsza, waga kolejnych dwóch czterokrotnie mniejsza, itd. Waga całej szachownicy wynosi więc

$$3+2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)=9.$$

Aby dokończyć rozwiązanie zadania, wystarczy wskazać zbiór Z o wadze większej niż 8. Na całej szachownicy mamy jedno pole o wadze 1, cztery pola o wadze $1/2$, osiem pól o wadze $1/4$, dwanaście pól o wadze $1/8$, itd.; $4n$ pól o wadze 2^{-n} dla $n\geqslant 1$. Weźmy wszystkie pola o wagach równych co najmniej $\frac{1}{16}$ i siedemnaście pól o wadze $\frac{1}{32}$. Wtedy suma wag wszystkich wybranych pól wynosi

$$1+4\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{1}{4}+12\cdot\frac{1}{8}+16\cdot\frac{1}{16}+17\cdot\frac{1}{32}=8\frac{1}{32}.$$

9. Rozstrzygnąć, czy można wpisać w pola nieskończonej szachownicy liczby całkowite dodatnie tak, aby suma liczb wpisanych w każdy prostokąt $m\times n$, gdzie $m,n>2017$, była podzielna przez $m+n$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie można.

Wybierzmy dowolne pole szachownicy. Niech $k>2017$ będzie dowolną liczbą całkowitą i przyjmijmy $N=2k+1$. Dobierzmy kwadrat $N\times N$ tak, żeby wybrane pole było jego środkowym polem. Zauważmy, że kwadrat ten składa się z czterech prostokątów $k\times(k+1)$ oraz właśnie tego środkowego pola. Z założenia suma liczb w kwadracie $N\times N$ dzieli się przez N oraz suma liczb w każdym prostokącie $k\times(k+1)$ również dzieli się przez $N=k+(k+1)$. W takim razie liczba wpisana w środkowe pole kwadratu $N\times N$ także dzieli się przez N. Ponieważ k było wybrane dowolnie, więc dzieli się ona przez dowolnie dużą liczbę nieparzystą, zatem musi być zerem wbrew założeniu w treści zadania.

10. Niech f będzie unormowanym wielomianem stopnia $n\geqslant 1$ o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że istnieją takie unormowane wielomiany g i h o współczynnikach rzeczywistych, że tożsamość

$$f(x)=\frac{g(x)+h(x)}{2}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x, oraz wielomiany g i h mają komplet pierwiastków rzeczywistych.

Uwaga I: Wielomian nazywamy unormowanym, jeśli jego współczynnik przy najwyższej potędze wynosi 1.

Uwaga II: Wielomian ma komplet pierwiastków rzeczywistych, jeśli można go zapisać w postaci $c(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$ *dla* $c,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *rzeczywistych.*

Rozwiązanie:

Niech $x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że dla $i=1,2,\ldots,n$ zachodzą warunki:

$$f(i)=\frac{x_i+y_i}{2},\qquad \operatorname{sgn}(x_i)=(-1)^i,\ \operatorname{sgn}(y_i)=(-1)^{i+1}.$$

Oczywiście takie liczby można dobrać, ponieważ każda liczba rzeczywista jest sumą liczby dodatniej i liczby ujemnej. Definiujemy g_1 jako wielomian stopnia co najwyżej $n-1$, spełniający warunki:

$$g_1(1)=x_1-1^n,\ g_1(2)=x_2-2^n,\ \ldots,\ g_1(n)=x_n-n^n.$$

Taki wielomian istnieje i można go wyznaczyć za pomocą wzorów interpolacyjnych. Analogicznie definiujemy wielomian h_1 przy użyciu ciągu wartości $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$.

Udowodnimy, że wielomian $g(x)=x^n+g_1(x)$ ma komplet pierwiastków rzeczywistych. Istotnie, dla $k=1,2,\ldots,n$ mamy $g(k)=k^n+g_1(k)=x_k$. Oznacza to, że $\operatorname{sgn}(g(k))=(-1)^k$. Ponieważ, dla $k=1,2,\ldots,n-1$ mamy $\operatorname{sgn}(g(k))=-\operatorname{sgn}(g(k+1))$ to w każdym z przedziałów $(1,2)$, $(2,3)$, ..., $(n-1,n)$ wielomian g ma pierwiastek. Oznacza to, że g ma co najmniej $n-1$ pierwiastków rzeczywistych. Jednak jest jasne, że wielomian stopnia n nie może mieć dokładnie $n-1$ pierwiastków rzeczywistych, więc g ma n pierwiastków rzeczywistych. Analogicznie dowodzimy, że h ma n pierwiastków rzeczywistych.

Ponieważ wielomiany $f(x)-x^n$ oraz $\frac{g_1(x)+h_1(x)}{2}$ przyjmują te same wartości w punktach $1,2,\ldots,n$ i są stopnia co najwyżej $n-1$, więc są równe. Stąd dostajemy, że $f(x)=\frac{g(x)+h(x)}{2}$.

11. Dane są okręgi O_1,O_2 styczne wewnętrznie w punkcie M. Na okręgu O_1 wybieramy punkt A różny od M taki, że odcinek MA **nie** jest średnicą O_1. Różne punkty $B,\ C$ leżą na okręgu O_2 tak, że proste $AB,\ AC$ są styczne do O_2. Proste $BM,\ CM$ przecinają O_1 odpowiednio w punktach $E,\ F$. Prosta styczna do O_1 w punkcie A przecina prostą EF w punkcie X. Wykazać, że niezależnie od wyboru punktu A tak skonstruowane punkty X leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Sposób I.

Udowodnimy, że wszystkie możliwe punkty X leżą na wspólnej stycznej do O_1 i O_2 przechodzącej przez punkt M.

W dowodzie wykorzystamy następujący

Lemat

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wówczas styczne do tego okręgu w punktach A i C przecinają się na prostej BD wtedy i tylko wtedy, gdy $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ (taki czworokąt nazywamy harmonicznym).

Dowód lematu

Jeśli rozważane styczne przecinają się na prostej BD w punkcie P, to z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że trójkąty APD i BPA są podobne oraz trójkąty CPD i BPC są podobne. Zatem

$$\frac{AD}{AB} = \frac{PD}{AP} = \frac{PD}{CP} = \frac{CD}{BC},$$

czyli $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Załóżmy teraz, że prawdziwa jest równość w tezie lematu. Niech P będzie punktem przecięcia prostej BD i stycznej w punkcie A do okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Przypuśćmy, że druga styczna poprowadzona z punktu P do tego okręgu jest styczna do niego w punkcie $C' \neq C$. Wtedy korzystając z założonej równości i poprzednio udowodnionej implikacji dla czworokąta $ABC'D$ mamy

$$\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{C'D}{BC'}.$$

W takim razie trójkąty BCD i $BC'D$ mające dodatkowo jednakowe kąty przy wierzchołkach C i C' są podobne. Ponieważ trójkąty te mają wspólny bok BD, więc są przystające, czyli $C = C'$ wbrew uczynionemu przypuszczeniu. Dowód lematu jest więc zakończony.

Jednokładność o środku M przekształcająca okrąg O_2 na okrąg O_1 przeprowadza proste AB i AC na styczne do okręgu O_1 w punktach E i F. Stąd wniosek, że styczne te mają punkt wspólny leżący na prostej AM (obraz punktu A). Korzystając dwukrotnie z lematu wnosimy, że wówczas $AE \cdot FM = AF \cdot EM$, więc styczne do okręgu O_1 w punktach A i M przecinają się na prostej EF. Innymi słowy punkt X należy do stycznej do okręgu O_1 w punkcie M.

Sposób II.

Tym razem skorzystamy z następującego lematu:

Lemat

Styczne do pewnego okręgu w punktach A i C przecinają się w punkcie P. Pewna prosta przechodząca przez punkt P przecina ten okrąg w punktach B i D, a odcinek AC w punkcie Q. Wówczas

$$\frac{DP}{BP} = \frac{DQ}{BQ}.$$

Dowód lematu

Ponieważ $\sphericalangle PAD = \sphericalangle PBA$, to trójkąty PAD i PBA są podobne, więc

$$\frac{DP}{BP} = \frac{[PAD]}{[PBA]} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2.$$

Skoro $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle ABC$, to $\sin\sphericalangle ADC = \sin\sphericalangle ABC$. Stąd i z lematu z poprzedniego sposobu otrzymujemy

$$\frac{DQ}{BQ} = \frac{[ADC]}{[ABC]} = \frac{\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin\sphericalangle ADC}{\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\sphericalangle ABC} = \frac{AD\cdot CD}{AB\cdot BC} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2,$$

co kończy dowód lematu.

Przyjmijmy, że prosta AM przecina odcinki BC i EF odpowiednio w punktach P i R, a okrąg O_1 ponownie w punkcie Q. Wówczas korzystając z lematu otrzymujemy

$$\frac{QP}{PM} = \frac{AQ}{AM}.$$

Jednokładność o środku M i skali k przekształcająca okrąg O_1 na okrąg O_2 przeprowadza prostą BC na EF, a więc punkt P na punkt R oraz przeprowadza punkt Q na punkt A. W związku z tym

$$AM = k\cdot QM \quad \text{oraz} \quad RM = k\cdot PM.$$

Wstawiając te zależności do wcześniejszej proporcji otrzymujemy

$$\frac{QP}{PM} = \frac{AQ}{AM} = \frac{AM-QM}{AM} = \frac{(k-1)\cdot QM}{k\cdot QM} = \frac{k-1}{k},$$

skąd

$$RP = RM-PM = (k-1)\cdot PM = k\cdot QP = k\cdot QM-k\cdot PM = AM-RM = AR.$$

Prosta EF jest równoległa do prostej BC, a skoro przechodzi przez środek R odcinka AP, to jest jednakowo odległa od punktu A i prostej BC, w szczególności połowi odcinki AC i AB. W związku z tym prosta EF jest osią potęgową punktu A (czyli zdegenerowanego okręgu o środku A i promieniu 0) i okręgu O_1. Prosta AX jest osią potęgową punktu A i okręgu O_2. W takim razie punkt X ich przecięcia leży na osi potęgowej okręgów O_1 i O_2, czyli wspólnej ich stycznej przechodzącej przez punkt M.

12. Ciąg (a_n) jest zdefiniowany rekurencyjnie:

$$a_0 = 4, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2.$$

Udowodnić, że jeśli liczba pierwsza $p > 2$ dzieli a_n, to $2^{n+2} \mid p^2 - 1$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ zachodzi równość $\alpha + \alpha^{-1} = 4$. Stosując indukcję matematyczną dowodzimy, że ciąg (a_n) ma wzór ogólny

$$a_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}.$$

Istotnie

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 = (\alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n})^2 - 2 = \alpha^{2^{n+1}} + \alpha^{-2^{n+1}} + 2 - 2 = \alpha^{2^{n+1}} + \alpha^{-2^{n+1}}.$$

Ustalmy liczbę pierwszą $p > 2$. Jeżeli istnieje taka liczba naturalna k, że $k^2 \equiv 3 \pmod{p}$, to wyrazy ciągu modulo p dane są wzorami

$$a_n \equiv (2+k)^{2^n} + (2+k)^{-2^n} \pmod{p}.$$

Jeżeli $p \mid a_n$, to

$$(2+k)^{2^n} + (2+k)^{-2^n} \equiv 0 \pmod{p},$$

czyli $(2+k)^{2^{n+1}} \equiv -1 \pmod{p}$. Podnosząc tę kongruencję do kwadratu dostajemy, że $(2+k)^{2^{n+2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Niech g będzie najmniejszą taką liczbą naturalną, że $(2+k)^g \equiv 1 \pmod{p}$. Jest jasne, że $(2+k)^m \equiv 1 \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \mid m$. Mamy więc $g \mid 2^{n+2}$ oraz $g \nmid 2^{n+1}$, stąd $g = 2^{n+2}$. Ponadto, z małego twierdzenia Fermata wynika, że $(2+k)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Stąd dostajemy, że $2^{n+2} = g \mid p-1 \mid p^2-1$, czyli tezę zadania.

Jeżeli 3 nie jest resztą kwadratową modulo p, to rozważamy liczby postaci $a + b\sqrt{3}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$. Powiemy, że $a + b\sqrt{3} \equiv c + d\sqrt{3} \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \equiv c \pmod{p}$ i $b \equiv d \pmod{p}$. Niech $p \mid a_n$. Wtedy

$$(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n} \equiv 0 \pmod{p},$$

czyli

$$(2+\sqrt{3})^{2^{n+1}} \equiv -1 \pmod{p}$$

i podnosząc do kwadratu dostajemy

$$(2+\sqrt{3})^{2^{n+2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Udowodnimy teraz, że $(2+\sqrt{3})^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}$. W tym celu rozważmy zbiór iloczynów postaci $(a+b\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$ po wszystkich $a, b \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ i $a \neq 0$ lub $b \neq 0$. Wszystkie te iloczyny są parami różne, wobec tego wymnażając je dostajemy

$$(2+\sqrt{3})^{p^2-1} \prod_{a+b\sqrt{3}\neq 0} (a+b\sqrt{3}) \equiv \prod_{a+b\sqrt{3}\neq 0} (a+b\sqrt{3}) \pmod{p},$$

więc

$$(2+\sqrt{3})^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wróćmy do rozwiązania zadania. Niech g będzie najmniejszą taką liczbą naturalną, że $(2+\sqrt{3})^g \equiv 1 \pmod{p}$. Jest jasne, że $(2+\sqrt{3})^m \equiv 1 \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \mid m$. Mamy więc $g \mid 2^{n+2}$ oraz $g \nmid 2^{n+1}$, stąd $g = 2^{n+2}$. Ponadto $(2+\sqrt{3})^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}$, zatem $2^{n+2} = g \mid p^2 - 1$.

13. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieją liczby całkowite dodatnie $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ spełniające równanie

$$\frac{1}{10^n} = \frac{1}{n_1!} + \frac{1}{n_2!} + \ldots + \frac{1}{n_k!}.$$

Rozwiązanie:
Odpowiedź: Nie ma takich liczb.
Przemnóżmy daną równość stronami przez $10^n \cdot n_k!$. Mamy

$$n_k! = 10^n \left(\frac{n_k!}{n_1!} + \frac{n_k!}{n_2!} + \ldots + \frac{n_k!}{n_{k-1}!} + 1 \right)$$

Lewa strona równania jest podzielna przez $M := n_k(n_k - 1)$. Ponieważ dla $\ell \leqslant k-2$ liczba $\frac{n_k!}{n_\ell!}$ jest podzielna przez M, więc

$$\mathrm{NWD}(M, \frac{n_k!}{n_1!} + \frac{n_k!}{n_2!} + \ldots + \frac{n_k!}{n_{k-1}!} + 1) = \mathrm{NWD}(M, n_k + 1) \in \{1, 2\}.$$

Oznacza to, że $M \mid 2 \cdot 10^n$, więc liczba M ma w rozkładzie na czynniki pierwsze tylko liczby 2 i 5. Zadanie sprowadza się więc do rozwiązania równania

$$n_k(n_k - 1) = 2^a \cdot 5^b$$

w liczbach całkowitych dodatnich. Ponieważ $\mathrm{NWD}(n_k, n_k - 1) = 1$, więc otrzymujemy $n_k = 2^a$ i $n_k - 1 = 5^b$ lub $n_k - 1 = 2^a$ i $n_k = 5^b$. Oba przypadki prowadzą do zależności $2^a - 5^b = \pm 1$. Dla $a = 1$ jedynie $b = 0$ jest rozwiązaniem. Jeżeli $a \geqslant 2$, to rozpatrując reszty z dzielenia przez 4 dostaniemy, że równość $2^a - 5^b = 1$ nie jest możliwa. Zatem $5^b - 1 = 2^a$. Jeżeli b jest liczbą nieparzystą, to $5^b - 1 \equiv 4 \pmod{8}$ i w tym przypadku jedynie $b = 1$, $a = 2$ jest rozwiązaniem. Jeżeli b jest liczbą parzystą, to $5^b - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, zatem w tym przypadku nie ma rozwiązań. Ostatecznie jedynymi możliwymi wartościami n_k są 2 i 5.

Dla $n_k = 2$ mamy $\frac{1}{n_k!} = \frac{1}{2} > \frac{1}{10}$. Natomiast dla $n_k = 5$ mamy $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$ oraz $\frac{1}{5!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{20}$. Nie możemy brać $n_i < 4$, gdyż wówczas $\frac{1}{n_i!} > \frac{1}{10}$. W takim razie dane równanie nie ma rozwiązań.

14. Funkcję $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ nazwiemy *gęstą* jeżeli dla dowolnej liczby wymiernej c takiej, że $f(x) < c < f(y)$, dla pewnych całkowitych $x,\ y$, istnieje taka liczba całkowita z, że $f(z) = c$.

Znaleźć wszystkie funkcje gęste f spełniające równanie

$$f(x) + f(y) + f(z) = f(x)f(y)f(z)$$

dla wszystkich liczb całkowitych takich, że $x + y + z = 0$.

Rozwiązanie:

Podstawmy najpierw $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, dostajemy $3f(0) = f(0)^3$, co na mocy wymierności $f(0)$ daje $f(0) = 0$. Wstawiając $(x, y, z) = (0, x, -x)$ dostajemy

$$f(-x) = -f(x).$$

Podstawiając $(x, y, z) = (2x, -x, -x)$ i korzystając z powyższej równości otrzymujemy $f(2x) - 2f(x) = f(x)^2 \cdot f(2x)$ co daje:

$$f(2x)(1 - f(x)^2) = 2f(x).$$

Gdyby dla pewnego $a \in \mathbb{Z}$ zachodziło $f(a) = \pm 1$, to podstawiając $x = a$ powyżej dostalibyśmy $f(a) = 0$, co jest sprzecznością. Przypuśćmy teraz, że istnieje taka liczba całkowita b, że $f(b) > 1$. Mamy $f(b) > 1 > f(0)$, czyli na mocy gęstości funkcji f istnieje taka liczba całkowita c, że $f(c) = 1$. To jednak nie jest możliwe, gdyż ten przypadek przed chwilą wykluczyliśmy. W związku z tym funkcja f nie przyjmuje wartości większych niż 1. Analogicznie wykazujemy, że funkcja f nie przyjmuje wartości mniejszych niż -1. Podsumowując, dla każdego całkowitego x zachodzi $|f(x)| < 1$.

Otrzymujemy więc dla każdej liczby całkowitej x nierówność

$$|f(2x)| > |f(2x)(1 - f(x)^2)| = |2f(x)| = 2|f(x)|,$$

co przez indukcję daje nierówności

$$|f(2^k x)| > 2^k |f(x)|$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej k. To natomiast wobec ograniczenia $|f(x)| < 1$ może być prawdziwe tylko jeśli $f(x) = 0$. Otrzymaliśmy więc, że dla każdej liczby całkowitej x zachodzi równość $f(x) = 0$. Bespośrednio sprawdzamy, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

15. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. Na płaszczyźnie rysujemy $3n - 1$ punktów tak, że żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Wykazać, że istnieje $2n$ punktów których otoczka wypukła **nie** jest trójkątem.

