Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 3–17 czerwca 2018

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 3–17 czerwca 2018

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. 18 33 11 660

Kadra:
Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Agata Dubiak, Teodor Jerzak, Karol Kaszuba, Michał Kieza, Michał Krych, Mikołaj Leonarski, Marcin Michorzewski, Michał Pilipczuk, Dominika Regiec, Mariusz Trela.

Uczestnicy:
Mikołaj Bardos, Jagoda Bracha, Dominik Bysiewicz, Wojciech Drozd, Witold Drzewakowski, Paweł Gadziński, Kamil Galewski, Stanisław Hauke, Justyna Jaworska, Katarzyna Kępińska, Tomasz Kiełbasa, Aleksandra Kowalska, Paweł Moćko, Daniel Murawski, Iwo Pilecki-Silva, Rafał Pyzik, Tomasz Ślusarczyk, Rafał Szulc, Antoni Wiśniewski, Radosław Żak.

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`www.om.edu.pl`
`www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 3–17 czerwca 2018 w Mszanie Dolnej, w Ośrodku Sportowo-Rekreacyjnym „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Agata Dubiak, Teodor Jerzak, Karol Kaszuba, Michał Kieza, Michał Krych, Mikołaj Leonarski, Marcin Michorzewski, Michał Pilipczuk, Dominika Regiec i Mariusz Trela.

W dniach 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13 i 15 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 14 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 9 i 16 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny ośmiu zadań i trwały od rana do wieczora, a mecze matematyczne — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 143, 123 i 119 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyła się wycieczka: 10 czerwca na Ćwilin.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z Obozu wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`.

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	15	1	1	1
2.	15	0	0	3
3.	9	2	0	7
4.	0	1	1	16
5.	9	3	1	6
6.	9	2	2	6
7.	3	2	3	11
8.	2	0	0	17
9.	15	0	0	3
10.	6	0	1	11
11.	9	6	3	0
12.	0	0	1	17
13.	14	3	0	3
14.	8	2	0	10
15.	5	0	1	14
16.	1	1	0	18
17.	15	2	1	2
18.	8	1	2	9
19.	7	3	2	8
20.	0	0	0	20
21.	0	6	0	14
22.	12	0	1	7
23.	8	0	0	12
24.	1	0	0	19
25.	8	8	2	2
26.	14	0	0	6
27.	2	0	0	18
28.	10	7	0	3
29.	6	2	0	11
30.	3	0	1	15
31.	12	3	0	4
32.	4	2	3	10
33.	5	1	0	13
34.	1	0	1	17
35.	2	1	3	13
36.	9	0	0	10

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr dodatniej liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *dostojną*, jeśli $S(n) = S(n^2)$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $S(n)$ dla liczby dostojnej n.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $AB < AC$, punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkt M jest środkiem boku BC. Na boku AC wybrano taki punkt E, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BCA$. Prosta prostopadła do boku AC przechodząca przez D przecina prostą BE w punkcie K. Udowodnić, że $DM = MK$.

3. Dane są parami różne liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdzie $n \geqslant 1$. Wykazać, że wielomian

$$P(x) = ((x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n))^2 + 1$$

nie jest iloczynem dwóch wielomianów dodatnich stopni o współczynnikach całkowitych.

4. Dla danego nieskierowanego grafu G podzbiór jego krawędzi F nazwiemy *rozpinającym*, jeśli każde dwa wierzchołki grafu G można połączyć ścieżką używającą jedynie krawędzi z F. Niech $S(G)$ oznacza liczbę różnych podzbiorów rozpinających w grafie G. Wykazać, że liczba $S(G)$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy G jest spójny i dwudzielny, tzn. gdy każde dwa wierzchołki G można połączyć ścieżką oraz wierzchołki G można podzielić na dwa podzbiory A i B w taki sposób, by każda krawędź łączyła wierzchołek należący do A z wierzchołkiem należącym do B.

Uwaga: Przez graf rozumiemy graf prosty, to znaczy taki, w którym każda krawędź łączy dwa różne wierzchołki oraz żadna para wierzchołków nie jest połączona więcej niż jedną krawędzią.

5. Wierzchołki 2018-kąta foremnego ponumerowano liczbami całkowitymi od 1 do 2018 tak, że każdej z tych liczb użyto dokładnie raz. Trójkąt, którego wierzchołki są wierzchołkami tego 2018-kąta, nazwiemy *zorientowanym*, jeśli numery jego wierzchołków rosną zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka numeracja, dla której liczba trójkątów zorientowanych wynosi $2018^2 + 1$.

6. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste α, dla których istnieje ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o tej własności, że

$$x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n} \quad \text{dla wszystkich } n \geqslant 1.$$

7. W czworościanie $ABCD$ punkt P jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D. Punkty A', B', C' są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AD, BD, CD. Płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ przecinają się wzdłuż prostej ℓ. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnić, że proste OP oraz ℓ są prostopadłe.

8. Wykazać, że jeśli dodatnią liczbę całkowitą k można przedstawić w postaci $k = a^2 + b^2 + c^2$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi, to można ją również przedstawić w postaci $k = u^2 + v^2 + w^2$, gdzie u, v, w są liczbami całkowitymi, z których co najmniej jedna nie jest podzielna przez 3.

9. Udowodnić, że istnieje 2018 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, wśród których jest dokładnie 13 liczb pierwszych.

10. W równoległoboku $ABCD$ punkty M, N są odpowiednio środkami boków BC, CD. Punkt P leży we wnętrzu tego równoległoboku oraz spełnia równości $BN = PN$ i $DM = PM$. Punkt Q jest środkiem odcinka PA. Wykazać, że $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle PDQ$.

11. Na przyjęciu spotkało się 2018 gości. Okazało się, że każdy gość zna co najmniej trzech innych gości. Dowieść, że da się wybrać podzbiór złożony z co najmniej 3 i co najwyżej 21 gości i usadzić ich przy okrągłym stole tak, by każdy gość przy stole znał obu swoich sąsiadów.

12. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ takie, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x + f(xy)) = xf(1 + f(y)).$$

13. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ wyznaczyć wszystkie ciągi liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o tej własności, że

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}.$$

14. Dana jest plansza o wymiarach 2018×2018. *Kwadraciskiem* nazwiemy cztery pola tej planszy o wspólnym wierzchołku. Każde pole planszy pomalowano na biało lub czarno w taki sposób, że każde pole posiadające krawędź leżącą na brzegu planszy ma kolor czarny oraz żadne kwadracisko nie jest jednokolorowe. Dowieść, że istnieje takie kwadracisko, że każde dwa jego pola sąsiadujące krawędzią mają różne kolory.

15. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $k > 1$ istnieje taka para dodatnich liczb całkowitych a, b, że dla każdej pary liczb całkowitych x, y liczba $x^k + y^k - a$ jest niepodzielna przez b.

16. Punkt P leży we wnętrzu ostrokątnego trójkąta ABC. Proste AP, BP, CP przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty K, L, M są obrazami symetrycznymi punktów D, E, F odpowiednio względem prostych BC, CA, AB. Wykazać, że punkty K, L, M oraz ortocentrum trójkąta ABC leżą na jednym okręgu.

17. Trójkąt ABC spełnia zależności $AB = AC > BC$. Cięciwa BG okręgu o środku A i promieniu AB przechodzi przez środek odcinka AC, a cięciwa BH tego okręgu jest prostopadła do prostej AC. Punkt X jest punktem przecięcia prostych AC i GH. Dowieść, że punkt C jest środkiem odcinka AX.

18. Rozstrzygnąć, czy istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, dla których spełniona jest równość

$$\mathrm{NWW}(a, b) = \mathrm{NWW}(a + c, b + c).$$

19. *Triangulacją* wielokąta wypukłego nazywamy jego podział na trójkąty przy pomocy nieprzecinających się przekątnych. Udowodnić, że dla każdego wielokąta wypukłego istnieje co najwyżej jedna triangulacja, w której wszystkie trójkąty są ostrokątne.

20. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równość $abcd = 1$. Wykazać, że

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geqslant 1.$$

21. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$\frac{x^2}{y+z+t} + \frac{y^2}{z+t+x} + \frac{z^2}{t+x+y} + \frac{t^2}{x+y+z},$$

gdzie liczby rzeczywiste x, y, z, t są takie, że suma żadnych trzech spośród nich nie jest równa zeru oraz

$$\frac{x}{y+z+t} + \frac{y}{z+t+x} + \frac{z}{t+x+y} + \frac{t}{x+y+z} = 1.$$

22. Wyznaczyć największą możliwą moc rodziny czteroelementowych zbiorów o następującej własności: każde dwa zbiory z rodziny mają dokładnie jeden wspólny element, ale nie istnieje element należący do wszystkich zbiorów z rodziny.

23. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Prosta prostopadła do prostej AD przechodząca przez punkt D przecina dwusieczne kątów ABC, ACB odpowiednio w punktach P, Q. Wykazać, że $PD = DQ$.

24. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają równość

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2abc.$$

Udowodnić, że przynajmniej jedna z liczb

$$\frac{a+1}{2},\ \frac{b+1}{2},\ \frac{c+1}{2}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

25. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniające układ równań

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a \\ b\sqrt{c} - a = b \\ c\sqrt{a} - b = c. \end{cases}$$

26. Dana jest dodatnia liczba całkowita d. Na przyjęciu spotkało się $n \geqslant 2$ gości, spośród których niektórzy znają się. Okazało się, że dla każdego niepustego podzbioru gości A istnieje taki gość należący do A, który zna co najwyżej d innych gości w A. Niepusty podzbiór gości nazwiemy *kliką* jeśli każdych dwóch gości z tego podzbioru się zna. Wykazać, że na przyjęciu jest co najwyżej $2^d \cdot n$ klik.

27. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Okręgi o_B, o_C są styczne do półprostych $AC^{\rightarrow}$ i $AB^{\rightarrow}$, przy czym punkt B leży na okręgu o_B, a punkt C leży na okręgu o_C. Różna od AC styczna do okręgu o_B przechodząca przez punkt C przecina prostą AB w punkcie K, a różna od AB styczna do okręgu o_C przechodząca przez punkt B przecina prostą AC w punkcie L. Prosta KL i dwusieczna kąta BAC przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i M. Wykazać, że $BP = CM$.

28. Wyznaczyć wszystkie trójki niezerowych liczb całkowitych a, b, c o tej własności, że liczby

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{oraz} \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

są całkowite.

29. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian P o współczynnikach całkowitych, że

$$P\left(1 + \sqrt[3]{2}\right) = 1 + \sqrt[3]{2} \quad \text{oraz} \quad P\left(1 + \sqrt{5}\right) = 2 + 3\sqrt{5}.$$

30. Na dyskotece spotkało się n chłopców i m dziewcząt. Okazało się, że każdy chłopiec zna co najwyżej 2018 dziewcząt oraz każda para dziewcząt ma wspólnego znajomego chłopca. Wykazać, że da się każdej dziewczynie przypisać podzbiór znajomych jej chłopców w taki sposób, by przypisane podzbiory były parami rozłączne oraz by było co najmniej $\frac{m(m-1)}{2018}$ różnych par dziewcząt mających wspólnego znajomego chłopca przypisanego do jednej z nich.

31. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkt D jest środkiem odcinka BC, a punkt P leży na odcinku AD. Okręgi opisane na trójkątach CDP, BDP przecinają boki AC, AB odpowiednio w punktach E, F różnych od C, B. Dwusieczna kąta EPF przecina EF w punkcie Q. Dowieść, że styczna do okręgu opisanego na trójkącie AQP w punkcie A jest prostopadła do BC.

32. Niech p będzie liczbą pierwszą, która daje resztę 3 przy dzieleniu przez 4. Wyznaczyć liczbę par (x, y) różnych elementów zbioru $\{0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ o tej własności, że liczba $x^2 - y^2 - 1$ jest podzielna przez p.

33. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x, które spełniają równanie

$$1 + 4^x = 2^x + 3^x.$$

34. Dany jest n-elementowy zbiór A oraz pewna rodzina jego podzbiorów $\mathcal{F}$. Zbiór $B \subseteq A$ nazwiemy *ćwiartowanym* przez $\mathcal{F}$, gdy dla każdego zbioru $C \subseteq B$ istnieje taki zbiór $F \in \mathcal{F}$, że $C = B \cap F$. Oznaczmy przez d największą możliwą moc zbioru ćwiartowanego przez $\mathcal{F}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k} \geqslant |\mathcal{F}|.$$

35. Na płaszczyźnie dane są okręgi ω_1 i ω_2, o różnych promieniach i środkach odpowiednio O_1 i O_2, przecinające się w punktach A i B tak, że $\sphericalangle O_1AO_2 = 90°$. Na odcinku AB wybrano punkt X różny od A, B oraz środka odcinka AB. Prosta O_1X przecina okrąg ω_2 w punktach P_1 i Q_1, prosta O_2X przecina okrąg ω_1 w punktach P_2 i Q_2, przy czym punkty P_1 i P_2 leżą odpowiednio na odcinkach O_1X i O_2X. Wykazać, że proste O_1O_2, P_1P_2, Q_1Q_2 przecinają się w jednym punkcie niezależnym od wyboru punktu X.

36. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych, dla których istnieje dodatnia liczba całkowita x spełniająca warunki:

- $1 + x + \ldots + x^{m-1}$ dzieli się przez n;
- $1 + x + \ldots + x^{n-1}$ dzieli się przez m.

Zawody drużynowe

1. Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2k^2(n+k)^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}.$$

2. Znaleźć największą możliwą wartość wyrażenia

$$abcd\cdot|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)|,$$

gdzie a, b, c, d są liczbami nieujemnymi, których suma jest równa 4.

3. Graf prosty nazwiemy *podzielnościowym*, jeśli można tak ponumerować jego wierzchołki parami różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, by dla każdej pary wierzchołków istniała krawędź między nimi wtedy i tylko wtedy, gdy numer jednego z nich jest podzielny przez numer drugiego. Ponadto graf prosty o n wierzchołkach nazwiemy *permutacyjnym*, jeśli można ponumerować jego wierzchołki liczbami 1, 2, …, n w taki sposób, by istniała permutacja σ zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ o następującej własności: dla wierzchołków o numerach i, j, gdzie $i<j$ istnieje krawędź między nimi wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(i)>\sigma(j)$.

Wykazać, że graf prosty jest permutacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno on, jak i jego dopełnienie, są grafami podzielnościowymi.

4. Na płaszczyźnie dany jest zbiór S złożony z $2n$ punktów ($n\geqslant 1$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. *Skojarzeniem* nazwiemy taki zbiór n odcinków, że każdy punkt z S jest końcem dokładnie jednego z nich. Skojarzenie nazwiemy *nieprzecinającym się*, jeśli żadne dwa odcinki tego skojarzenia się nie przecinają. Niech L będzie największą możliwą sumą długości odcinków w skojarzeniu, P zaś — największą możliwą sumą długości odcinków w nieprzecinającym się skojarzeniu. Dowieść, że $P\geqslant \frac{2}{\pi}L$.

5. W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, punkt L jest punktem przecięcia symedian, a punkt P spełnia warunek $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBC=\sphericalangle PCA$. Wykazać, że $\sphericalangle OPL=90^\circ$.

6. W trójkącie ABC punkty O, I są środkami okręgów odpowiednio opisanego i wpisanego w ten trójkąt. Prosta ℓ różna od prostej BC jest styczna do okręgu wpisanego i równoległa do BC. Punkt X jest punktem przecięcia prostych OI i ℓ, a punkt Y jest punktem przecięcia prostej ℓ z prostą prostopadłą do odcinka XI przechodzącą przez punkt I. Wykazać, że punkty A, X, Y, O leżą na jednym okręgu.

7. Niech $p\geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że liczba

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+2$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej dla żadnej dodatniej liczby całkowitej x.

8. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $m\geqslant 1$ istnieje taka dodatnia liczba całkowita N, że dla każdej liczby pierwszej $p>N$ istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z niepodzielne przez p takie, że liczba $x^m+y^m-z^m$ jest podzielna przez p.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki niezerowy, unormowany i nierozkładalny wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieją liczby całkowite $a, b > 1$ takie, że $P(n) = a^b$.

Uwaga: Wielomian nierozkładalny to taki, który nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{Z}$, z których żaden nie jest stale równy ± 1.

2. Parami różne liczby rzeczywiste a, b, c są pierwiastkami wielomianu $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ liczba

$$\frac{a^n + b^n + c^n - 4^n - 5^n - 11^n}{17}$$

jest całkowita.

3. Dana jest liczba całkowita $n > 2018$ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wykazać, że

$$(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2.$$

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dżesika i Brajan grają w następującą grę. Przed grą Dżesika wybiera liczbę pierwszą p mniejszą niż 2^n oraz liczbę $r_0 \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Następnie gra odbywa się w rundach. W i-tej rundzie Brajan podaje Dżesice liczbę pierwszą q mniejszą niż 2^n. Jeśli $q = p$, to Brajan wygrywa, a w przeciwnym razie Dżesika oblicza liczbę r_i równą reszcie z dzielenia liczby $q \cdot r_{i-1}$ przez p i mówi Brajanowi, która z liczb r_i oraz r_{i-1} jest większa bądź czy są równe. Wykazać, że Brajan może wygrać grę w co najwyżej $2n + 1$ rundach.

5. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n > 1$, że istnieją dodatnie liczby całkowite b_1, b_2, …, b_n, nie wszystkie równe, o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej k liczba

$$(b_1 + k)(b_2 + k) \ldots (b_n + k)$$

jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku całkowitym nie mniejszym niż 2.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Zbiór wszystkich funkcji $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, 2n\}$ oznaczmy przez $\mathcal{L}$. *Wagą* zbioru $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ względem funkcji $f \in \mathcal{L}$ nazwiemy liczbę $\sum_{i \in A} f(i)$. Dla niepustej rodziny $\mathcal{F}$ składającej się z podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ powiemy, że funkcja $f \in \mathcal{L}$ *izoluje* $\mathcal{F}$, jeśli wśród zbiorów z $\mathcal{F}$ istnieje dokładnie jeden o najmniejszej wadze względem f. Wykazać, że każda niepusta rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ jest izolowana przez co najmniej połowę funkcji z $\mathcal{L}$.

7. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 2$ istnieje graf prosty G, w którym każdy wierzchołek ma stopień nie większy od k, nie istnieje cykl krótszy niż k oraz stosunek liczby krawędzi do liczby wierzchołków wynosi co najmniej $\frac{k}{2018}$.

8. Na przyjęciu spotkało się $n \geqslant 2$ gości, z których niektórzy się znają. Okazało się, że nie dało się znaleźć takiej czwórki gości a, b, c, d, że pary gości (a, b), (b, c) oraz (c, d) się znają, ale pary gości (a, c), (a, d) oraz (b, d) się nie znają. Wykazać, że gości na przyjęciu da się podzielić na takie dwa niepuste podzbiory A i B, że albo każdy gość ze zbioru A zna każdego gościa ze zbioru B, albo żaden gość ze zbioru A nie zna żadnego gościa ze zbioru B.

9. Okrąg ω o środku w punkcie O jest wpisany w czworokąt $ABCD$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, punkt K jest punktem przecięcia odcinków AC i BD, a punkt L jest punktem przecięcia okręgu ω z półprostą $\overrightarrow{KI}$. Wykazać, że proste LO i AC są prostopadłe.

10. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC. Niech ω będzie okręgiem stycznym do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F, nieprzecinającym prostej BC. Z punktu M poprowadzono proste styczne do okręgu ω w punktach P i Q, przy czym punkty B i P leżą po tej samej stronie prostej AM. Prosta PM przecina prostą BF w punkcie X. Prosta QM przecina prostą CE w punkcie Y. Wykazać, że jeśli $2PM = BC$, to prosta XY jest styczna do okręgu ω.

11. Dany jest ostrosłup prawidłowy o podstawie wielokąta foremnego $A_1A_2\ldots A_{2n}$ i wierzchołku S. Pewna sfera przechodząca przez punkt S przecina każdą z krawędzi A_iS w punkcie B_i. Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^{n} SB_{2i} = \sum_{i=1}^{n} SB_{2i-1}.$$

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste k, że dla dowolnej czwórki liczb rzeczywistych $a, b, c, d \in \langle -1, \infty)$ zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 1 \geqslant k(a + b + c + d).$$

2. Wykazać, że iloczyn wszystkich 2^{2018} liczb postaci $\pm 1 \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{2018}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

3. Liczby całkowite $a > b > 1$ oraz $n \geqslant 1$ są takie, że liczba b jest nieparzysta oraz liczba b^n jest dzielnikiem liczby $a^n - 1$. Udowodnić, że

$$a^b > \frac{3^n}{n}.$$

4. Ciąg (x_n) jest określony przez warunki: $x_1 = 1$, $x_2 = 6$ oraz $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, q zaś dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby x_p. Wykazać, że jeśli $q > 3$, to $q \geqslant 2p - 1$.

5. Powiemy, że graf H jest *minorem* grafu G, jeśli każdemu wierzchołkowi u grafu H można przypisać spójny podgraf G_u grafu G tak, by różnym wierzchołkom u, v grafu H odpowiadały rozłączne podgrafy G_u, G_v, a każdej krawędzi grafu H łączącej wierzchołki u i v odpowiadała co najmniej jedna krawędź z G łącząca wierzchołek z G_u z wierzchołkiem z G_v. Udowodnić, że dla każdego grafu G, jeśli pełny graf o 2018 wierzchołkach nie jest minorem G, to stosunek liczby krawędzi do liczby wierzchołków grafu G jest mniejszy od 2^{2018}.

Uwaga: Wszystkie rozważane grafy są proste i nieskierowane.

6. Leszek położył n kolorowych karteczek w kształcie kółek o równych promieniach na dużej tablicy korkowej. Zauważył, że każde dwie z tych kartek stykają się lub częściowo pokrywają. Udowodnić, że używając trzech pinezek może przyczepić te kartki tak, że po zawieszeniu tablicy na ścianie żadna kartka nie spadnie.

Uwaga: Jeśli wbijemy pinezkę na obwodzie kartki, to ta kartka nie spadnie.

7. Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu o środku O. Wykazać, że jeżeli punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACE, to okręgi opisane na trójkątach OAD, OBE, OCF mają punkt wspólny różny od O.

8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz punkt P leżący wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie ABC po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A. Proste AP, BP, CP przecinają ten okrąg ponownie odpowiednio w punktach A', B', C'. Niech X będzie punktem przecięcia prostej BC oraz prostej łączącej punkt P z obrazem symetrycznym A'' punktu A' względem BC. Analogicznie definiujemy punkty Y i B'' oraz Z i C''. Wykazać, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr dodatniej liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *dostojną*, jeśli $S(n) = S(n^2)$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $S(n)$ dla liczby dostojnej n.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wszystkie możliwe wartości $S(n)$ to liczby postaci $9(k+1)$ lub $9k+1$ dla nieujemnych liczb całkowitych k.

Niech liczba całkowita n będzie dostojna. Wtedy, skoro suma cyfr liczby n jest równa sumie cyfr liczby n^2, to w szczególności liczby n, n^2 dają te same reszty z dzielenia przez 9. Stąd też

$$9 \mid n^2 - n = n(n-1),$$

więc liczba n daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 9. Wobec tego liczba $S(n)$ również daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 9.

Pozostało wykazać, że dla każdej nieujemnej liczby całkowitej k istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n, że $S(m) = 9(k+1)$, $S(n) = 9k+1$.

Niech $m = 10^{k+1} - 1$. Wtedy $S(m) = S(\underbrace{99\ldots9}_{k+1 \text{ cyfr}}) = 9(k+1)$. Ponadto

$$m^2 = (10^{k+1}-1)^2 = 10^{2k+2} - 2\cdot 10^{k+1} + 1 = \underbrace{99\ldots9}_{k \text{ cyfr}}8\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ cyfr}}1, \text{ skąd } S(m^2) = 9k+8+1 = S(m).$$

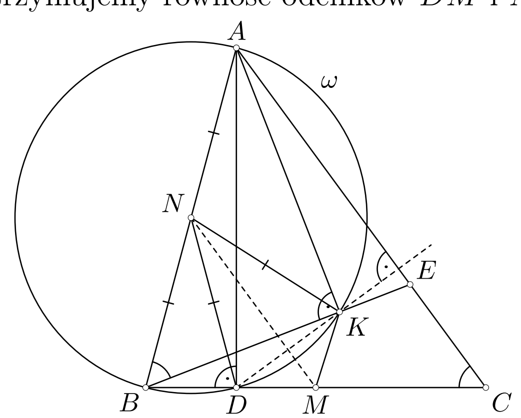
Niech teraz $n = 2\cdot 10^k - 1$. Wtedy $S(n) = S(1\underbrace{99\ldots9}_{k \text{ cyfr}}) = 9k+1$. Oprócz tego

$$n^2 = (2\cdot 10^k-1)^2 = 4\cdot 10^{2k} - 4\cdot 10^k + 1 = 3\underbrace{99\ldots9}_{k-1 \text{ cyfr}}6\underbrace{00\ldots0}_{k-1 \text{ cyfr}}1, \text{ a więc } S(n^2) = 3+9(k-1)+6+1 = S(n).$$

2. W trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $AB < AC$, punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkt M jest środkiem boku BC. Na boku AC wybrano taki punkt E, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BCA$. Prosta prostopadła do boku AC przechodząca przez D przecina prostą BE w punkcie K. Udowodnić, że $DM = MK$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\sphericalangle KDA = 90^\circ - \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle KBA$, wobec czego punkty B, D, K, A leżą na jednym okręgu ω, a skoro $\sphericalangle BDA = 90^\circ$, to jest to okrąg o średnicy AB. Niech N będzie środkiem odcinka AB i tym samym środkiem okręgu ω. Wówczas $ND = NK$ jako promień okręgu ω. Ponadto prosta MN jest linią środkową trójkąta ABC, zatem jest równoległa do prostej AC. Ponieważ proste DK i AC są prostopadłe, więc również proste MN i DK są prostopadłe. Wobec tego prosta MN jest symetralną odcinka DK, skąd otrzymujemy równość odcinków DM i MK.



3. Dane są parami różne liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdzie $n \geqslant 1$. Wykazać, że wielomian

$$P(x) = ((x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n))^2 + 1$$

nie jest iloczynem dwóch wielomianów dodatnich stopni o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że istnieją niestałe wielomiany Q, R o współczynnikach całkowitych spełniające równość $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Ponieważ wielomian P jest unormowany, więc współczynniki wiodące wielomianów Q, R są równe i wynoszą 1 lub -1. Bez straty ogólności (być może zmieniając parę wielomianów (Q, R) na parę $(-Q, -R)$) możemy przyjąć, że wielomiany Q, R są unormowane. Ponadto dla $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy

$$Q(a_i) \cdot R(a_i) = P(a_i) = 1, \quad \text{skąd} \quad Q(a_i) = R(a_i) = \pm 1.$$

Przypuśćmy, że dla pewnych indeksów i, j mamy $Q(a_i) = 1$ oraz $Q(a_j) = -1$. Na mocy twierdzenia Darboux wielomian Q posiada pierwiastek rzeczywisty a. Stąd $P(a) = Q(a) \cdot R(a)$, zatem wielomian P również posiada pierwiastek rzeczywisty. Ale

$$P(x) = ((x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n))^2 + 1 \geqslant 1 > 0$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Stąd dla $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $Q(a_i) = \varepsilon \in \{-1, 1\}$. Wtedy też $P(a_i) = \varepsilon$.

Wykażemy, że wielomiany Q, R mają równe stopnie. Rozważmy niestały wielomian $Q' = Q - \varepsilon$. Wtedy dla $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $Q'(a_i) = Q(a_i) - \varepsilon = 0$. Skoro Q' ma n różnych pierwiastków rzeczywistych i nie jest stały, to $\deg Q' \geqslant n$. Toteż $\deg Q = \deg Q' \geqslant n$. Analogicznie dowodzimy, że $\deg R \geqslant n$. Ale

$$2n \leqslant \deg Q + \deg R = \deg(Q \cdot R) = \deg P = 2n,$$

wobec czego musi zachodzić równość $\deg Q = n = \deg R$.

Niech $S = Q - R$. Ponieważ wielomiany Q, R są tego samego stopnia oraz oba są unormowane, więc $\deg S = \deg(Q - R) < n$. Ale dla $i = 1, 2, \ldots, n$, $S(a_i) = Q(a_i) - R(a_i) = \varepsilon - \varepsilon = 0$, czyli S ma n parami różnych pierwiastków rzeczywistych. Stąd $S \equiv 0$, czyli wielomiany Q, R są równe.

Otrzymujemy zatem

$$((x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n))^2 + 1 = P(x) = Q(x) \cdot R(x) = (Q(x))^2, \quad \text{czyli}$$

$$(Q(x) - (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n))(Q(x) + (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)) = 1.$$

Z równości wielomianów, a w szczególności równości ich stopni wynika, że

$$n > 0 = \deg 1 = \deg((Q(x) - (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n))(Q(x) + (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n))) \geqslant$$
$$\geqslant \deg(Q(x) + (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)) = n.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wielomian P nie przedstawia się jako iloczyn dwóch wielomianów dodatnich stopni o współczynnikach całkowitych.

4. Dla danego nieskierowanego grafu G podzbiór jego krawędzi F nazwiemy *rozpinającym*, jeśli każde dwa wierzchołki grafu G można połączyć ścieżką używającą jedynie krawędzi z F. Niech $S(G)$ oznacza liczbę różnych podzbiorów rozpinających w grafie G. Wykazać, że liczba $S(G)$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy G jest spójny i dwudzielny, tzn. gdy każde dwa wierzchołki G można połączyć ścieżką oraz wierzchołki G można podzielić na dwa podzbiory A i B w taki sposób, by każda krawędź łączyła wierzchołek należący do A z wierzchołkiem należącym do B.