Uwaga: Otoczka wypukła punktów to wielokąt wypukły o najmniejszym polu zawierający te punkty.

Rozwiązanie:

Załóżmy nie wprost, że otoczka wypukła każdego zbioru zawierającego $2n$ punktów jest trójkątem. Poczyńmy wpierw obserwację:

Otoczka wypukła każdego zbioru zawierającego co najmniej $2n$ punktów jest trójkątem.

Udowodnimy to indukcyjnie. Niech Z będzie zbiorem, który zawiera $k > 2n$ punktów oraz dla każdego zbioru Z' zawierającego $k-1$ punktów otoczka wypukła Z' jest trójkątem. Przypuśćmy nie wprost, że otoczka wypukła zbioru Z nie jest trójkątem. Jeżeli wewnątrz niej istnieje jakiś punkt A, to zbiór $Z' = Z \setminus \{A\}$ zawiera $k-1$ punktów, a jego otoczka wypukła jest taka sama jak otoczka wypukła zbioru Z, a więc nie jest trójkątem — sprzeczność z założeniem indukcyjnym. Jeśli zaś wewnątrz otoczki wypukłej Z nie ma żadnych punktów, to otoczka wypukła Z jest k-kątem wypukłym. Niech A będzie dowolnym punktem ze zbioru Z. Wtedy otoczką wypukłą zbioru $Z' = Z \setminus \{A\}$ jest $(k-1)$-kąt wypukły. Ponieważ $k-1 > 2n-1 \geqslant 3$, więc otrzymujemy sprzeczność — założenie indukcyjne głosi, że otoczką wypukłą zbioru Z' jest trójkąt. To kończy dowód obserwacji.

Oznaczmy zbiór wszystkich punktów przez X. Niech punkty $A_1,\ B_1,\ C_1$ będą wierzchołkami otoczki wypukłej zbioru X. Korzystając z wcześniej udowodnionej obserwacji definiujemy rekurencyjnie ciąg parami różnych punktów $A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots,\ A_n$ w następujący sposób: niech A_i będzie takim punktem należącym do zbioru $R = X \setminus \{A_1,\ A_2,\ \ldots A_{i-1}\}$, że $A_iB_1C_1$ jest otoczką wypukłą zbioru R. Analogicznie definiujemy ciąg $B_2,\ B_3, \ldots,\ B_n$ oraz $C_2,\ C_3, \ldots,\ C_n$. Zdefiniowaliśmy w ten sposób $3n$ punktów, więc któreś dwa z nich się pokrywają. Bez straty ogólności przyjmijmy, że dla pewnych $p,\ q$ mamy $A_p = B_q$. We wnętrzach trójkątów $A_1B_qC_1$, $B_1A_pC_1$ jest odpowiednio $3n-3-q$, $3n-3-p$ punktów. Trójkąty te mają rozłączne wnętrza, więc wszystkich punktów (wliczając w to punkty A_1, B_1, C_1, A_p) jest co najmniej

$$3n-3-q+3n-3-p+4 = 6n-2-p-q \geqslant 6n-2-n-n = 4n-2 > 3n-1,$$

co daje sprzeczność, gdyż wszystkich punktów jest dokładnie $3n-1$.

16. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABC. Okręgi o średnicach AH, BH i CH przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach A_1, B_1 i C_1, różnych od wierzchołków trójkąta ABC. Prosta styczna do okręgu ω w punkcie A przecina prostą B_1C_1 w punkcie A_2. Analogicznie definiujemy punkty B_2, C_2. Wykazać, że punkty A_2, B_2, C_2 leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Niech K, L, M będą środkami odpowiednio boków BC, CA, AB trójkąta ABC, a BB' średnicą okręgu ω. Ponieważ $AH \parallel B'C$ i $CH \parallel AB'$, to czworokąt $AHCB'$ jest równoległobokiem. W takim razie punkt H jest obrazem symetrycznym punktu B' względem L, więc te trzy punkty są współliniowe. Skoro $\sphericalangle B'B_1B = 90^\circ = \sphericalangle HB_1B$, to punkty B_1, H, L i B' leżą na jednej prostej. Analogicznie, jeśli CC' jest średnicą okręgu ω, to punkty C_1, H, M i C' leżą na jednej prostej.

Korzystając z potęgi punktu i wniosków z poprzedniego akapitu dostajemy

$$LH \cdot HB_1 = \frac{1}{2}B'H \cdot HB_1 = \frac{1}{2}C'H \cdot HC_1 = MH \cdot HC_1,$$

czyli punkty B_1, C_1, L, M leżą na jednym okręgu. Okrąg opisany na trójkącie AML jest styczny do ω w punkcie A, a więc prosta styczna do okręgu ω w punkcie A jest ich osią potęgową. Prosta B_1C_1 jest osią potęgową okręgu opisanego na czworokącie B_1C_1LM i okręgu ω, a więc punkt A_2 ich przecięcia należy do osi potęgowej okręgu opisanego na trójkącie ALM i na czworokącie B_1C_1LM, czyli prostej LM. W takim razie punkt A_2 jest środkiem potęgowym okręgów opisanych na trójkątach ALM, KLM i ω, czyli należy do osi potęgowej okręgu ω i okręgu opisanego na trójkącie KLM.

Analogicznie uzasadniamy, że punkty B_2 i C_2 należą do osi potęgowej okręgu ω i okręgu opisanego na trójkącie KLM, co kończy rozwiązanie zadania.

17. W grupie osób każdy zna co najmniej jedną osobę (jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A). Udowodnić, że istnieje osoba, dla której średnia liczba znajomych jej znajomych jest nie mniejsza od średniej liczby znajomych wszystkich osób.

Rozwiązanie:

Ponumerujmy osoby liczbami od 1 do n. Dla $v = 1, 2, \ldots, n$ oznaczamy przez $N(v)$ zbiór osób, które znają v. Ponadto niech M będzie liczbą wszystkich znajomości. Niech $w_i = \frac{|N(i)|}{2M}$. Mamy $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Rozważmy średnią ważoną z wagami $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ średniej liczby znajomych znajomych każdej osoby tzn. średnią ważoną liczb $\sum_{j\in N(i)} \frac{|N(j)|}{|N(i)|}$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Mamy

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j\in N(i)} \frac{|N(j)|}{|N(i)|} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|N(i)|}{2M} \cdot \sum_{j\in N(i)} \frac{|N(j)|}{|N(i)|} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2M} \sum_{j\in N(i)} |N(j)| \right) = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in N(i)} |N(j)|.$$

Zauważmy, że liczba $|N(j)|$ występuje w powyższej sumie dokładnie $|N(j)|$ razy. Wobec tego

$$\frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in N(i)} |N(j)| = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{n} |N(i)|^2 \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} |N(i)|\right)^2}{2Mn} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |N(i)|}{n}.$$

Wykazaliśmy, że średnia ważona liczb $\sum_{j\in N(i)} \frac{|N(j)|}{|N(i)|}$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$ jest nie mniejsza niż $\frac{\sum_{i=1}^{n} |N(i)|}{n}$. Oznacza to, że przynajmniej jedna z tych liczba jest nie mniejsza od $\frac{\sum_{i=1}^{n} |N(i)|}{n}$, co było do udowodnienia.

18. Dla liczby całkowitej $n \geqslant 1$ przyjmijmy $F_n = 2^{2^n} + 1$. Wykazać, że jeśli liczba

$$3^{\frac{F_n - 1}{2}} + 1$$

dzieli się przez F_n, to F_n jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że

$$3^{2^{2^n - 1}} \equiv -1 \pmod{F_n} \quad \text{oraz} \quad 3^{2^{2^n}} \equiv 1 \pmod{F_n}.$$

Niech d będzie najmniejszą taką liczbą całkowitą dodatnią, że $3^d \equiv 1 \pmod{F_n}$. Jeżeli $3^x \equiv 1 \pmod{F_n}$, to $d \mid x$. W szczególności $d \mid 2^{2^n}$ oraz $d \nmid 2^{2^n - 1}$, skąd wniosek, że $d = 2^{2^n}$. Z drugiej strony z twierdzenia Eulera wynika, że

$$3^{\varphi(F_n)} \equiv 1 \pmod{F_n},$$

więc

$$2^{2^n} \mid \varphi(F_n) = \varphi(2^{2^n} + 1) \leqslant 2^{2^n}.$$

W takim razie $\varphi(F_n) = F_n - 1$, co ma miejsce tylko wtedy, gdy F_n jest liczbą pierwszą.

19. Okrąg ω jest wpisany w różnoboczny trójkąt ABC. Punkty A_1, B_1, C_1 są środkami odpowiednio boków BC, CA, AB. Prosta przechodząca przez A_1 i różna od BC jest styczna do okręgu ω w punkcie A_2. Analogicznie definiujemy punkty B_2, C_2. Udowodnić, że proste AA_2, BB_2, CC_2 przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że okrąg wpisany ω w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Niech S będzie drugim końcem średnicy SD okręgu ω. Przez T_A oznaczmy punkt styczności okręgu dopisanego o do trójkata ABC z bokiem BC. Rozpatrując jednokładność o środku w punkcie A, która przekształca okrąg ω na okrag o widzimy, że obrazem punktu S jest punkt T_A. Oznaczmy przez $W \neq S$ przecięcie odcinka ST_A z okręgiem ω. Ponieważ SD jest średnicą okręgu ω, więc $\sphericalangle DWT_A = 90°$. Skoro $BD = T_AC$ (znany fakt), to $A_1D = A_1T_A = A_1W$, gdyż trójkat DWT_A jest prostokątny. Zatem prosta A_1W jest styczna do okręgu ω, co oznacza, że $W = A_2$. Jeżeli przez T_B i T_C

oznaczymy punkty styczności okręgów dopisanych do trójkąta ABC odpowiednio z bokami CA i AB, to proste AT_A, BT_B, CT_C przecinają się w punkcie Nagela trójkąta ABC (Czytelnik nieznający tego faktu łatwo go udowodni z twierdzenia Cevy i najmocniejszego twierdzenia geometrii), skąd wniosek, że proste AA_2, BB_2, CC_2 także mają punkt wspólny.

20. Dowieść, że dla dowolnych liczb nieujemnych $x_1, x_2, \dots x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2} < \sqrt{n}.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$a_0 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_i = 1 + x_1^2 + \dots + x_i^2.$$

Z nierówności $a_{i-1} \leqslant a_i$ oraz nierówności Cauchy'ego-Schwarza otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i - a_{i-1}}{a_i^2}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i - a_{i-1}}{a_i a_{i-1}}} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{a_{i-1}} - \frac{1}{a_i}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_{i-1}} - \frac{1}{a_i} \right)} = \sqrt{n \left(1 - \frac{1}{a_n} \right)} < \sqrt{n}.$$

21. Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite k, dla których równanie

$$\mathrm{NWW}(m, n) - \mathrm{NWD}(m, n) = k(m - n)$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n spełniających warunek $m \neq n$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $k = 2$.

Wykażemy najpierw, że dla $k \neq 2$ istnieją liczby m, n spełniające równanie. Dla $k = 1$ wystarczy wziąć $n = 1$ i dowolne $m > 1$. Wtedy bowiem

$$\mathrm{NWW}(m, n) - \mathrm{NWD}(m, n) = m - 1 = k(m - n).$$

Dla $k > 2$ rozważmy $m = k^2 - k - 1$, $n = k - 1$. Wówczas m, n są różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi oraz

$$\mathrm{NWD}(m, n) = \mathrm{NWD}(k(k-1) - 1, k - 1) = \mathrm{NWD}(-1, k - 1) = 1,$$

skąd $\mathrm{NWW}(m,n) = mn$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\mathrm{NWW}(m,n) - \mathrm{NWD}(m,n) &= (k^2-k-1)(k-1) - 1 = k^3 - 2k^2 \\ &= k((k^2-k-1)-(k-1)) = k(m-n),\end{aligned}$$

więc dla $k > 2$ równanie ma rozwiązanie w różnych dodatnich liczbach całkowitych m, n.

Przypuśćmy teraz, że istnieją różne dodatnie liczby całkowite m, n spełniające

$$\mathrm{NWW}(m,n) - \mathrm{NWD}(m,n) = 2(m-n).$$

Niech $d = \mathrm{NWD}(m,n)$ oraz $m = da, n = db$. Wówczas $\mathrm{NWW}(m,n) = dab$, zatem

$$dab - d = 2d(a-b). \quad \text{Stąd}$$

$$2b - 2a + ab = 1, \quad \text{wobec czego} \quad (b-2)(a+2) = -3.$$

Ponieważ $a + 2 > 2$, to musi być $a + 2 = 3$ i $b - 2 = -1$. Ale wtedy $a = 1 = b$, więc również $m = d = n$, co przeczy założeniu $m \neq n$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dla $k = 2$ równanie nie ma rozwiązań w różnych dodatnich liczbach całkowitych m, n.

22. Okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie S. Wykazać, że

$$\frac{KS}{MS} = \frac{AK \cdot BK \cdot CD}{AB \cdot CM \cdot DM}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Niech a, b, c, d będą długościami odcinków stycznych do okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$ poprowadzonych odpowiednio z punktów A, B, C, D. Umieśćmy w tych punktach odpowiednio masy m_A, m_B, m_C, m_D, proporcjonalne do $1/a$, $1/b$, $1/c$, $1/d$. Punkt K jest środkiem masy układu $\{A, B\}$, punkt M zaś — środkiem masy układu $\{C, D\}$. Wobec tego środek masy całego układu $\{A, B, C, D\}$ leży na odcinku KM. Analogicznie dowodzimy, że leży on na odcinku LN. W takim razie musi być to punkt S. Jeżeli teraz masy m_A i m_B przeniesiemy do punktu K, a masy m_C i m_D do punktu M, to środek masy całego układu $\{K, M\}$ pozostanie w punkcie S. Stąd

$$\frac{KS}{MS} = \frac{m_C + m_D}{m_A + m_B} = \frac{1/c + 1/d}{1/a + 1/b} = \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{c+d}{cd} = \frac{AK \cdot BK \cdot CD}{AB \cdot CM \cdot DM}.$$

Sposób II

Z twierdzenia Brianchona wynika, że punkt S leży na odcinkach AC oraz BD. Niech K', M' będą takimi punktami na prostej BD, że proste KK', AC oraz MM' są równoległe. Wtedy z twierdzenia Talesa dostajemy

$$\frac{K'S}{M'S} = \frac{KS}{MS}, \quad \frac{AK}{AB} = \frac{K'S}{BS}, \quad \frac{CD}{CM} = \frac{DS}{M'S}.$$

Mnożąc te zależności stronami otrzymujemy

$$\frac{AK \cdot CD}{AB \cdot CM} = \frac{KS \cdot DS}{MS \cdot BS}.$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$\frac{BS}{DS} = \frac{BK}{DM}.$$

Zauważmy teraz, że $\sphericalangle AKS = \sphericalangle DMS$ (jest to oczywiste, gdy $AB \parallel CD$, gdyż oba kąty są proste; w przeciwnym przypadku proste AB i CD mają punkt wspólny E, a trójkąt KEM jest równoramienny). W takim razie mamy

$$\sphericalangle BKS = 180^\circ - \sphericalangle DMS \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BSK = \sphericalangle DSM.$$

Stosując twierdzenie sinusów otrzymujemy

$$\frac{BS}{\sin \sphericalangle BKS} = \frac{BK}{\sin \sphericalangle BSK} \quad \text{oraz} \quad \frac{DS}{\sin \sphericalangle DMS} = \frac{DM}{\sin \sphericalangle DSM}.$$

Dzieląc obie równości stronami i biorąc pod uwagę wcześniejsze równości kątów dostajemy równość

$$\frac{BS}{DS} = \frac{BK}{DM},$$

co kończy rozwiązanie zadania.

23. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste C spełniające następujący warunek: dla dowolnych (niekoniecznie różnych) dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 istnieją takie parami różne indeksy $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, że

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leqslant C.$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wszystkie liczby spełniające warunki zadania to liczby $C \geqslant \frac{1}{2}$.

Jeżeli $C < \frac{1}{2}$, to rozważmy $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 1, 1, 2, n)$, gdzie n jest taką liczbą naturalną, dla której $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} > C$. Bez trudu sprawdzamy, że wszystkie wyrażenia postaci $\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right|$ są większe niż C.

Udowodnimy teraz, że $C = \frac{1}{2}$ spełnia warunki zadania; stąd oczywiście wyniknie, że wszystkie liczby C większe lub równe $\frac{1}{2}$ również je spełniają. Przypuśćmy, że dla pewnych dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 teza nie jest spełniona. Bez straty ogólności przyjmijmy $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$. Ponieważ $\frac{a_1}{a_4} \leqslant \frac{a_2}{a_3} \leqslant 1$, więc $\frac{a_1}{a_4} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{a_2}{a_3}$, gdyż w przeciwnym razie $\frac{1}{2} > \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_1}{a_4} > 0$. Analogicznie $\frac{a_2}{a_5} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{a_3}{a_4}$. Skoro dodatnie liczby $\frac{a_1}{a_4}$, $\frac{a_2}{a_5}$ są mniejsze niż $\frac{1}{2}$, to również moduł ich różnicy jest mniejszy niż $\frac{1}{2}$, skąd uzyskujemy sprzeczność.

24. Dany jest n-kąt wypukły, którego żadne cztery wierzchołki nie leżą na jednym okręgu. Trójkę jego wierzchołków nazwiemy *puszystą*, jeśli koło opisane na trójkącie o tych wierzchołkach przykrywa cały ten wielokąt. Udowodnić, że istnieją dokładnie $n-2$ trójki puszyste.

Rozwiązanie:

Niech P będzie danym wielokątem. Teza zachodzi trywialnie dla $n = 3$; odtąd będziemy więc zakładać, że P ma co najmniej 4 wierzchołki. Powiemy, że trójkąt o wierzchołkach będących trójką puszystą jest *puszysty*, a każdą przekątną wielokąta P będącą bokiem jakiegoś trójkąta puszystego również nazwiemy *puszystą*. Wykażemy wpierw kilka lematów opisujących strukturę puszystych trójkątów i przekątnych.

Lemat 1. Żadne dwie puszyste przekątne się nie przecinają.

Dowód: Załóżmy wbrew tezie, że przekątne AC i BD są puszyste, gdzie wierzchołki A, B, C, D są parami różne i leżą w tej kolejności na obwodzie wielokąta P. Zauważmy, że $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA > 180°$. Istotnie, gdyby suma kątów ABC i CDA była mniejsza niż $180°$, to punkty B i D leżące po przeciwnych stronach prostej AC nie mogłyby oba leżeć wewnątrz jednego koła o cięciwie AC, natomiast gdyby była ona równa $180°$, to punkty A, B, C, D leżałyby na jednym okręgu, wbrew założeniom zadania. Podobnie $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD > 180°$. Otrzymujemy, że suma kątów w czworokącie $ABCD$ jest większa niż $360°$, sprzeczność.