Uwaga: Przez graf rozumiemy graf prosty, to znaczy taki, w którym każda krawędź łączy dwa różne wierzchołki oraz żadna para wierzchołków nie jest połączona więcej niż jedną krawędzią.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez V oraz E odpowiednio zbiory wierzchołków i krawędzi grafu G. Ustalmy dowolny wierzchołek $v \in V$. *Podziałem* V nazwiemy taką parę (A, B) rozłącznych podzbiorów V, że $V = A \cup B$. Podział (A, B) nazwiemy *dobrym* jeśli $v \in A$. Dla podzbioru krawędzi $F \subseteq E$ powiemy, że podział (A, B) *szanuje* F, jeśli żadna krawędź z F nie łączy wierzchołka z A z wierzchołkiem z B.

Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem takich trójek (A, B, F), gdzie $A, B \subseteq V$ oraz $F \subseteq E$, że (A, B) jest dobrym podziałem V szanującym F. Zliczymy parzystość mocy zbioru $\mathcal{R}$ na dwa sposoby.

Z jednej strony pogrupujmy trójki $(A, B, F) \in \mathcal{R}$ po podzbiorach krawędzi F. Ustalmy $F \subseteq E$ i niech k będzie liczbą spójnych składowych grafu (V, F). Zauważmy, że wówczas istnieje dokładnie 2^{k-1} dobrych podziałów (A, B) szanujących F, gdyż każda spójna składowa grafu (V, F) może zostać w całości zawarta albo w A albo w B, ale spójna składowa zawierająca v musi zostać w całości zawarta w A. Zatem takich dobrych podziałów jest nieparzyście wiele wtedy i tylko wtedy, gdy F jest rozpinający, skąd wniosek, że parzystość mocy $\mathcal{R}$ jest równa parzystości $S(G)$.

Z drugiej strony pogrupujmy trójki $(A, B, F) \in \mathcal{R}$ po dobrych podziałach (A, B). Ustalmy dobry podział (A, B) i rozważmy, ile jest podzbiorów krawędzi F szanowanych przez (A, B). Krawędzie łączące wierzchołki z A z wierzchołkami z B nie mogą być zawarte w takim podzbiorze F, ale każda krawędź o obu końcach w A lub obu końcach w B może być włączona do F lub nie. Oznacza to, że jeśli przez ℓ oznaczymy liczbę krawędzi o obu końcach w A lub obu końcach w B, to podzbiorów krawędzi F szanowanych przez (A, B) jest dokładnie 2^ℓ. Jest to liczba nieparzysta tylko jeśli $\ell = 0$, skąd wniosek, że parzystość mocy $\mathcal{R}$ jest równa parzystości liczby takich dobrych podziałów (A, B), że każda krawędź grafu łączy wierzchołek z A z wierzchołkiem z B. Nazwijmy takie podziały *świetnymi*.

Pozostaje zauważyć, że liczba świetnych podziałów jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy G jest dwudzielny i spójny. Z jednej strony, jeśli G jest dwudzielny i spójny to istnieje dokładnie jeden świetny podział (A, B): v należy do A, sąsiedzi v należą do B, sąsiedzi sąsiadów v należą do A, itd. Z drugiej strony, jeśli G nie jest dwudzielny, to nie istnieje świetny podział, a jeśli G jest dwudzielny ale nie spójny, to liczba świetnych podziałów wynosi 2^{c-1}, gdzie c to liczba spójnych składowych G: w składowej zawierającej v dobieramy strony podziału na jeden sposób, a w każdej innej na dwa sposoby.

5. Wierzchołki 2018-kąta foremnego ponumerowano liczbami całkowitymi od 1 do 2018 tak, że każdej z tych liczb użyto dokładnie raz. Trójkąt, którego wierzchołki są wierzchołkami tego 2018-kąta, nazwiemy *zorientowanym*, jeśli numery jego wierzchołków rosną zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka numeracja, dla której liczba trójkątów zorientowanych wynosi $2018^2 + 1$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że numeracja spełniająca żądane własności nie istnieje. W tym celu udowodnimy ogólniejszą tezę: Jeśli wierzchołki $2n$-kąta foremnego ponumerowano liczbami $1, 2, 3, \ldots, 2n$, przy czym każda liczba została użyta dokładnie raz, to liczba zorientowanych trójkątów jest parzysta.

Rozważmy numerację $2n$-kąta foremnego o żądanych własnościach. *Transpozycją* sąsiednich wierzchołków P, Q tego wielokąta nazwiemy zamianę numerów tych wierzchołków.

Wykażemy, że transpozycja nie zmienia parzystości liczby zorientowanych trójkątów. Ustalmy sąsiednie wierzchołki A, B. Powiemy, że trójkąt, którego wierzchołki są wierzchołkami $2n$-kąta jest *wyborny*, jeśli dwa z jego wierzchołków to A, B. Niech x oznacza liczbę wybornych trójkątów zorientowanych przed wykonaniem transpozycji, a y — liczbą pozostałych trójkątów zorientowanych przed transpozycją. Wówczas liczba zorientowanych trójkątów przed wykonaniem transpozycji wierzchołków A, B wynosi $S_1 = x + y$. Po wykonaniu transpozycji liczba trójkątów zorientowanych, które nie są wyborne, nie zmieni się. Ponadto wszystkie wyborne trójkąty zorientowane przed transpozycją, po jej wykonaniu przestaną być zorientowane. I odwrotnie: wszystkie wyborne trójkąty, które przed transpozycją nie były zorientowane, staną się zorientowane. Stąd liczba zorientowanych trójkątów po wykonaniu transpozycji wierzchołków A, B wynosi $S_2 = y + ((2n-2) - x)$. Skoro $2 \mid 2(n-1+y) = S_1 + S_2$, to istotnie liczby S_1, S_2 są tej samej parzystości.

Numerację nazwiemy *końcową*, jeśli wierzchołki $2n$-kąta mają kolejno numery $1, 2, 3, \ldots, 2n$, przy czym numery wierzchołków rosną przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Jest to oczywiście jedyne numerowanie, w którym liczba zorientowanych trójkątów wynosi zero. Zauważmy, że każdą numerację możemy sprowadzić do numeracji końcowej, dokonując skończonej liczby transpozycji. Istotnie, jeśli numerowanie nie jest końcowe, to istnieją dwa sąsiednie wierzchołki P, Q, których numery są różne od 1 i rosną przy rozważeniu orientacji wielokąta zgodnej z ruchem wskazówek zegara. Dokonując transpozycji wierzchołków P, Q, zmniejszamy liczbę zorientowanych trójkątów. Wobec tego po wykonaniu skończonej liczby opisanych powyżej operacji otrzymamy numerację końcową. Ponieważ liczba trójkątów zorientowanych w numeracji końcowej wynosi 0, więc w szczególności jest parzysta, czyli również początkowa liczba trójkątów zorientowanych była parzysta.

6. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste α, dla których istnieje ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o tej własności, że

$$x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n} \quad \text{dla wszystkich } n \geqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Załóżmy wpierw, że $\alpha > 1$ i rozważmy ciąg $x_n = \alpha - 1$ dla $n \geqslant 1$. Wówczas istotnie mamy

$$\sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n} = \sqrt{\alpha(\alpha - 1) - (\alpha - 1)} = \alpha - 1 = x_{n+2},$$

więc wszystkie liczby $\alpha > 1$ spełniają warunek postulowany w zadaniu.

Wykażemy teraz, że dla żadnej liczby $\alpha \leqslant 1$ nie istnieje ciąg x_n spełniający zadane równości. Zauważmy wpierw, że dla $n \geqslant 1$ mamy

$$0 < x_{n+2}^2 = \alpha x_{n+1} - x_n \leqslant x_{n+1} - x_n,$$

skąd $x_n < x_{n+1}$, a więc ciąg x_n jest rosnący. Z drugiej strony mamy

$$x_{n+2}^2 = \alpha x_{n+1} - x_n < x_{n+1} < x_{n+2},$$

a zatem $x_{n+2} < 1$. Wnioskujemy, że ciąg x_n jest rosnący i ograniczony przez 1, a więc istnieje takie n, że $x_{n+1} - x_n < x_1^2$. Istotnie, w przeciwnym przypadku mielibyśmy $x_n \geqslant x_1 + (n-1)x_1^2$, co stałoby w sprzeczności z $x_n < 1$ dla odpowiednio dużego n. Teraz wystarczy zaobserwować, że

$$x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n} \leqslant \sqrt{x_{n+1} - x_n} < x_1,$$

co przeczy faktowi, że ciąg x_n jest rosnący.

7. W czworościanie $ABCD$ punkt P jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D. Punkty A', B', C' są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AD, BD, CD. Płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ przecinają się wzdłuż prostej ℓ. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnić, że proste OP oraz ℓ są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Ponieważ płaszczyzny $A'B'C'$ i ABC przecinają się wzdłuż prostej, więc przynajmniej dwie z prostych $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ przecinają tę prostą. Przyjmijmy, że proste $B'C'$ i $C'A'$ przecinają prostą ℓ odpowiednio w punktach X i Y. Punkt X leży także na płaszczyźnie $BCC'B'$, więc należy do prostej BC. Analogicznie stwierdzamy, że punkt Y leży na prostej AC.

Zauważmy, że punkty A', B', C' leżą na sferze s o średnicy PD. Ponadto

$$DB' \cdot DB = DP^2 = DC' \cdot DC,$$

skąd wniosek, że punkty B, B', C', C leżą na jednym okręgu. Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykorzystując potęgę punktu względem sfery s oraz tych dwóch okręgów, otrzymujemy
$$XP^2 = XB' \cdot XC' = XB \cdot XC = XO^2 - R^2.$$
W analogiczny sposób dowodzimy, że $YP^2 = YO^2 - R^2$, skąd $XP^2 - YP^2 = XO^2 - YO^2$. To zaś oznacza, że prosta PO jest prostopadła do prostej ℓ, na której leżą punkty X i Y.

8. Wykazać, że jeśli dodatnią liczbę całkowitą k można przedstawić w postaci $k = a^2 + b^2 + c^2$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi, to można ją również przedstawić w postaci $k = u^2 + v^2 + w^2$, gdzie u, v, w są liczbami całkowitymi, z których co najmniej jedna nie jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw następujące tożsamości:
$$9x^2 + 9y^2 + 9z^2 = (2x + 2y - z)^2 + (2y + 2z - x)^2 + (2z + 2x - y)^2, \quad (1)$$
$$9x^2 + 9y^2 + 9z^2 = (2x + 2y + z)^2 + (2y - 2z - x)^2 + (2z - 2x + y)^2. \quad (2)$$
Załóżmy, że dodatnią liczbę całkowitą k można przedstawić w postaci $k = a^2 + b^2 + c^2$, gdzie a, b, c są całkowite. Skoro $k \geqslant 0$, to liczby a, b, c nie są wszystkie równe 0, a więc możemy tak dobrać to przedstawienie, by największy wspólny dzielnik liczb a, b, c — nazwijmy go d — miał jak najmniej trójek w rozkładzie na czynniki pierwsze. Jeśli liczba d nie jest podzielna przez 3, to również co najmniej jedna z liczb a, b, c nie jest podzielna przez 3 i możemy przyjąć $(u, v, w) = (a, b, c)$.

Przypuśćmy, że $d = 3^\ell \cdot w$, gdzie $\ell, w \geqslant 1$ są całkowite oraz w nie jest podzielne przez 3. Wówczas możemy napisać
$$a = 3^\ell \cdot x, \quad b = 3^\ell \cdot y, \quad c = 3^\ell \cdot z,$$
gdzie liczby x, y, z są całkowite oraz co najmniej jedna z nich nie jest podzielna przez 3. Bez utraty ogólności możemy założyć, że $3 \nmid z$.

Rozważmy liczby całkowite
$$\bar{x} = 2x + 2y - z, \quad \bar{y} = 2y + 2z - x, \quad \bar{z} = 2z + 2x - y.$$
Skoro $k = 9^{2\ell} \cdot x^2 + 9^{2\ell} \cdot y^2 + 9^{2\ell} \cdot z^2$, to na mocy (1) wnioskujemy, że również $k = 9^{2\ell-2} \cdot \bar{x}^2 + 9^{2\ell-2} \cdot \bar{y}^2 + 9^{2\ell-2} \cdot \bar{z}^2$. Zatem przyjmując $\bar{a} = 3^{\ell-1} \cdot \bar{x}$, $\bar{b} = 3^{\ell-1} \cdot \bar{y}$, $\bar{c} = 3^{\ell-1} \cdot \bar{z}$ mamy $k = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2$. Na mocy doboru liczb a, b, c wnioskujemy, że największy wspólny dzielnik liczb $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ma co najmniej ℓ trójek w rozkładzie na czynniki pierwsze, a zatem każda z liczb $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ jest podzielna przez 3. Używając tożsamości (2) zamiast (1) analogicznie otrzymujemy, że każda z liczb
$$\bar{\bar{x}} = 2x + 2y + z, \quad \bar{\bar{y}} = 2y - 2z - x, \quad \bar{\bar{z}} = 2z - 2x + y$$
jest podzielna przez 3. Wystarczy teraz zauważyć, że $\bar{\bar{x}} - \bar{x} = 2z$, a więc liczba z również jest podzielna przez 3. Stoi to w sprzeczności z wcześniejszym założeniem, że $3 \nmid z$.

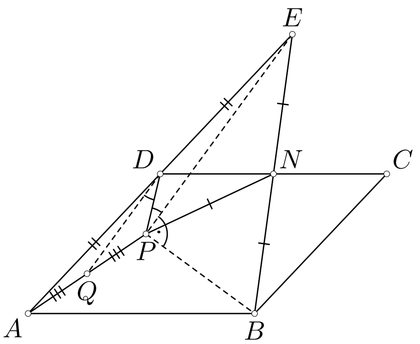
9. Udowodnić, że istnieje 2018 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, wśród których jest dokładnie 13 liczb pierwszych.

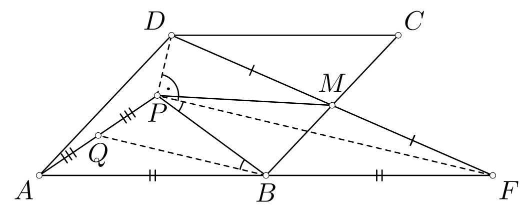
Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że gdy do każdego wyrazu ciągu $(n, n + 1, \ldots, n + 2017)$ dodamy liczbę 1, otrzymując ciąg $(n + 1, n + 2, \ldots, n + 2018)$, liczba liczb pierwszych wzrośnie lub zmaleje o 1 bądź też nie ulegnie zmianie. Ponieważ liczby 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 są pierwsze, więc w ciągu $(1, 2, \ldots, 2018)$ jest co najmniej 13 liczb pierwszych. Ponadto dla $k = 2019! + 2$ ciąg $(k, k + 1, \ldots, k + 2017)$ zawiera same liczby złożone. Wobec tego wykonując wielokrotnie operację dodawania liczby 1 do każdego wyrazu ciągu, zaczynając od pierwszego ciągu i dochodząc do drugiego, w pewnym momencie uzyskamy ciąg liczb, który zawiera dokładnie 13 liczb pierwszych.

10. W równoległoboku $ABCD$ punkty M, N są odpowiednio środkami boków BC, CD. Punkt P leży we wnętrzu tego równoległoboku oraz spełnia równości $BN = PN$ i $DM = PM$. Punkt Q jest środkiem odcinka PA. Wykazać, że $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle PDQ$.

Rozwiązanie:
Sposób I
Przyjmijmy, że proste BN i AD przecinają się w punkcie E, a proste DM i AB przecinają się w punkcie F. Skoro $DN = \frac{1}{2}AB$ i oba odcinki są równoległe, to $AD = DE$ i $BN = EN$. Pierwsza równość wraz z warunkiem $AQ = PQ$ daje równoległość prostych DQ i EP, czyli $\sphericalangle PDQ = \sphericalangle DPE$. Z drugiej równości mamy zaś $EN = BN = PN$, skąd $\sphericalangle BPE = 90°$. Analogicznie uzasadniamy, że $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle BPF$ i $\sphericalangle DPF = 90°$. Zatem $\sphericalangle PDQ = \sphericalangle DPE = 90° - \sphericalangle EPF = \sphericalangle BPF = \sphericalangle PBQ$.

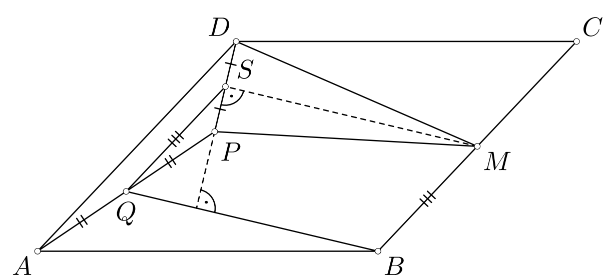




Sposób II
Niech S będzie środkiem odcinka DP. Odcinek QS jest linią środkową w trójkącie APD, więc

$$QS = \tfrac{1}{2}AD = \tfrac{1}{2}BC = BM$$

oraz odcinek QS jest równoległy do AD, zatem też do BM. W takim razie czworokąt $BMSQ$ jest równoległobokiem. Prosta MS jest symetralną odcinka DP, skąd wniosek, że $MS \perp DP$, więc także $BQ \perp DP$. Analogicznie dostajemy, że $DQ \perp BP$, czyli punkt P jest ortocentrum trójkąta BQD. Ostatecznie $\sphericalangle PBQ = 90° - \sphericalangle BQD = \sphericalangle PDQ$.



11. Na przyjęciu spotkało się 2018 gości. Okazało się, że każdy gość zna co najmniej trzech innych gości. Dowieść, że da się wybrać podzbiór złożony z co najmniej 3 i co najwyżej 21 gości i usadzić ich przy okrągłym stole tak, by każdy gość przy stole znał obu swoich sąsiadów.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf G, którego wierzchołkami są goście na przyjęciu, a krawędzie łączą pary znających się gości. Z założeń zadania wiemy, że stopień każdego wierzchołka w grafie G wynosi co najmniej 3. Teza zaś sprowadza się do wykazania, że w G można znaleźć cykl długości co najwyżej 21. W rozwiązaniu będziemy korzystać z pojęcia *odległości* pomiędzy dwoma wierzchołkami w grafie, czyli długości najkrótszej ścieżki je łączącej.

Przypuśćmy przeciwnie, że w grafie G nie istnieje cykl długości co najwyżej 21. Ustalmy dowolny wierzchołek v. Dla nieujemnej liczby całkowitej i, niech N_i będzie zbiorem wierzchołków leżących w odległości dokładnie i od v oraz niech $B_i = N_0 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_i$ będzie zbiorem wierzchołków leżących w odległości co najwyżej i od v. Ponadto niech H_i będzie podgrafem indukowanym w G przez B_i, tzn. H_i składa się z wierzchołków należących do B_i oraz krawędzi G o obu końcach w B_i.

Wykażemy teraz przez indukcję po i następujące stwierdzenie: dla $i = 0, 1, \ldots, 10$ graf H_i jest drzewem (tzn. spójnym grafem bez cykli), w którym wszystkie wierzchołki z N_i są liśćmi (tzn. wierzchołkami stopnia 1). Dla $i = 0$ jest to jasne, gdyż H_i składa się jedynie z wierzchołka v.

Przechodząc do kroku indukcyjnego, zauważmy, że dla $i \geqslant 1$ graf H_i powstaje z H_{i-1} poprzez dołączenie wszystkich wierzchołków z N_i oraz krawędzi łączących je ze sobą nawzajem oraz z wierzchołkami z N_{i-1} — z definicji N_i nie mogą istnieć krawędzie pomiędzy N_i a N_j dla żadnego $j < i - 1$. Oczywiście każdy wierzchołek $w \in N_i$ ma co najmniej jednego sąsiada w N_{i-1}, gdyż na najkrótszej ścieżce z w do v drugi wierzchołek leży w odległości $i - 1$ od v, czyli należy do N_{i-1}.

Przypuśćmy, że w ma dwóch różnych sąsiadów u, u' w zbiorze N_{i-1}. Niech P, P' będą najkrótszymi ścieżkami odpowiednio z u, u' do v. Wówczas P ma długość $i - 1$ i kolejne wierzchołki P należą kolejno (patrząc ze strony u) do $N_{i-1}, N_{i-2}, \ldots, N_0$; podobnie dla P'. Niech x będzie wspólnym wierzchołkiem ścieżek P, P', który leży najdalej od v (być może $v = x$ jeśli v jest jedynym wspólnym wierzchołkiem ścieżek P i P'). Wówczas fragmenty ścieżek P, P' odpowiednio od u, u' do x, wraz z trzy-wierzchołkową ścieżką $u - w - u'$, tworzą cykl długości co najwyżej $2i \leqslant 20$. Stoi to w sprzeczności z założeniem, że takiego cyklu nie ma w grafie G. A zatem każdy wierzchołek z N_i ma dokładnie jednego sąsiada w N_{i-1}.

Do tezy indukcyjnej pozostaje wykazać, że żadne dwa wierzchołki z N_i nie są połączone krawędzią, gdyż wówczas wywnioskujemy, że H_i powstaje z drzewa H_{i-1} poprzez dołączenie pewnej liczby wierzchołków stopnia 1, a więc pozostaje drzewem. Przypuśćmy przeciwnie, że dwa wierzchołki $w, w' \in N_i$ są połączone krawędzią. Wówczas rozważając najkrótsze ścieżki P, P' z w, w' do v, analogicznie jak wyżej wnioskujemy, że w G jest cykl długości co najwyżej $2i + 1 \leqslant 21$, składający się z fragmentów ścieżek P, P' oraz krawędzi $w - w'$. Ponownie jest to sprzeczność z założeniem, że w G nie ma takiego cyklu, a więc teza indukcyjna została wykazana.

Rozważmy teraz wierzchołki zbioru N_i dla $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Na mocy stwierdzenia udowodnionego powyżej, każdy wierzchołek należący do N_i ma jednego sąsiada w zbiorze N_{i-1} oraz nie ma sąsiadów w zbiorze N_i. Skoro sąsiedzi wierzchołków z N_i należą do $N_{i-1} \cup N_i \cup N_{i+1}$ oraz stopień każdego wierzchołka w grafie G wynosi co najmniej 3, to każdy wierzchołek z N_i ma co najmniej dwóch sąsiadów w N_{i+1}. Ponadto ci sąsiedzi muszą być parami różni dla różnych wierzchołków z N_i, gdyż każdy z nich ma dokładnie jednego sąsiada w N_i. Otrzymujemy stąd wniosek, że

$$|N_{i+1}| \geqslant 2|N_i| \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Zauważmy ponadto, że $|N_1| \geqslant 3$, gdyż wierzchołek v ma co najmniej 3 sąsiadów. Stąd przez trywialną indukcję otrzymujemy

$$|N_i| \geqslant 3 \cdot 2^{i-1} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Wnioskujemy, że

$$|B_i| = |N_0 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_{10}| \geqslant 1 + 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + \ldots + 3 \cdot 2^9 = 1 + 3 \cdot (2^{10} - 1) = 3070 > 2018.$$

To stoi w sprzeczności z założeniem, że graf G ma 2018 wierzchołków, a zatem teza zadania jest wykazana.

12. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ takie, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x + f(xy)) = xf(1 + f(y)).$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wszystkie funkcje spełniające warunki zadania to funkcje postaci $f(x) = ax$ dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a.

Sposób I

Podstawiając w równości z zadania $y = 1$ otrzymujemy

$$f(x + f(x)) = xf(1 + f(1)). \tag{3}$$

Przyjmijmy więc $f(1 + f(1)) = c$. Z założeń zadania wynika, że $c > 0$. Ponadto podstawiając w równości (3) $x = z + f(z)$, otrzymujemy

$$f((c+1)z + f(z)) = f(z + f(z) + f(z + f(z))) = c(z + f(z)). \tag{4}$$

Z drugiej strony, podstawiając w równości danej w treści zadania $(x, y) = \left((c+1)z, \frac{1}{c+1}\right)$, otrzymujemy

$$f((c+1)z + f(z)) = (c+1)zf\left(1 + f\left(\frac{1}{c+1}\right)\right). \tag{5}$$

Łącząc tożsamości (4) oraz (5) wnioskujemy, że

$$c(z + f(z)) = (c+1)zf\left(1 + f\left(\frac{1}{c+1}\right)\right), \quad \text{skąd} \quad cf(z) = \left((c+1)f\left(1 + f\left(\frac{1}{c+1}\right)\right) - c\right)z.$$

Skoro $c > 0$, to przyjmując $a = \frac{1}{c}\left((c+1)f\left(1 + f\left(\frac{1}{c+1}\right)\right) - c\right)$, otrzymujemy $f(z) = az$.

Z założeń zadania wynika oczywiście, że $a > 0$; ponadto z dowolności liczby $z > 0$ otrzymujemy, że każda funkcja spełniająca warunki zadania jest postaci $f(x) = ax$ dla pewnej dodatniej liczby rzeczywistej a. Łatwo sprawdzić, że wszystkie funkcje tej postaci spełniają warunki zadania.

Sposób II

Wykażemy wpierw, że funkcja f spełniająca zadane równanie funkcyjne musi być niemalejąca. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją takie liczby dodatnie $t < t'$, że $f(t) > f(t')$. Rozważmy liczby

$$x = t \cdot \frac{f(t) - f(t')}{t' - t}, \qquad x' = t' \cdot \frac{f(t) - f(t')}{t' - t}, \qquad y = \frac{t' - t}{f(t) - f(t')}.$$

Skoro $t < t'$ i $f(t) > f(t')$, to liczby x, x', y są dodatnie. Ponadto spełnione są równości

$$xy = t, \qquad x'y = t', \qquad x + f(t) = x' + f(t').$$

Podstawiając pary (x, y) oraz (x', y) do danego równania funkcyjnego, otrzymujemy

$$xf(1 + f(y)) = f(x + f(xy)) = f(x' + f(x'y)) = x'f(1 + f(y)).$$

Wobec tego $x = x'$, gdyż $f(1 + f(y)) > 0$. Ale $x = x'$ pociąga za sobą $t = t'$ — sprzeczność z założeniem, że $t < t'$. Wnioskujemy zatem, że funkcja f istotnie jest niemalejąca.

Zauważmy teraz, że funkcja f jest „na” zbiór dodatnich liczb rzeczywistych, tzn. każda dodatnia liczba rzeczywista t należy do obrazu f. Istotnie, wystarczy przyjąć w danym równaniu funkcyjnym $y = 1$ oraz $x = \frac{t}{f(1+f(1))}$ i odczytać, że $t = f(x + f(xy))$.

Łącząc te dwie obserwacje, widzimy, że f jest niemalejąca oraz „na” zbiór dodatnich liczb rzeczywistych. Stąd wniosek, że funkcja f jest ciągła oraz $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Przechodząc obustronnie do granicy z $y \to 0$ w danym równaniu funkcyjnym otrzymujemy, że

$$f(x) = xf(1),$$

a więc funkcja f musi być postaci $f(x) = ax$ dla pewnej dodatniej liczby rzeczywistej a. Bezpośrednie sprawdzenie wykazuje, że wszystkie funkcje tej postaci spełniają zadane równanie funkcyjne.

13. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ wyznaczyć wszystkie ciągi liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o tej własności, że

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}.$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wszystkie ciągi spełniające warunki zadania to ciągi, w których wszystkie wyrazy oprócz jednego są zerowe a pozostały wyraz jest nieujemny.

Sposób I

Niech $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie ciągiem spełniającym zadaną równość. Podnosząc obie strony tej równości do szóstej potęgi, otrzymujemy

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^3 = (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3)^2.$$

Otwierając nawiasy i skracając $\sum_{i=1}^n x_i^6$, dostajemy

$$3 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i^4 x_j^2 + x_i^2 x_j^4) + 6 \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_i^2 x_j^2 x_k^2 = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i^3 x_j^3.$$

Zauważmy teraz, że $x_i^4 x_j^2 + x_i^2 x_j^4 - 2x_i^3 x_j^3 = x_i^2 x_j^2 (x_i - x_j)^2 \geqslant 0$. Łącząc tę nierówność dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant n$ z powyższą równością, otrzymujemy

$$2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i^4 x_j^2 + x_i^2 x_j^4) + 6 \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_i^2 x_j^2 x_k^2 \leqslant 0.$$

Jednakże wszystkie wyrazy po lewej stronie powyższej nierówności są nieujemne, gdyż są kwadratami liczb rzeczywistych. Zatem wszystkie muszą być zerami. Stąd wniosek, że co najwyżej jedna z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ może być niezerowa, powiedzmy równa a. Wówczas lewa strona równości danej w zadaniu jest równa $|a|$, prawa zaś jest równa a, więc liczba a musi być nieujemna. Jednocześnie jest jasne, że każdy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w którym wszystkie wyrazy oprócz jednego są zerowe a pozostały jest nieujemny, spełnia warunki zadania.

Sposób II

Zauważmy najpierw, że ciąg złożony z n zer spełnia warunki zadania. Ograniczmy więc teraz rozważania do ciągów, w których pewien wyraz jest niezerowy. Dla takich ciągów zachodzi $S = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$. Dzieląc obie strony równości danej w treści zadania przez $\sqrt{S}$, otrzymujemy

$$\sqrt{\left(\frac{x_1}{\sqrt{S}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{S}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n}{\sqrt{S}}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{x_1}{\sqrt{S}}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{S}}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{x_n}{\sqrt{S}}\right)^3}.$$

Przyjmując $y_i = \frac{x_i}{\sqrt{S}}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, uzyskujemy

$$\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2} = \sqrt[3]{y_1^3 + y_2^3 + \ldots + y_n^3}$$

i ponadto

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{S} = 1.$$

Mamy więc

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1, \quad \text{jak również} \quad y_1^3 + y_2^3 + \ldots + y_n^3 = 1.$$

Z pierwszej równości wynika, że $y_i \leqslant 1$ dla $i = 1,2,\ldots,n$. Ponadto odejmując drugą z powyższych równości stronami od pierwszej, widzimy, że

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(1-y_i) = 0.$$

Ponieważ dla $i = 1,2,\ldots,n$ mamy $y_i^2(1-y_i) \geqslant 0$, więc musi być $y_i^2(1-y_i) = 0$ dla $i = 1,2,\ldots,n$. Skoro w ciągu $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pewien wyraz jest niezerowy, to pewien wyraz jest równy 1; niech to będzie y_j. Wtedy też

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{j-1}^2 + y_{j+1}^2 + \ldots + y_n^2 = 1 - y_j^2 = 0,$$

skąd $y_i = 0$ dla $i = 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n$. Wobec powyższego $x_i = \sqrt{S}y_i = 0$ dla $i \neq j$ oraz $x_j = \sqrt{S}y_j = \sqrt{S}$. Łatwo sprawdzić, że wszystkie ciągi takie, że jeden wyraz jest dodatni, a pozostałe równe zeru, spełniają warunki zadania.

14. Dana jest plansza o wymiarach 2018×2018. *Kwadraciskiem* nazwiemy cztery pola tej planszy o wspólnym wierzchołku. Każde pole planszy pomalowano na biało lub czarno w taki sposób, że każde pole posiadające krawędź leżącą na brzegu planszy ma kolor czarny oraz żadne kwadracisko nie jest jednokolorowe. Dowieść, że istnieje takie kwadracisko, że każde dwa jego pola sąsiadujące krawędzią mają różne kolory.

Rozwiązanie:
Sposób I

Przypuśćmy, że istnieje takie kolorowanie, które spełnia warunki zadania, ale przeczy tezie. Dwukolorowe płytki o wymiarach 1×2 lub 2×1 będziemy nazywać *dominem*; dodatkowo *dominem poziomym* nazwiemy domino o wymiarach 1×2, a *dominem pionowym* — domino o wymiarach 2×1. Zliczmy na dwa sposoby liczbę domin zawartych w planszy.

Z jednej strony, skoro każdy wiersz rozpoczyna i kończy się polem koloru czarnego, to dla każdego spójnego białego fragmentu ustalonego wiersza istnieją dokładnie dwa poziome domina, które nachodzą na ten fragment, przy czym każde poziome domino nachodzi na dokładnie jeden spójny biały fragment tego wiersza. Zatem w każdym wierszu zawarta jest parzysta liczba poziomych domin. Podobnie w każdej kolumnie zawarta jest parzysta liczba pionowych domin, więc wszystkich domin jest parzyście wiele.

Z drugiej strony, skoro wewnątrz planszy nie istnieje takie kwadracisko, że każde dwa sąsiadujące w nim krawędzią pola są różnokolorowe, to w oparciu o założenie, że żadne kwadracisko nie jest jednokolorowe, w każdym kwadracisku zawierają się dokładnie dwa domina. Ponieważ każde domino zawiera się w dokładnie dwóch kwadraciskach (korzystamy z założenia, że każda płytka, której pewna krawędź leży na brzegu planszy jest koloru czarnego), więc wszystkich domin będzie tyle, ile kwadracisk wewnątrz planszy 2018×2018, czyli 2017^2. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż 2017^2 jest liczbą nieparzystą.

Sposób II

Przypuśćmy nie wprost, że dla pewnego kolorowania spełniającego warunki zadania nie istnieje takie kwadracisko, że każde dwa sąsiadujące w nim krawędzią pola są różnokolorowe. Rozważmy graf, którego wierzchołki są wierzchołkami pól planszy, które znajdują się w jej wnętrzu. Niech dwa wierzchołki będą połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy są wierzchołkami jednego pola planszy oraz krawędź między nimi sąsiaduje zarówno z białym, jak i czarnym polem.

Z założeń zadania wynika, że każdy wierzchołek ma stopień równy dokładnie dwa. Wobec tego rozważany graf jest sumą rozłącznych wierzchołkowo cykli. Ponadto każdy cykl jest parzystej długości. Istotnie, rozważmy taki układ współrzędnych, którego początek znajduje się w wierzchołku planszy, boki planszy są równoległe do osi układu współrzędnych, a długość boku pola planszy wynosi 1. Pokolorujmy na czerwono wierzchołki grafu, dla których suma współrzędnych jest parzysta, oraz na zielono pozostałe wierzchołki grafu. Wtedy jeśli dwa wierzchołki są połączone krawędzią, to wierzchołki te są różnokolorowe. Wobec tego rozważany graf jest dwudzielny, więc istotnie każdy cykl jest parzystej długości.

Ponieważ każdy wierzchołek grafu należy do dokładnie jednego cyklu parzystej długości, więc wszystkich wierzchołków w grafie jest parzyście wiele. Ale wierzchołki grafu to dokładnie wierzchołki pól planszy, które znajdują się w jej wnętrzu, a tych jest 2017^2 — sprzeczność.

15. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $k > 1$ istnieje taka para dodatnich liczb całkowitych a, b, że dla każdej pary liczb całkowitych x, y liczba $x^k + y^k - a$ jest niepodzielna przez b.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że dla $b = k^2$ istnieje takie dodatnie a, że dla każdej pary liczb całkowitych x, y zachodzi

$$b \nmid x^k + y^k - a.$$

Rozważymy dwa przypadki. Jeżeli k jest liczbą parzystą, to $x^k = (x^{k/2})^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, wobec czego $x^k + y^k \not\equiv 3 \pmod 4$. Zatem dla $a = 3$ zachodzi

$$4 \nmid x^2 + y^2 - 3 \implies n^2 \nmid x^k + y^k - 3.$$

Jeżeli zaś k jest liczbą nieparzystą, to rozważmy dowolny dzielnik pierwszy p liczby k. Zapiszmy x jako $tp + r$, gdzie $0 \leqslant r < p$. Wówczas

$$x^p \equiv (tp + r)^p \equiv r^p \pmod{p^2},$$

skąd wniosek, że x^p przyjmuje tylko p różnych reszt przy dzieleniu przez p^2. Wobec tego $x^p + y^p$ może dawać co najwyżej p^2 różnych reszt przy dzieleniu przez p^2. Jednakże pary $(p-i, i)$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ dają tę samą resztę równą $(-i)^p + i^p \equiv 0 \pmod{p^2}$. Zatem istnieje taka reszta a przy dzieleniu przez p^2, że $x^p + y^p \not\equiv a \pmod{p^2}$, czyli także $x^k + y^k \not\equiv a \pmod{p^2}$ dla każdej pary liczb całkowitych x, y. W konsekwencji

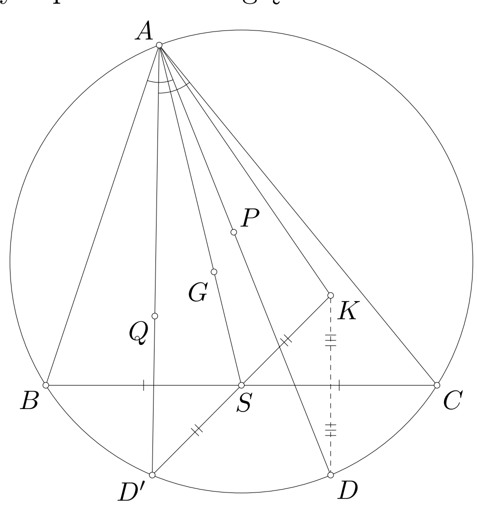
$$p^2 \nmid x^k + y^k - a \implies n^2 \nmid x^k + y^k - a.$$

16. Punkt P leży we wnętrzu ostrokątnego trójkąta ABC. Proste AP, BP, CP przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty K, L, M są obrazami symetrycznymi punktów D, E, F odpowiednio względem prostych BC, CA, AB. Wykazać, że punkty K, L, M oraz ortocentrum trójkąta ABC leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Sposób I

Niech Q będzie punktem izogonalnie sprzężonym do punktu P w trójkącie ABC, a proste AQ, BQ, CQ przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie odpowiednio w punktach D', E', F'. Skoro $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD'$, to proste BC i DD' są równoległe, a czworokąt $BD'DC$ jest trapezem równoramiennym (jeśli $BD'DC$ nie jest czworokątem wypukłym, to $BDD'C$ jest trapezem równoramiennym). Zatem punkt K jest obrazem symetrycznym punktu D' względem środka boku BC.



Analogicznie uzasadniamy, że punkt L jest obrazem symetrycznym punktu E' względem środka boku CA, a punkt M jest obrazem symetrycznym punktu F' względem środka boku AB.

Niech G będzie środkiem ciężkości trójkąta ABC, a S środkiem boku BC. Skoro $AS = 2GS$ oraz $KS = D'S$, to punkt G jest środkiem ciężkości trójkąta AKD'. Jednokładność o środku G i skali $-\frac{1}{2}$ przekształca więc punkt K na środek odcinka AD'. W analogiczny sposób uzasadniamy, że ta sama jednokładność przekształca punkty L i M odpowiednio na środki odcinków BE' i CF'. Ponadto obrazem ortocentrum jest środek O okręgu opisanego na trójkącie ABC (prosta Eulera). Wystarczy jeszcze zauważyć, że środki odcinków AD', BE', CF' leżą na okręgu o średnicy OQ.

Sposób II

Przyjmijmy, że H jest punktem przecięcia wysokości AA', BB', CC' trójkąta ABC. Skoro punkty A, B, A', B' leżą na okręgu o średnicy AB, a punkty B, C, B', C' leżą na okręgu o średnicy BC, to

$$AH \cdot A'H = BH \cdot B'H = CH \cdot C'H = r^2.$$

Rozważmy inwersję o promieniu r złożoną z symetrią środkową w H. Obrazami punktów A, B, C są odpowiednio punkty A', B', C'. Ponieważ

$$\sphericalangle BKC = \sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle BHC,$$

to punkty B, K, H, C leżą na jednym okręgu. Obrazem tego okręgu w rozważanym przekształceniu jest prosta $B'C'$, na której leży obraz K' punktu K. Ponadto skoro punkt K leży na łuku BC zawierającym punkt H, to punkt K' leży poza odcinkiem $B'C'$. Analogicznie uzasadniamy, że obraz L' punktu L leży na prostej $C'A'$ poza odcinkiem $C'A'$, a obraz M' punktu M leży na prostej $A'B'$ poza odcinkiem $A'B'$.

Wystarczy wykazać, że punkty K', L', M' leżą na jednej prostej, czyli na mocy twierdzenia Menelausa

$$\frac{B'K'}{C'K'} \cdot \frac{C'L'}{A'L'} \cdot \frac{A'M'}{B'M'} = 1.$$

Stosując wzór na odległość obrazów inwersyjnych (dodatkowe złożenie inwersji z symetrią nie wpływa nie zmienia odległości) otrzymujemy

$$B'K' = BK \cdot \frac{r^2}{HK \cdot HB} \quad \text{oraz} \quad C'K' = CK \cdot \frac{r^2}{HK \cdot HC}.$$

To pozwala napisać

$$\frac{B'K'}{C'K'} = \frac{BK}{CK} \cdot \frac{HC}{HB} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{HC}{HB}.$$

Analogicznie obliczamy, że

$$\frac{C'L'}{A'L'} = \frac{CE}{AE} \cdot \frac{HA}{HC} \quad \text{oraz} \quad \frac{A'M'}{B'M'} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{HB}{HA}.$$

Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

Jednakże, jeśli przez R oznaczymy promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, to

$$BD = 2R \sin \sphericalangle BAD, \quad CD = 2R \sin \sphericalangle CAD, \quad CE = 2R \sin \sphericalangle CBE,$$

$$AE = 2R \sin \sphericalangle AEB, \quad AF = 2R \sin \sphericalangle ACF, \quad BF = 2R \sin \sphericalangle BCF$$

i powyższa równość jest konsekwencją trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy.

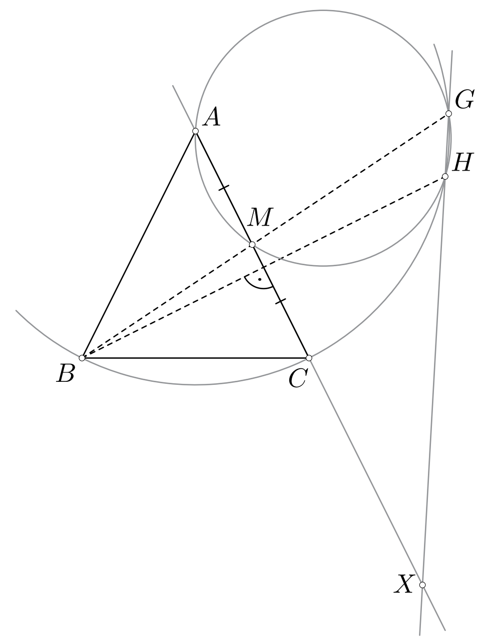
17. Trójkąt ABC spełnia zależności $AB = AC > BC$. Cięciwa BG okręgu o środku A i promieniu AB przechodzi przez środek odcinka AC, a cięciwa BH tego okręgu jest prostopadła do prostej AC. Punkt X jest punktem przecięcia prostych AC i GH. Dowieść, że punkt C jest środkiem odcinka AX.

Rozwiązanie:

Z warunków zadania wynika, że punkt C leży na okręgu o środku w punkcie A i promieniu AB. Ponieważ $BH \perp AC$ i $AB = AH$, to punkty B i H są symetryczne względem prostej AC.

Niech M będzie środkiem odcinka AC. Udowodnimy, że punkty A, M, G, H leżą na okręgu. Istotnie, wynika to z rachunku

$$\measuredangle MGH = \measuredangle BGH = \tfrac{1}{2}\measuredangle BAH = \measuredangle MAH$$



oraz z faktu, że punkty A i G leżą po tej samej stronie prostej MH (gdyż $AB > BC$).

Z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu otrzymujemy

$$XM \cdot XA = XG \cdot XH = XA^2 - AC^2.$$

Oznaczając $AC = a$, $CX = b$, przekształcamy powyższą równość:

$$\left(\frac{a}{2} + b\right)(a+b) = (a+b)^2 - a^2,$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{ab}{2} + ab + b^2 = 2ab + b^2,$$

$$\frac{a^2}{2} = \frac{ab}{2},$$

$$a = b.$$

Oznacza to, że $AC = CX$, skąd C jest środkiem odcinka AX.

18. Rozstrzygnąć, czy istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, dla których spełniona jest równość

$$\mathrm{NWW}(a,b) = \mathrm{NWW}(a+c, b+c).$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c.

Sposób I

Przypuśćmy, że takie liczby dodatnie a, b, c istnieją. Zauważmy, że $a \neq b$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $\mathrm{NWW}(a,b) = a$ oraz $\mathrm{NWW}(a+c, b+c) = a+c$, co pociągałoby $c = 0$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a < b$. Niech $d = b - a$, $a' = a + c$ oraz $b' = b + c$; wówczas $d = b' - a'$. Mamy

$$\mathrm{NWW}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{NWD}(a,b)} = \frac{ab}{\mathrm{NWD}(a,d)} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{NWW}(a',b') = \frac{a'b'}{\mathrm{NWD}(a',b')} = \frac{a'b'}{\mathrm{NWD}(a',d)}.$$

Łącząc powyższe równości z równością daną w treści zadania, otrzymujemy

$$a(a+d)\mathrm{NWD}(a',d) = a'(a'+d)\mathrm{NWD}(a,d). \tag{6}$$

Gdybyśmy mieli $\mathrm{NWD}(a,d) = \mathrm{NWD}(a',d)$, to wówczas $a(a+d) = a'(a'+d)$, co pociągałoby za sobą $a = a' = a+c$, gdyż funkcja kwadratowa $x \mapsto x(x+d)$ jest różnowartościowa na zbiorze liczb nieujemnych. Zatem $\mathrm{NWD}(a,d) \neq \mathrm{NWD}(a',d)$, więc istnieje taka liczba pierwsza p, że

$$\min(v_p(a), v_p(d)) \neq \min(v_p(a'), v_p(d)),$$

gdzie $v_p(k)$ oznacza liczbę wystąpień p w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby k.

Przypuśćmy, że

$$\min(v_p(a), v_p(d)) < \min(v_p(a'), v_p(d));$$

rozumowanie w przeciwnym przypadku jest analogiczne. Oznaczmy $\alpha = v_p(a)$, $\alpha' = v_p(a')$, $\delta = v_p(d)$. Powyższa nierówność implikuje, że $\alpha < \delta$ oraz $\alpha < \alpha'$, co z kolei pociąga za sobą

$$v_p(a+d) = \alpha, \quad v_p(\mathrm{NWD}(a', d)) = \min(\alpha', \delta), \quad v_p(a'+d) \geqslant \min(\alpha', \delta), \quad v_p(\mathrm{NWD}(a, d)) = \alpha.$$

Wnioskujemy, że

$$v_p(a(a+d)\mathrm{NWD}(a', d)) = 2\alpha + \min(\alpha', \delta) \quad \text{oraz} \quad v_p(a'(a'+d)\mathrm{NWD}(a, d)) \geqslant \alpha' + \min(\alpha', \delta) + \alpha.$$

Skoro $\alpha < \alpha'$, to mamy $v_p(a(a+d)\mathrm{NWD}(a', d)) < v_p(a'(a'+d)\mathrm{NWD}(a, d))$, co stoi w sprzeczności z równością (6).

Sposób II

Przypuśćmy, że istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające warunki zadania. Załóżmy, że trójka (a, b, c) jest minimalna w następującym sensie: dla każdej innej trójki liczb (d, e, f) spełniającej warunki zadania, $d + e + f \geqslant a + b + c$. Przypuśćmy, że $p \mid a$ oraz $p \mid b$ dla pewnej liczby pierwszej p. Wtedy $p \mid \mathrm{NWW}(a, b) = \mathrm{NWW}(a + c, b + c)$, zatem skoro p jest liczbą pierwszą, to $p \mid a + c$ lub $p \mid b + c$. W obu przypadkach otrzymujemy $p \mid c$. Na mocy założeń zadania otrzymujemy więc

$$\mathrm{NWW}\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}\right) = \mathrm{NWW}\left(\frac{a}{p} + \frac{c}{p}, \frac{b}{p} + \frac{c}{p}\right).$$

Ale $\frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} < a + b + c$, co stoi w sprzeczności z założeniem o minimalności trójki (a, b, c). Wobec tego liczby a, b są względnie pierwsze. Równość dana w treści zadania przybiera postać

$$ab = \mathrm{NWW}(a, b) = \mathrm{NWW}(a + c, b + c). \tag{7}$$

Przypuśćmy teraz, że $p \mid a+c$ oraz $p \mid b+c$ dla pewnej liczby pierwszej p. Wtedy $p \mid \mathrm{NWW}(a+c, b+c) = ab$, wobec czego $p \mid a$ lub $p \mid b$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p \mid a$. Wtedy też $p \mid (b+c)-(a+c)+a = b$, co nie może zajść, ponieważ liczby a, b są względnie pierwsze. Wobec tego liczby $a + c$, $b + c$ również musiały być względnie pierwsze. Otrzymujemy zatem

$$ab = \mathrm{NWW}(a + c, b + c) = (a + c)(b + c),$$

co stoi w sprzeczności z założeniem, że liczby a, b, c są całkowite dodatnie.

19. *Triangulacją* wielokąta wypukłego nazywamy jego podział na trójkąty przy pomocy nieprzecinających się przekątnych. Udowodnić, że dla każdego wielokąta wypukłego istnieje co najwyżej jedna triangulacja, w której wszystkie trójkąty są ostrokątne.

Rozwiązanie:

Zaczniemy od wykazania dwóch spostrzeżeń:

Spostrzeżenie 1. *Wielokąt wypukły ma co najwyżej trzy kąty ostre.*

Dowód. Wiadomo, że suma kątów w dowolnym n-kącie wypukłym wynosi $(n - 2) \cdot 180°$. Niech a będzie liczbą kątów ostrych w tym n-kącie. Wówczas $a \cdot 90° + (n - a) \cdot 180° > (n - 2) \cdot 180°$, czyli $360° > a \cdot 90°$, skąd $4 > a$. □

Spostrzeżenie 2. *Dla dowolnej triangulacji n-kąta wypukłego istnieją co najmniej dwa wierzchołki, które nie są końcem żadnej z przekątnych wchodzących w skład tej triangulacji.*

Dowód. Dla $n = 3$ istnieją trzy takie wierzchołki. Od teraz zakładamy, że $n > 3$.

Odnotujmy, że trójkątów w triangulacji jest $n-2$ (bo suma kątów wewnętrznych n-kąta to $(n-2)\cdot 180°$) oraz każdy trójkąt ma co najwyżej dwa boki wspólne z tym wielokątem. Gdyby nie było dwóch takich wierzchołków, to nie więcej niż jeden trójkąt z triangulacji zawierałby dokładnie dwa boki wielokąta. Stąd liczba boków wielokąta będących także bokami trójkątów z triangulacji wynosiłaby co najwyżej $1 \cdot 2 + (n-2-1) \cdot 1 = n-1$. To nie jest możliwe, gdyż każdy bok musi być bokiem pewnego trójkąta z triangulacji. □

Wróćmy do rozwiązania zadania. Niech n oznacza liczbę boków wielokąta. Gdy $n = 3$, to teza jest oczywista, gdyż istnieje tylko jedna triangulacja. Załóżmy nie wprost, że istnieje wielokąt wypukły, dla którego istnieją dwie różne triangulacje dzielące ten wielokąt na trójkąty ostrokątne. Rozważmy najmniejszy pod względem liczby wierzchołków taki wielokąt i nazwijmy go S. Wiemy, że co najmniej dwa wierzchołki nie będą końcami żadnej z przekątnych. Oznacza to, że kąty przy tych wierzchołkach muszą być ostre. Rozważmy dwie różne triangulacje dzielące wielokąt S na trójkąty ostrokątne. Gdyby miały one wspólny trójkąt, to istniałby wielokąt o mniejszej liczbie wierzchołków (po drugiej stronie któregoś z boków tego trójkąta) przeczący tezie zadania, co jest sprzeczne z założeniem o minimalności. Zatem wierzchołki, z których nie wychodzą krawędzie nie mogą być te same w obu triangulacjach. Oznacza to jednak, że S ma cztery kąty ostre, co daje sprzeczność.

20. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równość $abcd = 1$. Wykazać, że

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Wykażemy, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geqslant \frac{1}{1+ab}. \tag{8}$$

Przekształcając ją równoważnie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (1+b)^2(1+ab) + (1+a)^2(1+ab) &\geqslant (1+a)^2(1+b)^2, \\ (1+2b+b^2)(1+ab) + (1+2a+a^2)(1+ab) &\geqslant (1+2a+a^2)(1+2b+b^2), \\ 1 + a^3b + ab^3 &\geqslant 2ab + a^2b^2. \end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że

$$1 + a^3b + ab^3 = 1 + ab(a^2+b^2) \geqslant 1 + 2a^2b^2 = 1 + a^2b^2 + a^2b^2 \geqslant 2ab + a^2b^2,$$

co kończy dowód nierówności (8).

Analogicznie uzasadniamy, że

$$\frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geqslant \frac{1}{1+cd}.$$

Teza zadania wynika bezpośrednio z równości

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+cd} = \frac{2+ab+cd}{1+ab+cd+abcd} = 1,$$

gdyż $abcd = 1$.

21. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$\frac{x^2}{y+z+t}+\frac{y^2}{z+t+x}+\frac{z^2}{t+x+y}+\frac{t^2}{x+y+z},$$

gdzie liczby rzeczywiste x, y, z, t są takie, że suma żadnych trzech spośród nich nie jest równa zeru oraz

$$\frac{x}{y+z+t}+\frac{y}{z+t+x}+\frac{z}{t+x+y}+\frac{t}{x+y+z}=1.$$

Rozwiązanie:

Załóżmy, że liczby rzeczywiste x, y, z, t spełniają równość z zadania. Mnożąc obie jej strony przez $x+y+z+t$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} x+y+z+t &= \frac{x^2+x(y+z+t)}{y+z+t}+\frac{y^2+y(z+t+x)}{z+t+x}+\frac{z^2+z(t+x+y)}{t+x+y}+\frac{t^2+t(x+y+z)}{x+y+z}= \\ &= \frac{x^2}{y+z+t}+\frac{y^2}{z+t+x}+\frac{z^2}{t+x+y}+\frac{t^2}{x+y+z}+x+y+z+t. \end{aligned}$$

Wobec tego wartość wyrażenia

$$\frac{x^2}{y+z+t}+\frac{y^2}{z+t+x}+\frac{z^2}{t+x+y}+\frac{t^2}{x+y+z}$$

wynosi zero. Łatwo sprawdzić, że 0 jest osiągalną wartością, na przykład czwórka

$$(x,y,z,t)=(-9,-4,1,7)$$

spełnia zależność z zadania.

22. Wyznaczyć największą możliwą moc rodziny czteroelementowych zbiorów o następującej własności: każde dwa zbiory z rodziny mają dokładnie jeden wspólny element, ale nie istnieje element należący do wszystkich zbiorów z rodziny.

Rozwiązanie:

Niech A_1, A_2, ..., A_n będą zbiorami czteroelementowymi o zadanej własności. Niech $A_1=\{a,b,c,d\}$. Oznaczmy przez I_a zbiór tych indeksów i ($2\leqslant i\leqslant n$), dla których $a\in A_i$. Analogicznie określamy zbiory I_b, I_c, I_d. Skoro zbiór A_1 ma z każdym innym zbiorem A_i dokładnie jeden element wspólny, to zbiory I_a, I_b, I_c, I_d są rozłączne, a ich suma jest całym zbiorem $\{2,\ldots,n\}$. Przyjmijmy bez straty dla ogólności, że I_a jest najliczniejszym z tych czterech zbiorów. Jeśli m jest liczbą jego elementów, to $m\geqslant\frac{n-1}{4}$.

Możemy przyjąć (ewentualnie zmieniając oznaczenia), że $I_a=\{2,\ldots,m+1\}$. Element a należy do każdego ze zbiorów A_1, A_2, ..., A_{m+1}, a skoro nie należy do wszystkich, to $a\notin A_n$. Każdy ze zbiorów A_1, A_2, ..., A_{m+1} zawiera dokładnie jeden element należący do zbioru A_n. Z treści zadania wynika, że są to różne elementy. W takim razie liczba tych zbiorów nie przekracza 4, czyli $m\leqslant 3$. To w połączeniu z wcześniej uzyskaną nierównością $m\geqslant\frac{n-1}{4}$ oznacza, że $n\leqslant 13$.

Łatwo sprawdzić, że określając

$$A_i=\{i-11,i-5,i-1,i,i+2,i+8,i+12\}\cap\{1,\ldots,13\}$$

dla $i=1,2,\ldots,13$ otrzymujemy przykład trzynastu zbiorów spełniających warunki zadania. Ostatecznie otrzymujemy, że $n=13$ jest największą możliwą mocą rozważanej rodziny zbiorów.

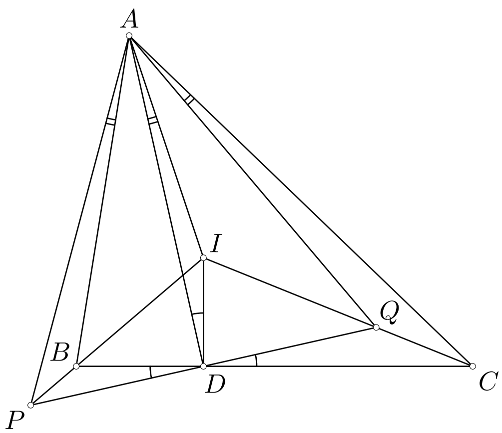
23. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Prosta prostopadła do prostej AD przechodząca przez punkt D przecina dwusieczne kątów ABC, ACB odpowiednio w punktach P, Q. Wykazać, że $PD=DQ$.

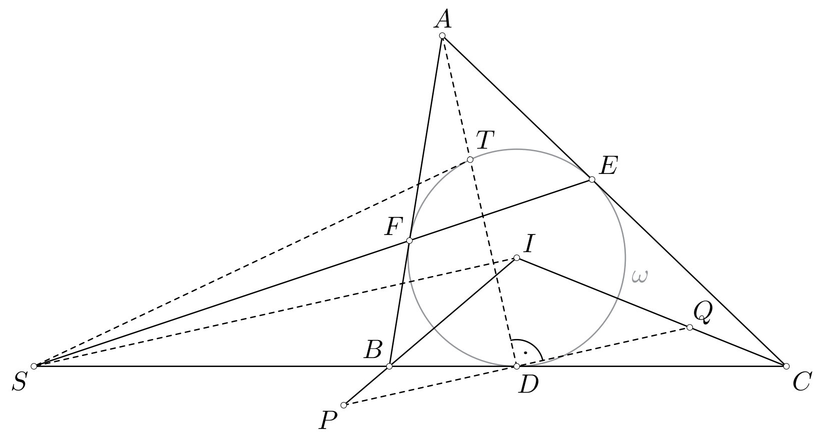
Rozwiązanie:

Oznaczmy przez ω okrąg wpisany w trójkąt ABC, a przez I jego środek. Jeśli $AB = AC$, to teza jest oczywista — dalej zakładamy, że $AB < AC$; w szczególności punkt B leży na odcinku PI, a punkt Q leży na odcinku CI.