Lemat 2. Każda puszysta przekątna jest bokiem dokładnie dwóch puszystych trójkątów. Co więcej, jeśli ta przekątna dzieli P na wielokąty P_1, P_2, to jeden z tych puszystych trójkątów jest zawarty w P_1 a drugi w P_2.

Dowód: Rozważmy puszystą przekątną AB dzielącą P na wielokąty P_1, P_2. Zauważmy, że jeśli C jest wierzchołkiem P_1 różnym od A, B, to wszystkie wierzchołki P_1 są zawarte w kole opisanym na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy C jest tak wybrany spośród wierzchołków P_1 różnych od A, B by miara kąta $\sphericalangle ACB$ była najmniejsza. Ponieważ żadne cztery wierzchołki P nie leżą na jednym okręgu, istnieje dokładnie jeden taki wierzchołek; nazwijmy go C_1. Analogicznie znajdujemy wierzchołek C_2 dla wielokąta P_2.

Zauważmy, że jedyne trójki zawierające A, B, które mogą być puszyste, to A, B, C_1 oraz A, B, C_2, gdyż koło opisane na jakiejkolwiek innej takiej trójce wierzchołków nie pokrywa P_1 lub nie pokrywa P_2. Skoro przekątna AB jest puszysta, to jedna z tych trójek jest puszysta; załóżmy bez utraty ogólności, że trójka A, B, C_1 jest puszysta. Wtedy koło opisane na trójkącie ABC_1 przykrywa punkt C_2, skąd $\sphericalangle AC_1B + \sphericalangle BC_2A < 180°$. Wobec tego koło opisane na trójkącie ABC_2 przykrywa punkt C_1. Z wyboru punktu C_1 wynika, że to koło przykrywa cały wielokąt P_1, a zatem trójka A, B, C_2 również jest puszysta. Podsumowując, są dokładnie dwa puszyste trójkąty, których bokiem jest AB: trójkąt ABC_1 zawarty w P_1 oraz trójkąt ABC_2 zawarty w P_2.

Lemat 3. Istnieje co najmniej jedna puszysta przekątna.

Dowód: Wpierw zauważmy, że istnieje co najmniej jedna puszysta trójka A, B, C. Można ją skonstruować biorąc dowolny bok AB wielokąta P i dobierając taki wierzchołek C różny od A, B, by miara kąta ACB była najmniejsza. Skoro P ma co najmniej 4 wierzchołki, to co najmniej jeden z boków trójkąta ABC nie jest bokiem P, a więc jest puszystą przekątną.

Przechodzimy teraz do kluczowej obserwacji strukturalnej. *Triangulacją* wielokąta nazywamy dowolny jego podział na trójkąty przy pomocy parami nieprzecinających się przekątnych.

Lemat 4. Puszyste trójkąty tworzą triangulację P.

Dowód: Z Lematu 1 wynika, że puszyste przekątne parami się nie przecinają, a więc dzielą P na pewną liczbę wielokątów wypukłych. Wystarczy więc wykazać, że każdy z tych wielokątów jest trójkątem. Rozważmy dowolny wielokąt Q z opisanego wyżej podziału. Skoro na mocy Lematu 3 w P jest co najmniej jedna puszysta przekątna, to co najmniej jeden bok Q, powiedzmy AB, jest puszystą przekątną P. Na mocy Lematu 2 istnieje puszysty trójkąt T o boku AB leżący po tej samej stronie prostej AB co Q. Skoro AB jest bokiem Q oraz puszyste przekątne parami się nie przecinają, to T jest zawarty w Q. Jednakże gdybyśmy mieli $T \neq Q$, to jedna z przekątnych Q byłaby puszysta, a zdefiniowaliśmy Q jako jeden z wielokątów, na które wszystkie przekątne puszyste dzielą P. Zatem $Q = T$, czyli istotnie Q jest trójkątem.

Pozostaje wykazać, że triangulacje mają zawsze odpowiednią liczbę trójkątów.

Lemat 5. Każda triangulacja wypukłego n-kąta ($n \geqslant 3$) ma dokładnie $n-2$ trójkąty.

Dowód: Stosujemy indukcję względem n. Dla $n = 3$ teza jest oczywista. Rozważmy zatem dowolny wypukły n-kąt P dla $n > 3$ oraz jego triangulację $\mathcal{T}$, rozumianą jako zbiór trójkątów, na które P został podzielony. Niech AB będzie dowolną przekątną użytą w $\mathcal{T}$. Wówczas przekątna AB dzieli P na dwa wielokąty P_1, P_2, mające odpowiednio k i $n-k+2$ wierzchołków dla pewnego $3 \leqslant k \leqslant n-1$. Jednocześnie $\mathcal{T}$ jest rozłączną sumą pewnych triangulacji $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ odpowiednio wielokątów P_1, P_2. Z założenia indukcyjnego wynika, że $|\mathcal{T}_1| = k-2$ oraz $|\mathcal{T}_2| = n-k$, a zatem $|\mathcal{T}| = n$.

Teza zadania wynika teraz wprost z Lematów 4 i 5.

25. Wykazać, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{b-a}{d+a}+\frac{c-b}{a+b}+\frac{d-c}{b+c}+\frac{a-d}{c+d}\geqslant 0.$$

Rozwiązanie:
Nierówność z zadania jest równoważna nierówności

$$\begin{aligned}4 &\leqslant \left(\frac{b-a}{d+a}+1\right)+\left(\frac{c-b}{a+b}+1\right)+\left(\frac{d-c}{b+c}+1\right)+\left(\frac{a-d}{c+d}+1\right)\\ &=\frac{b+d}{d+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{d+b}{b+c}+\frac{a+c}{c+d}.\end{aligned} \tag{1}$$

Z nierówności między średnimi arytmetyczną i harmoniczną otrzymujemy

$$\frac{b+d}{d+a}+\frac{d+b}{b+c}\geqslant\frac{4}{\frac{d+a}{b+d}+\frac{b+c}{b+d}}=\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+c}{c+d}\geqslant\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}.$$

Dodając otrzymane dwie nierówności stronami dostajemy nierówność (1).

26. Na tablicy napisano iloczyn

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n,$$

gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Wyznaczyć wszystkie takie n, że do niektórych wyrazów tego iloczynu można dopisać symbol ! tak, by wartość uzyskanego iloczynu była kwadratem liczby całkowitej. Dopisanie symbolu ! do wyrazu k zamienia go na wyraz $k!$.

Rozwiązanie:
Odpowiedź: Zbiór rozwiązań zagadnienia to liczby złożone oraz liczba 1.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to niezależnie od dopisanych symboli ! dany iloczyn będzie podzielny przez p, ale niepodzielny przez p^2. Oznacza to, że wartość tego iloczynu nie będzie kwadratem liczby całkowitej.

Dla $n=1$ warunki zadania są w oczywisty sposób spełnione. Jeżeli natomiast n jest liczbą złożoną, to definiujemy $a_{n+1}=1$ oraz $a_k=a_{k+1}\cdot k!$, jeżeli $k-1=p$ jest liczbą pierwszą i wykładnik przy p w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby a_{k+1} jest jest parzysty, oraz $a_k = a_{k+1} \cdot k$ w przeciwnym razie. Łatwo zauważyć, że zgodnie z naszą konstrukcją w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby a_1, która jest iloczynem żądanej postaci, każda liczba pierwsza występuje w parzystej potędze, czyli a_1 jest kwadratem liczby całkowitej.

27. Danych jest $2n-1$ dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnić, że można tak wybrać pewne n z tych zbiorów, aby ich suma miała co najwyżej $\frac{2}{3}n + 1$ elementów.

Rozwiązanie:

Udowodnimy indukcyjnie ogólniejszą tezę: dla $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{2n-1}{3}$ możemy spośród $2n-1$ dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ usunąć $3k$ podzbiorów w taki sposób, że suma mnogościowa pozostałych podzbiorów ma moc nieprzekraczającą $n-k$. Dla $k = \frac{1}{3}n - 1$ będzie to oznaczało, iż możemy wybrać pewne $(2n-1) - 3\left(\frac{1}{3}n - 1\right) = n+2$ zbiorów tak, aby ich suma miała co najwyżej $n - \left(\frac{1}{3}n - 1\right) = \frac{2}{3}n + 1$ elementów, co zakończy rozwiązanie zadania.

Przypadek $k = 0$ jest trywialny. Załóżmy dalej, że $k \geqslant 1$ oraz, że usunęliśmy $3(k-1)$ podzbiorów w taki sposób, że suma mnogościowa pozostałych podzbiorów ma S_{k-1} elementów, gdzie $S_{k-1} \leqslant n-k+1$.

Jeśli $S_{k-1} < n-k+1$, to usuwając dodatkowo dowolne trzy dotychczas nieusunięte podzbiory usuniemy w sumie $3k$ podzbiorów w taki sposób, że suma mnogościowa pozostałych podzbiorów ma co najwyżej $n-k$ elementów.

Jeśli natomiast $S_{k-1} = n-k+1$, to ponieważ liczba nieusuniętych dwuelementowych podzbiorów wynosi

$$2n - 1 - 3(k-1) < 2(n-k+1),$$

więc istnieje element x_k z tej sumy, który jest zawarty w co najwyżej trzech podzbiorach. Możemy zatem usunąć takie trzy podzbiory, że suma mnogościowa pozostałych $2n-1-3k$ podzbiorów nie zawiera x_k, co kończy dowód indukcyjny.

28. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma środek w punkcie I oraz jest styczny do boku BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Prosta przechodząca przez I i prostopadła do AI przecina boki AB, AC odpowiednio w punktach F, E. Okrąg opisany na trójkącie AEF przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie X różnym od A. Wykazać, że proste XD i AM przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Rozwiązanie:
Sposób I

Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez ω. Niech Y będzie drugim punktem przecięcia prostej XD z okręgiem ω, a Z — drugim punktem przecięcia prostej AM z ω. Wpierw zauważmy, że punkty Y, Z leżą na łuku BC okręgu ω, na którym nie leży punkt A. Dla punktu Z jest to oczywiste, natomiast dla punktu Y wystarczy uzasadnić, że punkt X leży na tym samym łuku BC okręgu ω, co punkt A. Skoro punkty E, F leżą odpowiednio na odcinkach CA, AB, to dla dowolnego punktu X' leżącego na łuku BC okręgu ω, na którym nie leży punkt A, zachodzi

$$\measuredangle EX'F < \measuredangle CX'B = 180^\circ - \measuredangle FAE,$$

a skoro punkty A, X' leżą po przeciwnych stronach prostej EF, to punkt X' nie leży na okręgu opisanym na trójkącie AEF. Wobec tego punkt X leży na tym samym łuku BC okręgu ω, co punkt A.

Teza zadania wyniknie więc z równości

$$\frac{BY}{YC} = \frac{BZ}{ZC}$$

Korzystając z twierdzenia sinusów przekształcamy prawą stronę:

$$\begin{aligned}\frac{BZ}{ZC} &= \frac{\sin\measuredangle BCZ}{\sin\measuredangle ZBC} = \frac{\sin\measuredangle BAM}{\sin\measuredangle MAC} = \frac{\sin\measuredangle BAM}{MB}\cdot\frac{MC}{\sin\measuredangle MAC}\\ &= \frac{\sin\measuredangle MBA}{AM}\cdot\frac{AM}{\sin\measuredangle ACM} = \frac{AC}{AB}.\end{aligned}$$

Analogicznie postępujemy z lewą stroną:

$$\begin{aligned}\frac{BY}{YC} &= \frac{\sin\measuredangle BCY}{\sin\measuredangle YBC} = \frac{\sin\measuredangle BXD}{\sin\measuredangle DXC} = \frac{\sin\measuredangle BXD}{BD}\cdot\frac{CD}{\sin\measuredangle DXC}\cdot\frac{BD}{CD}\\ &= \frac{\sin\measuredangle XDB}{XB}\cdot\frac{XC}{\sin\measuredangle CDX}\cdot\frac{BD}{CD} = \frac{XC}{XB}\cdot\frac{BD}{CD}.\end{aligned}$$

Kąty FBX i ECX są oparte na tej samej cięciwie okręgu ω. Ponadto mamy $\measuredangle XFB = 180^\circ - \measuredangle AFX = 180^\circ - \measuredangle AEX = \measuredangle XEC$. Z cechy podobieństwa kąt–kąt–kąt wynika, że trójkąty XBF i XCE są podobne. Wobec tego

$$\frac{XC}{XB} = \frac{EC}{BF}.$$

Wystarczy więc udowodnić równość

$$\frac{EC}{BF}\cdot\frac{BD}{CD} = \frac{AC}{AB}.$$

Skoro AI jest dwusieczną kąta EAF oraz $AI \perp EF$, to trójkąt AEF jest równoramienny. Bezpośredni rachunek na kątach prowadzi więc do podobieństwa trójkątów BFI, IEC, BIC. Stąd oraz z równości odcinków EI, FI otrzymujemy

$$\frac{EC}{BF} = \frac{EC}{EI} \cdot \frac{FI}{BF} = \left(\frac{CI}{BI}\right)^2.$$

Stosując twierdzenie sinusów w trójkącie ABI oraz korzystając z równości $\sphericalangle AIB = 90^\circ + \sphericalangle ICB$ otrzymujemy

$$\frac{BI}{AB} = \frac{\sin \sphericalangle BAI}{\sin \sphericalangle AIB} = \frac{\sin \sphericalangle BAI}{\cos \sphericalangle ICB}.$$

Analogicznie dostajemy

$$\frac{CI}{AC} = \frac{\sin \sphericalangle IAC}{\cos \sphericalangle CBI}.$$

Ponadto $BD = BI \cos \sphericalangle CBI$ oraz $CD = CI \cos \sphericalangle ICB$. Wobec powyższego oraz na mocy równości kątów BAI, IAC otrzymujemy równość

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CI}{BI} \cdot \frac{\cos \sphericalangle CBI}{\sin \sphericalangle IAC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BAI}{\cos \sphericalangle ICB} = \frac{CI}{BI} \cdot \frac{\frac{BD}{BI}}{\frac{CD}{CI}} = \left(\frac{CI}{BI}\right)^2 \cdot \frac{BD}{CD} = \frac{EC}{BF} \cdot \frac{BD}{CD},$$

do której została sprowadzona teza zadania.

Sposób II

Przyjmijmy, że prosta AM przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie S. Wystarczy wykazać, że punkty S, D, X są współliniowe. Ponieważ $X \neq A$, to $AB \neq AC$. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $AB > AC$.

Zastosujmy przekształcenie f będące złożeniem inwersji o środku A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ i symetrii względem dwusiecznej kąta BAC. Przekształcenie to wymienia punkty B i C, półproste $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ oraz okrąg opisany na trójkącie ABC i prostą BC. Obraz S' punktu S leży więc na odcinku BC, a prosta AS' jest izogonalna do środkowej AM trójkąta ABC, czyli jest symedianą w tym trójkącie. Obrazem punktu I jest środek J okręgu dopisanego do trójkąta ABC stycznego do boku BC (znany fakt wynikający natychmiast z równości $AI \cdot AJ = AB \cdot AC$ nietrudnej do udowodnienia). W takim razie prosta EF, prostopadła do dwusiecznej kąta BAC przejdzie na okrąg o średnicy AJ, wskutek czego punkty E, F przejdą na punkty styczności E', F' okręgu dopisanego o środku J odpowiednio do prostych AB, AC. Obrazem okręgu opisanego na trójkącie AEF jest więc prosta $E'F'$, a obrazem punktu X — punkt X' przecięcia prostej $E'F'$ z prostą BC. Ponadto obraz D' punktu D leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, a prosta AD' jest izogonalna do prostej AD. Zadanie sprowadza się do udowodnienia, że punkty X', D', S' i A leżą na jednym okręgu.

Niech T będzie punktem przecięcia odcinków $X'S'$ i AD'. Mamy udowodnić, że $X'T \cdot TS' = AT \cdot TD'$. Wykorzystując równość $AT \cdot TD' = BT \cdot CT$ wnosimy, że wystarczy dowieść, że $BT \cdot CT = X'T \cdot TS' = (X'B + BT)(BS' - BT)$, czyli

$$(*) \qquad \frac{CT}{BT} = \left(\frac{X'B}{BT} + 1\right)\left(\frac{BS'}{BT} - 1\right).$$

Wykorzystamy następujący

Lemat. Punkty K, L leżą na boku BC trójkąta ABC, przy czym kąty BAK, LAC są równe. Wówczas

$$\frac{BK \cdot BL}{CK \cdot CL} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Dowód lematu: Z twierdzenia sinusów mamy

$$\frac{BK}{\sin \sphericalangle KAB} = \frac{AB}{\sin \sphericalangle BKA} \quad \text{oraz} \quad \frac{CK}{\sin \sphericalangle CAK} = \frac{AC}{\sin \sphericalangle AKC},$$

skąd

$$\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle KAB}{\sin \sphericalangle CAK}.$$

Analogicznie obliczamy, że

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle LAB}{\sin \sphericalangle CAL}.$$

Mnożąc stronami otrzymane zależności i wykorzystując, że $\sphericalangle KAB = \sphericalangle CAL$ i $\sphericalangle LAB = \sphericalangle CAK$ otrzymujemy tezę lematu.

Przyjmijmy teraz $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ oraz niech p będzie połową obwodu trójkąta ABC. Wykorzystując powyższy Lemat otrzymujemy

$$\frac{BS'}{CS'} = \frac{BS'}{CS'} \cdot \frac{BM}{CM} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{c^2}{b^2},$$

skąd wobec równości $BS' + CS' = a$ dostajemy

$$BS' = \frac{c^2 a}{b^2 + c^2}.$$

Ponownie korzystając z Lematu oraz na mocy równości $BD = p - b$, $CD = p - c$ otrzymujemy

$$\frac{CT}{BT} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \cdot \frac{BD}{CD} = \frac{b^2(p-b)}{c^2(p-c)},$$

skąd wobec $CT + BT = a$ dostajemy

$$BT = \frac{ac^2(p-c)}{b^2(p-b)+c^2(p-c)}.$$

Niech teraz K będzie takim punktem na boku AB, że $AK = AC$. Wtedy proste KC i $E'F'$ są równoległe, więc twierdzenie Talesa prowadzi do równości

$$X'B = \frac{BE'}{BK} \cdot BC = \frac{a(p-c)}{c-b},$$

gdyż $BE' = CD = p - c$. W takim razie

$$\frac{X'B}{BT} = \frac{a(p-c)}{c-b} \cdot \frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)}{ac^2(p-c)} = \frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)}{c^2(c-b)}$$

oraz

$$\frac{BS'}{BT} = \frac{c^2a}{b^2+c^2} \cdot \frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)}{ac^2(p-c)} = \frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)}{(b^2+c^2)(p-c)}.$$

Wstawiając obliczone wielkości do równości $(*)$ widzimy, że pozostaje sprawdzić, że

$$\frac{b^2(p-b)}{c^2(p-c)} = \left(\frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)}{c^2(c-b)} + 1\right)\left(\frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)}{(b^2+c^2)(p-c)} - 1\right).$$

Pozostało zauważyć, że prawa strona jest równa kolejno

$$\frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)+c^2(c-b)}{c^2(c-b)} \cdot \frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)-(b^2+c^2)(p-c)}{(b^2+c^2)(p-c)}$$

$$= \frac{(b^2+c^2)(p-b)}{c^2(c-b)} \cdot \frac{(c-b)b^2}{(b^2+c^2)(p-c)} = \frac{b^2(p-b)}{c^2(p-c)},$$

co chcieliśmy otrzymać.