Sposób I

Ponieważ $\sphericalangle BDI = \sphericalangle ADP = 90°$, więc $\sphericalangle BDP = \sphericalangle ADI$. Ponadto $\sphericalangle ABI = 180° - \sphericalangle DBP$. Zatem punkty I i P są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABD. W takim razie $\sphericalangle DAP = \sphericalangle BAI$. Z drugiej strony $\sphericalangle ADQ = \sphericalangle IDC = 90°$, skąd $\sphericalangle ADI = \sphericalangle CDQ$. Ponadto $\sphericalangle DCQ = \sphericalangle ACQ$. To prowadzi do wniosku, że punkty I i Q są izogonalnie sprzężone w trójkącie ACD, więc $\sphericalangle DAQ = \sphericalangle CAI$. Wobec $\sphericalangle BAI = \sphericalangle CAI$ otrzymujemy $\sphericalangle PAD = \sphericalangle QAD$, skąd wniosek, że $PD = DQ$.





Sposób II

Oznaczmy punkty styczności okręgu ω z bokami AC i AB odpowiednio przez E i F. Ponadto niech S będzie punktem przecięcia prostych EF i BC. Wtedy S leży na przecięciu biegunowych punktów D oraz A względem ω, więc prosta AD jest biegunową punktu S. Stąd $SI \perp AD \perp PQ$, czyli $SI \parallel PQ$.

Korzystając z twierdzenia Menelausa, uzyskujemy

$$\frac{BS}{CS} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}.$$

Stosując teraz dwukrotnie twierdzenie Talesa i wykorzystując powyższy związek, dostajemy

$$\frac{IS}{PD} = \frac{BS}{BD} = \frac{CS}{CD} = \frac{IS}{DQ},$$

czyli $PD = DQ$.

Sposób III

Niech S będzie takim punktem prostej BC, że $IS \perp AD$. Oznaczmy ponadto przez T taki punkt, że $\omega \cap AD = \{D, T\}$. Wówczas prosta ST jest styczna do okręgu ω, a czwórka $(FEDT)$ jest harmoniczna, więc rzutując z ω przez styczne na BC uzyskujemy, że czwórka $(BCDS)$ jest harmoniczna. W końcu rzutując z BC na PQ z punktu I uzyskujemy, że $(PQD\infty)$ jest harmoniczna, gdzie ∞ jest kierunkiem prostej PQ, a to oznacza, że $PD = DQ$.

Sposób IV

Niech X będzie punktem wspólnym prostych DE oraz BI. Przyjmijmy $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $\sphericalangle CBA = 2\beta$, $\sphericalangle ACB = 2\gamma$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle CDE = 90° - \gamma = \alpha + \beta,$$

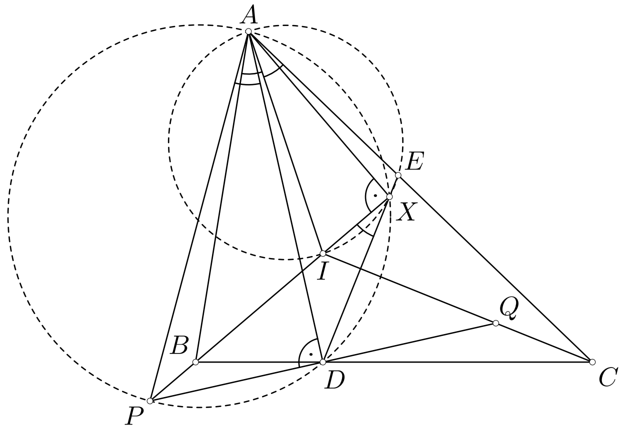
wobec czego

$$\sphericalangle PXD = \sphericalangle CDE - \sphericalangle DBX = \alpha + \beta - \beta = \alpha = \sphericalangle IAE.$$

Z tej równości kątów wynika, że punkty A, I, X, E leżą na jednym okręgu. W szczególności

$$\sphericalangle AXI = \sphericalangle AEI = 90^\circ = \sphericalangle PDA.$$

Stąd wnioskujemy, że punkty A, X, D, P leżą na okręgu i w konsekwencji $\sphericalangle PAD = \sphericalangle PXD = \alpha$.



Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle DAQ = \alpha$. Trójkąty prostokątne ADP i ADQ są więc przystające, skąd $PD = DQ$.

Uwaga

Prostopadłość prostych SI i AD (dla punktu S zdefiniowanego jako $BC \cap EF$) można uzasadnić również na co najmniej dwa inne sposoby:

1. Z równości $SD^2 = SE \cdot SF$ i $ID^2 = IE^2$ wnosimy, że punkty S i I leżą na osi potęgowej punktu D i okręgu o środku A i promieniu AE. Oś ta jest więc prostopadła do prostej łączącej punkt D ze środkiem A okręgu o promieniu AE.

2. Niech M będzie środkiem odcinka EF. Wykorzystując potęgę punktu i twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

$$SA^2 - SD^2 = (SM^2 + AM^2) - SE \cdot SF = (SM^2 + AM^2) - (SM^2 - ME^2) =$$
$$= AM^2 + ME^2 = AE^2 = IA^2 - IE^2 = IA^2 - ID^2,$$

czyli $SI \perp AD$.

24. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają równość

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2abc.$$

Udowodnić, że przynajmniej jedna z liczb

$$\frac{a+1}{2}, \ \frac{b+1}{2}, \ \frac{c+1}{2}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Przepiszmy założenie w postaci $(a - bc)^2 = (b^2 - 1)(c^2 - 1)$. Z tej równości wynika, że istnieją liczby całkowite d, x, y takie, że $b^2 - 1 = dx^2$, $c^2 - 1 = dy^2$, $a - bc = \pm dxy$ oraz d nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Z własności równania Pella wiemy, że jeśli $X^2 - dY^2 = 1$, to $X = \frac{U^k + V^k}{2}$ dla pewnego k, przy czym $U = p + q\sqrt{d}$, $V = p - q\sqrt{d}$ oraz p, q są najmniejszymi dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $p^2 - dq^2 = 1$. Korzystając z tego, wiemy że dla pewnych dodatnich liczb całkowitych n, m zachodzi

$$b = \frac{U^n + V^n}{2}, \ c = \frac{U^m + V^m}{2}.$$

Jeśli $n = 2s$ dla pewnego całkowitego s, to $\frac{b+1}{2} = \left(\frac{U^s+V^s}{2}\right)^2$ i mamy tezę. Analogicznie dla parzystego m też dostajemy tezę. Do rozważenia został przypadek, w którym obie liczby n, m są nieparzyste. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $n \geqslant m$.

Mamy

$$bc = \frac{U^{n+m} + V^{n+m} + U^{n-m} + V^{n-m}}{4}$$

oraz

$$(dxy)^2 = (b^2-1)(c^2-1) = \frac{U^{2n} + V^{2n} - 2}{4} \cdot \frac{U^{2m} + V^{2m} - 2}{4} = \left(\frac{U^{n+m} + V^{n+m} - U^{n-m} - V^{n-m}}{4}\right)^2.$$

Ponieważ $a = bc \pm dxy$ oraz $dxy = \pm\frac{1}{4}\left(U^{n+m} + V^{n+m} - U^{n-m} - V^{n-m}\right)$, więc $a = \frac{1}{2}\left(U^t + V^t\right)$, gdzie $t \in \{n-m, n+m\}$. Skoro liczby n i m są nieparzyste, to $t = 2s$ dla pewnej liczby całkowitej s. Analogicznie jak wcześniej dowodzimy, że $\frac{a+1}{2} = \left(\frac{U^s-V^s}{2}\right)^2$ jest kwadratem liczby całkowitej, co kończy rozwiązanie.

25. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniające układ równań

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a \\ b\sqrt{c} - a = b \\ c\sqrt{a} - b = c. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Niech x, y, z będą takimi liczbami dodatnimi, że $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$. Dany układ przybiera postać

$$\begin{cases} x^2y - z^2 = x^2 \\ y^2z - x^2 = y^2 \\ z^2x - y^2 = z^2. \end{cases}$$

Przyjmijmy bez straty dla ogólności, że z jest największą spośród liczb x, y, z. Odejmując drugie równanie stronami od pierwszego, uzyskujemy

$$y(x^2 - yz) = x^2y - y^2z = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y).$$

Skoro $z \geqslant y$, to $x^2 \geqslant yz \geqslant y^2$, zatem $z \geqslant x \geqslant y$.

Z kolei odejmując trzecie równanie stronami od pierwszego i korzystając z powyższych nierówności, mamy

$$0 \geqslant x(xy - z^2) = x^2y - z^2x = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \geqslant 0.$$

W takim razie $x = y$ oraz $xy = z^2$, czyli $x = y = z$.

Zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia dodatnich rozwiązań równania $x^3 = 2x^2$. Jedynym takim rozwiązaniem tego równania jest $x = 2$, czyli $a = 4$, a więc jedyną możliwością jest trójka $(4, 4, 4)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że spełnia ona dany układ równań.

Sposób II

Ze względu na cykliczność układu równań można przyjąć, że $c = \max(a, b, c)$. Z nierówności między średnimi mamy

$$2a + 2c = 2a\sqrt{b} = \sqrt{4a \cdot ab} \leqslant \frac{4a + ab}{2} = 2a + \frac{ab}{2}.$$

Wobec tego $4c \leqslant ab$. Ponieważ $b \leqslant c$, więc $4b \leqslant 4c \leqslant ab$, zatem $4 \leqslant a$. Stąd i z trzeciego równania otrzymujemy

$$2c \leqslant c\sqrt{a} = c + b \implies c \leqslant b.$$

Wobec tego $b = c$. Analogicznie dowodzimy, że $a = b$. Równania przyjmują postać $a\sqrt{a} = 2a$, skąd $a = 4$. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(4, 4, 4)$ jest rozwiązaniem danego układu.

26. Dana jest dodatnia liczba całkowita d. Na przyjęciu spotkało się $n \geqslant 2$ gości, spośród których niektórzy znają się. Okazało się, że dla każdego niepustego podzbioru gości A istnieje taki gość należący do A, który zna co najwyżej d innych gości w A. Niepusty podzbiór gości nazwiemy *kliką* jeśli każdych dwóch gości z tego podzbioru się zna. Wykazać, że na przyjęciu jest co najwyżej $2^d \cdot n$ klik.

Rozwiązanie:

Ponumerujmy kolejno gości różnymi liczbami od 1 do n w następujący sposób. W i-tym kroku przypisujemy liczbę i tej osobie, która ma co najwyżej d znajomych wśród tych osób, które nie zostały jeszcze ponumerowane. Zauważmy, że przy takim ponumerowaniu i-ta osoba ma co najwyżej d znajomych o numerach większych od i.

Policzmy liczbę wszystkich par (m, K), gdzie K jest zbiorem numerów osób dowolnej kliki, zaś m to najmniejszy element K. Z jednej strony jest ona równa liczbie wszystkich klik. Z drugiej strony zauważmy, że dla każdego m, zbiór $K \setminus \{m\}$ jest podzbiorem znajomych m-tej osoby o numerach większych niż m. Zatem dla każdego m liczba par z pierwszym elementem równym m jest nie większa niż 2^d, skąd wynika, że wszystkich par jest nie więcej niż $n \cdot 2^d$.

27. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Okręgi o_B, o_C są styczne do półprostych $AC^{\rightarrow}$ i $AB^{\rightarrow}$, przy czym punkt B leży na okręgu o_B, a punkt C leży na okręgu o_C. Różna od AC styczna do okręgu o_B przechodząca przez punkt C przecina prostą AB w punkcie K, a różna od AB styczna do okręgu o_C przechodząca przez punkt B przecina prostą AC w punkcie L. Prosta KL i dwusieczna kąta BAC przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i M. Wykazać, że $BP = CM$.

Rozwiązanie:

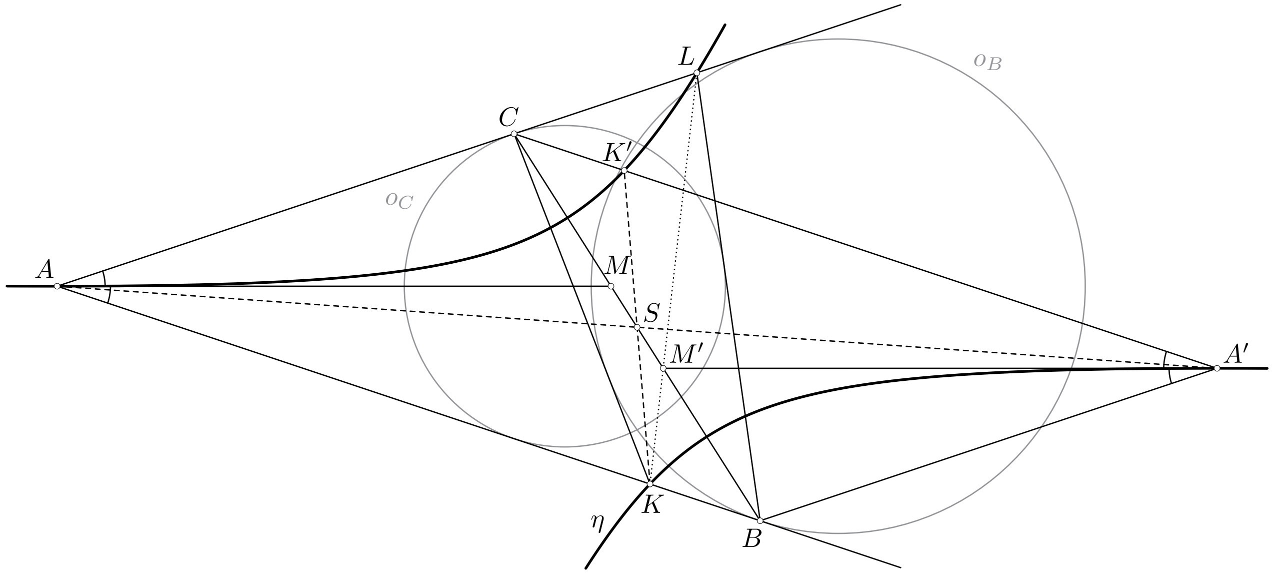
Sposób I

Zauważmy, że długość odcinka wspólnej stycznej zewnętrznej do okręgów o_B i o_C między punktami styczności jest równa

$$AB - AC = LB - LC = KC - KB,$$

wobec czego punkty A, L leżą na jednej, a punkt K na drugiej gałęzi pewnej hiperboli η o ogniskach B, C.

Oznaczmy przez S środek odcinka BC (środek symetrii η), a przez A', K', M' odpowiednio punkty symetryczne do A, K, M względem S. Wówczas $A', K' \in \eta$ oraz punkty A', K', C leżą na jednej prostej.



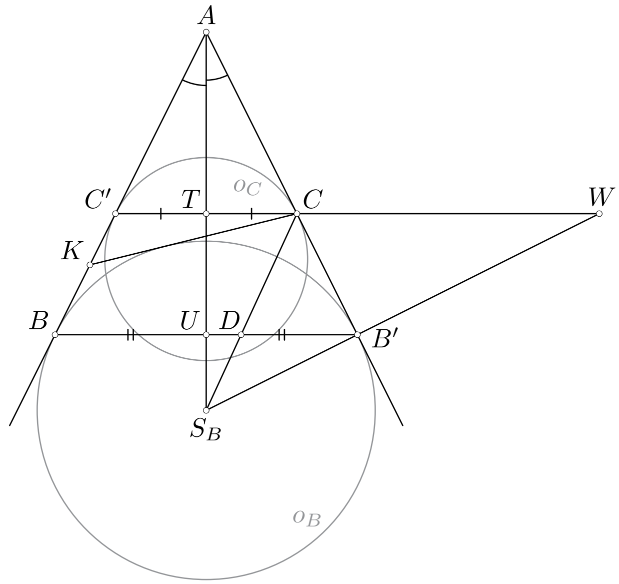
Z własności optycznej hiperboli wynika, że prosta $A'M'$ jako dwusieczna kąta $BA'C$ jest do niej styczna. Wobec tego z twierdzenia Pascala zastosowanego do sześciokąta $AA'A'K'KL$ wpisanego w η wynika, że punkty

$$AA' \cap KK' = S, \quad A'A' \cap KL, \quad A'K' \cap LA = C$$

leżą na jednej prostej, czyli proste $A'A'$ (styczna do η w punkcie A'), KL, BC przecinają się w jednym punkcie. Zatem $M' = A'A' \cap BC = KL \cap BC = P$ i w konsekwencji $CM = BP$.

Sposób II

Równość $\frac{CP}{BP} = \frac{BM}{CM}$, jest równoważna tezie zadania. Aby ją wykazać, wystarczy udowodnić $\frac{CP}{BP} = \frac{AB}{AC}$, gdyż z twierdzenia o dwusiecznej mamy $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$.



Oznaczmy przez S_B środek okręgu o_B, przez B', C' odpowiednio odbicia punktów B, C względem dwusiecznej kąta BAC, przez U, T odpowiednio środki odcinków BB' i CC', przez D punkt przecięcia prostych CS_B oraz BB' i niech W będzie punktem przecięcia prostych $B'S_B$ i CC'.

Zauważmy, że $\sphericalangle S_BAK = \sphericalangle S_BB'D$ oraz $\sphericalangle S_BKA = 180° - \sphericalangle BKS_B = \sphericalangle DCB' + \sphericalangle CB'B = \sphericalangle S_BDB'$, więc trójkąty $B'S_BD$ oraz AS_BK są podobne. Ponadto S_BU oraz S_BB to odpowiednie wysokości w tych trójkątach, stąd $\frac{AK}{BK} = \frac{B'D}{UD}$. Proste BB' i CC' są równoległe, więc z twierdzenia Talesa uzyskujemy $\frac{B'D}{UD} = \frac{WC}{TC}$. Zauważmy jeszcze, że trójkąty $CB'W$ i CTA są podobne, więc $\frac{WC}{B'C} = \frac{AC}{TC}$. Ostatecznie możemy napisać:

$$\frac{AK}{BK} = \frac{B'D}{UD} = \frac{WC}{TC} = \frac{AC \cdot B'C}{TC^2},$$

analogicznie $\frac{CL}{BL} = \frac{UB^2}{AB \cdot BC'}$. Z twierdzenia Menelausa dla trójkąta ABC i współliniowych punktów K, L, P otrzymujemy

$$\frac{CP}{BP} = \frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} = \frac{AC \cdot B'C}{TC^2} \cdot \frac{UB^2}{AB \cdot BC'} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB}{AC}.$$

28. Wyznaczyć wszystkie trójki niezerowych liczb całkowitych a, b, c o tej własności, że liczby

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{oraz} \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

są całkowite.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wszystkie takie trójki liczb całkowitych (a, b, c), że $|a| = |b| = |c|$.

Sposób I

Zauważmy, że jeżeli liczby a, b, c spełniają warunki zadania, to

$$\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{c}\right)\left(x-\frac{c}{a}\right)=x^3-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)x^2+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)x-1$$

jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, którego wyraz wolny oraz współczynnik przy najwyższej potędze są co do modułu równe 1. Wobec tego każdy pierwiastek wymierny tego wielomianu jest co do modułu równy 1, co prowadzi do trójek (a,b,c) spełniających warunek $|a|=|b|=|c|=n$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n. Łatwo sprawdzić, że wszystkie trójki o tej własności spełniają warunki zadania.

Sposób II

Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym co najmniej jednej z liczb a, b, c. Załóżmy, że p wchodzi do rozkładu na czynniki liczb a, b, c odpowiednio z wykładnikami A, B, C. Możemy zapisać teraz różnicę wyrażeń z treści zadania jako

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}=\frac{p^{\min(A,B)+\min(B,C)+\min(C,A)}}{p^{A+B+C}}\cdot\frac{s}{t},$$

gdzie s oraz t są względnie pierwsze z p. Skoro powyższa różnica jest liczbą całkowitą, to

$$\min(A,B)+\min(B,C)+\min(C,A)\geqslant A+B+C,$$

co jest możliwe tylko gdy $A=B=C$. To z kolei oznacza, że każda liczba pierwsza wchodzi do rozkładu każdej z liczb a, b, c w tej samej potędze, czyli $|a|=|b|=|c|$. Łatwo sprawdzić, że każda taka trójka spełnia warunki zadania.

29. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian P o współczynnikach całkowitych, że

$$P\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=1+\sqrt[3]{2} \quad \text{oraz} \quad P\left(1+\sqrt{5}\right)=2+3\sqrt{5}.$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Taki wielomian P nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieje wielomian P mający postulowane własności. Niech $Q(x)=P(x)-x$. Wówczas $Q\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=0$ oraz $Q\left(1+\sqrt{5}\right)=1+2\sqrt{5}$.

Rozpatrzmy wielomian $T(x)=x^3-3x^2+3x-3$. Łatwo sprawdzić, że jest on nierozkładalny nad ciałem liczb wymiernych oraz $T\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=0$. Ponadto nie istnieje niezerowy wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia mniejszego od 3, którego pierwiastkiem jest $1+\sqrt[3]{2}$. Co więcej, jeśli R jest resztą z dzielenia wielomianu Q przez wielomian T, to $\deg(R)<3$ oraz $R\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=0$. Wobec tego $R\equiv 0$. Stąd istnieje wielomian A o współczynnikach całkowitych taki, że $Q(x)=A(x)\cdot T(x)$.

Po podstawieniu $x=1+\sqrt{5}$ otrzymujemy

$$1+2\sqrt{5}=Q\left(1+\sqrt{5}\right)=A\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot T\left(1+\sqrt{5}\right)=A\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5\sqrt{5}-2\right),$$

skąd $A\left(1+\sqrt{5}\right)=\frac{1}{121}\left(52+9\sqrt{5}\right)$.

Jednak taka sytuacja nie jest możliwa, ponieważ $A\left(1+\sqrt{5}\right)$ jest sumą wyrażeń postaci $a_k\left(1+\sqrt{5}\right)^k$, gdzie a_k są liczbami całkowitymi, a współczynnik przy $\sqrt{5}$ każdego takiego wyrażenia jest liczbą całkowitą, co stoi w sprzeczności z tym, że liczba $\frac{9}{121}$ nie jest całkowita.

Wobec tego nie istnieje wielomian Q mający postulowane własności, skąd ostatecznie nie istnieje wielomian P spełniający warunki zadania.

30. Na dyskotece spotkało się n chłopców i m dziewcząt. Okazało się, że każdy chłopiec zna co najwyżej 2018 dziewcząt oraz każda para dziewcząt ma wspólnego znajomego chłopca. Wykazać, że da się każdej dziewczynie przypisać podzbiór znajomych jej chłopców w taki sposób, by przypisane podzbiory były parami rozłączne oraz by było co najmniej $\frac{m(m-1)}{2018}$ różnych par dziewcząt mających wspólnego znajomego chłopca przypisanego do jednej z nich.

Rozwiązanie:

Rozważmy przypisanie każdego chłopca, który zna jakąkolwiek dziewczynę, do dziewczyny wybranej losowo z rozkładem jednostajnym spośród znanych mu dziewcząt. Dla każdej pary dziewcząt d, e ustalmy jakiegokolwiek ich wspólnego znajomego $c_{d,e}$. Niech $X_{d,e}$ będzie zmienną losową równą 1 jeśli $c_{d,e}$ został przypisany do d lub e, oraz 0 w przeciwnym przypadku. Zauważmy, że prawdopodobieństwo, że $X_{d,e} = 1$ wynosi co najmniej $\frac{2}{2018}$, gdyż $c_{d,e}$ ma co najwyżej 2018 znajomych spośród których dwie to d i e, a co za tym idzie wartość oczekiwana $X_{d,e}$ wynosi co najmniej $\frac{2}{2018}$. Z liniowości wartości oczekiwanej wnioskujemy, że oczekiwana wartość liczby par dziewcząt mających wspólnego znajomego przypisanego do jednej z nich wynosi co najmniej $\binom{m}{2} \cdot \frac{2}{2018} = \frac{m(m-1)}{2018}$. Zatem istnieje co najmniej jedno przypisanie realizujące co najmniej taką liczbę par.

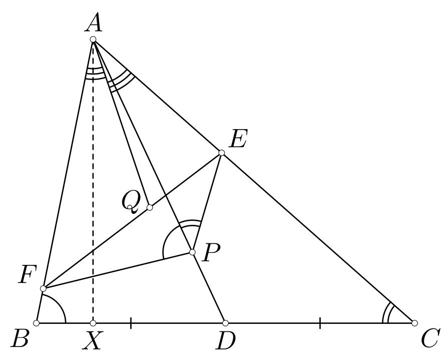
31. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkt D jest środkiem odcinka BC, a punkt P leży na odcinku AD. Okręgi opisane na trójkątach CDP, BDP przecinają boki AC, AB odpowiednio w punktach E, F różnych od C, B. Dwusieczna kąta EPF przecina EF w punkcie Q. Dowieść, że styczna do okręgu opisanego na trójkącie AQP w punkcie A jest prostopadła do BC.

Rozwiązanie:

Ponieważ punkty B, F, P, D leżą na okręgu, to $\sphericalangle DBA = \sphericalangle FPA$. Ponadto trójkąty BDA i PFA mają wspólny kąt przy wierzchołku A. Z cechy podobieństwa kąt-kąt wynika, że trójkąty te są podobne. Analogicznie dowodzimy, że trójkąty CDA i PEA są podobne. Stąd

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AF}{FP} \cdot \frac{PE}{EA} \cdot \frac{FP}{PE} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{CD}{DA} \cdot \frac{FP}{PE} = \frac{FP}{PE},$$

bowiem D jest środkiem odcinka BC. Ale z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy, że $\frac{PE}{FP} = \frac{EQ}{FQ}$, skąd również $\frac{AE}{AF} = \frac{EQ}{FQ}$, zatem prosta AQ jest dwusieczną kąta FAE. Stąd w oparciu o założenie $AB < AC$, punkt Q leży po tej samej stronie prostej AD, co punkt F.



Niech X będzie punktem przecięcia stycznej do okręgu opisanego na trójkącie AQP w punkcie A z prostą BC. Wtedy

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAX &= \sphericalangle FAQ - \sphericalangle QAX = \tfrac{1}{2}\sphericalangle FAE - \sphericalangle QPA = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle FPE) - \sphericalangle QPA = \\ &= 90^\circ - \sphericalangle FPQ - \sphericalangle QPA = 90^\circ - \sphericalangle FPA = 90^\circ - \sphericalangle DBA = 90^\circ - \sphericalangle XBA,\end{aligned}$$

wobec czego z sumy miar kątów w trójkącie BXA, kąt BXA jest prosty.

Uwaga

To, że prosta AQ jest dwusieczną kąta BAC można uzasadnić inaczej w następujący sposób. Z twierdzenia o potędze punktu otrzymujemy

$$AF \cdot AB = AP \cdot AD = AE \cdot AC, \quad \text{skąd} \quad \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}.$$

Wobec tego na mocy podobieństwa trójkątów bok-kąt-bok otrzymujemy $\triangle AFE \sim \triangle ACB$. Rozważmy jednokładność o środku w punkcie A złożoną z symetrią względem dwusiecznej kąta BAC, przeprowadzającą trójkąt AEF na trójkąt ABC. Obrazem środkowej trójkąta AFE opuszczonej z wierzchołka A z jednej strony jest środkowa AD trójkąta ABC, a z drugiej strony jest to z definicji symediana trójkąta FAE opuszczona z wierzchołka A. Wobec powyższego prosta AD jest symedianą trójkąta AFE poprowadzoną z wierzchołka A. Ze znanej własności symediany otrzymujemy $AF \cdot PE = AE \cdot PF$, czyli $\frac{AF}{AE} = \frac{PF}{PE}$. Dalsza część dowodu przebiega tak jak poprzednio.

32. Niech p będzie liczbą pierwszą, która daje resztę 3 przy dzieleniu przez 4. Wyznaczyć liczbę par (x, y) różnych elementów zbioru $\{0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ o tej własności, że liczba $x^2 - y^2 - 1$ jest podzielna przez p.

Rozwiązanie:
Odpowiedź: $\frac{p+1}{4}$.
Sposób I

Niech $\mathcal{Q}$ oznacza zbiór wszystkich niezerowych reszt kwadratowych modulo p, a $\mathcal{N}$ — zbiór niezerowych niereszt. Wiadomo, że $|\mathcal{N}| = |\mathcal{Q}| = \frac{p-1}{2}$ oraz $\mathcal{N} = -\mathcal{Q}$ dla $p \equiv 3 \pmod 4$.

Dla $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ oznaczmy przez $v(x)$ liczbę sposobów, na jakie można przedstawić x jako różnicę (modulo p) niezerowych reszt kwadratowych. Wykażemy, że $v(1) = \ldots = v(p-1)$. Zauważmy wpierw, że dla dowolnych reszt kwadratowych r, s zachodzi $v(r) \leqslant v(s)$, gdyż każdemu przedstawieniu $r = a - b$, gdzie a i b to reszty kwadratowe, odpowiada przedstawienie $s = (sr^{-1})a - (sr^{-1})b$. Przez symetrię, wnioskujemy, że w istocie $v(r) = v(s)$ dla dowolnych reszt kwadratowych r, s. Aby rozszerzyć ten fakt także na niereszty, wystarczy zauważyć, że dla dowolnego x zachodzi równość $v(x) = v(-x)$, na mocy oczywistej odpowiedniości $x = a - b \Leftrightarrow -x = b - a$. Ponadto $v(1) + \ldots + v(p-1) = |\mathcal{Q}|^2 - |\mathcal{Q}|$.