Sposób III

Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez ω i przyjmijmy, że prosta AM przecina ten okrąg ponownie w punkcie Y. Rozważmy okrąg ω_A styczny wewnętrznie do ω w punkcie T oraz styczny do prostych AB, AC (okrąg ten w literaturze jest znany pod nazwą „A-mixtilinear incircle"). Rozważając tak, jak w poprzednim sposobie, przekształcenie f będące złożeniem inwersji o promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta BAC widzimy, że okrąg ω_A przejdzie na okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny do boku BC w punkcie D' będącym obrazem punktu T przy przekształceniu f i jednocześnie punktem symetrycznym do punktu D względem punktu M. Jeżeli przez T' oznaczymy obraz symetryczny punktu T względem symetralnej odcinka BC (T'

oczywiście leży na okręgu ω), to z równości $T'AC = \sphericalangle BAT = \sphericalangle D'AC$ otrzymujemy współliniowość punktów A, D', T'. Ponadto obrazami punktów styczności okręgu ω_A z bokami trójkąta przy przekształceniu f są punkty styczności okręgu dopisanego z półprostymi AB, AC. W poprzednim sposobie wykazaliśmy, że obrazy punktów E, F przy przekształceniu f są punktami styczności okręgu dopisanego z półprostymi AB, AC, wobec czego okrąg ω_A jest styczny do boków AB, AC w punktach F, E.

Teraz dowiedziemy, że punkty X, M, T' są współliniowe.

Sposób a)

Niech R będzie środkiem potęgowym okręgu opisanego na trójkącie AEF, ω_A oraz ω. Wtedy R leży na prostych AX, EF oraz na stycznej do ω w punkcie T. Niech S będzie drugim punktem przecięcia prostej AT z okręgiem ω_A. Oznaczmy też punkt przecięcia prostych EF i AT przez P.

Proste AE, AF są styczne do ω_A, więc czworokąt $SFTE$ jest harmoniczny (patrz lemat w sposobie I rozwiązania zadania 12.). Stąd pęk prostych TR, TS, TF, TE jest harmoniczny, zatem R, P, F, E jest czwórką harmoniczną. Rzutując tę czwórkę z punktu A na okrąg ω otrzymujemy, że czworokąt $XBTC$ jest harmoniczny. Stąd pęk $T'X, T'T, T'B, T'C$ jest harmoniczny. Jednakże $T'T \parallel BC$, więc $T'X$ przechodzi przez środek odcinka BC, czyli przez M.

Sposób b)

Kąty FBX i ECX są oparte na tej samej cięciwie okręgu ω. Ponadto $\sphericalangle XFB = \pi - \sphericalangle AFX = \pi - \sphericalangle AEX = \sphericalangle XEC$. Z cechy podobieństwa trójkątów kąt–kąt–kąt wynika, że trójkąty XBF i XCE są podobne. Stąd $\frac{XB}{XC} = \frac{BF}{EC}$.

W jednokładności o środku w punkcie T przeprowadzającej okrąg ω_A na okrąg ω punkt F przechodzi na środek łuku AB okręgu ω, wobec czego prosta TF jest dwusieczną kąta BTA. Z twierdzenia o dwusiecznej dostajemy $\frac{BT}{AT} = \frac{BF}{AF}$. Analogicznie zachodzi $\frac{AT}{CT} = \frac{AE}{CE}$. Mnożąc te równości stronami dostajemy, na mocy równości $AE = AF$ dostajemy $\frac{BT}{CT} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{AE}{AF} = \frac{BF}{CE} = \frac{XB}{XC}$. Wobec tego XT jest symedianą w trójkącie BXC. Stąd

$$\sphericalangle MXC = \sphericalangle BXT = \sphericalangle T'XC,$$

czyli punkty X, M, T' są współliniowe.

Stosując teraz twierdzenie o motylku dla cięciw AY, XT' okręgu ω przechodzących przez środek cięciwy BC otrzymujemy, że XY przecina prostą BC w takim punkcie D'', że M jest środkiem odcinka $D'D''$. Stąd $D = D''$, co kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga.

W sposobie a) korzystamy z kilku pojęć i faktów dotyczących dwustosunku. Czytelników niezaznajomionych z tym tematem odsyłamy do pracy „Dwustosunek i biegunowe” Dominika Burka — tam znajdują się wyjaśnienia odpowiednich pojęć, jak również dowody faktów, z których korzystamy.

29. Trójkąt równoboczny o boku długości n podzielono odcinkami równoległymi do jego boków na n^2 trójkątów równobocznych o boku długości 1. Wyznaczyć największą możliwą długość takiego ciągu tych trójkątów, że każdy trójkąt występuje w ciągu co najwyżej raz oraz każde dwa kolejne trójkąty w ciągu mają wspólny bok.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Największą możliwą długością takiego ciągu jest $n^2 - n + 1$.

Rozważmy takie kolorowanie trójkątów o boku 1 dwoma kolorami, że żadne dwa sąsiadujące ze sobą bokiem trójkąty nie są tego samego koloru. Mamy wtedy $\frac{n(n-1)}{2}$ trójkątów jednego koloru oraz $\frac{n(n+1)}{2}$ trójkątów drugiego koloru. Ponieważ w ciągu z zadania każde dwa kolejne trójkąty mają różne kolory, to liczba trójkątów w ciągu jest nie większa niż

$$2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1 = n^2 - n + 1.$$

Wskażmy teraz ciąg szukanej długości. Ustawmy nasz trójkąt tak, by jedna z jego podstaw leżała na osi OX, a trójkąt był zawarty w półpłaszczyźnie $y \geqslant 0$. W najniższym wierszu wybieramy po kolei trójkąty od lewej do prawej prócz ostatniego, następnie w drugim od dołu wierszu wybieramy wszystkie trójkąty od prawej do lewej oprócz ostatniego itd. W ten sposób w każdym wierszu oprócz najwyższego pominiemy dokładnie jeden trójkąt, a w najwyższym wybierzemy jedyny trójkąt. Mamy więc $n^2-(n-1) = n^2-n+1$ trójkątów w ciągu.

30. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_i \geqslant 1$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_i}\right) + \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{x_i + x_{i+1} + \ldots + x_n}\right) \leqslant n + 1.$$

Rozwiązanie:

Niech $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Zauważmy, że

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{i}\right) = n, \quad \text{skąd}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_i}\right) \leqslant n \cdot \left(1 + \frac{1}{S}\right) = n + \frac{n}{S}. \quad \text{Ponadto}$$

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{x_i+x_{i+1}+\ldots+x_n}\right)=\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{S-(x_1+\ldots+x_i)}\right)$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{S-i}\right)=\frac{S-n}{S-1}, \quad \text{zatem}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{x_i+x_{i+1}+\ldots+x_n}\right)\leqslant\frac{S-n}{S-1}\cdot\left(1-\frac{1}{S}\right)=1-\frac{n}{S}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_i}\right)+\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{x_i+x_{i+1}+\ldots+x_n}\right)$$

$$\leqslant n+\frac{n}{S}+1-\frac{n}{S}=n+1.$$

31. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt różnoboczny ABC. Okrąg ω_A przechodzi przez I, jest styczny do boków AB i AC oraz jego środek leży na odcinku AI; analogicznie definiujemy okręgi ω_B i ω_C. Punkty P, Q, R różne od I są punktami przecięcia odpowiednio par okręgów (ω_B,ω_C), (ω_C,ω_A), (ω_A,ω_B). Dowieść, że środki okręgów opisanych na trójkątach AIP, BIQ, CIR są współliniowe.

Rozwiązanie:

Sposób I

Niech I_A, I_B, I_C będą odpowiednio środkami okręgów ω_A, ω_B, ω_C oraz niech A', B', C' będą drugimi punktami przecięcia odpowiednio prostych AI, BI, CI z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Z lematu o trójliściu wynika, że $A'C=A'I=A'B$, więc punkt A' jest punktem przecięcia symetralnych odcinków BI, CI. W analogiczny sposób uzasadniamy, że punkt B' jest punktem przecięcia symetralnych odcinków CI, AI, a punkt C' — punktem przecięcia symetralnych odcinków AI, BI. W takim razie punkt I jest środkiem perspektywicznym trójkątów $A'B'C'$ oraz $I_AI_BI_C$. Z twierdzenia Desarguesa wynika więc, że trójkąty te mają oś perspektywiczną, przechodzącą przez punkty przecięcia par prostych $B'C'$ i I_BI_C, $C'A'$ i I_CI_A, $A'B'$ i I_AI_B Pozostaje zauważyć, że są to właśnie rozważane w tezie zadania środki okręgów opisanych. Istotnie, $B'C'$ to symetralna odcinka AI, a I_BI_C to symetralna odcinka IP, więc punkt ich przecięcia to środek okręgu opisanego na trójkącie AIP; dla pozostałych punktów analogicznie.

Sposób II

Wykażemy, że okręgi opisane na trójkątach AIP, BIQ, CIR mają jeszcze jeden (oprócz I) punkt wspólny J. Stąd oczywiście wyniknie, że ich środki leżą na jednej prostej będącej symetralną odcinka IJ.

Zastosujmy inwersję względem dowolnego okręgu o środku I. Dla dowolnego punktu X niech X' oznacza jego obraz w tej inwersji. Obrazami okręgów ω_A, ω_B, ω_C są proste $Q'R'$, $R'P'$, $P'Q'$. Niech obrazami prostych BC, CA, AB będą odpowiednio okręgi o_A, o_B, o_C. Okręgi te przechodzą przez punkt I, przecinają się parami w punktach A', B', C' oraz każdy z nich jest styczny do dwóch boków trójkąta $P'Q'R'$. Ponieważ proste BC, CA, AB były jednakowo odległe od punktu I (środka inwersji), to okręgi o_A, o_B, o_C mają równe promienie. Ponadto obrazami okręgów opisanych na trójkątach AIP, BIQ, CIR są odpowiednio proste $A'P'$, $B'Q'$, $C'R'$. Wystarczy wykazać, że proste te mają wspólny punkt.

Niech U, V, W będą środkami okręgów o_A, o_B, o_C. Promienie tych okręgów są równe, więc punkt I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie UVW. Proste IA', IB', IC' są symetralnymi jego boków, a środki boków są jednocześnie środkami odcinków IA', IB', IC'. Wobec tego środki te są wierzchołkami trójkąta, który jest jednocześnie jednokładny do trójkąta UVW (jednokładność o środku w punkcie ciężkości trójkąta UVW i skali $-1/2$), jak i do trójkąta $A'B'C'$ (jednokładność o środku w I i skali $1/2$). W takim razie boki trójkąta $A'B'C'$ są odpowiednio równoległe do boków trójkąta UVW; te z kolei wobec równości promieni okręgów o_A, o_B, o_C są równoległe do boków trójkąta $P'Q'R'$. Innymi słowy trójkąty $A'B'C'$ i $P'Q'R'$ są jednokładne (bo nie są przystające — jeden jest zawarty w drugim). Środek tej jednokładności to punkt przecięcia prostych $A'P'$, $B'Q'$, $C'R'$. To kończy rozwiązanie zadania.

32. Dany jest ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2017}}$, przy czym dla wszystkich $n = 1, 2, \ldots, 2^{2017}$ spełnione są warunki:

$$a_n \leqslant 2017 \quad \text{oraz} \quad a_1 a_2 \ldots a_n + 1 \text{ jest kwadratem liczby całkowitej.}$$

Udowodnić, że przynajmniej jedna z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2017}}$ jest równa 1.

Rozwiązanie:

Najpierw udowodnimy następujący Lemat.

Lemat

Dla dodatnich liczb całkowitych $a, b > 1$, jeśli liczby $a + 1$ oraz $ab^2 + 1$ są kwadratami liczb całkowitych, to zachodzi nierówność $b^2 > a$.

Dowód lematu

Niech $a + 1 = x^2$, gdzie x jest dodatnią liczbą całkowitą. Wtedy

$$ab^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right) b^2 + 1 = b^2 x^2 - b^2 + 1.$$

Ale skoro to wyrażanie jest kwadratem oraz $b > 1$, to mamy:

$$b^2x^2 - b^2 + 1 \leqslant (bx-1)^2 = b^2x^2 - 2bx + 1, \quad \text{wobec czego}$$

$$b \geqslant 2x, \quad \text{co oznacza, że} \quad b^2 \geqslant 4x^2 = 4(a+1) > a$$

i kończy dowód Lematu.

Przypuśćmy nie wprost, że ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2017}}$ liczb większych od jedynki spełnia założenia zadania. Niech $P = \{p_1, p_2, \ldots p_m\}$ będzie zbiorem liczb pierwszych nie większych niż 2017. Ponieważ żadna z liczb parzystych większych niż 2 nie jest pierwsza, to $m \leqslant 1009$. Niech dla $n = 1, 2, \ldots, 2^{2017}$, $A_n = a_1a_2\ldots a_n$. Zauważmy, że dzielnikami pierwszymi liczby A_n mogą być jedynie liczby ze zbioru P. Ponadto liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2017}}$ są większe niż 1, zatem liczby $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{2017}}$ są parami różne oraz większe niż 1. Oczywistym jest też, że dla liczb całkowitych $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant 2^{2017}$ zachodzi $A_{n_1} \mid A_{n_2}$.

Każdej liczbie A_n dla $1 \leqslant n \leqslant 2^{2017}$ przypiszmy ciąg $\mathbf{c^n} = (c_1^n, c_2^n, \ldots, c_m^n)$ w taki sposób, że jeśli liczba p_i dzieli A_n w parzystej potędze, to $c_i^n = 0$, a w przeciwnym przypadku $c_i^n = 1$. Zauważmy, że różnych takich możliwych ciągów jest dokładnie $2^m \leqslant 2^{1009}$. Ponieważ mamy 2^{2017} różnych liczb A_n, to istnieje ciąg $\mathbf{c}$, który zostanie przypisany $\left\lfloor \dfrac{2^{2017}}{2^m} \right\rfloor \geqslant 2^{1008}$ różnym liczbom A_n. Wybierzmy 2^{1008} spośród nich i uszeregujmy je rosnąco:

$$A_{i_1} \leqslant A_{i_2} \leqslant A_{i_3} \leqslant \ldots \leqslant A_{i_{2^{1008}}}.$$

Wtedy dla $j = 1, 2, 3 \ldots, 2^{1008}$, skoro $\mathbf{c^{i_j}} = \mathbf{c^{i_{j+1}}}$ oraz $A_{i_{j+1}} \mid A_{i_j}$, otrzymujemy $\dfrac{A_{i_{j+1}}}{A_{i_j}} = b_j^2$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej $b_j > 1$. Ale wtedy liczby $A_{i_j} + 1$, $A_{i_{j+1}} + 1 = A_{i_j} \cdot b_j^2 + 1$ są kwadratami dodatnich całkowitych, zatem stosując Lemat dla $(a, b) = \big(A_{i_j}, b_j\big)$ otrzymujemy, że

$$A_{i_{j+1}} = ab^2 > a^2 = A_{i_j}^2. \quad \text{Wobec tego}$$

$$A_{i_{2^{1008}}} > A^2_{i_{2^{1008}-1}} > A^{2^2}_{i_{2^{1008}-2}} > A^{2^3}_{i_{2^{1008}-3}} > \ldots > A_{i_1}^{2^{2^{1008}-1}}.$$

Ale jak łatwo zauważyć, $A_{i_1} \geqslant 2$, czyli $A_{i_{2^{1008}}} > 2^{2^{2^{1008}-1}}$. Jednakże my wiemy, że $2017^{2^{2017}} \geqslant A_{i_{2^{1008}}} > 2^{2^{2^{1008}-1}}$, lecz $2017^{2^{2017}} \leqslant 2^{11\cdot 2^{2017}} < 2^{2^{2^{1008}-1}}$, co daje nam sprzeczność z poprzednią nierównością. Zatem teza zadania jest prawdziwa.

33. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta, stycznego do boku BC.

Punkt S leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, przy czym AS jest średnicą tego okręgu. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC. Wykazać, że $\sphericalangle ISJ = \sphericalangle IDJ$.

Rozwiązanie:

Jeżeli $\sphericalangle ABC \neq 90^\circ$, to skoro AS jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, otrzymujemy równości kątów

$$\sphericalangle DAB = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle CBS = \sphericalangle CAS$$

oraz $\sphericalangle ACS = \sphericalangle ADB = 90^\circ$. Wnosimy stąd, że trójkąty ACS i ADB są podobne. Wobec tego $AD \cdot AS = AB \cdot AC$. Równość ta pozostaje w mocy także jeśli $\sphericalangle ABC = 90^\circ$. Z drugiej strony

$$\begin{aligned}\sphericalangle AIB &= 180^\circ - \sphericalangle IAB - \sphericalangle IBA = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ACB) = 90^\circ + \sphericalangle ACI = \sphericalangle ICJ + \sphericalangle ACI\\ &= \sphericalangle ACJ,\end{aligned}$$

więc na mocy równości kątów BAI, JAC trójkąty AIB i ACJ także są podobne, skąd $AI \cdot AJ = AB \cdot AC$.

Niech E będzie obrazem punktu D w symetrii względem dwusiecznej kąta BAC. Na mocy równości kątów DAB, CAS punkt E leży na prostej AS. Ponadto

$$AE \cdot AS = AD \cdot AS = AB \cdot AC = AI \cdot AJ,$$

co oznacza, że na czworokącie $IESJ$ można opisać okrąg. To prowadzi do wniosku, że $\sphericalangle ISJ = \sphericalangle IEJ = \sphericalangle IDJ$.

34. Wykazać, że dla każdych dodatnich liczb całkowitych $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{\mathrm{NWW}(a_1, a_2)} + \frac{1}{\mathrm{NWW}(a_1, a_2, a_3)} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_n)} < 2.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla dodatnich liczb całkowitych $x > y$ mamy

$$\frac{1}{\mathrm{NWW}(x,y)} = \frac{\mathrm{NWD}(x,y)}{xy} = \frac{\mathrm{NWD}(x-y,x)}{xy} \leqslant \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

Wobec tego dla $k = 2, 3, \ldots, n$ otrzymujemy

$$\frac{1}{\mathrm{NWW}(a_1, \ldots, a_k)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{NWW}(a_{k-1}, a_k)} \leqslant \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}.$$

Lewa strona nierówności z treści zadania szacuje się więc z góry przez

$$\frac{1}{a_1}+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{a_{i-1}}-\frac{1}{a_i}\right)=\frac{2}{a_1}-\frac{1}{a_n}\leqslant 2-\frac{1}{a_n}<2,$$

co kończy dowód.

35. Dana jest taka nieskończona rodzina $\mathcal{F}$ składająca się z czteroelementowych zbiorów, że każde dwa zbiory z $\mathcal{F}$ są różne i mają niepuste przecięcie. Wykazać, że istnieje taki trzyelementowy zbiór X, że każdy zbiór z $\mathcal{F}$ ma niepuste przecięcie z X.

Rozwiązanie:

Wybierzmy dowolny zbiór A należący do rodziny $\mathcal{F}$. Ponieważ zbiór A ma wspólny element z każdym innym zbiorem z rodziny $\mathcal{F}$, to istnieje element a zbioru A, który należy do nieskończenie wielu zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$. Jeśli a należy do wszystkich zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$, to mamy tezę zadania (wybieramy elementy b i c takie, by a, b, c były parami różne; zbiór $X=\{a,b,c\}$ spełnia warunki zadania).

Załóżmy więc, że a nie należy do pewnego zbioru B z rodziny $\mathcal{F}$. Zbiór ten przecina niepusto wszystkie zbiory z rodziny $\mathcal{F}$, więc pewien element $b\in B$, różny od a, należy do nieskończenie wielu spośród tych zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$, które zawierają element a. Jeżeli wszystkie zbiory zawierają któryś z elementów a lub b, to koniec dowodu (każdy zbiór postaci $X=\{a,b,c\}$ spełnia warunki zadania, gdzie element c jest różny od a oraz b). Przyjmijmy zatem, że istnieje zbiór C niezawierający a ani b.

Tak jak poprzednio, pewien element c zbioru C, różny od a oraz b, należy do nieskończenie wielu takich zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$, które zawierają elementy a oraz b. Zbiór $X=\{a,b,c\}$ spełnia wówczas warunki zadania. Gdyby bowiem istniał zbiór $D\in\mathcal{F}$ niezawierający żadnego z elementów a, b, c, to pewien element $d\in D$ musiałby należeć do nieskończenie wielu spośród tych zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$, które zawierają całą trójkę $\{a,b,c\}$. Mielibyśmy więc nieskończenie wiele zbiorów identycznych ze zbiorem $\{a,b,c,d\}$ należących do rodziny $\mathcal{F}$, wbrew założeniom zadania.

36. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ istnieją dodatnie liczby $b_1,b_2,\ldots,b_n$, spełniające następujące warunki:

- $b_i\geqslant a_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$,
- dla dowolnych $i,j=1,2,\ldots,n$ co najmniej jeden z ilorazów $\dfrac{b_i}{b_j}$, $\dfrac{b_j}{b_i}$ jest liczbą całkowitą,

- $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \ldots a_n$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że można tak dobrać liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$, aby każdy z ilorazów $\frac{b_i}{b_j}$ był potęgą dwójki o wykładniku całkowitym. Przy takim dodatkowym warunku, zastępując liczbę a_i przez $2a_i$ oraz odpowiadającą jej liczbę b_i przez $2b_i$, teza zadania nie zmieni się; podobnie możemy zastąpić parę (a_i, b_i) parą liczb $\left(\frac{a_i}{2}, \frac{b_i}{2}\right)$. Oznacza to, że bez straty ogólności możemy przyjąć, iż $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, 2)$. Załóżmy też dla ustalenia uwagi, że $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Wówczas co najmniej jeden z ciągów

$$\begin{aligned}
&a_1, 2a_1, 2a_1, \ldots 2a_1\\
&a_2, a_2, 2a_2, 2a_2, \ldots, 2a_2\\
&a_3, a_3, a_3, 2a_3, \ldots, 2a_3\\
&\ldots\\
&a_{n-1}, a_{n-1}, a_{n-1}, \ldots, a_{n-1}, 2a_{n-1}\\
&a_n, a_n, a_n, \ldots a_n
\end{aligned}$$

spełnia warunki nałożone na ciąg $(b_1, b_2 \ldots, b_n)$. Przypuśćmy bowiem przeciwnie. To, że ciąg

$$\underbrace{a_j, a_j, \ldots, a_j}_{j \text{ elementów}}, \underbrace{2a_j, 2a_j, \ldots, 2a_j}_{n-j \text{ elementów}}$$

nie spełnia warunków zadania jest równoważne temu, że zachodzi co najmniej jedna z nierówności

- $2a_j < a_n$,
- $2^{n-j} a_j^n > 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \ldots a_n$.

Jednak skoro $a_j, a_n \in [1, 2)$, to $2a_j \geqslant 2 > a_n$. Wobec tego dla $j = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi

$$2^{n-j} a_j^n > 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Mnożąc nierówności tej postaci stronami dla $j = 1, 2, \ldots, n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\left(2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \ldots a_n\right)^n < \prod_{j=1}^{n} 2^{n-j} a_j^n &= 2^{0+1+2+\ldots+(n-1)} a_1^n a_2^n \ldots a_n^n\\
&= \left(2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \ldots a_n\right)^n.
\end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

Zawody drużynowe

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki rosnący ciąg dodatnich liczb całkowitych $(a_n)_{n\geqslant 0}$, że suma dowolnych dwóch różnych wyrazów tego ciągu jest względnie pierwsza z sumą dowolnych trzech parami różnych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że ciąg $(a_n)_{n\geqslant 0}$ dany wzorami

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = (3a_n)! + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 0$$

spełnia warunki zadania. Ciąg ten jest oczywiście rosnący. Do wykazania zostaje równość $\mathrm{NWD}(a_i + a_j, a_p + a_q + a_r) = 1$ dla $i \neq j$ oraz $p \neq q \neq r \neq p$. Udowodnimy, że spełniony jest następujący silniejszy warunek: dla dowolnej piątki indeksów i, j, p, q, r takich, że $i > j$ lub $i = j = 0$ oraz dowolnego doboru znaków zachodzi równość $\mathrm{NWD}(a_i + a_j, \pm a_p \pm a_q \pm a_r) = 1$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem $n = i+j+p+q+r$. Zauważmy, że dla $n = 0$ teza indukcyjna jest spełniona, gdyż $\mathrm{NWD}(2,3) = \mathrm{NWD}(2,1) = 1$. Stanowi to bazę indukcji.

Krok indukcyjny: załóżmy, że teza indukcyjna jest spełniona dla wszystkich $n < m$. Udowodnimy ją dla $n = m$. Rozważymy trzy przypadki.

1° $\quad i > \max(p,q,r)$. Wówczas

$$0 < |\pm a_p \pm a_q \pm a_r| \leqslant a_p + a_q + a_r \leqslant 3a_{i-1}.$$

Wobec tego $\pm a_p + \pm a_q \pm a_r$ jest dzielnikiem liczby $(3a_{i-1})! = a_i - 1$. Stąd i z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathrm{NWD}(a_i + a_j, \pm a_p \pm a_q \pm a_r) &= \mathrm{NWD}(a_i - 1 + a_j + 1, \pm a_p \pm a_q \pm a_r) = \\ \mathrm{NWD}(a_j + 1, \pm a_p \pm a_q \pm a_r) &= \mathrm{NWD}(a_j + a_0, \pm a_p \pm a_q \pm a_r) = 1.\end{aligned}$$

2° $\quad i < \max(p,q,r)$. Bez straty ogólności załóżmy, że $\max(p,q,r) = p$. Ponieważ $a_i + a_j \leqslant 2a_{p-1}$, więc $a_i + a_j \mid (3a_{p-1})! = a_p - 1$. Stąd, podobnie jak w pierwszym przypadku

$$\begin{aligned}\mathrm{NWD}(a_i + a_j, \pm a_p \pm a_q \pm a_r) &= \mathrm{NWD}(a_i + a_j, \pm(a_p - 1) \pm 1 \pm a_q \pm a_r) = \\ \mathrm{NWD}(a_i + a_j, \pm 1 \pm a_q \pm a_r) &= \mathrm{NWD}(a_i + a_j, \pm a_0 \pm a_q \pm a_r) = 1.\end{aligned}$$

3° $\quad i = \max(p,q,r)$. Bez straty ogólności załóżmy, że $i = p$. Wówczas z założenia indukcyjnego wynika, że

$$\begin{aligned}\mathrm{NWD}(a_i + a_j, \pm a_p \pm a_q \pm a_r) &= \mathrm{NWD}(a_i + a_j, \pm a_p \pm a_q \pm a_r \mp (a_i + a_j)) = \\ \mathrm{NWD}(a_i + a_j, \mp a_j \pm a_q \pm a_r) &= 1.\end{aligned}$$

2. W turnieju tenisowym wzięło udział n zawodników. Pomiędzy niektórymi z nich rozegrano dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Dla zawodnika v przez $N^+(v)$ oznaczamy zbiór tych zawodników, których v pokonał. Niech

$$N^{++}(v) = \left(\bigcup_{w \in N^+(v)} N^+(w) \right) \setminus N^+(v).$$

Wyznaczyć jak największą stałą c o tej własności, że zawsze istnieje zawodnik v, dla którego zachodzi nierówność

$$|N^{++}(v)| \geqslant c \cdot |N^+(v)|.$$

Rozwiązanie:

Przeformułujmy wpierw zadanie na język teorii grafów. Dany jest graf skierowany G, w którym pomiędzy każdą parą wierzchołków jest co najwyżej jedna krawędź. Dla wierzchołka u przez $N^+(u)$ oznaczamy *sąsiedztwo* u, czyli zbiór wierzchołków do których idzie krawędź z u. *Drugie sąsiedztwo* u, oznaczone przez $N^{++}(u)$, jest zdefiniowane wzorem z treści zadania. Ponadto oznaczymy $d^+(u) = |N^+(u)|$ oraz $d^{++}(u) = |N^{++}(u)|$, przy czym $d^+(u)$ będziemy nazywać *stopniem wychodzącym* u.

W rozwiązaniu wykażemy, że teza zachodzi dla stałej c będącej jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania $2x^3 + x^2 - 1 = 0$, równej w przybliżeniu $0,657$. Dowód przytoczony poniżej pochodzi z pracy Chena, Shena i Yustera (*Second neighborhood via first neighborhood in digraphs*, Ann. Comb., 7(1):15–20, 2003), przy czym nasz opis dowodu bazuje po części na pracy semestralnej Michała Handzlika (*On the Seymour's second neighborhood conjecture*, praca semestralna Środowiskowych Studiów Doktoranckich z Nauk Matematycznych, 2011/12). Największa stała c, dla której wiadomo, że teza zachodzi, wynosi w przybliżeniu $0,67815$, co zostało również dowiedzione przez Chena, Shena i Yustera. Przypuszcza się, że optymalną stałą dla tego zagadnienia jest $c = 1$; ten problem otwarty znany jest pod nazwą *hipotezy Seymoura o drugim sąsiedztwie* (*Seymour's second neighborhood conjecture*).

Przejdźmy do dowodu. Obierzmy stałą c równą pierwiastkowi równania $2x^3 + x^2 - 1 = 0$. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę wierzchołków grafu G, którą oznaczymy przez n. Dla $n \leqslant 2$ teza zachodzi trywialnie, więc załóżmy, że $n \geqslant 3$.

Przypuśćmy nie wprost, że w grafie G dla każdego wierzchołka w mamy $d^{++}(w) < c \cdot d^+(w)$. Niech u będzie wierzchołkiem G o minimalnym stopniu wychodzącym i oznaczmy $d^+(u) = a$. Niech $A = N^+(u)$ oraz $B = N^{++}(u)$. Wówczas $|A| = a$ oraz $|B| < ca$. Zauważmy, że każdy wierzchołek ze zbioru A ma stopień wychodzący nie mniejszy niż a oraz jego sąsiedztwo wychodzące jest zawarte w $A \cup B$. Oznacza to, że łącznie jest co najmniej a^2 krawędzi wychodzących z wierzchołków z A, przy czym co najwyżej $\binom{a}{2} < \frac{a^2}{2}$ z nich może mieć oba końce w A. Stąd wnioskujemy, że liczba krawędzi z A do B przekracza $\frac{a^2}{2}$.

Niech H będzie podgrafem grafu G indukowanym przez A. To znaczy: zbiorem wierzchołków grafu H jest A, zaś krawędź z v_1 do v_2 prowadzimy wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G istnieje krawędź z v_1 do v_2. Skoro A nie zawiera wierzchołka u, to H ma mniej wierzchołków niż G, a więc możemy doń zastosować założenie indukcyjne. Otrzymujemy, że w A istnieje taki wierzchołek v, że jeśli przez $X, Z \subseteq A$ oznaczymy odpowiednio pierwsze i drugie sąsiedztwo v w H, to $|Z| \geqslant c|X|$. Niech $x = |X|$ i $z = |Z|$. Wówczas

$$x + z < |A| = a \qquad \text{oraz} \qquad z \geqslant cx,$$

skąd wynika, że $x < \frac{1}{1+c} \cdot a$. Zauważmy, że stopień wychodzący v (w grafie G) wynosi co najmniej a, gdyż dobraliśmy u jako wierzchołek o minimalnym stopniu wychodzącym w G. Jednocześnie $N^+(v) \subseteq A \cup B$, przy czym $X = N^+(v) \cap A$. Oznacza to, że jeśli przez $Y = N^+(v) \cap B$ oznaczymy zbiór tych wierzchołków z B do których idzie krawędź z v, oraz przyjmiemy $y = |Y|$, to mamy $y \geqslant a - x > \frac{c}{1+c} \cdot a$. Ponadto $y \leqslant |B| < ca$, więc

$$\frac{c}{1+c} \cdot a < y < ca. \tag{2}$$

Rozważmy dowolny wierzchołek $w \in Y$ i przez $K(w)$ oznaczmy zbiór tych wierzchołków G spoza $A \cup Y$, do których idzie krawędź z w. Zauważmy, że $K(w) \subseteq N^{++}(v)$ gdyż $N^+(v) \subseteq A \cup Y$, również $Z \subseteq N^{++}(v)$, oraz zbiory $K(w)$ i Z są rozłączne. Wyciągamy stąd wniosek, że $d^{++}(v) \geqslant |K(w)| + z$. Z drugiej strony mamy $d^+(v) = x + y$. Zgodnie z założeniem, że w grafie G teza nie zachodzi, mamy $d^{++}(v) < c \cdot d^+(v)$. Stąd

$$|K(w)| + z < c(x + y). \tag{3}$$

Ale mamy $z \geqslant cx$ na mocy wyboru wierzchołka v, więc z (3) wynika, że

$$|K(w)| < cy \qquad \text{dla każdego } w \in Y. \tag{4}$$

Dla $w \in Y$ oznaczmy przez $\ell(w)$ liczbę wierzchołków z Y do których prowadzi krawędź z w. Oczywiście mamy $\sum_{w \in Y} \ell(w) \leqslant \binom{y}{2} < \frac{y^2}{2}$, gdyż może być co najwyżej $\binom{y}{2}$ krawędzi o obu końcach w Y. Jednocześnie każdy wierzchołek $w \in Y$ ma stopień wychodzący nie mniejszy niż a. Zatem spośród co najmniej a wierzchołków w sąsiedztwie wychodzącym w, $\ell(w)$ leży w Y oraz $|K(w)|$ leży poza $A \cup Y$. Z (4) otrzymujemy zatem, że do co najmniej

$$a - \ell(w) - |K(w)| > a - \ell(w) - cy$$

wierzchołków z A istnieje krawędź prowadząca z w. Stąd krawędzi prowadzących z Y do A jest co najmniej

$$\sum_{w \in Y} (a - \ell(w) - cy) = y(a - cy) - \sum_{w \in Y} \ell(w) > y(a - cy) - \frac{y^2}{2}.$$

Podsumowując, krawędzi z A do B jest więcej niż $\frac{a^2}{2}$, krawędzi z B do A jest więcej niż $y(a-cy)-\frac{y^2}{2}$, zaś w sumie krawędzi o jednym końcu w A a drugim w B jest co najwyżej $|A|\cdot|B|<ca^2$. Otrzymujemy więc oszacowanie

$$ca^2 > \frac{a^2}{2} + y(a-cy) - \frac{y^2}{2}. \tag{5}$$

Oznaczmy $y=\alpha a$. Wówczas z (2) otrzymujemy $\frac{c}{1+c}<\alpha<c$, zaś nierówność (5) po podstawieniu i skróceniu a^2 przyjmuje postać

$$c > \frac{1}{2} + \alpha(1-c\alpha) - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2} + \alpha - \left(c+\frac{1}{2}\right)\alpha^2. \tag{6}$$

Rozważmy prawą stronę nierówności (6) jako funkcję $f(\alpha)$ parametru α. Wówczas $f(\alpha)$ jest funkcją kwadratową z ujemnym współczynnikiem wiodącym, więc skoro rozważamy $\alpha\in\left(\frac{c}{1+c},c\right)$, to $f(\alpha)>\min\left(f\left(\frac{c}{1+c}\right),f(c)\right)$. Wynika stąd, że

$$c > \min\left(f\left(\frac{c}{1+c}\right), f(c)\right). \tag{7}$$

Korzystając z równości $2c^3+c^2-1=0$ otrzymujemy

$$f(c) = \frac{1}{2} + c - \left(c+\frac{1}{2}\right)c^2 = c - \frac{2c^3+c^2-1}{2} = c.$$

Zatem z (7) wnioskujemy, że

$$c > f\left(\frac{c}{1+c}\right) = \frac{1}{2} + \frac{c}{1+c} - \left(c+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{1+c}\right)^2.$$

Po wymnożeniu obu stron przez mianowniki, otworzeniu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy

$$4c^3+2c^2-2c-1>0.$$

Ponownie korzystając z równości $2c^3+c^2-1=0$ otrzymujemy $1-2c>0$, co daje sprzeczność, gdyż $1-2c\approx 1-2\cdot 0,657<0$. To kończy dowód.

3. Wyznaczyć jak najmniejszą stałą rzeczywistą $C\in[0,2]$, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a,b,c spełniona jest nierówność

$$\sum_{\text{sym}}(a^4b^2 + a^{2+C}b^2c^{2-C}) \geqslant \sum_{\text{sym}}(a^4bc + a^3b^3).$$

Uwaga. Symbolem $\sum\limits_{\text{sym}} f(a,b,c)$ oznaczamy następującą sumę:

$$f(a,b,c)+f(a,c,b)+f(b,a,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b)+f(c,b,a).$$

Rozwiązanie:

Niech $C \in [0,2]$ będzie taką liczbą, że nierówność z zadania jest spełniona dla dowolnych $a,b,c>0$. Podstawmy $b=c=1$. Wnioskujemy, że dla dowolnego $a>0$ zachodzi nierówność

$$2a^4+2a^3+2+2a^{2+C}+2a^2+2a^{2-C} \geqslant 2a^4+4a+4a^3+2.$$

Po podzieleniu stronami przez $2a^2$ i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy

$$a^C+a^{-C} \geqslant 2a+2a^{-1}-2.$$

Podstawmy $a=x^2>1$. Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} x^{2C}+x^{-2C}-2 &\geqslant 2(x^2+x^{-2}-2)\\ (x^C-x^{-C})^2 &\geqslant 2(x-x^{-1})^2\\ x^C-x^{-C} &\geqslant \sqrt{2}(x-x^{-1})\\ \frac{x^C-x^{-C}}{x-x^{-1}} &\geqslant \sqrt{2} \end{aligned}$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $x \mapsto x^C$ wynika, że dla każdego $x>1$ istnieje taka liczba y_x, że $x \geqslant y_x \geqslant x^{-1}$ oraz $\frac{x^C-x^{-C}}{x-x^{-1}} = Cy_x^{C-1}$. Wobec tego

$$Cx^{C-1} \geqslant Cy_x^{C-1} \geqslant \sqrt{2}$$

dla każdego $x>1$. Wobec tego

$$C = \lim_{x\to 1^+} Cx^{C-1} \geqslant \sqrt{2}.$$

Wykażemy teraz, że dla $C=\sqrt{2}$ nierówność z zadania zachodzi dla dowolnych $a,b,c>0$.