Pozostaje przeliczyć, że

$$v(1) = \frac{1}{p-1}\left(|\mathcal{Q}|^2 - |\mathcal{Q}|\right) = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \left(\frac{p-1}{2} - 1\right) = \frac{p-3}{4},$$

oraz zauważyć, że $v(1)$ to w istocie liczba par (x, y) różnych elementów zbioru $\{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ o tej własności, że liczba $x^2 - y^2 - 1$ jest podzielna przez p.

Pozostaje osobno rozważyć przypadek, gdy x lub y jest równe 0. Biorąc $x = 0$, dostajemy $p \mid y^2 + 1$, ale -1 jest niereresztą kwadratową $\bmod p$, więc w tym przypadku nie ma rozwiązań. Biorąc $y = 0$, dostajemy $p \mid (x-1)(x+1)$, czyli otrzymujemy jedno rozwiązanie $(x, y) = (1, 0)$.

Uwzględniając je, otrzymujemy ostateczny wynik $\frac{p-3}{4} + 1 = \frac{p+1}{4}$.

Sposób II

Oznaczmy $S = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ oraz $A = \{(x, y) \in S^2 \ : \ p \mid x^2 - y^2 - 1\}$. Łatwo sprawdzić, że odwzorowanie $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ jest bijekcją $S^2 \to S^2$. Stąd liczba par $(x, y) \in S^2$ takich, że $p \mid x^2 - y^2 - 1 = (x + y)(x - y) - 1$ jest równa liczbie par $(a, b) \in S^2$ takich, że $p \mid ab - 1$. Ta ostatnia liczba jest równa $p - 1$, bo dla każdego $a \neq 0$ istnieje dokładnie jedno odpowiednie $b \neq a$.

Zauważmy, rozumując jak w poprzednim sposobie, że w zbiorze A jest są dokładnie dwie pary zawierające zero, mianowicie $(1, 0)$ oraz $(-1, 0)$. Ponadto wszystkie pary z A nie zawierające zera można podzielić na rozłączne czwórki postaci $\{(k, l), (k, -l), (-k, l), (-k, -l)\}$, w której jedynie jedna para będzie zawierała oba elementy ze zbioru $\{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$. Ostatecznie uzyskujemy odpowiedź jako $1 + \frac{p-3}{4} = \frac{p+1}{4}$.

33. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x, które spełniają równanie

$$1 + 4^x = 2^x + 3^x.$$

Rozwiązanie:
Najpierw zauważmy, że liczby 0 i 1 są rozwiązaniami powyższego równania; dalej załóżmy, że $x \neq 0, 1$. Rozważmy funkcję $f_x(y) = y^x$ określoną dla liczb dodatnich. Zauważmy, że

$$f_x''(y) = x(x-1)y^{x-2}$$

ma taki sam znak, jak wyrażenie $x(x-1)$, a więc taki sam dla wszystkich liczb dodatnich y. Zatem f jest ściśle wypukła lub ściśle wklęsła na zbiorze dodatnich liczb całkowitych.

Skoro $1 < 2$ oraz $1 + 4 = 2 + 3$, to stosując nierówność Karamaty, mamy $f_x(1) + f_x(4) \neq f_x(2) + f_x(3)$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

34. Dany jest n-elementowy zbiór A oraz pewna rodzina jego podzbiorów $\mathcal{F}$. Zbiór $B \subseteq A$ nazwiemy *ćwiartowanym* przez $\mathcal{F}$, gdy dla każdego zbioru $C \subseteq B$ istnieje taki zbiór $F \in \mathcal{F}$, że $C = B \cap F$. Oznaczmy przez d największą możliwą moc zbioru ćwiartowanego przez $\mathcal{F}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k} \geqslant |\mathcal{F}|.$$

Rozwiązanie:
Udowodnimy, że $\mathcal{F}$ ćwiartuje co najmniej $|\mathcal{F}|$ podzbiorów zbioru A. Z tego bezpośrednio wyniknie teza, ponieważ wszystkich ćwiartowanych zbiorów przez $\mathcal{F}$ jest nie więcej niż wszystkich podzbiorów A o mocy co najwyżej d.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po $|\mathcal{F}|$. W przypadku $|\mathcal{F}| = 1$ wystarczy zauważyć, że dowolna jednoelementowa rodzina podzbiorów ćwiartuje zbiór pusty.

Dalej załóżmy, że $\mathcal{F}$ zawiera co najmniej dwa zbiory. Zauważmy, że musi istnieć element $a \in A$ taki, że a należy do co najmniej jednego zbioru z $\mathcal{F}$, ale nie do wszystkich. Oznaczmy

$$\mathcal{X} = \{F \in \mathcal{F} \ : a \in F\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{Y} = \{F \in \mathcal{F} \ : a \notin F\}.$$

Udowodnimy, że dla każdego zbioru B ćwiartowanego zarówno przez $\mathcal{X}$, jak i $\mathcal{Y}$ istnieje zbiór B', który nie jest ćwiartowany zarówno przez $\mathcal{X}$, jak i $\mathcal{Y}$, ale jest ćwiartowany przez $\mathcal{F}$. Tym samym korzystając z założenia indukcyjnego uzyskamy, że $\mathcal{F}$ ćwiartuje co najmniej $|\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}| = |\mathcal{F}|$ zbiorów.

Załóżmy, że B jest ćwiartowany zarówno przez $\mathcal{X}$, jak i $\mathcal{Y}$. Zauważmy, że a nie może należeć do B, gdyż w przeciwnym razie B nie byłby ćwiartowany przez $\mathcal{Y}$. Zatem zbiór $B' = B \cup \{a\}$ jest różny od B i nie jest ćwiartowany przez $\mathcal{Y}$, ponadto nie jest również ćwiartowany przez $\mathcal{X}$, gdyż dla każdego $X \in \mathcal{X}$ zachodzi $a \in X \cap B'$. Jednakże B' jest ćwiartowany przez $\mathcal{F}$, mianowicie

$$\{C \ : C \subseteq B'\} = \{C \ : C \subseteq B',\ a \in C\} \cup \{C \ : C \subseteq B',\ a \notin B'\} =$$

$$= \{X \cap B' \ : X \in \mathcal{X}\} \cup \{Y \cap B' \ : Y \in \mathcal{Y}\} = \{F \cap B' \ : F \in \mathcal{F}\}.$$

35. Na płaszczyźnie dane są okręgi ω_1 i ω_2, o różnych promieniach i środkach odpowiednio O_1 i O_2, przecinające się w punktach A i B tak, że $\sphericalangle O_1AO_2 = 90°$. Na odcinku AB wybrano punkt X różny od A, B oraz środka odcinka AB. Prosta O_1X przecina okrąg ω_2 w punktach P_1 i Q_1, prosta O_2X przecina okrąg ω_1 w punktach P_2 i Q_2, przy czym punkty P_1 i P_2 leżą odpowiednio na odcinkach O_1X i O_2X. Wykazać, że proste O_1O_2, P_1P_2, Q_1Q_2 przecinają się w jednym punkcie niezależnym od wyboru punktu X.

Rozwiązanie:
Sposób I

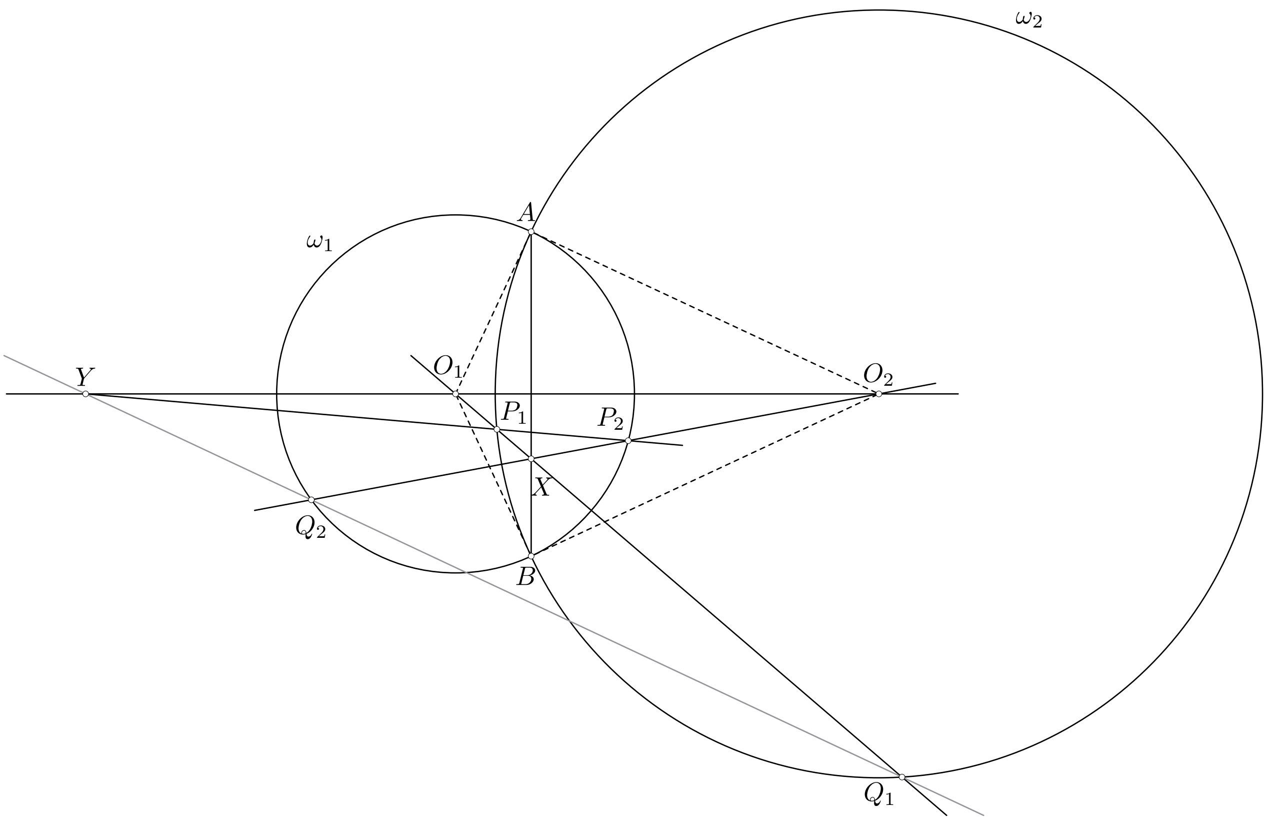
Skoro $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle O_1BO_2 = 90°$, to prosta AB jest jednocześnie biegunową punktu O_1 względem okręgu ω_2 i biegunową punktu O_2 względem okręgu ω_1. W takim razie punkty P_1, Q_1, O_1, X oraz P_2, Q_2, O_2, X tworzą czwórki harmoniczne. Wobec tego

$$\frac{XP_1}{O_1P_1} = \frac{XQ_1}{O_1Q_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{XP_2}{O_2P_2} = \frac{XQ_2}{O_2Q_2}. \tag{9}$$

Okręgi ω_1 i ω_2 nie są przystające, więc proste P_1P_2 i Q_1Q_2 przecinają prostą O_1O_2 odpowiednio w punktach Y i Z. Stosując do tych prostych oraz trójkąta O_1O_2X twierdzenie Menelausa otrzymujemy

$$\frac{O_1Y}{O_2Y} = \frac{O_1P_1}{XP_1} \cdot \frac{XP_2}{O_2P_2} \quad \text{oraz} \quad \frac{O_1Z}{O_2Z} = \frac{O_1Q_1}{XQ_1} \cdot \frac{XQ_2}{O_2Q_2}.$$

Ich prawe strony są równe wobec związków (9), skąd wniosek, że $Y = Z$ (gdyż punkty Y i Z leżą na prostej O_1O_2 poza odcinkiem O_1O_2). To dowodzi, że proste O_1O_2, P_1P_2, Q_1Q_2 przecinają się w jednym punkcie.



Skoro $Y = Z$, to mnożąc wyżej otrzymane równości stronami dostajemy

$$\left(\frac{O_1Y}{O_2Y}\right)^2 = \frac{O_1P_1}{XP_1} \cdot \frac{XP_2}{O_2P_2} \cdot \frac{O_1Q_1}{XQ_1} \cdot \frac{XQ_2}{O_2Q_2}.$$

Zauważmy teraz, że

$$O_1P_1 \cdot O_1Q_1 = O_1A^2, \quad O_2P_2 \cdot O_2Q_2 = O_2A^2$$

oraz

$$XP_1 \cdot XQ_1 = XA \cdot XB = XP_2 \cdot XQ_2.$$

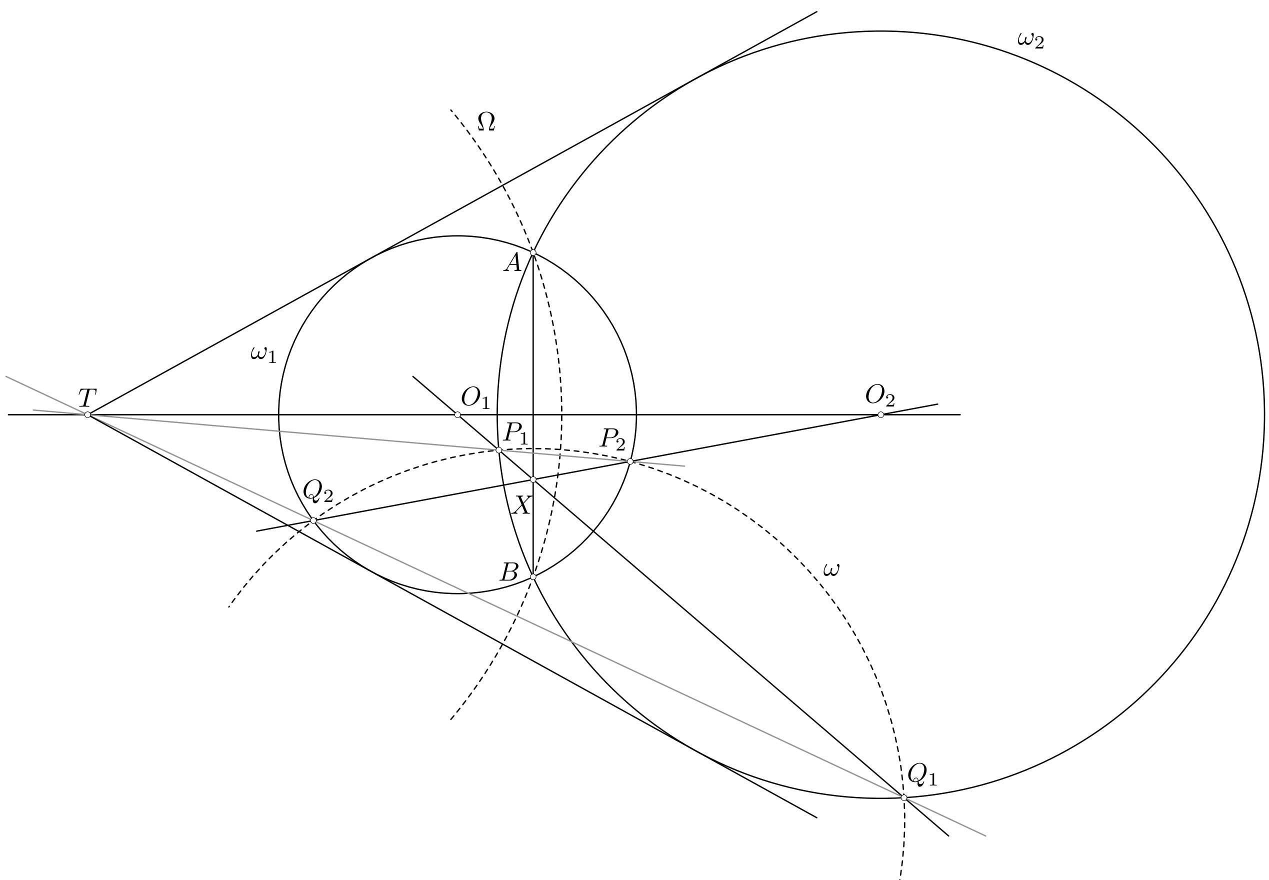
W takim razie
$$\left(\frac{O_1Y}{O_2Y}\right)^2 = \frac{O_1A^2}{O_2A^2},$$
czyli punkt Y nie zależy od położenia punktu X.

Sposób II

Niech T będzie punktem przecięcia wspólnych stycznych do okręgów ω_1 i ω_2. Udowodnimy, że proste O_1O_2, P_1P_2, Q_1Q_2 przecinają się w punkcie T.

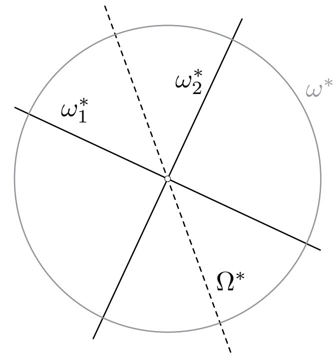
Zauważmy, że
$$XP_1 \cdot XQ_1 \overset{\omega_2}{=} XA \cdot XB \overset{\omega_1}{=} XP_2 \cdot XQ_2,$$
a ponadto punkt X leży na odcinkach P_1Q_1 i P_2Q_2, wobec czego punkty P_1, P_2, Q_1, Q_2 leżą na jednym okręgu — nazwijmy ten okrąg ω.

Inwersja względem okręgu ω_1 zachowuje punkty P_2 i Q_2 oraz zamienia punkty P_1 i Q_1, gdyż okrąg ω_2, jako prostopadły do okręgu inwersyjnego, jest okręgiem stałym. To oznacza, że również ω jest okręgiem stałym przy rozważanej inwersji, wobec czego ω jest prostopadły do ω_1. Analogicznie, rozważając inwersję względem ω_2 uzasadniamy, że okręgi ω oraz ω_2 są prostopadłe.



Niech Ω będzie okręgiem o środku T i promieniu $TA = TB$. Inwersja względem Ω zamienia okręgi ω_1 i ω_2, gdyż są one wpisane w ten sam kąt o wierzchołku T, a A i B są punktami stałymi tej inwersji. Udowodnimy, że okręgi ω i Ω są prostopadłe; wyniknie stąd teza zadania. Rzeczywiście, wówczas okrąg ω będzie stały w rozważanej inwersji i wobec tego
$$\{P_1^*, Q_1^*\} = (\omega_2 \cap \omega)^* = \omega_1 \cap \omega = \{P_2, Q_2\},$$
co biorąc pod uwagę położenie punktów prowadzi do wniosku, że $P_1^* = P_2$ i $Q_1^* = Q_2$ i w konsekwencji oznacza, że proste P_1P_2, Q_1Q_2 przechodzą przez środek inwersji, czyli punkt T.

Rozważmy w końcu dowolną inwersję o środku A. Obrazami okręgów ω_1 i ω_2 będzie pewna para prostych prostopadłych przecinających się w B^*, a obrazem ω — pewien okrąg prostopadły do tych dwóch prostych, czyli okrąg o środku B^*. Ale okrąg Ω również przechodzi na prostą przechodzącą przez B^*, czyli prostopadłą do ω^* — stąd $\Omega \perp \omega$, co kończy rozwiązanie.



Uwaga

W tym sposobie rozwiązania w istocie udowodniliśmy, że jeżeli pewien okrąg jest prostopadły do dwóch okręgów z pęku, to jest prostopadły do całego pęku.

Sposób III

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że ω_1 ma mniejszy promień niż ω_2. Niech odcinek O_1O_2 przecina okręgi ω_1, ω_2 odpowiednio w punktach K i L. Wówczas Q_1L jest dwusieczną kąta AQ_1B — niech przecina ona odcinek AB w punkcie Y. Wówczas z twierdzenia o dwusiecznej oraz z faktu, że Q_1X jest symedianą w trójkącie AQ_1B otrzymujemy

$$\frac{AY}{YB} = \frac{AQ_1}{Q_1B} = \sqrt{\frac{AQ_1^2}{Q_1B^2}} = \sqrt{\frac{AX}{XB}}.$$

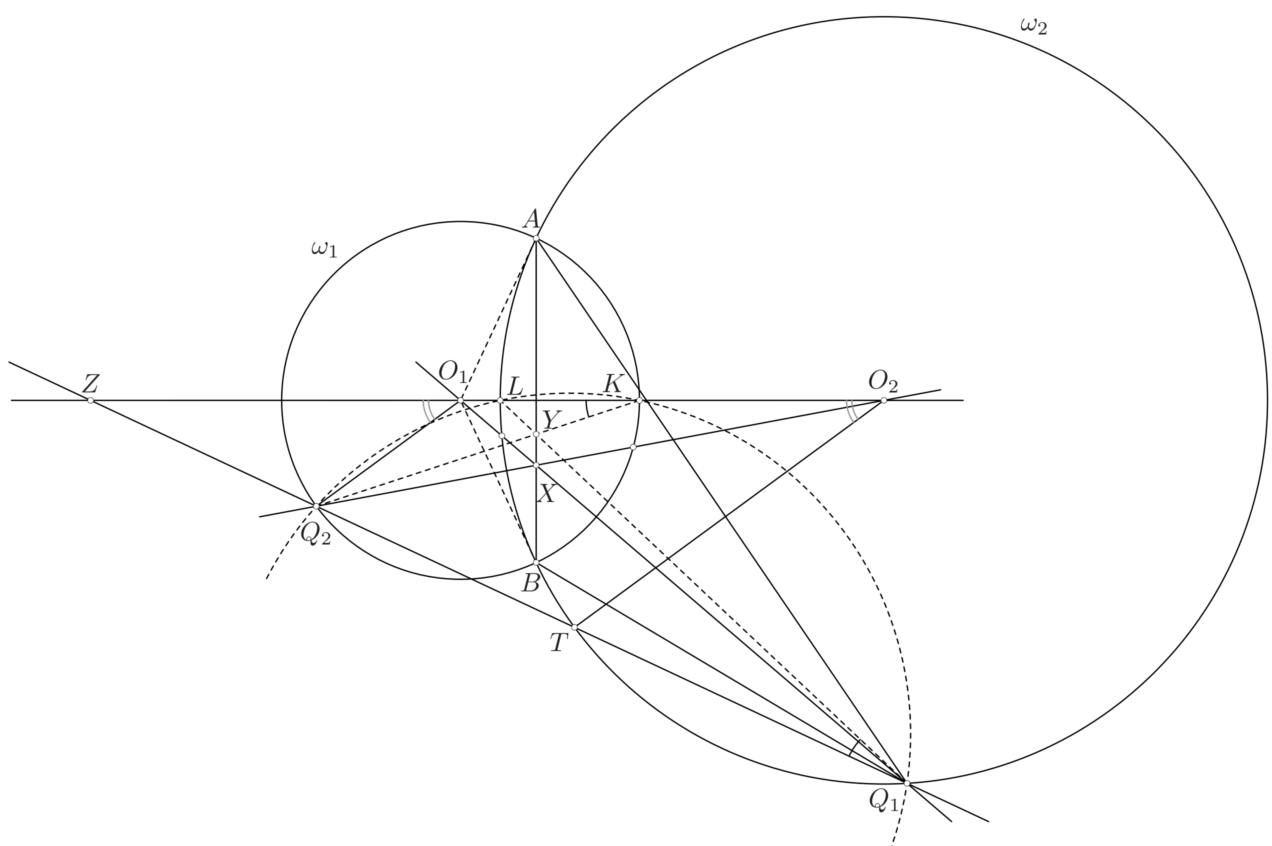
Analogicznie dowodzimy, że prosta Q_2K przecina odcinek AB w takim punkcie Y', że

$$\frac{AY'}{Y'B} = \sqrt{\frac{AX}{XB}}.$$

Wobec tego $Y = Y'$. Z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu mamy

$$Q_1Y \cdot YL = AY \cdot YB = Q_2Y \cdot YK,$$

zatem punkty Q_1, Q_2, K, L leżą na jednym okręgu.



Oznaczmy punkt wspólny prostych Q_1Q_2, KL przez Z. Niech T będzie drugim punktem przecięcia prostej Q_1Q_2 z okręgiem ω_2 (gdy prosta Q_1Q_2 jest styczna do tego okręgu, to przyjmujemy $T = Q_1$). Wówczas

$$\measuredangle Q_2O_1Z = 2\measuredangle Q_2KL = 2\measuredangle Q_2Q_1L = \measuredangle TO_2L.$$

To oznacza, że Z jest środkiem jednokładności o skali dodatniej przekształcającej odcinek O_1Q_2 na O_2T. Jednokładność ta przekształca więc okrąg ω_1 na ω_2.

Analogicznie dowodzimy, że P_1P_2 przechodzi przez środek jednokładności o skali dodatniej przekształcającej ω_1 na ω_2. Wykazaliśmy więc, że niezależnie od wyboru punktu X proste Q_1Q_2, P_1P_2 przechodzą przez punkt Z, który oczywiście leży również na prostej O_1O_2.

36. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych, dla których istnieje dodatnia liczba całkowita x spełniająca warunki:

- $1 + x + \ldots + x^{m-1}$ dzieli się przez n;
- $1 + x + \ldots + x^{n-1}$ dzieli się przez m.

Rozwiązanie:

Para $m = 1$, $n = 1$ jest oczywiście rozwiązaniem. Udowodnimy, że innych rozwiązań nie ma.

Przypuśćmy, że istnieją liczby całkowite dodatnie m, n, x spełniające podane w treści warunki, przy czym $mn > 1$. Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby mn — przyjmijmy bez straty ogólności, że $p \mid n$. Z warunku w treści zadania mamy, że $n \mid x^m - 1$, skąd $x^m \equiv 1 \pmod{p}$.

Niech $k > 0$ będzie najmniejszą taką liczbą, że $x^k \equiv 1 \pmod{p}$. Wtedy $k \mid m$ oraz $k \mid p - 1$ (bo $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ na mocy małego twierdzenia Fermata). Ponieważ wszystkie dzielniki pierwsze liczby m są większe od p, więc $k = 1$, czyli $x \equiv 1 \pmod{p}$. W takim razie

$$0 \equiv 1 + x + \ldots + x^{m-1} \equiv m \pmod{p}.$$

To pociąga za sobą podzielność $p \mid m$, wbrew założeniu, że liczby m i n są względnie pierwsze.

Zawody drużynowe

1. Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2k^2(n+k)^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2k^2(n+k)^2}&=\frac{1}{3}\sum_{n,k\geqslant 1}\frac{(n+k)^3-n^3-k^3}{n^3k^3(n+k)^3}=\\&=\frac{1}{3}\sum_{n,k\geqslant 1}\frac{1}{n^3k^3}-\frac{1}{3}\sum_{n,k\geqslant 1}\frac{1}{n^3(n+k)^3}-\frac{1}{3}\sum_{n,k\geqslant 1}\frac{1}{k^3(n+k)^3}=\\&=\frac{1}{3}\sum_{n,k\geqslant 1}\frac{1}{n^3k^3}-\frac{1}{3}\sum_{n>k\geqslant 1}\frac{1}{n^3k^3}-\frac{1}{3}\sum_{1\leqslant n<k}\frac{1}{n^3k^3}=\\&=\frac{1}{3}\sum_{n=k\geqslant 1}\frac{1}{n^3k^3}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}.\end{aligned}$$

2. Znaleźć największą możliwą wartość wyrażenia

$$abcd\cdot|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)|,$$

gdzie a, b, c, d są liczbami nieujemnymi, których suma jest równa 4.

Rozwiązanie:
Odpowiedź: Szukana wartość wynosi 1.

Oznaczmy $L=abcd\cdot|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)|$. Kilkukrotnie stosując nierówność $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, otrzymujemy

$$L=\sqrt{a^2b^2c^2d^2(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2}=\prod_{cyc}\sqrt{ab(a-b)^2}=\prod_{cyc}\frac{1}{2}\sqrt{4ab\left((a+b)^2-4ab\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{cyc}\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{256}\left((a+b)(c+d)\right)^2\left((b+c)(a+d)\right)^2\leqslant\frac{1}{256}\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^8=1.$$

Wartość 1 jest osiągana na przykład dla $a=c=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $b=d=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Graf prosty nazwiemy *podzielnościowym*, jeśli można tak ponumerować jego wierzchołki parami różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, by dla każdej pary wierzchołków istniała krawędź między nimi wtedy i tylko wtedy, gdy numer jednego z nich jest podzielny przez numer drugiego. Ponadto graf prosty o n wierzchołkach nazwiemy *permutacyjnym*, jeśli można ponumerować jego wierzchołki liczbami 1, 2, …, n w taki sposób, by istniała permutacja σ zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ o następującej własności: dla wierzchołków o numerach i, j, gdzie $i<j$ istnieje krawędź między nimi wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(i)>\sigma(j)$.

Wykazać, że graf prosty jest permutacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno on, jak i jego dopełnienie, są grafami podzielnościowymi.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następującą definicję: graf prosty nazwiemy *porządkowym*, jeśli istnieje taki porządek częściowy na zbiorze wierzchołków grafu, dla którego krawędź między wierzchołkami v, w istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołki v, w są w tym częściowym porządku porównywalne oraz $v \neq w$.