Udowodnimy najpierw, że dla $t>0$ zachodzi nierówność

$$t^{\sqrt{2}}+t^{-\sqrt{2}} \geqslant 2t+2t^{-1}-2. \tag{*}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $t \geqslant 1$, przypadek $t<1$ otrzymamy poprzez podstawienie $t := t^{-1}$. Podobnie jak wyżej podstawiamy $t=x^2 \geqslant 1$ i przekształcamy nierówność do równoważnej postaci

$$x^{\sqrt{2}}-x^{-\sqrt{2}} \geqslant \sqrt{2}x-\sqrt{2}x^{-1}.$$

Rozważmy funkcję $g(x) = x^{\sqrt{2}} - x^{-\sqrt{2}} - \sqrt{2}x + \sqrt{2}x^{-1}$. Jej pochodna wyraża się wzorem $g'(x) = \sqrt{2}(x^{\sqrt{2}-1} - 1)(1 - x^{-\sqrt{2}-1})$. Zatem $g'(x) > 0$ dla $x > 1$. Wynika stąd, że $g(x) \geqslant g(1) = 0$ dla $x \geqslant 1$. To kończy dowód nierówności (*).

Połóżmy $t = \frac{a}{b}, t = \frac{b}{c}, t = \frac{c}{a}$ w (*) i dodajmy stronami otrzymane nierówności. Otrzymujemy

$$\sum_{\text{sym}} \left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{2}} \geqslant -6 + 2\sum_{\text{sym}} \frac{a}{b}.$$

Po pomnożeniu przez $a^2b^2c^2$ obu stron powyższej nierówności otrzymujemy

$$\sum_{\text{sym}} a^{2+\sqrt{2}} b^2 c^{2-\sqrt{2}} \geqslant \sum_{\text{sym}} (2a^3b^2c - a^2b^2c^2).$$

Wystarczy więc udowodnić, że

$$\sum_{\text{sym}} (a^4b^2 + 2a^3b^2c - a^2b^2c^2) \geqslant \sum_{\text{sym}} (a^4bc + a^3b^3).$$

Nierówność ta jest prawdziwa, gdyż

$$\sum_{\text{sym}} (a^4b^2 + 2a^3b^2c - a^2b^2c^2 - a^4bc - a^3b^3) = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geqslant 0.$$

4. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty PAB, PBC, PCD, PDA leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Jeżeli czworokąt $ABCD$ jest deltoidem, to teza jest oczywista ze względu na symetrię rysunku. W dalszej części rozwiązania zakładamy, że czworokąt $ABCD$ nie jest deltoidem.

Wykorzystamy następujący lemat, będący zadaniem 6 z Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w 2006 roku. Dowód lematu można znaleźć w broszurze z tamtego obozu; jest ona dostępna na stronie internetowej Olimpiady.

Lemat. *Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Punkt P leży na odcinku BC. Punkty I_1 i I_2 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty APB i APC. Wówczas punkty P, D, I_1, I_2 leżą na jednym okręgu.*

Niech I_1, I_2, I_3, I_4, X, Y, Z, T będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty PAB, PBC, PCD, PDA, ABD, ABC, BCD, CDA. Oznaczmy przez O środek okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$.

Ponieważ proste I_1X, I_2Z, OY przecinają się w punkcie B, więc trójkąty I_1YI_2 oraz XOZ mają środek perspektywiczny. Z twierdzenia Desarguesa wynika, że mają też oś perspektywiczną. To oznacza, że punkty przecięcia par prostych (I_1Y, OX), (I_2Y, OZ), (I_1I_2, ZX) leżą na jednej prostej. Wobec tego proste I_1I_2, XZ i AC przecinają się w jednym punkcie. Analogicznie dowodzimy, że proste I_3I_4, AC i XZ są współpękowe. Ostatecznie, proste I_1I_2, I_3I_4 przecinają się w punkcie Q leżącym na prostej AC.

Niech L i L' będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów Y i T na prostą AC. Zauważmy, że

$$CL = \frac{AC + BC - AB}{2} \quad \text{oraz} \quad CL' = \frac{AC + CD - AD}{2}.$$

Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, więc $AB+CD = AD+BC$. W świetle powyższych równości oznacza to, że $CL = CL'$, zatem punkty L, L' pokrywają się. Z lematu wynika, że punkty I_1, I_2, P, L leżą na jednym okręgu. Analogicznie punkty I_3, I_4, P, L leżą na okręgu. Z twierdzenia o potędze punktu otrzymujemy

$$QI_1 \cdot QI_2 = QP \cdot QL = QI_3 \cdot QI_4,$$

co oznacza, że punkty I_1, I_2, I_3, I_4 także leżą na jednym okręgu.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia k oraz cyfry $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Udowodnić, że istnieje taka naturalna liczba n, że ostatnie $2k$ cyfr liczby 2^n to (w tej właśnie kolejności) $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ dla pewnych cyfr $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez a liczbę, której cyfry w zapisie dziesiętnym to $a_1, a_2, \ldots, a_k$ w tej kolejności. Niech x będzie resztą z dzielenia liczby $10^k \cdot a$ przez 2^{2k}. Ponieważ $5 \nmid 2^{2k}$, więc któraś z liczb $2^{2k} - x$, $2 \cdot 2^{2k} - x$ nie jest podzielna przez 5 — oznaczmy tę liczbę przez y. Zauważmy, że

$$10^k > 8^k = 2^k \cdot 2^{2k} \geqslant 2 \cdot 2^{2k} \geqslant y.$$

Niech $z = 10^k \cdot a + y$. Z powyższej nierówności wynika, że ostatnimi $2k$ cyframi liczby z są $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ dla pewnych cyfr $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Zauważmy też, że liczba y została dobrana tak, że $2^{2k} \mid z$. Ponieważ 2 jest generatorem modulo 5^{2k}, więc dla pewnego $n > 2k$ zachodzi $2^n \equiv z \pmod{5^{2k}}$. To, wraz z oczywistym przystawaniem $2^n \equiv 0 \equiv z \pmod{2^{2k}}$ daje $2^n \equiv z \pmod{10^{2k}}$ na mocy chińskiego twierdzenia o resztach. Stąd wynika, że ostatnie $2k$ cyfr liczby 2^n jest takich samych jak ostatnie $2k$ cyfr liczby z, co kończy dowód.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie a, b takie, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $2^a \cdot n - 1$ jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $2^b \cdot n - 1$ jest pierwsza. *Rozwiązanie:*

Przypuśćmy, że liczby a, b o żądanych własnościach istnieją.

Lemat. Istnieje liczba pierwsza, która dzieli dokładnie jedną z liczb $2^a - 1, 2^b - 1$.

Dowód lematu: Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n niech $\mathcal{P}(n)$ oznacza zbiór liczb pierwszych dzielących n. Przypuśćmy nie wprost, że $\mathcal{P} := \mathcal{P}(2^a - 1) = \mathcal{P}(2^b - 1)$. Ponieważ $\mathrm{NWD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\mathrm{NWD}(a,b)} - 1$, więc również $\mathcal{P}(2^d - 1) = \mathcal{P}$, przy czym $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Ponieważ $a \neq b$, to możemy bez straty ogólności założyć, że $d \neq b$. Stąd istnieje dzielnik pierwszy q liczby $\frac{b}{d}$. Ponieważ $2^d - 1 \mid 2^{dq} - 1$ oraz $2^{dq} - 1 \mid 2^b - 1$, więc $\mathcal{P} = \mathcal{P}(2^d - 1) \subseteq \mathcal{P}(2^{dq} - 1) \subseteq \mathcal{P}(2^b - 1) = \mathcal{P}$, a zatem $\mathcal{P}(2^{dq} - 1) = \mathcal{P}$.

Z drugiej strony, korzystając z Lifting The Exponent Lemma otrzymujemy dla każdego $p \in \mathcal{P}$

$$v_p((2^d)^q - 1) = v_p(2^d - 1) + v_p(q).$$

Gdyby $q \notin \mathcal{P}$, to dla każdego $p \in \mathcal{P}$ mielibyśmy $v_p(q) = 0$, co prowadzi do $v_p(2^{dq} - 1) = v_p(2^d - 1)$ i w konsekwencji $2^{dq} - 1 = 2^d - 1$, gdyż $\mathcal{P}(2^{dq} -$

$1) = \mathcal{P}(2^d - 1)$. Wobec tego $q \in \mathcal{P}$. Zatem $v_q(2^{dq} - 1) = v_q(2^d - 1) + 1$ oraz $v_p(2^{dq} - 1) = v_p(2^d - 1)$ dla $p \in \mathcal{P} \setminus \{q\}$. Stąd $2^{dq} - 1 = q(2^d - 1)$. Otrzymujemy sprzeczność, gdyż lewa strona tej równości jest w oczywisty sposób większa od prawej. Kończy to dowód lematu.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Z lematu wynika, że istnieje liczba pierwsza p, która dzieli dokładnie jedną z liczb $2^a - 1, 2^b - 1$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p \mid 2^b - 1$. Z założeń zadania wynika, że jeśli dla pewnego n liczba $2^b(pn + 1) - 1$ jest złożona, to złożona jest liczba $2^a(pn + 1) - 1$. Jednak $2^b(pn + 1) - 1 = p(2^b n + \frac{2^b-1}{p})$ jest liczbą złożoną dla każdego n, zatem liczba $2^a(pn + 1) - 1 = (2^a p)n + 2^a - 1$ też musiałaby być złożona dla każdego n. Jednakże $\mathrm{NWD}(2^a p, 2^a - 1) = 1$, więc z twierdzenia Dirichleta wynika, że istnieje n, dla którego $2^a(pn + 1) - 1$ jest liczbą pierwszą, sprzeczność.

Odpowiedź: Takie liczby nie istnieją.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian P o współczynnikach całkowitych, który nie posiada pierwiastków wymiernych, a dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita m, że $n \mid P(m)$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Istnieje.

Wykażemy, że wielomian $P(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 13)(x^2 + 39)$ spełnia warunki zadania. Oczywiście wielomian P nie ma pierwiastków wymiernych. Zauważmy, że wystarczy udowodnić, że dla dowolnej liczby n będącej potęgą liczby pierwszej istnieje takie m, że $n \mid P(m)$. W istocie, jeśli $n_i \mid P(m_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, przy czym liczby $n_1, \ldots, n_k$ są potęgami parami różnych liczb pierwszych, to korzystając z chińskiego twierdzenia o resztach znajdziemy taką liczbę m, że $m \equiv m_i \pmod{n_i}$ dla wszystkich $i \leqslant k$. Wówczas $P(m) \equiv P(m_i) \equiv 0 \pmod{n_i}$, skąd $\prod_{i=1}^{k} n_i \mid P(m)$.

Lemat. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, a p liczbą pierwszą. Wówczas jeśli $p^k \mid f(a)$ oraz $p \nmid f'(a)$ dla pewnej liczby całkowitej a i $k \geqslant 1$, to istnieje taka liczba całkowita b, że $p^{k+1} \mid f(b)$ i $p \nmid f'(b)$.

Dowód lematu. Zapiszmy $f(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$. Zauważmy, że $(a + xp^k)^i \equiv a^i + ia^{n-1}xp^k \pmod{p^{k+1}}$ i w konsekwencji

$$f(a+xp^k) = \sum_{i=0}^{n} c_i(a+xp^k)^i \equiv \sum_{i=0}^{n} a^i + ia^{n-1}xp^k \equiv f(a) + xf'(a)p^k \pmod{p^{k+1}}.$$

Jeśli zatem obierzemy x tak, aby $xf'(a) \equiv -\frac{f(a)}{p^k} \pmod{p}$, to z powyższego przystawania otrzymamy, że p^{k+1} dzieli $f(a + xp^k)$. Ponieważ $xp^k \mid f'(a + xp^k) - f'(a)$, więc liczba $f'(a + xp^k)$ nie może być podzielna przez p. Liczba $b = a + xp^k$ spełnia tezę lematu.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Aby pokazać, że każda potęga liczby pierwszej dzieli pewną wartość wielomianu P, rozważymy kilka przypadków.

Indukcyjnie skonstruujemy taki ciąg liczb nieparzystych (x_n), że $2^n \mid x_n^2+39$ dla każdego n. Kładziemy $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Załóżmy teraz, że $x_n^2 + 39 = 2^n k$, gdzie $n \geqslant 3$ i k jest liczbą całkowitą. Jeśli $2 \mid k$, to wystarczy przyjąć $x_{n+1} = x_n$. Jeśli $2 \nmid k$, definiujemy $x_{n+1} = 2^{n-1} + x_n$; wtedy

$$(2^{n-1} + x_n)^2 + 39 = 2^{2n-2} + 2^n x_n + x_n^2 + 39 \equiv 2^n(x_n + k) \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}.$$

Rozważmy teraz liczby postaci 3^n i 13^n. W tym przypadku wystarczy indukcyjnie stosować lemat do wielomianów x^2-13 i x^2+3, zaczynając odpowiednio od $a = 1$ i $a = 6$.

Dla liczb pierwszych p różnych od 2, 3 i 13 zauważmy, że któraś z liczb -39, 13, -3 musi być resztą kwadratową modulo p; gdyby wszystkie były nieresztami, ich iloczyn równy 39^2 również byłby nieresztą, co jest oczywistą nieprawdą. Zatem dla pewnego $c \in \{-39, 13, -3\}$ istnieje takie a, że $p \mid a^2 - c$ oraz $p \nmid 2a$. Ponownie korzystając z lematu dla wielomianu $x^2 - c$ otrzymujemy ciąg (x_n) liczb spełniających warunek $p^n \mid x_n^2 - c$, co kończy rozwiązanie zadania.

4. *Słowem* nazwiemy dowolny skończony ciąg zer i jedynek. *Konkatenacją* słów $w_1 = (c_1, \ldots, c_n)$ i $w_2 = (d_1, \ldots, d_m)$ nazwiemy słowo $w_1 \cdot w_2 = (c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_m)$. Zbiór słów S nazwiemy *dokładnym*, gdy dla dowolnego słowa w (niekoniecznie należącego do S) istnieje co najwyżej jeden ciąg słów $s_1, \ldots, s_k$ z S spełniający równość $s_1 \cdot \ldots \cdot s_k = w$. Udowodnić, że dla dowolnego skończonego i dokładnego zbioru S zachodzi nierówność

$$\sum_{s\in S} 2^{-|s|} \leqslant 1,$$

gdzie $|s|$ oznacza długość słowa s.

Rozwiązanie:

Niech $m = \min\{|s| \colon s \in S\}$ oraz $M = \max\{|s| \colon s \in S\}$. Oznaczmy $K = \sum_{s\in S} 2^{-|s|}$. Wtedy dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi:

$$K^n = \sum_{s_1,s_2,\ldots,s_n\in S} 2^{-(|s_1|+|s_2|+\ldots+|s_n|)} = \sum_{i=n\cdot m}^{n\cdot M} \frac{N_{n,i}}{2^i},$$

gdzie $N_{n,i}$ to liczba takich n-elementowych ciągów $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S^n$, że $i = |s_1| + |s_2| + \ldots + |s_n|$. Ponieważ każdemu słowu odpowiada co najwyżej jeden taki ciąg, więc $N_{n,i} \leqslant 2^i$. Stąd $\frac{N_{n,i}}{2^i} \leqslant 1$. Wobec tego

$$K^n = \sum_{i=n\cdot m}^{n\cdot M} \frac{N_{n,i}}{2^i} \leqslant n(M - m) + 1.$$

Jeśli $K > 1$, to dla dostatecznie dużych n powyższa nierówność nie jest prawdziwa. Zatem $K \leqslant 1$, co kończy dowód.

5. Niech $T_1, T_2, \ldots, T_m$ będą takimi trzyelementowymi podzbiorami zbioru n-elementowego X, że dla różnych i, j zbiory T_i i T_j mają co najwyżej jeden element wspólny. Dowieść, że istnieje podzbiór S zbioru X, zawierający co najmniej $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ elementów i niezawierający żadnego ze zbiorów T_i.

Rozwiązanie:

Niech S będzie dowolnym spośród podzbiorów zbioru X, które nie zawierają żadnego ze zbiorów T_i oraz mają największą możliwą liczbę elementów. Niech s będzie liczbą elementów zbioru S. Należy wykazać, że $s \geqslant \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$. Rozważmy dowolny element $x \in X$, który nie należy do S. Zbiór $S \cup \{x\}$, jako większy od S, musi zawierać któryś ze zbiorów T_i. Niech $i(x)$ będzie najmniejszym takim indeksem, że $T_{i(x)} \subset S \cup \{x\}$. Oznaczmy też $S_x = T_{i(x)} \cap S$. Ponieważ $x \in T_{i(x)}$, to zbiór S_x składa się z dwóch pozostałych elementów zbioru $T_{i(x)}$. Ponieważ dla $i \neq j$ zbiór $T_i \cap T_j$ ma co najwyżej jeden element, więc różne elementy $x, y \in X \setminus S$ wyznaczają różne zbiory S_x, S_y. Zatem przyporządkowanie $x \mapsto S_x$ jest różnowartościową funkcją ze zbioru $X \setminus S$ do zbioru wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru S. Stąd

$$n - s \leqslant \binom{s}{2} \implies 2n \leqslant s^2 + s.$$

W takim razie $\sqrt{2n} \leqslant \sqrt{s^2+s} < s+1$, czyli $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor \leqslant s$.

6. W grupie n osób niektóre pary łączy nieprzyjemna wspólna przeszłość. Wiemy jednak, że dla pewnej liczby $a \geqslant 1$, wśród dowolnych $(a+1)$ z nich znajdziemy takie dwie, których nie łączy nieprzyjemna wspólna przeszłość. Wykazać, że można posadzić te osoby przy a okrągłych stolikach w taki sposób, aby żadna para, którą łączy nieprzyjemna wspólna przeszłość nie siedziała obok siebie.

Uwaga: niektóre stoliki mogą pozostać puste.

Rozwiązanie:

Osoby u, v nazwiemy *sąsiadami* jeśli nie łączy ich nieprzyjemna wspólna przeszłość. Podzbiór osób, które można usadzić przy jednym stoliku zgodnie z warunkiem z treści zadania, będziemy nazywać *blokiem*. Dowiedziemy następującego stwierdzenia ($\spadesuit$): W dowolnym niepustym zbiorze osób A da się zawsze znaleźć taki niepusty blok $C \subseteq A$ oraz osobę $u \in C$, że u nie jest sąsiadem żadnej osoby z $A \setminus C$.

Zanim dowiedziemy stwierdzenia ($\spadesuit$), wykażemy tezę zadania przy jego pomocy. Niech V będzie zbiorem wszystkich n osób. Stosując ($\spadesuit$) dla V znajdujemy blok C_1 oraz osobę $u_1 \in C_1$, która nie jest sąsiadem żadnej osoby z $V \setminus C_1$. Następnie, o ile $V \setminus C_1$ jest niepusty, stosujemy (♠) do $V \setminus C_1$ uzyskując blok $C_2 \subseteq V \setminus C_1$ oraz osobę $u_2 \in C_2$ niebędącą sąsiadem nikogo ze zbioru $V \setminus (C_1 \cup C_2)$. Podobnie konstruujemy bloki $C_3, C_4, \ldots$ oraz osoby $u_3, u_4, \ldots$, przy czym C_i oraz u_i otrzymujemy poprzez zastosowanie (♠) do zbioru $V \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_{i-1})$. Konstrukcję przerywamy po uzyskaniu takiego bloku C_k, że $V = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$. Zauważmy, że zgodnie z konstrukcją osoby $u_1, u_2, \ldots, u_k$ parami nie sąsiadują, stąd $k \leqslant a$. Jednocześnie każdy blok C_i dla $i = 1, 2, \ldots, k$ można usadzić przy jednym stoliku.

Pozostaje nam wykazać stwierdzenie (♠). Skonstruujemy ciąg osób $v_1, v_2, \ldots, v_p$ w następujący sposób. Wpierw dobierzmy jako v_1 dowolną osobę z A. Następnie, skonstruowawszy $v_1, v_2, \ldots, v_i$ dobieramy v_{i+1} jako dowolnę osobę z $A \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, która sąsiaduje z v_i. Jeśli taka osoba nie istnieje, to kończymy konstrukcję kładąc $p = i$. Skoro zbiór A jest skończony, to powyższa konstrukcja zakończy się. Niech $q \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ będzie najmniejszym takim indeksem, że v_q i v_p są sąsiadami. Jeśli takiego indeksu nie ma, to kładziemy $q = p$. Zdefiniujmy $C = \{v_q, v_{q+1}, \ldots, v_p\}$ oraz $u = v_p$. Z konstrukcji wynika wprost, że C jest blokiem. Jednocześnie u nie ma ani sąsiada wśród $\{v_1, \ldots, v_{q-1}\}$ z minimalności q, ani sąsiada wśród $A \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ z warunku zakończenia konstrukcji. Oznacza to, że u nie ma sąsiada wśród osób z $A \setminus C$, co kończy dowód stwierdzenia (♠) i całego zadania.

7. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon [0,1] \to [0,1]$ spełniające następującą własność: dla dowolnego $x \in [0,1]$ zachodzi $2x - f(x) \in [0,1]$ i $f(2x - f(x)) = x$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = x$.

Ustalmy dowolną liczbę $x \in [0,1]$. Niech $\{x_n\}_{n\geqslant 0} \subseteq [0,1]$ będzie ciągiem liczb zdefiniowanym następująco: $x_0 = x$ oraz $x_{n+1} = 2x_n - f(x_n)$. Wówczas

$$\begin{aligned} x_{n+1} - f(x_{n+1}) &= 2x_n - f(x_n) - f(2x_n - f(x_n)) = \\ &= x_n - f(x_n) = \ldots = x_1 - f(x_1) = x_0 - f(x_0) = x - f(x). \end{aligned}$$

Zatem

$$x_{n+1} - x_n = 2x_n - f(x_n) - x_n = x_n - f(x_n) = x - f(x).$$

Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ jest więc arytmetyczny, a jego różnicą jest $x - f(x)$. Gdyby $x - f(x) \neq 0$, to ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ byłby nieograniczony — jest to niemożliwe, bo przyjmuje on wartości z przedziału $[0,1]$. Wobec tego $f(x) = x$. Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

8. Udowodnić, że dla każdego wielomianu $P(x)$ o współczynnikach całkowitych istnieje wielomian $Q(x)$ podzielny przez $P(x)$ o następującej własności:

wszystkie niezerowe współczynniki $Q(x)$ stoją przy potęgach x będących liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie:

Niech $\mathbb{R}[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. Dla dowolnego wielomianu $W \in \mathbb{R}[x]$ oznaczmy przez W_P resztę z dzielenia W przez P. Zbiór $\mathcal{P} = \{W_P \colon W \in \mathbb{R}[x]\}$ wyposażony w dodawanie modulo P (czyli działanie $+$ określone wzorem $W_P + V_P = (W+V)_P$) oraz mnożenie przez liczby rzeczywiste (tj. działanie $t \cdot W_P = (t \cdot W)_P$) jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Wymiar przestrzeni $\mathcal{P}$ jest skończony i wynosi $\deg P$.

Niech $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ będą liczbami pierwszymi, przy czym $n > \deg P$. Rozważmy wielomiany $W_i(x) = x^{p_i}$. Zbiór $\{(W_i)_P \colon i = 1, 2, \ldots, n\}$ ma więcej elementów niż wymiar $\mathcal{P}$, więc jest liniowo zależny. To oznacza, że dla pewnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$, nie wszystkich równych 0, zachodzi równość

$$a_1 \cdot (W_1)_P + a_2 \cdot (W_2)_P + \ldots + a_n \cdot (W_n)_P = 0_P,$$

a to znaczy dokładnie tyle, że wielomian

$$a_1 W_1(x) + a_2 W_2(x) + \ldots + a_n W_n(x) = a_1 x^{p_1} + a_2 x^{p_2} + \ldots + a_n x^{p_n}$$

dzieli się przez P. Wielomian ten czyni zadość tezie.

9. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a I_A — środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC. Punkt I' jest punktem symetrycznym do I względem boku BC. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt I'_A leży na półprostej OI_A oraz spełnia warunek $OA^2 = OI_A \cdot OI'_A$. Wykazać, że

$$\sphericalangle BAI' = \sphericalangle CAI'_A.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez τ. Niech ω będzie okręgiem o średnicy $I'_A I_A$. Określmy przekształcenie ϕ jako inwersję względem okręgu o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ złożoną z symetrią względem prostej AI. Wówczas $\phi(B) = C$ i $\phi(C) = B$, czyli obrazem okręgu τ przy ϕ jest prosta BC.

Mamy $\triangle AI_AC \sim \triangle AIB$, gdyż $\sphericalangle I_AAC = \sphericalangle BAI$ oraz $\sphericalangle ACI_A = \sphericalangle AIB$. Wobec tego $\frac{AI}{AB} = \frac{AC}{AI_A}$ czyli $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$. Wynika stąd, że $\phi(I) = I_A$ i $\phi(I_A) = I$.

Oznaczmy przez ℓ' i ω' obrazy odpowiednio prostej OI_A oraz okręgu ω względem ϕ. Prosta OI_A przechodzi przez środek okręgu τ, czyli jest do niego prostopadła. Punkt I_A przechodzi na punkt I'_A w inwersji względem okręgu

τ więc okrąg ω jest w tym przekształceniu stały. Oznacza to, że okrąg ω jest prostopadły do τ. Przekształcenie ϕ zachowuje kąty pomiędzy krzywymi, czyli okręgi ℓ' oraz ω' są prostopadłe do prostej BC. Wnioskujemy stąd, że prosta BC jest ich osią symetrii. Okrąg ω przecina prostą OI_A w punktach I_A, I'_A, zatem okręgi ω' i ℓ' przecinają się w punktach $\phi(I_A) = I$ oraz $\phi(I'_A)$. Ponieważ okręgi ω' i ℓ' są symetryczne względem prostej BC, więc $\phi(I'_A) = I'$. Z definicji przekształcenia ϕ wnioskujemy, że $\sphericalangle BAI' = \sphericalangle CAI'_A$, co kończy dowód.

10. W trójkącie ABC punkty X, Y, Z są punktami styczności okręgów dopisanych odpowiednio z bokami BC, CA i AB. Udowodnić, że z odcinków AX, BY, CZ można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie:

Najpierw rozważymy przypadek, kiedy trójkąt ABC jest ostrokątny. Niech proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i równoległe do przeciwległych boków ograniczają trójkąt $P_AP_BP_C$, przy czym punkty P_A, P_B i P_C leżą naprzeciwko odpowiednio punktów A, B i C. Ponadto niech okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Na mocy znanego faktu zachodzą równości $BD = XC$, $CE = AY$ oraz $AF = BZ$.

Proste zawierające boki trójkąta ABC rozcinają trójkąt $P_AP_BP_C$ na cztery przystające trójkąty. Ponieważ

$$\sphericalangle P_CAB + \sphericalangle CAP_B = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = \pi - \sphericalangle BAC > \frac{\pi}{2} > \sphericalangle BAC,$$

więc istnieje czworościan $ABCP$, którego siatką jest powyższa konfiguracja, a wierzchołek P powstaje poprzez „sklejenie" wierzchołków P_A, P_B i P_C. Wówczas $AX = PD$, $BY = PE$ i $CZ = PF$. Zauważmy, że $PD > 2r > EF$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Stąd i z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$AX + BY = PD + PE > EF + PE > PF = CZ.$$

Analogicznie uzyskujemy nierówności $AX + CZ > BY$ oraz $BY + CZ > AX$. Wobec tego z odcinków AX, BY i CZ można zbudować trójkąt.

Do rozważenia pozostaje przypadek, w którym trójkąt ABC nie jest ostrokątny. Bez straty ogólności załóżmy, że $\sphericalangle BAC \geqslant \frac{\pi}{2} > \sphericalangle CBA \geqslant \sphericalangle ACB$. Ponieważ $BZ = CY$ oraz $\sphericalangle CBA \geqslant \sphericalangle ACB$, więc

$$\begin{aligned} CZ^2 &= BZ^2 + BC^2 - 2BZ \cdot BC \cdot \cos \sphericalangle CBA \\ &\geqslant CY^2 + BC^2 - 2CY \cdot BC \cdot \cos \sphericalangle ACB = BY^2, \end{aligned}$$

czyli $CZ \geqslant BY$. Analogicznie wykazujemy, że $CZ \geqslant AX$. Zatem wystarczy sprawdzić, że $AX + BY > CZ$.

Niech T będzie punktem wspólnym odcinków AX i BY. Stosując nierówność trójkąta, znane równości $AY = BX = \frac{AC+BC-AB}{2}$ oraz fakt, że naprzeciwko większego kąta trójkąta leży dłuższy bok, otrzymujemy

$$\begin{aligned} AX + BY &= AT + TX + BT + TY = (AT + TY) + (BT + TX) \\ &> AY + BX = AC + BC - AB \geqslant BC > CZ. \end{aligned}$$

11. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio w punktach K, L, M i N. Płaszczyzna π_A jest równoległa do płaszczyzny LMN oraz znajduje się w tej samej odległości od punktu A, co od płaszczyzny LMN. Analogicznie definiujemy płaszczyzny π_B, π_C, π_D. Wykazać, że środek sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ pokrywa się z środkiem sfery opisanej na czworościanie wyznaczonym przez płaszczyzny π_A, π_B, π_C i π_D.

Rozwiązanie:

Płaszczyzna π_A jest płaszczyzną potęgową sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ i punktu A (zdegenerowanej sfery o środku A i promieniu 0). Analogicznie stwierdzamy, że płaszczyzna π_B jest płaszczyzną potęgową sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ i punktu B, a płaszczyzna π_C jest płaszczyzną potęgową tej sfery i punktu C. W takim razie punkt N' przecięcia płaszczyzn π_A, π_B i π_C ma jednakową potęgę względem punktów A, B, C. Innymi słowy $N'A = N'B = N'C$, skąd wniosek, że punkt N' leży na prostej przechodzącej przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i prostopadłej do płaszczyzny ABC. Na tej prostej leży oczywiście także środek O sfery opisanej na czworościanie $ABCD$, więc $ON' \perp ABC$. Jeśli przez K', L' i M' oznaczymy pozostałe wierzchołki czworościanu utworzonego przez płaszczyzny π_A, π_B, π_C i π_D (leżące na przeciwko odpowiednio punktów A, B, C), to w analogiczny sposób uzasadnimy, że $K'O \perp BCD$, $L'O \perp CDA$ i $M'O \perp DAB$.

Niech I będzie środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ (i opisanej na czworościanie $KLMN$). Z treści zadania wynika, że czworościany $KLMN$ i $K'L'M'N'$ mają odpowiednie ściany równoległe, a skoro nie są przystające (pierwszy jest zawarty w drugim), to istnieje jednokładność przekształcająca pierwszy z tych czworościanów na drugi. Ta sama jednokładność przekształca proste IK, IL, IM, IN odpowiednio na proste OK', OL', OM', ON'. W takim razie obrazem punktu I jest punkt O, więc O jest środkiem sfery opisanej na czworościanie $K'L'M'N'$, co kończy rozwiązanie.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wśród 100 monet jest 70 fałszywych i 30 prawdziwych. Wiadomo, że wszystkie prawdziwe monety ważą tyle samo, zaś wagi fałszywych są parami różne i większe od wagi prawdziwej monety. Ile co najmniej ważeń należy wykonać, aby znaleźć co najmniej jedną prawdziwą monetę?

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że potrzeba 70 ważeń aby wykryć przynajmniej jedną prawdziwą monetę. Po pierwsze 70 ważeń wystarczy. Wykonujemy 70 ważeń kładąc na każdej szali po jednej monecie, która jeszcze nie została uznana za fałszywą. Jeżeli w danym ważeniu monety mają równe masy, to są prawdziwe i znaleźliśmy prawdziwą monetę. W przeciwnym razie cięższa z monet jest na pewno fałszywa. Po 70 ważeniach albo znajdziemy prawdziwą monetę, albo odrzucimy 70 monet i pozostałe monety będą prawdziwe.

Udowodnimy, że 69 ważeń nie wystarczy nawet jeśli dodatkowo wiemy, że masy prawdziwych monet wynoszą 2^{100} zaś masy fałszywych monet to $2^{100}+2^i$ dla $i = 1, 2, \dots, 70$. Zauważmy, że przy tak dobranych masach wśród dwóch zbiorów monet o różnej liczności, cięższy jest ten, w którym jest więcej monet. Natomiast jeżeli ważymy dwa równoliczne zbiory monet, to cięższy jest ten, który zawiera najcięższą monetę. Załóżmy, że waga nie tylko wskazuje, która szala jest cięższa, ale również ujawnia, która moneta na szalach jest najcięższa i ile waży. Podamy teraz strategię dla wagi, która gwarantuje, że nie uda się wykryć monety w 69 ważeniach.

Jeżeli na szalach znajdują się tylko monety, których masy nie zostały jeszcze ujawnione, to waga wybiera dowolną monetę, nadaje jej największą masę, która jeszcze nie została nadana i wskazuje ją. W przeciwnym przypadku jako cięższą szalę wskazujemy tę, na której znajduje się najcięższa z ujawnionych monet. Po 69 ważeniach ujawnimy masy co najwyżej 69 monet, a pozostałe monety będą nierozróżnialne. Oznacza to, że nawet przy tak podanych masach, dysponując lepszą wagą nie uda się wskazać prawdziwej monety w 69 ważeniach.

2. Dana jest liczba nieparzysta n. Kolorujemy wierzchołki n-kąta foremnego trzema kolorami w taki sposób, że istnieje nieparzyście wiele wierzchołków każdego koloru. Wykazać, że spośród wierzchołków tego n-kąta można wybrać takie trzy, które tworzą trójkąt równoramienny, a każdy z nich jest innego koloru.

Rozwiązanie:

Niech O będzie środkiem n-kąta foremnego. Dla $k = 1,\ 2,\ 3$ niech a_k będzie liczbą trójkątów równoramiennych, których wierzchołki zawierają dokładnie k kolorów. Załóżmy na przekór tezie, że $a_3 = 0$. Niech b, c, d będą liczbami wierzchołków odpowiednio każdego z trzech kolorów. Teraz policzmy liczbę par (T, E), gdzie T jest trójkątem równoramiennym, zaś E jego bokiem o końcach różnych kolorów.

Ponieważ założyliśmy, że $a_3 = 0$, to każdy trójkąt w takiej parze posiada dwa boki o wierzchołkach różnych kolorów. Zatem liczba par (T, E) wynosi $2a_2$.

Z drugiej strony, dla dowolnych dwóch wierzchołków A, B różnych kolorów liczba trójkątów równoramiennych o boku AB wynosi 1 gdy $\sphericalangle AOB = 120^\circ$ lub 3 gdy $\sphericalangle AOB \neq 120^\circ$. Wobec tego każdy odcinek AB jest bokiem nieparzystej liczby trójkątów równoramiennych. Stąd liczba naszych par (T, E) ma taką samą parzystość jak liczba krawędzi o wierzchołkach różnokolorowych. Ale takich krawędzi jest $bc + cd + db \equiv 1 \pmod 2$. Wcześniej udowodniliśmy jednak, że naszych par jest $2a_2 \equiv 0 \pmod 2$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a_3 \neq 0$.

3. Podzbiór I wierzchołków nieskierowanego grafu G jest *niezależny* jeśli żadne dwa wierzchołki z I nie sąsiadują ze sobą. Zbiór niezależny I w grafie G jest *maksymalny* jeśli każdy wierzchołek G spoza I ma sąsiada w I. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste c o następującej własności: w każdym grafie o n wierzchołkach jest co najwyżej c^n różnych maksymalnych zbiorów niezależnych.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że warunek z treści zadania zachodzi dla liczby dodatniej c wtedy i tylko wtedy gdy $c \geqslant 3^{1/3}$.

Wpierw rozważmy trójkąt, czyli trzywierzchołkowy graf G w którym każde dwa wierzchołki sąsiadują. Taki graf ma 3 maksymalne zbiory niezależne — zbiory zawierające tylko jeden wierzchołek — oraz 3 wierzchołki. Zatem jeśli c spełnia warunki zadania, to $c^3 \geqslant 3$, tj. $c \geqslant 3^{1/3}$.

Zauważmy też, że jeśli graf G jest sumą rozłączną k trójkątów, to taki graf ma dokładnie $3^k = 3^{n/3}$ maksymalnych zbiorów niezależnych, gdzie $n = 3k$ to liczba wierzchołków tego grafu. Stąd istnieją dowolnie duże grafy świadczące o ograniczeniu dolnym $3^{1/3}$ na c.