Lemat 1. *Graf prosty jest podzielnościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest porządkowy.*

Dowód. Implikacja w prawą stronę jest jasna. Załóżmy teraz, że graf G o n wierzchołkach jest porządkowy; niech $\preccurlyeq$ będzie odpowiadającym mu częściowym porządkiem. Umieśćmy w jego wierzchołkach parami różne liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Niech numer wierzchołka v będzie iloczynem wszystkich liczb pierwszych umieszczonych w takich wierzchołkach w, że $w \preccurlyeq v$. Nietrudno sprawdzić, że dla różnych wierzchołków v, w numer wierzchołka v dzieli numer wierzchołka w wtedy i tylko wtedy, gdy $v \preccurlyeq w$. Wobec tego graf G jest porządkowy. □

Załóżmy, że graf prosty G jest permutacyjny. Rozważmy odpowiadającą mu numerację wierzchołków i permutację σ. Zdefiniujmy porządki częściowe $\preccurlyeq_1$, $\preccurlyeq_2$ następująco: dla wierzchołków v, w o numerach odpowiednio k, ℓ:

- $v \preccurlyeq_1 w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \leqslant \ell$ oraz $\sigma(k) \geqslant \sigma(\ell)$;
- $v \preccurlyeq_2 w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \leqslant \ell$ oraz $\sigma(k) \leqslant \sigma(\ell)$.

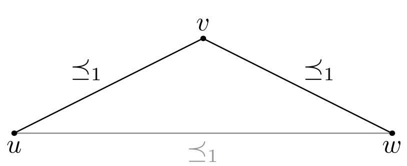
Wtedy różne wierzchołki v, w są porównywalne w porządku $\preccurlyeq_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G są one połączone krawędzią, wobec czego graf G jest porządkowy, więc jest podzielnościowy. Podobnie różne wierzchołki v, w są porównywalne w porządku $\preccurlyeq_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G nie są one połączone krawędzią, skąd dopełnienie grafu G jest grafem porządkowym, czyli jest grafem podzielnościowym.

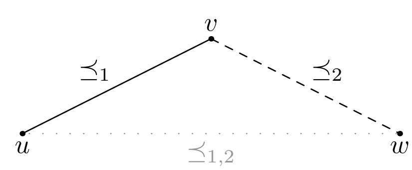
Załóżmy teraz, że zarówno graf G, jak i jego dopełnienie, są grafami podzielnościowymi. Wtedy oba te grafy są porządkowe; niech $\preccurlyeq_1$, $\preccurlyeq_2$ będą odpowiadającymi im porządkami. Wówczas różne wierzchołki v, w są porównywalne w porządku $\preccurlyeq_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie są porównywalne w porządku $\preccurlyeq_2$. Rozważmy porządki $\preccurlyeq_{1,2}$, $\preccurlyeq_{1,-2}$ określone na zbiorze wierzchołków grafu G w następujący sposób:

- $v \preccurlyeq_{1,2} w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \preccurlyeq_1 w$ lub $v \preccurlyeq_2 w$;
- $v \preccurlyeq_{1,-2} w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \preccurlyeq_1 w$ lub $w \preccurlyeq_2 v$.

Udowodnimy, że $\preccurlyeq_{1,2}$ jest porządkiem liniowym; to, że $\preccurlyeq_{1,-2}$ również jest porządkiem liniowym, można udowodnić analogicznie. Zwrotność, antysymetryczność i porównywalność każdych dwóch wierzchołków jest jasna. Pozostaje wykazać, że relacja $\preccurlyeq_{1,2}$ jest przechodnia.

Niech $u \preccurlyeq_{1,2} v$ oraz $v \preccurlyeq_{1,2} w$. Załóżmy, że pary wierzchołków (u, v) oraz (v, w) są porównywalne w tej samej relacji; bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to relacja $\preccurlyeq_1$. Jeśli $u \preccurlyeq_1 v$ oraz $v \preccurlyeq_1 w$, to z przechodniości relacji $\preccurlyeq_1$ otrzymujemy $u \preccurlyeq_1 w$, zatem $u \preccurlyeq_{1,2} w$.





Jeśli natomiast wierzchołki (u, v) oraz (v, w) są porównywalne w różnych relacjach, to bez straty ogólności przyjmijmy, że $u \preccurlyeq_1 v$ oraz $v \preccurlyeq_2 w$. Gdyby $w \preccurlyeq_1 u$, to z przechodniości relacji $\preccurlyeq_1$ otrzymalibyśmy, że $w \preccurlyeq_1 v$, co nie jest możliwe, ponieważ wierzchołki v, w są porównywalne w porządku $\preccurlyeq_2$, zatem nie są porównywalne w porządku $\preccurlyeq_1$. Analogicznie wykazujemy, że nie może zajść $w \preccurlyeq_2 u$. Wobec tego $u \preccurlyeq_1 w$ albo $u \preccurlyeq_2 w$, skąd ostatecznie $u \preccurlyeq_{1,2} w$.

Rozważmy teraz numerowanie wszystkich n wierzchołków grafu G liczbami 1, 2, …, n w porządku zgodnym z porządkiem zadanym na tych wierzchołkach przez relację $\preccurlyeq_{1,2}$. Ponadto jeśli v_1, v_2, …, v_n to wierzchołki grafu kolejno o numerach 1, 2, …, n, to zadajmy permutację σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, by

$$v_{\sigma^{-1}(n)} \preccurlyeq_{1,-2} v_{\sigma^{-1}(n-1)} \preccurlyeq_{1,-2} \cdots \preccurlyeq_{1,-2} v_{\sigma^{-1}(1)}.$$

Wówczas dla $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$ wierzchołki v_k oraz v_ℓ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$v_k \preccurlyeq_1 v_\ell \iff v_k \preccurlyeq_{1,2} v_\ell \text{ oraz } v_{\sigma^{-1}(\sigma(k))} = v_k \preccurlyeq_{1,-2} v_\ell = v_{\sigma^{-1}(\sigma(\ell))} \iff k < \ell \text{ oraz } \sigma(k) > \sigma(\ell),$$

a więc graf G jest permutacyjny.

4. Na płaszczyźnie dany jest zbiór S złożony z $2n$ punktów ($n \geqslant 1$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. *Skojarzeniem* nazwiemy taki zbiór n odcinków, że każdy punkt z S jest końcem dokładnie jednego z nich. Skojarzenie nazwiemy *nieprzecinającym się*, jeśli żadne dwa odcinki tego skojarzenia się nie przecinają. Niech L będzie największą możliwą sumą długości odcinków w skojarzeniu, P zaś — największą możliwą sumą długości odcinków w nieprzecinającym się skojarzeniu. Dowieść, że $P \geqslant \frac{2}{\pi}L$.

Rozwiązanie:

Długością skojarzenia M, oznaczoną $\Sigma(M)$, będziemy nazywać sumę długości odcinków z M. Ustalmy dowolny punkt O na płaszczyźnie i rozważmy dowolną prostą ℓ przechodzącą przez O. Dla odcinka s niech $\Pi_\ell(s)$ będzie długością rzutu s na prostą ℓ. Dla skojarzenia M, niech $\Pi_\ell(M) = \sum_{s\in M} \Pi_\ell(s)$. Oczywiście $\Sigma(M) \geqslant \Pi_\ell(M)$ dla dowolnego skojarzenia M i prostej ℓ.

Wpierw wykażemy, że każde skojarzenie można „urozłącznić” nie zmieniając wartości Π_ℓ.

Spostrzeżenie 1. *Dla każdej prostej ℓ i każdego skojarzenia M istnieje nieprzecinające się skojarzenie N spełniające $\Pi_\ell(M) = \Pi_\ell(N)$.*

Dowód. Wśród skojarzeń N spełniających $\Pi_\ell(M) = \Pi_\ell(N)$ rozważmy takie, którego długość $\Sigma(N)$ jest najmniejsza. Twierdzimy, że jest ono nieprzecinające się. Załóżmy przeciwnie, czyli że pewne dwa odcinki $AC, BD \in N$ się przecinają. Wówczas $ABCD$ jest czworokątem wypukłym i z nierówności trójkąta wynika, że

$$AB + CD < AC + BD \quad \text{oraz} \quad BC + DA < AC + BD.$$

Rozważmy skojarzenia N', N'' uzyskane z N przez zamianę $\{AC, BD\}$ odpowiednio na $\{AB, CD\}$ i $\{BC, DA\}$. Wówczas powyższe nierówności pociągają za sobą $\Sigma(N') < \Sigma(N)$ oraz $\Sigma(N'') < \Sigma(N)$. Jednakże łatwo sprawdzić rozpatrując wzajemne położenie rzutów A, B, C, D na prostą ℓ, że jeden z poniższych warunków jest spełniony:

$$\Pi_\ell(AB) + \Pi_\ell(CD) = \Pi_\ell(AC) + \Pi_\ell(BD) \quad \text{lub} \quad \Pi_\ell(BC) + \Pi_\ell(DA) = \Pi_\ell(AC) + \Pi_\ell(BD).$$

Oznacza to, że $\Pi_\ell(N') = \Pi_\ell(N)$ lub $\Pi_\ell(N'') = \Pi_\ell(N)$, co przeczy wyborowi skojarzenia N. □

Teraz zauważamy, że dla każdego skojarzenia M istnieje taka prosta ℓ, że suma długości rzutów $\Pi_\ell(M)$ jest niewiele krótsza od długości skojarzenia $\Sigma(M)$.

Spostrzeżenie 2. *Dla każdego skojarzenia M istnieje taka prosta ℓ przechodząca przez O, że*

$$\Pi_\ell(M) \geqslant \frac{2}{\pi}\Sigma(M).$$

Dowód. Wybierzmy prostą ℓ poprzez wylosowanie kąta nachylenia ℓ względem osi układu współrzędnych z przedziału $(-\pi/2, \pi/2)$ z rozkładem jednostajnym. Wówczas dla każdego odcinka $s \in M$, kąt nachylenia

s względem ℓ znów jest zmienną losową α_s o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$. Długość rzutu s na ℓ wynosi $s \cdot \cos\alpha_s$, więc wartość oczekiwana długości rzutu $\Pi_\ell(s)$ wynosi

$$s \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = s \cdot \frac{1}{\pi}(\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) = s \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Z liniowości wartości oczekiwanej otrzymujemy, że wartość oczekiwana $\Pi_\ell(M)$ wynosi $\frac{2}{\pi}\Sigma(M)$, a więc istnieje prosta ℓ, dla której co najmniej taka wartość $\Pi_\ell(M)$ jest realizowana. □

Niech teraz M będzie skojarzeniem o największej długości, czyli $\Sigma(M) = L$. Na mocy Spostrzeżeń 1 i 2 możemy znaleźć taką prostą ℓ przechodzącą przez O oraz nieprzecinające się skojarzenie N, że

$$\Pi_\ell(M) \geqslant \frac{2}{\pi}\Sigma(M) \quad \text{oraz} \quad \Pi_\ell(N) = \Pi_\ell(M).$$

Zatem

$$\frac{2}{\pi}L = \frac{2}{\pi}\Sigma(M) \leqslant \Pi_\ell(M) = \Pi_\ell(N) \leqslant \Sigma(N) \leqslant P,$$

czego należało dowieść.

Uwaga

Jeżeli za S przyjmiemy zbiór wierzchołków $2n$-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1, to

$$L = 2n \quad \text{oraz} \quad P = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Przechodząc do granicy, uzyskujemy

$$\frac{P}{L} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^{-1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi},$$

co dowodzi, że stała $\frac{2}{\pi}$ w treści zadania jest optymalna.

5. W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, punkt L jest punktem przecięcia symedian, a punkt P spełnia warunek $\measuredangle PAB = \measuredangle PBC = \measuredangle PCA$. Wykazać, że $\measuredangle OPL = 90°$.

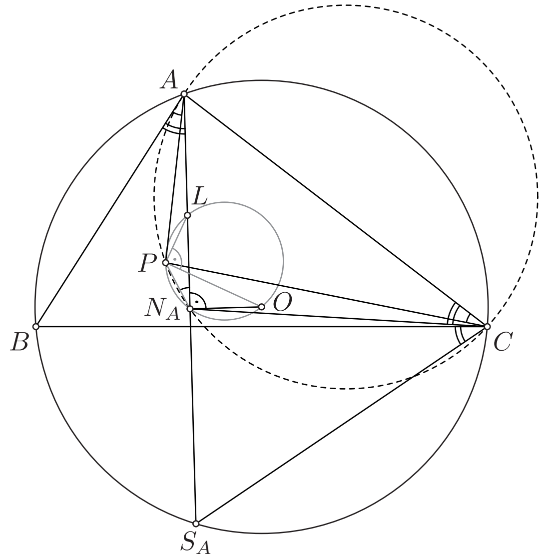
Rozwiązanie:

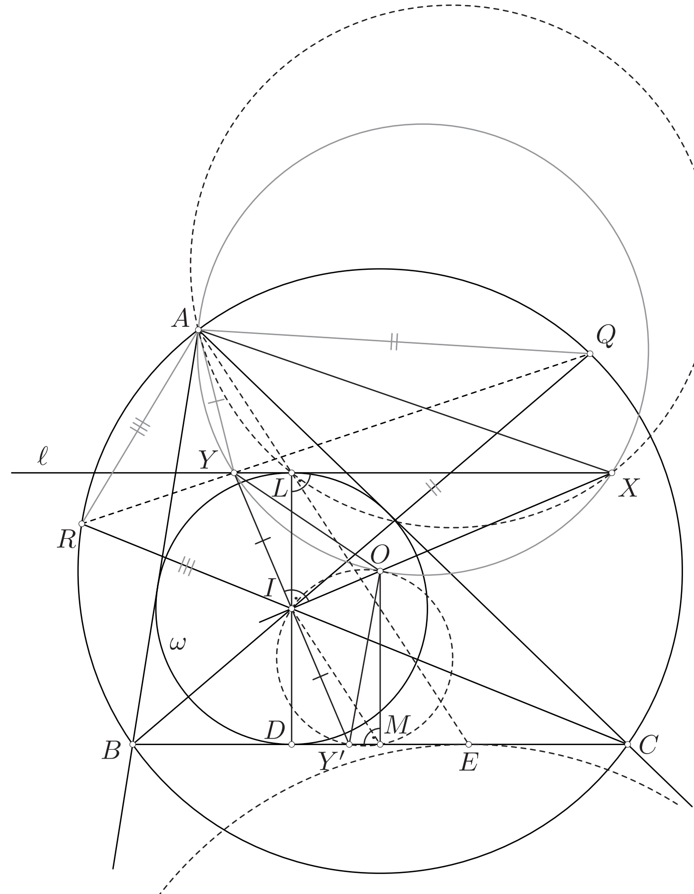
Niech $\alpha = \measuredangle PAB = \measuredangle PBC = \measuredangle PCA$. Ponadto oznaczmy przez S_A punkt przecięcia prostej AL z okręgiem opisanym na trójkącie ABC, przez N_A zaś środek odcinka AS_A; analogicznie definiujemy punkty S_B, N_B. Oczywiście punkty N_A, N_B leżą na okręgu o średnicy OL, ponieważ są to rzuty punktu O odpowiednio na odcinki AS_A i BS_B.

Wykorzystując znany fakt dotyczący symedian, z tego że AS_A jest symedianą w trójkącie ABC wnioskujemy, że CB jest symedianą w trójkącie ACS_A. Zatem $\measuredangle N_ACA = \measuredangle BCS_A = \measuredangle BAS_A$, czyli punkty P, N_A leżą na okręgu stycznym do AB w punkcie A oraz przechodzącym przez C. Stąd uzyskujemy, że

$$\measuredangle(LN_A, PN_A) = \measuredangle(AN_A, PN_A) = \measuredangle(AC, PC) = \alpha.$$

Analogicznie wykazujemy, że $\measuredangle(LN_B, PN_B) = \alpha$. Stąd uzyskujemy, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie LN_AN_B. Średnicą tego okręgu jest odcinek OL, więc $\measuredangle OPL = 90°$.





6. W trójkącie ABC punkty O, I są środkami okręgów odpowiednio opisanego i wpisanego w ten trójkąt. Prosta ℓ różna od prostej BC jest styczna do okręgu wpisanego i równoległa do BC. Punkt X jest punktem przecięcia prostych OI i ℓ, a punkt Y jest punktem przecięcia prostej ℓ z prostą prostopadłą do odcinka XI przechodzącą przez punkt I. Wykazać, że punkty A, X, Y, O leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Na początku sprowadzimy tezę do wykazania równości $YA = YI$. Oznaczmy okrąg wpisany w trójkąt ABC przez ω, punkty styczności ω do prostych ℓ, BC odpowiednio przez L, D, punkt styczności okręgu dopisanego do trójkąta ABC do boku BC przez E, środek boku BC przez M i niech punkt Y' będzie punktem przecięcia prostych YI i BC.

Teza zadania jest równoważna równości $\sphericalangle(XA, AY) + \sphericalangle(YO, OX) = 180°$. Zauważmy, że punkty Y i Y' są symetryczne względem prostej OI, więc $\sphericalangle(YO, OX) = \sphericalangle(OX, OY') = \sphericalangle(OI, OY')$. Skoro $\sphericalangle OMY' = \sphericalangle OIY' = 90°$, to punkty O, M, Y', I leżą na jednym okręgu, więc $\sphericalangle(OI, OY') = \sphericalangle(MI, MY')$.

Znanym faktem jest, że punkt M jest środkiem odcinka DE. Ponadto rozważając jednokładność o skali dodatniej o środku A przekształcającej ω na okrąg dopisany do trójkąta ABC uzyskujemy, że punkty A, L, E są współliniowe. Stąd i z twierdzenia Talesa wynika, że proste IM oraz AL są równoległe oraz $\sphericalangle(MI, MY') = \sphericalangle(AL, LY) = \sphericalangle(AL, LX)$.

Ostatecznie teza została sprowadzona do wykazania równości $\sphericalangle(XA, AY) + \sphericalangle(AL, LX) = 180°$, co jest równoważne temu, że prosta AY jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ALX. Z potęgi punktu sprowadza się to do równości $YA^2 = YL \cdot YX$. Z podobieństwa trójkątów prostokątnych YIL oraz YXI mających dodatkowo wspólny kąt przy wierzchołku Y otrzymujemy równość $YX \cdot YL = YI^2$, wobec czego teza zadania jest równoważna równości $YA = YI$.

Przyjmijmy, że proste BI oraz CI przecinają ponownie okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach Q i R. Niech Z będzie punktem przecięcia prostych QR oraz $Y'I$. Skoro $\sphericalangle OIY' = 90°$, to punkt I jest środkiem cięciwy wyznaczonej przez prostą $Y'I$ i okrąg opisany na trójkącie ABC. Z twierdzenia o motylku dostajemy, że $ZI = IY'$, czyli $Z = Y$, w szczególności punkt Y leży na prostej

QR. Z lematu o trójliściu zachodzą równości $AR = RI$ oraz $AQ = QI$. Stąd wynika, że prosta QR jest symetralną odcinka AI, więc $AY = YI$, co kończy dowód.

7. Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że liczba

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 2$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej dla żadnej dodatniej liczby całkowitej x.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy nie wprost, że powyższe wyrażenie jest równe k^2 dla pewnej liczby całkowitej k. Ponieważ $p \geqslant 5$ oraz $x > 0$, więc $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 2 \geqslant 6$, wobec czego $k \geqslant 3$. Dla $x = 1$ otrzymalibyśmy $p = (k+1)(k-1)$, co jest oczywiście niemożliwe. Wobec tego $x > 1$, skąd

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = (k+1)(k-1).$$

Przypuśćmy, że istnieje dzielnik pierwszy q liczby $(k+1)(k-1)$, który ponadto dzieli $x - 1$. Liczbę x można zatem przedstawić w postaci $x = mq^\alpha + 1$, gdzie m nie dzieli się przez q, a $\alpha \geqslant 1$. Skoro $q \mid \frac{x^p-1}{x-1}$, musi zachodzić $q^{\alpha+1} \mid x^p - 1$. Rozpisując,

$$0 \equiv x^p - 1 = (mq^\alpha + 1)^p - 1 = \binom{p}{1} mq^\alpha + \binom{p}{2} m^2 q^{2\alpha} + \ldots + \binom{p}{p} m^p q^{p\alpha} \equiv pmq^\alpha \pmod{q^{\alpha+1}},$$

co prowadzi do wniosku, że $q \mid p$, a w konsekwencji $q = p$.

Rozważmy teraz dowolny dzielnik pierwszy r liczby $(k+1)(k-1)$, który nie dzieli $x - 1$. Zależności $r \mid x^p - 1$ i $r \nmid x - 1$ implikują, że rząd x modulo r dzieli p, ale nie jest równy 1, zatem jest równy p. Ponadto na mocy małego twierdzenia Fermata $r \mid x^{r-1} - 1$, a więc liczba $r - 1$ musi być podzielna przez rząd, czyli p.

Wykazaliśmy zatem, że każdy dzielnik pierwszy liczby $(k+1)(k-1)$ daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez p. Prowadzi to jednak do sprzeczności, gdyż iloczyn dowolnej liczby takich dzielników również daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez p, a $k+1$ i $k-1$ nie mogą jednocześnie przystawać do 0 lub 1 modulo p dla $p \geqslant 5$.

Uzyskana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

8. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $m \geqslant 1$ istnieje taka dodatnia liczba całkowita N, że dla każdej liczby pierwszej $p > N$ istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z niepodzielne przez p takie, że liczba $x^m + y^m - z^m$ jest podzielna przez p.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw szczególny przypadek twierdzenia Ramseya.

Twierdzenie (Ramsey)**.** *Dana jest liczba całkowita m. Wówczas istnieje taka liczba N, że dla dowolnego $n > N$ oraz dowolnego kolorowania kliki n-elementowej na m kolorów istnieje trójkąt, którego krawędzie mają ten sam kolor.*

Dowód. Tezę wykażemy indukcyjnie po m. Dla $m = 1$ wystarczy dobrać $N = 2$. Dalej załóżmy, że $m > 1$ i niech N' będzie taką liczbą, że dla dowolnego $n > N'$ oraz dowolnego kolorowania kliki n-elementowej na $m - 1$ kolorów istnieje trójkąt, którego krawędzie mają ten sam kolor. Udowodnimy, że $N = m \cdot (N' + 1)$ spełnia warunki twierdzenia. Weźmy dowolną klikę, która ma więcej niż N wierzchołków oraz której krawędzie zostały pokolorowane na m kolorów i rozważmy jej dowolny wierzchołek v. Wówczas z zasady szufladkowej Dirichleta z tego wierzchołka wychodzi co najmniej $N' + 1$ krawędzi w tym samym kolorze i. Oznaczmy zbiór drugich końców tych krawędzi przez A. Jeśli w A pewne dwa wierzchołki są połączone krawędzią o kolorze i, to razem z v tworzą trójkąt w kolorze i. W przeciwnym przypadku wszystkie krawędzie pomiędzy wierzchołkami z A są pokolorowane jednym z $m - 1$ kolorów, więc z założenia indukcyjnego istnieje jednokolorowy trójkąt o wierzchołkach należących do A. □

W rozwiązaniu skorzystamy z twierdzenia Schura.

Twierdzenie (Schur)**.** *Dana jest dodatnia liczba całkowita m. Wówczas istnieje taka liczba N, że dla dowolnego $n > N$ oraz zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_m$ takich, że $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m = \{1, 2, \ldots, n\}$ istnieje i oraz x, y, $z \in X_i$ takie, że $x + y = z$.*

Dowód. Niech N będzie liczbą spełniającą tezę twierdzenia Ramseya dla liczby m. Niech $n > N$ oraz $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m = \{1, 2, \ldots, n\}$. Rozważmy klikę o wierzchołkach 1, 2, …, n i kolorowanie, w którym krawędzi $\{a, b\}$ przypisano taki kolor k, że $|a - b| \in X_k$. Z twierdzenia Ramseya wynika, że istnieje kolor i oraz $a < b < c \leqslant n$ takie, że krawędzie $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}$ mają kolor i. Wówczas $b-a, c-b, c-a \in X_i$. Liczby $x = b - a$, $y = c - b$, $z = c - a$ spełniają tezę, gdyż

$$x + y = (b - a) + (c - b) = c - a = z. \qquad \square$$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Niech N będzie liczbą spełniającą dla liczby m tezę twierdzenia Schura. Ponadto niech p będzie liczbą pierwszą większą od N. Udowodnimy, że istnieją liczby x, y, z niepodzielne przez p takie, że $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$.

Niech g będzie generatorem modulo p, tzn. taką liczbą, że

$$\{g^1, g^2, \ldots, g^{p-1}\} \equiv \{1, 2, 3, \ldots, p - 1\}.$$

Dla każdego $x \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$ istnieją więc takie liczby i_x, j_x, że $x \equiv g^{mj_x+i_x}$, przy czym $0 \leqslant i_x < m$.

Dla $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ niech X_k będzie zbiorem tych x, że $i_x = k$. Z twierdzenia Schura wynika, że istnieje $i \in \{0, 1, \ldots, m - 1\}$ oraz $a, b, c \in X_i$ takie, że $a + b = c$. Wówczas $i_a = i_b = i_c = i$. Połóżmy $x = g^{j_a}, y = g^{j_b}, z = g^{j_c}$. Wtedy

$$x^m+y^m = g^{mj_a}+g^{mj_b} = g^{-i}\left(g^{mj_a+i_a} + g^{mj_b+i_b}\right) \equiv g^{-i}(a+b) = g^{-i}c \equiv g^{-i}\cdot g^{mj_c+i_c} = g^{mj_c} = z^m \pmod{p},$$

a zatem liczba $x^m + y^m - z^m$ jest podzielna przez p.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki niezerowy, unormowany i nierozkładalny wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieją liczby całkowite $a, b > 1$ takie, że $P(n) = a^b$.

Uwaga: Wielomian nierozkładalny to taki, który nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{Z}$, z których żaden nie jest stale równy ± 1.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu będziemy korzystać z następujących lematów.

Lemat 1. *Dany jest unormowany wielomian nierozkładalny $F(x)$ o współczynnikach całkowitych. Wówczas istnieją wielomiany $A(x)$, $B(x)$ o współczynnikach całkowitych oraz liczba całkowita $c \neq 0$ o tej własności, że $A(x) \cdot F(x) + B(x) \cdot F'(x) = c$.*

Dowód. Oznaczmy przez $\mathbb{Q}[x]$ *pierścień* wielomianów o współczynnikach wymiernych, tzn. zbiór takich wielomianów ze zdefiniowanym działaniem dodawania, odejmowania i mnożenia. Znanym faktem jest, iż w $\mathbb{Q}[x]$ można dzielić z resztą, co implikuje terminację algorytmu Euklidesa w skończonej liczbie kroków. Korzystając z rozszerzonej wersji tego algorytmu, możemy znaleźć wielomiany $W, U \in \mathbb{Q}[x]$ takie, że

$$W \cdot F + U \cdot F' = \mathrm{NWD}(F, F') = D,$$

gdzie $\mathrm{NWD}(X, Y)$ to unormowany wielomian Z taki, że $Z \mid X, Y$ oraz dla każdego $V \mid X, Y$ zachodzi $V \mid Z$. Z lematu Gaussa F jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$, tzn. nie ma dzielników różnych od 1 i F z dokładnością do przemnożenia przez stałą, a ponieważ $\deg F' < \deg F$, to $D \equiv 1$. Dla ukończenia dowodu lematu wystarczy dobrać odpowiednią dodatnią liczbę całkowitą n tak, aby wielomiany $A = nW$ oraz $B = nU$ miały współczynniki całkowite i wziąć $c = n$. $\square$

Lemat 2. *Dany jest niestały wielomian $F(x)$ o współczynnikach całkowitych. Wówczas istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, dla których $p \mid F(m)$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $p_1, \ldots, p_r$ to wszystkie takie liczby pierwsze. Oczywiście $r \geqslant 1$. Ponieważ F nie jest wielomianem stałym, to istnieje dodatnia liczba całkowita N taka, że $0 \neq F(N) = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$. Wówczas dla każdej dodatniej liczby całkowitej m otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(N + m \cdot p_1^{\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r+1}) &= a_k \left(N + m \cdot p_1^{\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r+1}\right)^k + a_{k-1} \left(N + m \cdot p_1^{\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r+1}\right)^{k-1} + \\ &\ldots + a_1 \left(N + m \cdot p_1^{\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r+1}\right) + a_0 = F(N) + m \cdot p_1^{\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r+1} \cdot \ell \\ &= p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}(1 + m\ell p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}) \end{aligned}$$

dla pewnej liczby całkowitej ℓ. Wobec tego, ponieważ liczba p_i nie dzieli $1 + m\ell p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ dla żadnego indeksu i, to $1 + m\ell p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} = \pm 1$; w przeciwnym razie otrzymalibyśmy sprzeczność z założeniem, że $p_1, p_2, \ldots, p_r$ to wszystkie liczby pierwsze, które mogą dzielić $F(t)$ dla pewniej liczby naturalnej t. Wobec tego

$$F(N + m \cdot p_1^{\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r+1}) = \pm F(N).$$

Stąd z dowolności liczby m wynika, że wielomian F musiałby być stały, jest sprzeczne z założeniem. $\square$

Przypuśćmy, że istnieje taki nierozkładalny wielomian P o współczynnikach całkowitych, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieją liczby całkowite $a, b > 1$ spełniające $P(n) = a^b$. Oczywiście nie może być to wielomian stały. Niech $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Ustalmy liczbę naturalną n;

załóżmy ponadto, że $p \mid P(n)$ dla pewnej liczby pierwszej p. Wtedy też $p^2 \mid P(n)$. Ponadto ze wzoru dwumianowego wynika, że

$$\begin{aligned} P(n+p) &= a_k(n+p)^k + a_{k-1}(n+p)^{k-1} + \ldots + a_1(n+p) + a_0 \equiv a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \\ &= P(n) \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Wobec tego zachodzi również $p^2 \mid P(n+p)$. Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} P(n+p) &= a_k(n+p)^k + a_{k-1}(n+p)^{k-1} + \ldots + a_1(n+p) + a_0 \\ &\equiv p(ka_k n^{k-1} + (k-1)a_{k-1}n^{k-2} + \ldots + 2a_2 n + a_1) + (a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0) \\ &= p \cdot P'(n) + P(n) \equiv p \cdot P'(n) \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Na mocy wcześniej poczynionych obserwacji wnosimy, że $p \mid P'(n)$.