Pozostaje wykazać, że każdy graf nieskierowany G o n wierzchołkach (dopuszczamy $n = 0$) ma co najwyżej c^n maksymalnych zbiorów niezależnych dla $c = 3^{1/3}$. Dowiedziemy tego indukcyjnie ze względu na n. Baza indukcji dla $n = 0$ jest oczywista, a więc przejdźmy do kroku indukcyjnego. Niech u będzie wierzchołkiem G o najmniejszym stopniu, powiedzmy d. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_d$ będą sąsiadami u w G. Zauważmy, że każdy maksymalny zbiór niezależny w G zawiera co najmniej jeden wierzchołek ze zbioru $\{u, v_1, v_2, \ldots, v_d\}$; w przeciwnym razie moglibyśmy doń dodać u zachowując niezależność. Podzielmy rodzinę $\mathcal{I}$ wszystkich maksymalnych zbiorów niezależnych w G na rozłączne podrodziny $\mathcal{J}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_d$ w taki sposób, że zbiory niezależne z $\mathcal{J}$ zawierają u, zaś zbiory niezależne z $\mathcal{I}_i$ zawierają v_i dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, d$. Rozważmy dowolny zbiór niezależny $I \in \mathcal{J}$. Wówczas $I \setminus \{u\}$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym w grafie powstałym z G po usunięciu wierzchołka u oraz wszystkich jego sąsiadów, a więc w grafie o $n-(d+1)$ wierzchołkach. Stosując założenie indukcyjne do tego grafu uzyskujemy, że $|\mathcal{J}| \leqslant c^{n-(d+1)}$. Podobnie, dla każdego $i = 1, 2, \ldots, d$ mamy, że dla każdego $I \in \mathcal{I}_i$ zbiór $I \setminus \{v_i\}$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym w grafie powstałym z G po usunięciu v_i oraz wszystkich jego sąsiadów. Zauważmy, że v_i ma co najmniej d sąsiadów w G, gdyż u został dobrany jako wierzchołek o najmniejszym stopniu w G. A zatem stosując ponownie założenie indukcyjnie otrzymujemy, że $|\mathcal{I}_i| \leqslant c^{n-(d+1)}$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, d$.

Podsumowując, otrzymaliśmy następujące oszacowanie:

$$|\mathcal{I}| \leqslant |\mathcal{J}| + |\mathcal{I}_1| + |\mathcal{I}_2| + \ldots + |\mathcal{I}_d| \leqslant (d+1) \cdot c^{n-(d+1)}.$$

Zatem, aby wykazać, że $|\mathcal{I}| \leqslant c^n$, wystarczy dowieść, że $k \cdot c^{-k} \leqslant 1$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych k. Jest to równoważne nierówności

$$3^k \geqslant k^3 \qquad \text{dla dodatnich liczb całkowitych } k. \tag{8}$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Bezpośrednio sprawdzamy, że nierówność ta zachodzi dla $k = 1, 2, 3$. Przejdźmy do kroku indukcyjnego. Załóżmy, że $k \geqslant 3$ oraz $3^k \geqslant k^3$. Wówczas

$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3 \cdot 3^k \geqslant 3k^3 = k^3 + 2k^3 \geqslant k^3 + 6k^2 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k^2 \geqslant k^3 + 3k^2 + 9k \geqslant k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny nierówności (8).

4. Dana jest liczba pierwsza p. Udowodnić, że liczba $\displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor q/p \rfloor} k^{p-1}$ jest podzielna przez q tylko dla skończenie wielu liczb pierwszych q.

Rozwiązanie:

Jak wiadomo, dla dowolnej liczby całkowitej t istnieje taki wielomian $g(x)$ o współczynnikach wymiernych, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych k zachodzi równość $g(k) = 1^t + \ldots + k^t$. Stosując ten fakt dla $t = p-1$ wnioskujemy, że istnieje taki wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych oraz taka liczba całkowita m, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k zachodzi równość

$$\frac{f(k)}{m} = 1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + k^{p-1}.$$

Możemy też bez straty ogólności założyć, że $\mathrm{NWD}(m, a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Wyrazem wiodącym wyrażenia $f(x+1) - f(x)$ jest $na_{n-1}x^{n-1}$. Z drugiej strony, $f(k+1) - f(k) = mk^{p-1}$ dla dodatnich liczb całkowitych k, a więc wielomian $f(x+1)-f(x)$ musi być tożsamościowo równy mx^{p-1}. Stąd wniosek, że $n = p$ oraz $na_n = pa_p = m$.

Ponieważ $p \mid m$ oraz $\mathrm{NWD}(m, a_n, \ldots, a_0) = 1$, więc któryś ze współczynników wielomianu f musi być niepodzielny przez p. Zatem f nie jest wielomianem zerowym w pierścieniu $\mathbb{Z}_p[x]$.

Załóżmy nie wprost, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych q o własności opisanej w treści zadania. Wtedy nieskończenie wiele z nich daje taką samą niezerową resztę z dzielenia przez p. Niech resztą tą będzie r. W szczególności istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych ℓ, że $\ell p + r \mid f(\ell)$.

Podzielmy $f(x)$ z resztą przez $px + r$. Otrzymujemy równość

$$f(x) = (px+r)\frac{P(x)}{m'} + R,$$

dla pewnego wielomianu P o współczynnikach całkowitych, których największy wspólny dzielnik jest równy 1, liczby całkowitej m' oraz liczby wymiernej R. Wówczas dla nieskończenie wielu ℓ mamy $\ell \mid m' \cdot R$, skąd $R = 0$. Wobec tego wielomian $px + r$ dzieli $f(x)$ w pierścieniu $\mathbb{Q}[x]$.

Ponieważ współczynniki P są względnie pierwsze oraz $\mathrm{NWD}(p, r) = 1$, więc z lematu Gaussa wynika, że $px + r \mid f(x)$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$. Wynika stąd, że p dzieli współczynnik wiodący wielomianu f.

Zatem stopień wielomianu f rozważanego w pierścieniu $\mathbb{Z}_p[x]$ jest mniejszy niż p. Jednakże $p \mid m$ oraz $m \mid f(\ell)$ dla każdego l, zatem $p \mid f(\ell)$ dla każdego ℓ. Zatem f przyjmuje stałą wartość 0 modulo p. Ponieważ wielomian f nie jest zerowy, to ma co najmniej p pierwiastków. Ale jego stopień jest mniejszy niż p. Sprzeczność.

5. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz liczba pierwsza p, przy czym $n < p < \frac{4}{3}n$. Udowodnić, że

$$p \mid \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^4.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, p-2$

$$p \mid 0^i + 1^i + 2^i + \ldots + (p-1)^i.$$

Niech g będzie generatorem modulo p, tzn. taką liczbą, że

$$\{0, 1, g, g^2, \ldots, g^{p-2}\} \equiv \{0, 1, 2, \ldots, p-1\} \pmod{p}.$$

Wtedy

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^i \equiv \sum_{k=0}^{p-2} (g^k)^i = \sum_{k=0}^{p-2} (g^i)^k = \frac{g^{(p-1)i}-1}{g^i-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

gdyż $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ na mocy małego twierdzenia Fermata.

Niech $p = n + m$. Wówczas

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \equiv (-1)^k \cdot \frac{m(m+1)\ldots(m+k-1)}{k!} \\ &\equiv (-1)^k \cdot \frac{(k+1)(k+2)\ldots(m+k-1)}{(m-1)!} \pmod{p}.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^4 &\equiv \frac{1}{((m-1)!)^4} \sum_{k=0}^{n} ((k+1)(k+2)\ldots(m+k-1))^4 \\ &\equiv \frac{1}{((m-1)!)^4} \sum_{k=0}^{p-1} ((k+1)(k+2)\ldots(m+k-1))^4 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Wystarczy więc udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{p-1} ((k+1)(k+2)\ldots(m+k-1))^4 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zapiszmy

$$P(x) = ((x+1)(x+2)\ldots(x+m-1))^4 = a_0 + \sum_{i=1}^{4(m-1)} a_i x^i.$$

Mamy $4(m-1) = 4p - 4n - 4 < p - 1$, gdyż $3p < 4n$ na mocy założeń zadania. Stosując fakt udowodniony na początku otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} P(k) &= \sum_{k=0}^{p-1} \left(a_0 + \sum_{i=1}^{4(m-1)} a_i k^i \right) = p \cdot a_0 + \sum_{i=1}^{4(m-1)} \sum_{k=0}^{p-1} a_i k^i \\ &\equiv \sum_{i=1}^{4(m-1)} \left(a_i \sum_{k=0}^{p-1} k^i \right) \equiv 0 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Kończy to dowód tezy zadania.

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ spełniające dla każdego $x > 0$ równość

$$f(f(x)) + f(x) = 6x.$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = 2x$.

Ustalmy dowolną liczbę $x > 0$ i rozważmy ciąg dany wzorem rekurencyjnym $x_0 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Ciąg ten jest dobrze określony, bowiem wartości funkcji f są dodatnie. Mamy wówczas $x_1 = f(x)$ oraz $x_n = -x_{n-1} + 6x_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Równaniem charakterystycznym tej rekurencji jest $t^2 = -t + 6$. Równanie to ma pierwiastki 2 i -3, więc wzór ogólny na x_n jest postaci $x_n = a\cdot 2^n + b\cdot(-3)^n$ dla pewnych a, b. Dla $n = 0$ i $n = 1$ otrzymujemy kolejno $x = x_0 = a + b$ oraz $f(x) = x_1 = 2a - 3b$, skąd obliczamy $a = \frac{f(x)+3x}{5}$ i $b = \frac{-f(x)+2x}{5}$.

Zauważmy, że dla każdego n

$$0 < \frac{x_n}{3^n} = a \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + b \cdot (-1)^n.$$

W szczególności, kładąc $n = 2m$, dostajemy

$$0 < a \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2m} + b$$

i przechodząc do granicy z $m \to \infty$ otrzymujemy $0 \leqslant b$. Analogicznie, kładąc $n = 2m + 1$ i przechodząc do granicy otrzymujemy $0 \leqslant -b$. Z powyższych dwóch nierówności dostajemy $b = 0$, skąd $f(x) = 2x$.

Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że funkcja $f(x) = 2x$ spełnia równanie z treści zadania.

7. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany P o współczynnikach rzeczywistych, że dla pewnych wielomianów F, G o współczynnikach rzeczywistych, równość

$$F(G(x)) - G(F(x)) = P(x)$$

jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej x.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że każdy wielomian ma własność opisaną w treści zadania.

Dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n rozważmy wielomian $\binom{x}{n} = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$. Przez prostą indukcję po stopniu wielomianu można dowieść, że każdy wielomian można zapisać jako kombinację liniową wielomianów powyższej postaci.

Zauważmy, że dla $n \geqslant 1$ zachodzi tożsamość

$$\binom{x+1}{n} - \binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}.$$

Wobec tego, jeśli

$$P(x) + 1 = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{x}{i}.$$

to przyjmując $G(x) = x + 1$ oraz

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{x}{i+1}$$

otrzymujemy równość $F(G(x)) - G(F(x)) = P(x)$.

8. Wykazać, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie:
Korzystając z nierówności Höldera otrzymujemy

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)^2 \left(2a(b^2+c^2) + b(c+a)^2 + c(a+b)^2\right) \geqslant (a+b+c)^3.$$

Wystarczy więc dowieść, że

$$(a+b+c)^3 \geqslant \frac{9}{4} \cdot \left(2a(b^2+c^2) + b(c+a)^2 + c(a+b)^2\right).$$

Po pomnożeniu przez 4 i otworzeniu nawiasów otrzymujemy

$$\begin{aligned} 4(a^3+b^3+c^3) + 12(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 24abc \\ \geqslant 18(b^2a + c^2a) + 9(a^2b + a^2c + b^2c + c^2b) + 36abc \end{aligned}$$

lub równoważnie

$$4(a^3+b^3+c^3) + 3(a^2b + a^2c + b^2c + c^2b) \geqslant 6(b^2a + c^2a) + 12abc.$$

Z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną wynika, że

$$3b^3 + 3a^2b \geqslant 6ab^2,$$
$$3c^3 + 3a^2c \geqslant 6ac^2,$$
$$4a^3 + b^3 + c^3 + 3b^2c + 3c^2b \geqslant 12abc.$$

Po zsumowaniu powyższych trzech nierówności dostajemy nierówność, do której sprowadziliśmy tezę zadania.

9. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Punkt F leży wewnątrz okręgu ω na prostej AD. Odcinki BF, CF przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach M, N. Udowodnić, że proste AD, BN, CM przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Lemat: Niech $ABCD$ będzie czworokątem harmonicznym wpisanym w okrąg Γ. Niech F będzie dowolnym punktem na odcinku AC, zaś P, Q punktami przecięcia prostych BF i DF z okręgiem Γ. Wtedy czworokąt $APCQ$ jest harmoniczny.

Dowód: Niech S będzie biegunem prostej AC względem okręgu Γ. Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest harmoniczny, więc $S \in BD$. Niech S' będzie punktem przecięcia prostych BD i PQ (punkt ten może leżeć na prostej w nieskończoności). Wtedy S' leży na biegunowej punktu F. Ale punkt S też leży na biegunowej punktu F, bo F leży na biegunowej punktu S. Gdyby $S \neq S'$, to biegunową F byłaby prosta SS', czyli prosta BD, ale to nie jest możliwe, bo F leży wewnątrz okręgu Γ, a prosta BD przecina ten okrąg. Zatem $S = S'$, czyli PQ przechodzi przez biegun prostej AC, czyli czworokąt $APCQ$ jes harmoniczny, co kończy dowód lematu.

Niech P, Q będą punktami styczności okręgu ω odpowiednio z bokami AC, AB. Ponieważ AD, BF, CF przecinają się w jednym punkcie, więc z lematu Steinbarta wynika, że proste MP, NQ, DF również przecinają się w jednym punkcie. Nazwijmy ten punkt S. Niech E będzie drugim punktem przecięcia okręgu ω z prostą AD. Wtedy czworokąt $EPDQ$ jest harmoniczny. Zatem na mocy lematu czworokąt $EMDN$ jest harmoniczny. Niech K będzie punktem przecięcia prostej BC ze styczną do ω w punkcie E. Ponieważ $EMDN$ jest harmoniczny, więc punkty M, N, K są współliniowe. Podobnie punkty K, P, Q są współliniowe. To oznacza, że $(K, D; B, C) = -1$. Stąd i z faktu, że K leży na prostej MN otrzymujemy, że proste BN, CM, FD przecinają się w jednym punkcie.

Uwaga: W tym rozwiązaniu korzystamy z wielu faktów, których dowody można znaleźć w pracy Dominika Burka *Dwustosunek i biegunowe*.

10. Niech ω będzie okręgiem wpisanym w trójkąt ABC. Prosta styczna do ω i równoległa do BC (różna od BC) przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach S i T. Niech ω' będzie okręgiem wpisanym w trójkąt AST. Dowieść, że okrąg przechodzący przez punkty B, C i styczny do ω jest styczny również do ω'.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności załóżmy, że $AC \geqslant AB$. Oznaczmy przez a, b, c długości odpowiednio odcinków BC, CA, AB, a przez s połowę obwodu trójkąta ABC. Niech ω będzie styczny do BC, CA, AB i ST w punktach odpowiednio D, E, F i X. Przez D', E', F' oznaczmy punkty styczności ω' z odpowiednio ST, AT i AS. Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Caseya dla okręgów ω, ω', B i C należy dowieść, że

$$BF' \cdot CE = a \cdot D'X + BF \cdot CE'. \tag{9}$$

Jednokładność o środku w punkcie A i skali $\dfrac{s-a}{s}$ przekształca ω na ω'. Zatem

$$AE' = \frac{s-a}{s} \cdot AE = \frac{(s-a)^2}{s},$$

więc $CE' = b - \dfrac{(s-a)^2}{s}$. Podobnie $BF' = c - \dfrac{(s-a)^2}{s}$. Niech okrąg dopisany do boku BC trójkąta ABC będzie styczny do BC w punkcie Y. Wówczas

$$D'X = \frac{s-a}{s} \cdot DY = \frac{(b-c)(s-a)}{s}.$$

Ponadto $BF = s - b$ i $CE = s - c$. Wstawiając wyliczone odcinki do (9) dostajemy równoważną postać

$$\left(c - \frac{(s-a)^2}{s}\right)(s-c) = a \cdot \frac{(b-c)(s-a)}{s} + (s-b) \cdot \left(b - \frac{(s-a)^2}{s}\right).$$

Równości tej dowodzimy poprzez podstawienie $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, wymnożenie przez wszystkie mianowniki, otworzenie nawiasów i redukcję wyrazów podobnych.

11. W czworościanie $ABCD$ przeciwległe krawędzie są równej długości. Wykazać, że dla dowolnych punktów P i Q leżących w przestrzeni zachodzi nierówność

$$AP \cdot AQ + BP \cdot BQ + CP \cdot CQ \geqslant DP \cdot DQ.$$

Rozwiązanie:

Niech M i N będą środkami odcinków AB i CD. Ponieważ przeciwległe krawędzie czworościanu są równe, to trójkąty ABC i ABD są przystające, a więc ich środkowe CM i DM są równe. Trójkąt CDM jest więc równoramienny, zatem prosta MN jest prostopadła do krawędzi CD. Analogicznie dowodzimy, że prosta MN jest prostopadła do krawędzi AB. Obrót o 180° wokół tej prostej przeprowadza punkt A na B i na odwrót oraz punkt C na D i na odwrót. Niech Q' będzie obrazem punktu Q przy tym obrocie. Wtedy $AQ = BQ'$, $BQ = AQ'$, $CQ = DQ'$, $DQ = CQ'$ i tezę zadania możemy przepisać w postaci

$$AP \cdot BQ' + BP \cdot AQ' + CP \cdot DQ' \geqslant DP \cdot CQ'.$$

Z nierówności Ptolemeusza zastosowanej dla czwórki punktów A, P, B, Q' otrzymujemy

$$AP \cdot BQ' + BP \cdot AQ' \geqslant AB \cdot PQ' = CD \cdot PQ'.$$

Korzystając zaś z nierówności Ptolemeusza zastosowanej dla czwórki punktów C, P, Q', D dostajemy

$$CD \cdot PQ' + CP \cdot DQ' \geqslant DP \cdot CQ'.$$

Łącząc dwie powyższe nierówności otrzymujemy tezę zadania.

Uwaga.

Czytelnik znający nierówność Ptolemeusza dla czterech punktów X, Y, Z, T leżących na płaszczyźnie może łatwo udowodnić jej przestrzenną wersję obracając trójkąt YZT wokół prostej YZ tak, aby wszystkie cztery punkty leżały na jednej płaszczyźnie a następnie korzystając z nierówności trójkąta.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.
13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści

Treści zadań **5**
Zawody indywidualne 5
Zawody drużynowe 11
Pierwszy Mecz Matematyczny 12
Drugi Mecz Matematyczny 14

Rozwiązania **16**
Zawody indywidualne 16
Zawody drużynowe 50
Pierwszy Mecz Matematyczny 57
Drugi Mecz Matematyczny 65

Regulamin Meczu Matematycznego **75**