Korzystając z Lematu 1 istnieją takie wielomiany $A(x), B(x)$ o współczynnikach całkowitych oraz taka liczba całkowita c, że $A(x) \cdot P(x) + B(x) \cdot P'(x) = c$. Z powyższych obserwacji wynika, że dla każdej liczby pierwszej p oraz każdej dodatniej liczby całkowitej x takiej, że $p \mid P(x)$, zachodzi $p \mid P'(x)$, więc również $p \mid c$. Z tego i z Lematu 2 wynika, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, które dzielą c, a to jest nieprawdą, gdyż $c \neq 0$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

2. Parami różne liczby rzeczywiste a, b, c są pierwiastkami wielomianu $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ liczba

$$\frac{a^n + b^n + c^n - 4^n - 5^n - 11^n}{17}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie:

Ze wzorów Viète'a wynika, że liczby a, b, c są związane zależnościami

$$a + b + c = 3, \quad ab + bc + ca = 0, \quad abc = -1.$$

Dla $n \geqslant 0$ oznaczmy $s_n = a^n + b^n + c^n$. Zauważmy, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi

$$\begin{aligned} s_n &= a^n + b^n + c^n \\ &= (a+b+c)(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) - (ab+bc+ca)(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) + abc(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3}) \\ &= 3s_{n-1} - s_{n-3} \end{aligned}$$

Oznaczmy $t_n = 4^n + 5^n + 11^n$. Zauważmy, że $x^3 - 3x^2 + 1 \equiv (x-4)(x-5)(x-11) \pmod{17}$, zatem stosując wzory Viète'a (lub bezpośrednio obliczając poniższe liczby), dostajemy

$$4 + 5 + 11 \equiv 3 \pmod{17}, \quad 4 \cdot 5 + 5 \cdot 11 + 11 \cdot 4 \equiv 0 \pmod{17}, \quad 4 \cdot 5 \cdot 11 \equiv -1 \pmod{17},$$

a prowadząc analogiczne rachunki jak wyżej, dostajemy $t_n \equiv 3t_{n-1} - t_{n-3} \pmod{17}$ dla $n \geqslant 3$.

Udowodnimy przez indukcję, że dla każdego $n \geqslant 0$ zachodzi $s_n - t_n \equiv 0 \pmod{17}$, co da tezę.

Dla $n = 0$ i $n = 1$ jest to oczywiste. Dla $n = 2$ mamy

$$\begin{aligned} s_2 - t_2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) - ((4+5+11)^2 - 2 \cdot (4 \cdot 5 + 5 \cdot 11 + 11 \cdot 4)) \\ &\equiv 3^2 - 2 \cdot 0 - (3^2 - 2 \cdot 0) \equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Przypuśćmy teraz, że $n > 2$ oraz że teza indukcyjna zachodzi dla $n-1$ i $n-3$. Otrzymujemy

$$s_n - t_n \equiv 3s_{n-1} - s_{n-3} - (3t_{n-1} - t_{n-3}) = 3(s_{n-1} - t_{n-1}) - (s_{n-3} - t_{n-3}) \equiv 0 \pmod{17},$$

co kończy dowód indukcyjny oraz rozwiązanie zadania.

3. Dana jest liczba całkowita $n > 2018$ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wykazać, że

$$(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Na mocy nierówności $ab \leqslant \frac{1}{4}(a+b)^2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)&\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) \cdot \sqrt{n}\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) + \sqrt{n}\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)x_1 + \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{2}\right)x_2 + \ldots + \left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{n}\right)x_n\right)^2 \\
&= (*).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $1 \leqslant k \leqslant n$ zachodzi nierówność

$$\frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{k} \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Istotnie,

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{k}\right) = \frac{1}{k\sqrt{n}}(k-1)(n-k) \geqslant 0.$$

Wobec tego

$$(*) \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = \frac{(n+1)^2}{4n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,$$

co kończy dowód.

Sposób II

Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ rozważmy trójmiany kwadratowe

$$f_k(t) = \frac{1}{k}t^2 - \frac{n+1}{n}t + \frac{k}{n} = \frac{1}{k}(t-k)\left(t - \frac{k}{n}\right)$$

i przyjmijmy

$$f(t) = x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + \ldots + x_n f_n(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}\right)t^2 - \frac{n+1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)t + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kx_k.$$

Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ liczby $\frac{k}{n}$ i k są pierwiastkami trójmianu f_k, zachodzi nierówność $\frac{k}{n} \leqslant 1 \leqslant k$ oraz współczynnik wiodący f_k jest dodatni. Zatem $f_k(1) \leqslant 0$. Wynika stąd, że

$$f(1) = x_1 f_1(1) + x_2 f_2(1) + \ldots + x_n f_n(1) \leqslant 0.$$

Nierówność ta wraz z obserwacją, że współczynnik wiodący wielomianu kwadratowego f jest dodatni oznacza, że wyróżnik f jest nieujemny. Stąd otrzymujemy

$$\Delta_f = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}\right) \cdot \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} k x_k\right) \geqslant 0,$$

czyli nierówność równoważną tezie.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dżesika i Brajan grają w następującą grę. Przed grą Dżesika wybiera liczbę pierwszą p mniejszą niż 2^n oraz liczbę $r_0 \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Następnie gra odbywa się w rundach. W i-tej rundzie Brajan podaje Dżesice liczbę pierwszą q mniejszą niż 2^n. Jeśli $q = p$, to Brajan wygrywa, a w przeciwnym razie Dżesika oblicza liczbę r_i równą reszcie z dzielenia liczby $q \cdot r_{i-1}$ przez p i mówi Brajanowi, która z liczb r_i oraz r_{i-1} jest większa bądź czy są równe. Wykazać, że Brajan może wygrać grę w co najwyżej $2n+1$ rundach.

Rozwiązanie:

Strategia Brajana będzie następująca: przez $2n$ rund pyta się on Dżesiki o $q = 2$, a następnie w ostatniej rundzie zgaduje liczbę p. Wówczas dla $i = 0, 1, \ldots, 2n$, r_i jest resztą z dzielenia liczby $2^i \cdot r_0$ przez p. Wystarczy wykazać, że para (r_0, p) jest jednoznacznie wyznaczona przez ciąg wyników porównań liczb r_{i-1}, r_i dla $i = 1, \ldots, 2n$, czyli przez informacje znane Brajanowi po $2n$ rundach. Możemy założyć, że $p > 2$, bo w przeciwnym razie Brajan wygrywa już w pierwszej rundzie.

Niech $x = \frac{r_0}{p}$; wówczas $0 \leqslant x < 1$. Ponieważ p nie jest potęgą dwójki, więc zapis dwójkowy liczby x jest jednoznaczny. Niech a_i będzie i-tą cyfrą rozwinięcia dwójkowego liczby x. Wówczas

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \ldots + \frac{a_i}{2^i} + \ldots$$

Zauważmy, że

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \lfloor 2^i x \rfloor \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 1 & \text{gdy } \lfloor 2^i x \rfloor \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

Ustalmy $i \in \{1, \ldots, 2n\}$. Skoro r_{i-1} jest resztą z dzielenia $2^{i-1} \cdot r_0$ przez p, to możemy napisać

$$2^{i-1} \cdot r_0 = k \cdot p + r_{i-1}$$

dla pewnej liczby całkowitej k. Stąd

$$2^i \cdot r_0 = k \cdot 2p + 2r_{i-1},$$

a więc $\lfloor \frac{2^i r_0}{p} \rfloor = 2k + \lfloor \frac{2r_{i-1}}{p} \rfloor$. Skoro $0 \leqslant r_{i-1} < p$ to $0 \leqslant 2r_{i-1} < 2p$, a więc liczba $\lfloor \frac{2^i r_0}{p} \rfloor$ jest parzysta jeśli $2r_{i-1} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ i nieparzysta jeśli $2r_{i-1} \in \{p, p+1, \ldots, 2p-1\}$. Zgodnie z wcześniejszym rozumowaniem mamy $a_i = 0$ w pierwszym przypadku i $a_i = 1$ w drugim.

Skoro r_i jest resztą z dzielenia $2r_{i-1}$ przez p, to $r_i = 2r_{i-1}$ jeśli $2r_{i-1} < p$ oraz $r_i = 2r_{i-1} - p$ jeśli $2r_{i-1} \geqslant p$. W pierwszym przypadku mamy

$$r_i = 2r_{i-1} \geqslant r_{i-1},$$

zaś w drugim mamy

$$r_i = 2r_{i-1} - p < r_{i-1},$$

gdyż $r_{i-1} < p$. Zatem na podstawie wyniku porównania r_{i-1} i r_i Brajan może stwierdzić, czy liczba $2r_{i-1}$ jest mniejsza niż p czy nie, a więc również wywnioskować wartość a_i.

Jak dowiedliśmy powyżej, na podstawie informacji uzyskanych od Dżesiki w pierwszych $2n$ rundach gry Brajan może jednoznacznie wyznaczyć pierwsze $2n$ cyfr po przecinku w rozwinięciu dwójkowym liczby $x = \frac{r_0}{p}$. Wystarczy więc wykazać, że te $2n$ cyfr jednoznacznie wyznacza parę (r_0, p). Jeśli dla dwóch różnych par (r_0, p) i (r'_0, p') mielibyśmy ten sam ciąg cyfr, to

$$\left|\frac{r_0}{p} - \frac{r'_0}{p'}\right| < \frac{1}{2^{2n}}.$$

Zauważmy jednak, że

$$\left|\frac{r_0}{p} - \frac{r'_0}{p'}\right| = \frac{|r_0p' - r'_0p|}{pp'} > \frac{1}{2^{2n}},$$

gdyż $r_0p' - r'_0p$ jest liczbą całkowitą różną od 0 oraz $p, p' < 2^n$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

5. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n > 1$, że istnieją dodatnie liczby całkowite b_1, b_2, ..., b_n, nie wszystkie równe, o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej k liczba

$$(b_1 + k)(b_2 + k)\ldots(b_n + k)$$

jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku całkowitym nie mniejszym niż 2.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Szukane liczby to liczby złożone.

Wykażemy wpierw, że każda liczba złożona n ma zadaną własność. Niech $n = st$ dla pewnych liczb całkowitych $s, t > 1$. Wystarczy teraz, że liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$ podzielimy na t grup po s liczb w każdej: $(b_{si+1}, b_{si+2}, \ldots, b_{si+s})$ dla $i = 0, 1, \ldots, t-1$. Liczby wewnątrz i-tej grupy będą równe $i+1$. Wówczas

$$(b_1 + k)(b_2 + k)\ldots(b_n + k) = (1+k)^s(2+k)^s\ldots(t+k)^s = ((1+k)(2+k)\ldots(t+k))^s,$$

czyli dla każdego k nasza liczba będzie s-tą potęgą liczby całkowitej dodatniej.

Wykażemy teraz, że gdy liczba n jest pierwsza, to istnieje takie k, że wyrażenie z zadania nie jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku nie mniejszym od 2. Niech $\{d_1, d_2, \ldots, d_l\}$ będzie zbiorem różnych liczb występujących w zbiorze $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Niech ponadto liczba d_i występuje w tym zbiorze z krotnością α_i dla $i = 1, 2, \ldots, l$. Wówczas $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l = n$, ponadto $\mathrm{NWD}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) = 1$, ponieważ n jest liczbą pierwszą. Rozważmy teraz l liczb pierwszych większych niż jakakolwiek różnica $b_i - b_j$: $p_1, p_2, \ldots, p_l$. Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że istnieje dodatnia liczba całkowita k spełniająca układ kongruencji:

$$\begin{aligned}
k &\equiv -d_1 + p_1 \pmod{p_1^2}\\
k &\equiv -d_2 + p_2 \pmod{p_2^2}\\
&\ldots\\
k &\equiv -d_l + p_l \pmod{p_l^2}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wówczas liczba $P = (b_1+k)(b_2+k)\ldots(b_n+k) > 1$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, l$ jest podzielna przez p_i w dokładnie α_i-tej potędze. Istotnie, jeśli $b_j \neq d_i$ to liczba $b_j + k$ nie jest podzielna przez p_i, gdyż w przeciwnym razie liczba p_i dzieliłaby liczbę $|(b_j + k) - (d_i + k)| = |b_j - d_i|$, która jest mniejsza niż p_i. Natomiast gdy $b_j = d_i$ to liczba $b_j + k$ jest podzielna przez p_i, ale nie przez p_i^2, a takich b_j jest dokładnie α_i. Wobec tego liczba p_i wchodzi do rozkładu liczby P na czynniki pierwsze z wykładnikiem α_i. Jeśli więc $P = a^b$ dla pewnych liczb całkowitych $a, b > 1$, to $b \mid \alpha_i$, skąd $b \mid \mathrm{NWD}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) = 1$, co daje sprzeczność.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Zbiór wszystkich funkcji $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, 2n\}$ oznaczmy przez $\mathcal{L}$. *Wagą* zbioru $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ względem funkcji $f \in \mathcal{L}$ nazwiemy liczbę $\sum_{i \in A} f(i)$. Dla niepustej rodziny $\mathcal{F}$ składającej się z podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ powiemy, że funkcja $f \in \mathcal{L}$ *izoluje* $\mathcal{F}$, jeśli wśród zbiorów z $\mathcal{F}$ istnieje dokładnie jeden o najmniejszej wadze względem f. Wykazać, że każda niepusta rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ jest izolowana przez co najmniej połowę funkcji z $\mathcal{L}$.

Rozwiązanie:

Ustalmy niepustą rodzinę $\mathcal{F}$ składającą się z podzbiorów zbioru $\{1,\ldots,n\}$. Powiemy, że liczba $i \in \{1,\ldots,n\}$ jest *ekstremalna* dla funkcji $f \in \mathcal{L}$ jeśli

$$\min\{f(X)\colon X \in \mathcal{F}, i \in X\} = \min\{f(X)\colon X \in \mathcal{F}, i \notin X\}, \tag{10}$$

gdzie $f(X)$ oznacza wagę zbioru X względem f.

Twierdzimy, że każda liczba $i \in \{1,\ldots,n\}$ jest ekstremalna dla co najwyżej $\frac{|\mathcal{L}|}{2n}$ funkcji z $\mathcal{L}$. Pogrupujmy funkcje z $\mathcal{L}$ względem wartości na argumentach poza i: dwie funkcje $f,g \in \mathcal{L}$ są w tej samej grupie wtedy i tylko wtedy gdy $f(j) = g(j)$ dla wszystkich $j \neq i$. W każdej grupie mamy $2n$ funkcji różniących się jedynie wartością na argumencie i. Zauważmy, że rozpatrując funkcje f z ustalonej grupy, lewe strona równości (10) są parami różne, a prawe są takie same. Oznacza to, że równość (10) może być spełniona dla co najwyżej jednej funkcji z każdej grupy, a więc takich funkcji jest co najwyżej $\frac{|\mathcal{L}|}{2n}$.

Teraz zauważmy, że jeśli rodzina $\mathcal{F}$ nie jest izolowana przez funkcję $f \in \mathcal{L}$, to istnieje co najmniej jedna liczba $i \in \{1,\ldots,n\}$, która jest ekstremalna dla f. Istotnie, jeśli dwa różne zbiory $X, Y \in \mathcal{F}$ mają najmniejszą wagę względem f spośród wszystkich zbiorów z $\mathcal{F}$, to każdy element różnicy symetrycznej zbiorów X i Y jest ekstremalny dla f.

Pozostaje zauważyć, że na mocy pierwszej obserwacji istnieje co najwyżej $n \cdot \frac{|\mathcal{L}|}{2n} = \frac{|\mathcal{L}|}{2}$ funkcji z $\mathcal{L}$ posiadających jakąkolwiek liczbę ekstremalną, a na mocy drugiej każda funkcja $f \in \mathcal{L}$ nieizolująca $\mathcal{F}$ posiada liczbę ekstremalną. A zatem co najmniej $\frac{|\mathcal{L}|}{2}$ funkcji z $\mathcal{L}$ izoluje $\mathcal{F}$.

7. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 2$ istnieje graf prosty G, w którym każdy wierzchołek ma stopień nie większy od k, nie istnieje cykl krótszy niż k oraz stosunek liczby krawędzi do liczby wierzchołków wynosi co najmniej $\frac{k}{2018}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy wpierw, że jeśli w grafie G stopień każdego wierzchołka jest nie większy niż k, to dla każdego wierzchołka u istnieje co najwyżej

$$1 + k + k(k-1) + k(k-1)^2 + \ldots + k(k-1)^{k-1}$$

wierzchołków leżących w odległości co najwyżej k od u. Istotnie, ścieżkę długości $i \geqslant 1$ zaczynającą się w u możemy wybrać na co najwyżej $k(k-1)^{i-1}$ sposobów, co daje oszacowania na liczbę wierzchołków leżących w odległościach $0,1,2,\ldots,k$ od u odpowiadające składnikom powyższej sumy. Oznaczmy tę sumę przez K.

Spośród prostych grafów o $2K$ wierzchołkach, maksymalnym stopniu co najwyżej k i nieposiadających cykli krótszych niż k wybierzmy taki graf G, który ma najwięcej krawędzi. Twierdzimy, że co najmniej K wierzchołków G ma stopień dokładnie k. Istotnie, w przeciwnym razie dobralibyśmy dowolny wierzchołek u o stopniu mniejszym niż k i, wykluczywszy co najwyżej K wierzchołków leżących w odległości co najwyżej k od u, moglibyśmy znaleźć wierzchołek v o stopniu mniejszym niż k leżący w odległości większej niż k od u. Wówczas dodanie krawędzi uv do G ani nie spowodowałoby przekroczenia ograniczenia k na stopnie wierzchołków, ani nie sprawiłoby, że w G pojawiłby się cykl długości krótszej niż k. Jest to sprzeczność z wyborem grafu G.

Skoro więc w grafie G jest co najmniej K wierzchołków o stopniu równym k, to liczba krawędzi G wynosi co najmniej $\frac{Kk}{2}$. Wierzchołków w G jest $2K$, więc stosunek liczby krawędzi do liczby wierzchołków wynosi co najmniej $\frac{k}{4}$.

8. Na przyjęciu spotkało się $n \geqslant 2$ gości, z których niektórzy się znają. Okazało się, że nie dało się znaleźć takiej czwórki gości a,b,c,d, że pary gości (a,b), (b,c) oraz (c,d) się znają, ale pary gości (a,c), (a,d) oraz (b,d) się nie znają. Wykazać, że gości na przyjęciu da się podzielić na takie dwa niepuste podzbiory A i B, że albo każdy gość ze zbioru A zna każdego gościa ze zbioru B, albo żaden gość ze zbioru A nie zna żadnego gościa ze zbioru B.

Rozwiązanie:

Rozważmy graf G, którego wierzchołki to goście na przyjęciu, a krawędzie odpowiadają parom znających się gości. Przez V, E będziemy oznaczać odpowiednio zbiór wierzchołków i zbiór krawędzi grafu G. Jeśli czwórka wierzchołków a, b, c, d jest taka, że ab, bc, cd są krawędziami a ac, bd, ad nie są, to powiemy, że a, b, c, d *indukują* P_4; a więc założenie zadania mówi, że żadna czwórka wierzchołków nie indukuje P_4. Powiemy, że dwa rozłączne podzbiory wierzchołków A, B są do siebie *pełne* jeśli każdy wierzchołek z A jest połączony krawędzią z każdym wierzchołkiem z B. Teza zadania sprowadza się do wykazania, że albo graf G jest niespójny, albo w G istnieje niepusty podzbiór właściwy wierzchołków, który jest pełny do swojego dopełnienia, tzn. do zbioru pozostałych wierzchołków w G. Przyjmując, że G jest spójny, udowodnimy istnienie takiego podzbioru.

Sposób I

Wpierw zauważmy następujące spostrzeżenie.

Spostrzeżenie 1. *Każde dwa wierzchołki G sąsiadują lub mają wspólnego sąsiada.*

Dowód. Niech Q będzie najkrótszą ścieżką łączącą wierzchołki u i v. Gdyby u, v nie sąsiadowały i nie miały wspólnego sąsiada, to Q miałaby długość co najmniej 3. Wówczas dowolne cztery kolejne wierzchołki Q indukowałyby P_4, sprzeczność. $\square$

Jeśli każde dwa wierzchołki G są połączone krawędzią, to teza zachodzi trywialnie. Przypuśćmy więc, że istnieją wierzchołki u, v niepołączone krawędzią. Podzielmy $V \setminus \{u, v\}$ na zbiory A, B, C, D następująco:

- A obejmuje wierzchołki niesąsiadujące ani z u ani z v;
- B obejmuje wierzchołki sąsiadujące z u ale nie z v;
- C obejmuje wierzchołki sąsiadujące z v ale nie z u;
- D obejmuje wierzchołki sąsiadujące zarówno z u jak i z v.

Na mocy Spostrzeżenia 1 zbiór D jest niepusty. W następującym ciągu spostrzeżeń przedstawiamy kolejne własności strukturalne zbiorów A, B, C, D.

Spostrzeżenie 2. *Zbiory D i $B \cup C$ są do siebie pełne.*

Dowód. Przypuśćmy, że pewien wierzchołek $b \in B$ nie sąsiaduje z pewnym wierzchołkiem $d \in D$. Wówczas wierzchołki b, u, d, v indukują P_4, sprzeczność. Dla wierzchołków z C rozumowanie jest analogiczne. $\square$

Jeśli A jest pusty, to wówczas $B \cup C \cup \{u, v\} = V \setminus D$, czyli D i $V \setminus D$ są do siebie pełne. Przyjmijmy zatem, że $A \neq \emptyset$.

Spostrzeżenie 3. *Każdy wierzchołek ze zbioru A ma sąsiada w zbiorze D.*

Dowód. Przypuśćmy, że pewien wierzchołek $a \in A$ nie ma żadnego sąsiada w zbiorze D. Na mocy Spostrzeżenia 1 wierzchołki a i u mają wspólnego sąsiada b, który w związku z powyższym musi należeć do B (nie może należeć do C, gdyż wierzchołki z C nie sąsiadują z u). Wówczas na mocy Spostrzeżenia 2 mamy $bd \in E$, gdzie d jest dowolnym wierzchołkiem należącym do D, a więc wierzchołki a, b, d, v indukują P_4, sprzeczność. $\square$

Dla wierzchołka $a \in A$, niech D_a będzie zbiorem sąsiadów wierzchołka a w D. Na mocy Spostrzeżenia 3, każdy zbiór D_a jest niepusty.

Spostrzeżenie 4. *Dla każdego wierzchołka $a \in A$, zbiory D_a i $D \setminus D_a$ są do siebie pełne.*

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją takie wierzchołki $d, d' \in D$, że $ad \in E$, $ad' \notin E$ oraz $dd' \notin E$. Wówczas wierzchołki a, d, u, d' indukują P_4, sprzeczność. □

Spostrzeżenie 5. *Dla każdej pary wierzchołków $a, a' \in A$ mamy $D_a \subseteq D_{a'}$ lub $D_a \supseteq D_{a'}$.*

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją takie wierzchołki $d, d' \in D$, że $ad \in E$, $a'd' \in E$, $ad' \notin E$ oraz $a'd \notin E$. Na mocy Spostrzeżenia 4 wnioskujemy, że $dd' \in E$. Stąd wniosek, że również $aa' \in E$, gdyż w przeciwnym razie wierzchołki a, d, d', a' indukowałyby P_4. Ale teraz wierzchołki a, a', d', u indukują P_4, sprzeczność. □

Na mocy Spostrzeżenia 5 możemy uporządkować wierzchołki $a \in A$ liniowo względem zawierania się zbiorów D_a. Stąd wniosek, że istnieje taki wierzchołek $a^\star \in A$, że $D_{a^\star} \subseteq D_a$ dla wszystkich $a \in A$. Oznaczmy $X = D_{a^\star}$; na mocy Spostrzeżenia 3 zbiór X jest niepusty. Skoro $X \subseteq D_a$ dla wszystkich $a \in A$, to X jest pełny do A. Stosując Spostrzeżenie 4 do $a^\star$, wnioskujemy, że X jest pełny do $D \setminus X$. Spostrzeżenie 2 implikuje, że X jest pełny do $B \cup C$. Wreszcie $X \subseteq D$ pociąga za sobą, że X jest pełny do $\{u, v\}$. Składając ze sobą wszystkie te obserwacje wnioskujemy, że X jest pełny do $V \setminus X$ oraz $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V$, co kończy dowód.

Sposób II

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 2$ teza jest oczywista. Dalej załóżmy, że $n > 2$ i teza zadania zachodzi dla wszystkich $k < n$.

Na początek użyjemy następującego lematu:

Lemat 1. *W każdym spójnym grafie H istnieje wierzchołek v, dla którego graf H z usuniętym wierzchołkiem v jest dalej spójny.*

Dowód. Wystarczy usunąć dowolny wierzchołek będący liściem w dowolnym drzewie rozpinającym H. □

Z powyższego lematu wiemy, że istnieje wierzchołek $v \in V$ taki, że graf G z usuniętym wierzchołkiem v jest spójny. Zatem z założenia indukcyjnego możemy podzielić zbiór $V \setminus \{v\}$ na dwa rozłączne zbiory A i B, które są do siebie pełne.

Jeżeli z v wychodzą krawędzie do wszystkich wierzchołków ze zbioru A, to wtedy zbiory A oraz $V \setminus A$ są do siebie pełne, analogicznie dla zbioru B. Dalej zakładamy, że istnieją wierzchołki $v_A \in A$ oraz $v_B \in B$ takie, $vv_A \notin E$, $vv_B \notin E$.

Niech C będzie zbiorem tych wierzchołków z V, które są połączone krawędzią z v. Udowodnimy, że C oraz $V \setminus C$ są do siebie pełne. Załóżmy nie wprost, że istnieją $u \in C, w \in V \setminus C$ takie, że $uw \notin E$. Oczywiście $v \neq u, w$ oraz obydwa wierzchołki u, w należą do dokładnie jednego spośród zbiorów A i B. Bez straty ogólności załóżmy że $u, w \in A$. Wówczas vu, uv_B, $v_B w \in E$ oraz vw, vv_B, $uw \notin E$, więc v, u, w, v_B indukują P_4, sprzeczność.

9. Okrąg ω o środku w punkcie O jest wpisany w czworokąt $ABCD$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, punkt K jest punktem przecięcia odcinków AC i BD, a punkt L jest punktem przecięcia okręgu ω z półprostą $\overrightarrow{KI}$. Wykazać, że proste LO i AC są prostopadłe.

Rozwiązanie:

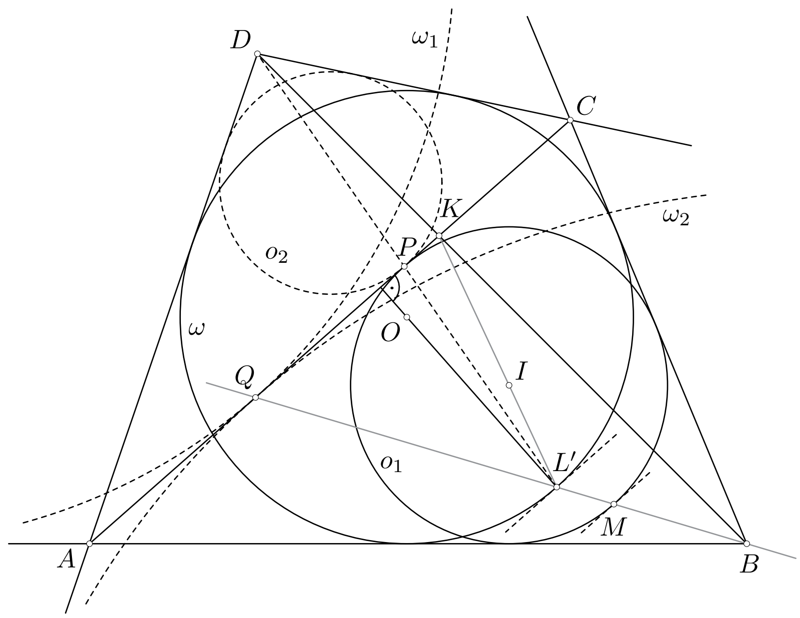
Jeśli $AB = BC$, to czworokąt $ABCD$ jest deltoidem, a teza zadania oczywista ze względu na symetrię rysunku. W dalszej części rozwiązania zakładamy, że $AB \neq BC$.

Niech L' będzie takim punktem na okręgu ω, że $OL' \perp AC$ i punkt L' leży wewnątrz trójkąta ABC. Wykażemy, że punkty L', I, K leżą na jednej prostej.

Niech o_1 i o_2 będą okręgami wpisanymi odpowiednio w trójkąty ABC i ACD. Skoro w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, to $AB + CD = BC + AD$ i z prostego rachunku na odcinkach stycznych wynika, że okręgi o_1 i o_2 są styczne do boku AC w tym samym punkcie, który oznaczmy przez P. Skoro

$L'O \perp AC$, to styczna do okręgu ω w punkcie L' jest równoległa do AC. Wobec tego jednokładność o środku D przekształcająca okrąg o_2 na ω przekształca punkt P na L', czyli punkty D, P, L' są współliniowe.

Niech M będzie punktem styczności okręgu o_1 ze styczną równoległą do AC i różną od AC. Niech Q będzie punktem symetrycznym do punktu P względem środka odcinka AC. Punkt Q jest punktem styczności okręgu ω_1 dopisanego do trójkąta ABC, a skoro okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD były styczne do AC w punkcie P, to Q jest też punktem styczności okręgu ω_2 dopisanego do trójkąta ACD. Jednokładność o środku B przekształcająca okrąg o_1 na ω przekształca punkt M na L', a jednokładność o tym samym środku przekształcająca okrąg o_1 na ω_1 przekształca punkt M na Q. W takim razie punkty B, M, L', Q leżą na jednej prostej.



Niech O_2 będzie środkiem okręgu ω_2. Udowodnimy, że punkty L' i K są odpowiednio środkami jednokładności o skali ujemnej i skali dodatniej przekształcającej okrąg o_1 na ω_2, skąd natychmiast wyniknie współliniowość punktów O_2, L', I, K, co da nam tezę zadania.

Jednokładność J_1 o skali ujemnej przekształcająca okrąg o_1 na ω_2 jest złożeniem jednokładności o środku P i skali ujemnej przekształcającej okrąg o_1 na o_2 oraz jednokładności o środku D i skali dodatniej przekształcającej okrąg o_2 na okrąg ω_2. Zatem z twierdzenia o złożeniu jednokładności środek jednokładności J_1 leży na prostej PD. Z drugiej strony jednokładność J_1 jest złożeniem jednokładności o środku B i skali dodatniej przekształcającej okrąg o_1 na ω_1 z jednokładnością o środku Q i skali ujemnej przekształcającą okrąg ω_1 na ω_2. Z twierdzenia o złożeniu jednokładności środek jednokładności J_1 leży zatem na prostej BQ. Wobec tego jest on punktem przecięcia prostych PD i BQ, czyli jest to punkt L'.

Środek jednokładności J_2 o skali dodatniej przekształcającej okrąg o_1 na ω_2 leży na ich wspólnej stycznej AC. Z drugiej strony jednokładność J_2 jest złożeniem jednokładności o środku B i skali dodatniej przekształcającej okrąg o_1 na ω z jednokładnością o środku D i skali dodatniej przekształcającej okrąg ω na ω_2. Z twierdzenia o złożeniu jednokładności środek jednokładności J_2 leży więc na prostej BD. Zatem środkiem jednokładności J_2 jest punkt przecięcia prostych AC i BD, czyli punkt K. To kończy rozwiązanie zadania.

10. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC. Niech ω będzie okręgiem stycznym do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F, nieprzecinającym prostej BC. Z punktu M poprowadzono proste styczne do okręgu ω w punktach P i Q, przy czym punkty B i P leżą po tej samej stronie prostej AM. Prosta PM przecina prostą BF w punkcie X. Prosta QM przecina prostą CE w punkcie Y. Wykazać, że jeśli $2PM = BC$, to prosta XY jest styczna do okręgu ω.

Rozwiązanie:

Sposób I

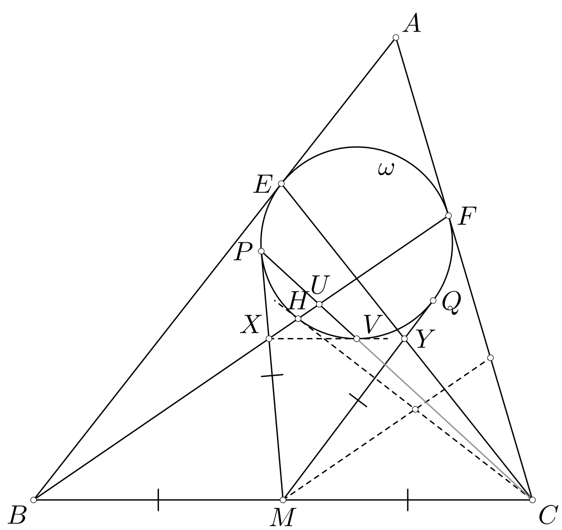
Wykażemy, że styczna do okręgu ω poprowadzona z punktu X, różna od prostej XP, jest równoległa do prostej BC. Analogicznie można udowodnić, że styczna do okręgu ω poprowadzona z punktu Y oraz różna od prostej YQ jest równoległa do prostej BC. To zaś będzie oznaczało, że prosta XY jest w istocie styczną do okręgu ω.

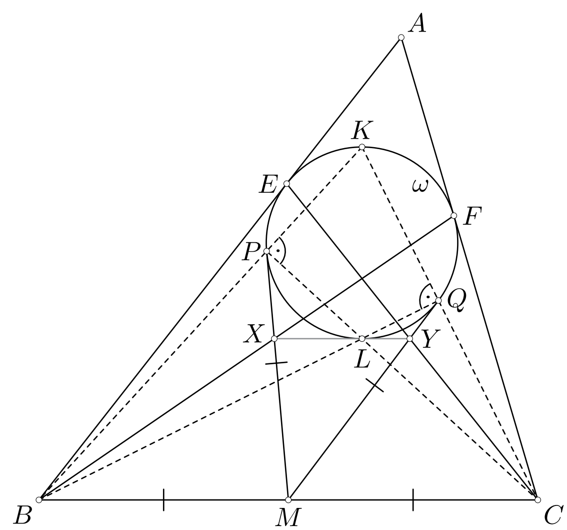
Niech H będzie takim punktem na okręgu ω, różnym od F, że prosta CH jest styczna do ω. Rozpoczniemy od wykazania współliniowości punktów $B,\ H,\ F$.

Z założeń zadania wynika, że punkt M leży na osi potęgowej punktu C oraz okręgu ω, na której leżą również środki odcinków CH i CF. Jednokładność o skali 2 i środku C przeprowadza te środki odpowiednio na punkty H i F, zaś punkt M na punkt B. Stąd uzyskujemy współliniowość punktów $B,\ H,\ F$.

Niech V będzie takim punktem na okręgu ω, różnym od P, że prosta XV jest styczna do ω oraz niech U będzie punktem wspólnym prostych BF i PV. Ponieważ X leży na prostej FH, która jest biegunową punktu C względem okręgu ω, to C leży na biegunowej punktu X, którą jest prosta PV. Oprócz tego U leży na biegunowej FH punktu C, a więc ze znanego faktu o biegunowych otrzymujemy $(C, U; V, P) = -1$.

W celu zakończenia dowodu, załóżmy nie wprost, że $XV \nparallel BC$ i niech R będzie punktem wspólnym prostych XV i BC. Wtedy rzutując perspektywicznie prostą PV na prostą BC przez punkt X otrzymujemy $(C, B; R, M) = (C, U; V, P) = -1$, zaś to jest niemożliwe dla każdego punktu R należącego do prostej BC. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.





Sposób II

Oznaczmy przez K punkt przecięcia prostych BP i CQ oraz przez L punkt przecięcia prostych BQ i CP. Zauważmy, że

$$\sphericalangle BKC = 180^\circ - \sphericalangle PBC - \sphericalangle QCB = \tfrac{1}{2}(360^\circ - \sphericalangle PBM - \sphericalangle BPM - \sphericalangle QCM - \sphericalangle CQM) = \sphericalangle MPQ = \sphericalangle MQP,$$

więc okrąg opisany na trójkącie PQK jest styczny do prostych MP i MQ w punktach P i Q, czyli jest tożsamy z ω.

Ponadto $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC = 90^\circ$, gdyż P i Q leżą na okręgu o średnicy BC. Zatem punkt L jako ortocentrum trójkąta BCK leży na okręgu ω.

Do wykazania tezy zadania wystarczy udowodnić, że prosta XY jest biegunową punktu L względem ω, bo wtedy udowodnimy, że XY jest styczna do ω w L. Wykażemy, że Y leży na biegunowej L, dowód dla punktu X jest analogiczny. Najpierw zauważmy ze znanego faktu o biegunowych, że punkt C leży na biegunowej punktu B, ponieważ B jest przecięciem prostych PK i QL, zaś C jest przecięciem PL i QK.

W oczywisty sposób punkt E leży na biegunowej punktu B, więc prosta CE jest biegunową punktu B. Zatem punkt Y leży na biegunowych punktów B i Q, czyli BQ jest biegunową punktu Y, stąd L leży na biegunowej Y i ostatecznie Y leży na biegunowej L.

11. Dany jest ostrosłup prawidłowy o podstawie wielokąta foremnego $A_1A_2\ldots A_{2n}$ i wierzchołku S. Pewna sfera przechodząca przez punkt S przecina każdą z krawędzi A_iS w punkcie B_i. Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^{n} SB_{2i} = \sum_{i=1}^{n} SB_{2i-1}.$$

Rozwiązanie:

Poprowadźmy płaszczyznę równoległą do podstawy ostrosłupa, styczną do danej sfery w punkcie O i przecinającą każdą z krawędzi A_iS w punkcie C_i. Oczywiście ostrosłup $C_1C_2\ldots C_{2n}S$ także jest prawidłowy. Zapisując potęgę punktu dla każdego z punktów C_i otrzymujemy

$$C_iO^2 = C_iS \cdot C_iB_i = C_iS(C_iS - SB_i) = C_iS^2 - C_iS \cdot SB_i.$$

Ponieważ wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa $C_1C_2\ldots C_{2n}S$ są równe, to rozwiązanie sprowadza się do wykazania równości

$$\sum_{i=1}^{n} C_{2i-1}O^2 = \sum_{i=1}^{n} C_{2i}O^2.$$

Umieśćmy w wierzchołkach wielokąta $C_1C_2\ldots C_{2n}$ masy jednostkowe. Zauważmy, że środek ciężkości układu u_1 złożonego z wierzchołków o indeksach nieparzystych oraz środek ciężkości układu u_2 złożonego z wierzchołków o indeksach parzystych znajduje się w środku X danego $2n$-kąta foremnego. Lewa strona powyższej równości to moment bezwładności układu u_1, a prawa to moment bezwładności układu u_2. Z twierdzenia Steinera otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} C_{2i-1}O^2 = \sum_{i=1}^{n} C_{2i-1}X^2 + nXO^2 = \sum_{i=1}^{n} C_{2i}X^2 + nXO^2 = \sum_{i=1}^{n} C_{2i}O^2.$$

Drugi Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste k, że dla dowolnej czwórki liczb rzeczywistych $a, b, c, d \in \langle -1, \infty)$ zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 1 \geqslant k(a + b + c + d).$$

Rozwiązanie:

Podstawiając $a = b = c = d = -1$, mamy $-4 + 1 \geqslant -4k$, skąd $k \geqslant \frac{3}{4}$. Biorąc zaś $a = b = c = d = \frac{1}{2}$, otrzymujemy $\frac{1}{2} + 1 \geqslant 2k$, czyli $k \leqslant \frac{3}{4}$. Jedyną możliwą wartością k może być więc $\frac{3}{4}$. Wykażemy, że dla takiego k dana w treści zadania nierówność jest prawdziwa.

Dla $x \geqslant -1$ mamy

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x + 1) \geqslant 0, \quad \text{czyli} \quad x^3 \geqslant \frac{3x - 1}{4}.$$

Sumując ostatnią nierówność dla x równego a, b, c, d, otrzymujemy

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant \frac{3}{4}(a + b + c + d) - 1,$$

co dowodzi postulowanej nierówności dla $k = \frac{3}{4}$.

2. Wykazać, że iloczyn wszystkich 2^{2018} liczb postaci $\pm 1 \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{2018}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Rozważmy ciąg wielomianów

$$P_1(x) = x, \quad P_k(x) = P_{k-1}\left(x - \sqrt{k}\right) \cdot P_{k-1}\left(x + \sqrt{k}\right) \quad \text{dla } k \geqslant 2.$$

Zauważmy, że

$$P_2(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = x^2 - 2,$$

a więc P_2 jest funkcją parzystą. Załóżmy, że P_{k-1} jest funkcją parzystą. Wtedy

$$P_k(-x) = P_{k-1}\left(-x - \sqrt{k}\right) \cdot P_{k-1}\left(-x + \sqrt{k}\right) = P_{k-1}\left(x + \sqrt{k}\right) \cdot P_{k-1}\left(x - \sqrt{k}\right) = P_k(x),$$

wobec czego P_k również jest funkcją parzystą. Wykazaliśmy więc, że dla $k \geqslant 2$ funkcja P_k jest parzysta.

Udowodnijmy teraz, że wielomiany P_k mają współczynniki całkowite dla $k \geqslant 1$. Dla $k = 1$ jest to oczywiste. Załóżmy, ze wielomian P_{k-1} ma współczynniki całkowite. Wtedy

$$P_{k-1}\left(x + \sqrt{k}\right) = A_{k-1}(x) + B_{k-1}(x)\sqrt{k}$$

dla pewnych wielomianów A_{k-1}, B_{k-1} o współczynnikach całkowitych. Łatwo zauważyć, że wówczas

$$P_{k-1}\left(x - \sqrt{k}\right) = A_{k-1}(x) - B_{k-1}(x)\sqrt{k},$$

wobec czego

$$\begin{aligned} P_k(x) &= P_{k-1}\left(x - \sqrt{k}\right) \cdot P_{k-1}\left(x + \sqrt{k}\right) = \left(A_{k-1}(x) - B_{k-1}(x)\sqrt{k}\right) \cdot \left(A_{k-1}(x) + B_{k-1}(x)\sqrt{k}\right) \\ &= \left(A_{k-1}(x)\right)^2 - \left(B_{k-1}(x)\right)^2 \cdot k, \end{aligned}$$

czyli istotnie wielomian P_k ma współczynniki całkowite.

Pozostało zauważyć, że $P_k(1)P_k(-1)$ jest iloczynem 2^k czynników postaci $\pm 1 \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{k}$. Istotnie,

$$\begin{aligned}
P_k(1)P_k(-1) &= P_{k-1}\left(1-\sqrt{k}\right)P_{k-1}\left(1+\sqrt{k}\right)P_{k-1}\left(-1-\sqrt{k}\right)P_{k-1}\left(-1+\sqrt{k}\right) = \ldots \\
&= \prod_{\boldsymbol{\varepsilon}\in E_i} P_i\left(1+\varepsilon_k\sqrt{k}+\varepsilon_{k-1}\sqrt{k-1}+\ldots+\varepsilon_{i+1}\sqrt{i+1}\right)\cdot P_i\left(-1+\varepsilon_k\sqrt{k}+\varepsilon_{k-1}\sqrt{k-1}+\ldots+\varepsilon_{i+1}\sqrt{i+1}\right) \\
&= \ldots = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon}\in E_1} P_1\left(1+\varepsilon_k\sqrt{k}+\varepsilon_{k-1}\sqrt{k-1}+\ldots+\varepsilon_2\sqrt{2}\right)\cdot P_1\left(-1+\varepsilon_k\sqrt{k}+\varepsilon_{k-1}\sqrt{k-1}+\ldots+\varepsilon_2\sqrt{2}\right) \\
&= \prod_{\boldsymbol{\varepsilon}\in E_0}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\sqrt{i},
\end{aligned}$$

gdzie $E_i = \{\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_j)_{j=i+1}^k : \varepsilon_j \in \{-1,1\}\}$. W szczególności dla $k = 2018$ otrzymujemy, że iloczyn z zadania jest równy $P_{2018}(1)\cdot P_{2018}(-1) = (P_{2018}(1))^2$ na mocy parzystości funkcji P_{2018}. Ponieważ wielomian P_{2018} ma współczynniki całkowite, więc wartość ta jest jest kwadratem liczby całkowitej.

3. Liczby całkowite $a > b > 1$ oraz $n \geqslant 1$ są takie, że liczba b jest nieparzysta oraz liczba b^n jest dzielnikiem liczby $a^n - 1$. Udowodnić, że

$$a^b > \frac{3^n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Dla liczby pierwszej p i liczby całkowitej x, oznaczmy przez $v_p(x)$ wykładnik, z którym p wchodzi w rozkład x na czynniki pierwsze. W rozwiązaniu wykorzystamy następujący

Lemat 1 (LTE). *Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą, a i b zaś — liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez p, spełniającymi warunek $p \mid a-b$. Wówczas, dla dowolnego wykładnika n prawdziwa jest równość*

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n). \tag{11}$$

Dowód. Zauważmy wpierw, że jeśli n nie jest podzielne przez p, to (ponieważ $a \equiv b$)

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} \equiv na^{n-1} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

zatem, w tym przypadku,

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(a^{n-1} + \ldots + b^{n-1}) = v_p(a-b) + 0 = v_p(a-b) + v_p(n).$$

Wystarczy jeszcze wykazać, że $v_p(a^p - b^p) = v_p(a-b) + 1$. Równość (11) wyniknie wtedy z prostej indukcji po $v_p(n)$. Równoważnie wykażemy, że suma $a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + ab^{p-2} + b^{p-1}$ dzieli się przez p, ale nie przez p^2.

Podzielność przez p wynika z obserwacji, że każdy składnik sumy przystaje do $a^{p-1} \pmod{p}$, więc cała suma przystaje do $pa^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$.

Niech $a = b + kp$ dla pewnej liczby całkowitej k. Pozostaje zauważyć, że

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i} &\equiv \sum_{i=0}^{p-1}(b+kp)^i b^{p-1-i} \equiv \sum_{i=0}^{p-1}(b^i + ib^{i-1}kp)b^{p-1-i} \equiv pb^{p-1} + kpb^{p-2}\sum_{i=0}^{p-1} i \\
&\equiv pb^{p-1} + kpb^{p-2}\cdot\frac{(p-1)p}{2} \equiv pb^{p-1} + kp^2b^{p-2}\cdot\frac{p-1}{2} \equiv pb^{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Wykażemy mocniejszą nierówność, mianowicie, że dla dowolnego dzielnika pierwszego p liczby b

$$a^p > \frac{p^n}{n}. \tag{12}$$

Niech r będzie rzędem a modulo p. Wiemy, że $r \mid p-1$ (więc, w szczególności, $r \leqslant p-1$), oraz, że $r \mid n$. Korzystając z LTE dla a^r i 1 oraz oczywistej nierówności $v_p(x) \leqslant \log_p(x)$, możemy zapisać

$$n \leqslant v_p(a^n - 1) = v_p(a^r - 1) + v_p\left(\frac{n}{r}\right) \leqslant \log_p(a^r - 1) + \log_p\left(\frac{n}{r}\right) < p\log_p(a) + \log_p(n).$$

Nierówność $n < p\log_p(a) + \log_p(n)$ możemy zapisać równoważnie jako $\log_p(p^n) < \log_p(na^p)$, co w połączeniu z monotonicznością funkcji $\log_p$ dowodzi nierówności (12), a w konsekwencji tezy zadania.

4. Ciąg (x_n) jest określony przez warunki: $x_1 = 1$, $x_2 = 6$ oraz $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, q zaś dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby x_p. Wykazać, że jeśli $q > 3$, to $q \geqslant 2p - 1$.

Rozwiązanie:
W rozwiązaniu będziemy opierać się na łatwym do sprawdzenia wzorze jawnym na ciąg (x_n):

$$x_n = \frac{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n}{4\sqrt{2}}.$$

Niech q i p będą jak w treści zadania. Załóżmy najpierw, że 2 jest resztą kwadratową modulo q, to jest istnieje takie j, że $j^2 \equiv 2 \pmod{q}$. Można wtedy łatwo indukcyjnie wykazać, że

$$x_n \equiv \left((3+2j)^n - (3-2j)^n\right)(4j)^{-1} \pmod{q}.$$

Podzielność $q \mid x_p$ implikuje zatem, że

$$(3+2j)^n \equiv (3-2j)^n \pmod{p},$$

czyli równoważnie $c^p \equiv 1 \pmod{q}$, gdzie $c \equiv (3+2j)(3-2j)^{-1}$. Łatwo sprawdzić, że $c \not\equiv 1$, co prowadzi do wniosku, że p jest rzędem c modulo q, zatem (z małego twierdzenia Fermata) p dzieli $q-1$. Ponadto, ponieważ $q-1$ jest parzyste, $2p$ dzieli $q-1$, więc w szczególności $q - 1 \geqslant 2p$, co pociąga tezę zadania.

Rozważmy teraz przypadek, w którym 2 nie jest resztą kwadratową modulo q. Wówczas zbiór

$$G = \{a + b\sqrt{2} \;:\; a, b \in \mathbb{Z}_q, (a,b) \neq (0,0)\}$$

z naturalnie zdefiniowanym działaniem mnożenia, jest grupą o $q^2 - 1$ elementach. Zauważmy, że z podzielności $q \mid x_p$ wynika, że $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^p = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^p$ w grupie G. Dalej, rozumując analogicznie jak powyżej, wnioskujemy, że p jest rzędem elementu $c = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})^{-1}$ w grupie G. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o rzędzie, otrzymujemy, że $p \mid q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$. Ponieważ czynniki $q-1$ i $q+1$ są parzyste, $2p$ musi dzielić przynajmniej jeden z nich. Toteż $2p \leqslant q+1$, zatem i w tym przypadku nierówność z zadania została udowodniona.

5. Powiemy, że graf H jest *minorem* grafu G, jeśli każdemu wierzchołkowi u grafu H można przypisać spójny podgraf G_u grafu G tak, by różnym wierzchołkom u, v grafu H odpowiadały rozłączne podgrafy G_u, G_v, a każdej krawędzi grafu H łączącej wierzchołki u i v odpowiadała co najmniej jedna krawędź z G łącząca wierzchołek z G_u z wierzchołkiem z G_v. Udowodnić, że dla każdego grafu G, jeśli pełny graf o 2018 wierzchołkach nie jest minorem G, to stosunek liczby krawędzi do liczby wierzchołków grafu G jest mniejszy od 2^{2018}.

Uwaga: Wszystkie rozważane grafy są proste i nieskierowane.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $d(G)$ stosunek liczby krawędzi do liczby wierzchołków w grafie G. Udowodnimy indukcyjnie po t, że jeśli pełny graf o t wierzchołkach nie jest minorem G, to $d(G) < 2^t$. Wtedy podstawiając $t = 2018$ otrzymamy tezę.

Dla $t = 2$ oczywiście $d(G) = 0 < 4$. Od teraz zakładamy, że $t \geqslant 3$.

Załóżmy nie wprost, że istnieje graf G taki, że $d(G) \geqslant 2^t$. Dodatkowo możemy założyć, że G jest najmniejszym pod względem liczby wierzchołków grafem o zadanych własnościach. Oznaczmy liczbę jego wierzchołków przez n. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że w G nie istnieją izolowane wierzchołki. Istotnie, jeśli w grafie G istnieje pewien izolowany wierzchołek to dla grafu G' powstałego z G przez jego usunięcie zachodzi $d(G') > d(G)$.

Niech v będzie pewnym wierzchołkiem należącym do grafu G. Załóżmy że istnieje pewien wierzchołek u sąsiadujący z v, taki że u i v mają mniej niż 2^t wspólnych sąsiadów. Wtedy graf G' powstały z G przez utożsamienie wierzchołków u i v ma co najmniej $2^t \cdot n - 2^t = 2^t(n-1)$ krawędzi. Ponieważ graf G' jest minorem grafu G, to on także nie posiada minoru będącego grafem pełnym o t wierzchołkach. Istotnie, zauważmy że dla dowolnych grafów H_1, H_2, H_3, jeśli H_1 jest minorem H_2 oraz H_2 jest minorem H_3, to również H_1 jest minorem H_3, jest to prosty wniosek z definicji minoru. Co więcej, $d(G') \geqslant 2^t$. Jednak graf G jest z założenia najmniejszym grafem pod względem liczby krawędzi spełniającym te warunki, stąd sprzeczność.

Otrzymaliśmy w ten sposób, że każda para sąsiednich wierzchołków u i v posiada co najmniej 2^t wspólnych sąsiadów. Oznaczmy przez G_v podgraf G składający się ze wszystkich sąsiadów wierzchołka v. Ponieważ z każdego wierzchołka w G_v wychodzi co najmniej 2^t krawędzi, to liczba wszystkich krawędzi grafu G wynosi co najmniej $2^{t-1}|G_v|$. Z drugiej strony, graf G_v nie może posiadać minoru H_v będącego grafem pełnym o $t-1$ wierzchołkach, bo graf $H_v \cup \{v\}$ byłby grafem pełnym o t wierzchołkach będącym minorem G, co jest sprzeczne z założeniem indukcyjnym.

6. Leszek położył n kolorowych karteczek w kształcie kółek o równych promieniach na dużej tablicy korkowej. Zauważył, że każde dwie z tych kartek stykają się lub częściowo pokrywają. Udowodnić, że używając trzech pinezek może przyczepić te kartki tak, że po zawieszeniu tablicy na ścianie żadna kartka nie spadnie.

Uwaga: Jeśli wbijemy pinezkę na obwodzie kartki, to ta kartka nie spadnie.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie (Jung). *Jeśli w skończonym zbiorze K punktów na płaszczyźnie największa odległość między dwoma punktami to d, to da się ten zbiór pokryć kołem o promieniu $R = \frac{d}{\sqrt{3}}$.*

Przez r oznaczmy promień kółek Leszka. Skoro każde dwa z tych kółek mają punkt wspólny, to każde dwa środki są odległe o co najwyżej $2r$. Korzystając z twierdzenia Junga, wnioskujemy, że zbiór środków tych kółek da się pokryć kołem Ω o promieniu $R = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Trójkąt równoboczny wpisany w to koło ma bok długości $R\sqrt{3} = 2r$. Oznaczmy przez ABC dowolny taki trójkąt, przez X, Y, Z środki odpowiednio boków BC, CA, AB, a przez O środek okręgu Ω.

Wykażemy, że wycinek kołowy o kącie $120°$ ograniczony przez półproste $OB^{\rightarrow}$, $OC^{\rightarrow}$ i okrąg Ω zawiera się w całości w kole o_X o środku X i promieniu r.

Jeśli punkt P leży w tym wycinku, ale nie w trójkącie OBC, to kąt $\sphericalangle PXO$ nie jest ostry, czyli $PO^2 \geqslant PX^2 + OX^2$. Skoro $PO \leqslant R$, to $PX^2 \leqslant \frac{3R^2}{4} = r^2$, czyli punkt P jest zawarty w kole o_X. Jeśli punkt P leży w trójkącie OBC, to jego odbicie względem prostej BC nie leży w tym trójkącie, a wciąż jest zawarte w tym samym wycinku kołowym, czyli również leży w kole o_X.

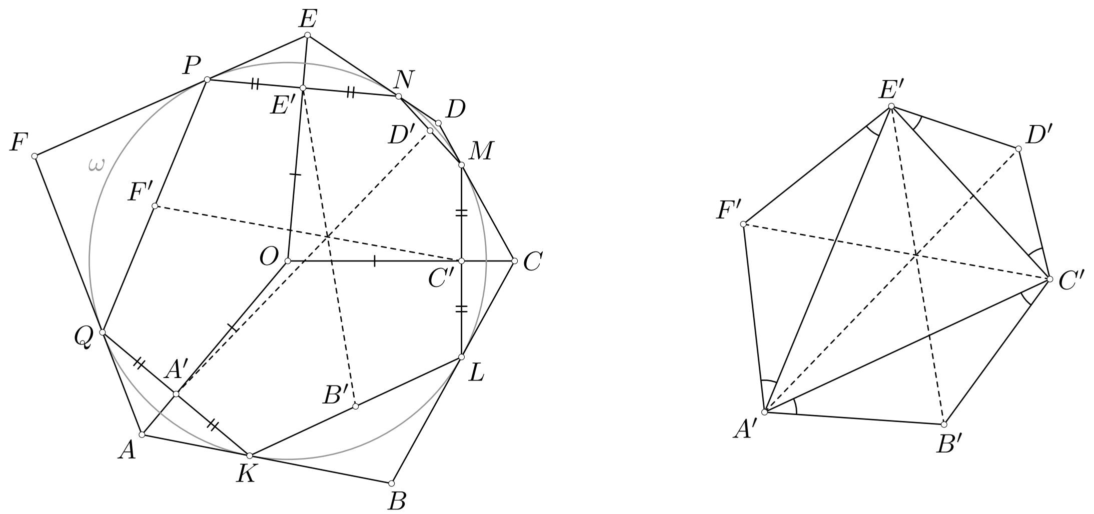
Udowodniliśmy zatem, że każdy punkt wycinka leży w odpowiednim kole. Ponieważ wycinki BOC, COA, AOB są przystające i ich sumą jest Ω, więc każdy z nich da się przykryć kołem o promieniu r

i środku odpowiednio X, Y, Z, czyli te 3 koła przykryją w całości koło Ω, a w szczególności zbiór środków kółek Leszka. Do zakończenia rozumowania zauważmy, że wystarczy wbić pinezki w punktach X, Y, Z.

7. Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu o środku O. Wykazać, że jeżeli punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACE, to okręgi opisane na trójkątach OAD, OBE, OCF mają punkt wspólny różny od O.

Rozwiązanie:
Sposób I

Niech K, L, M, N, P, Q będą punktami styczności okręgu ω wpisanego w dany sześciokąt odpowiednio z odcinkami AB, BC, CD, DE, EF, FA. Rozważmy inwersję względem okręgu wpisanego w sześciokąt $ABCDEF$. Punkty K, L, M, N, P, Q przechodzą na siebie. Punkty A, B, C, D, E, F przechodzą odpowiednio na środki A', B', C', D', E', F' odcinków QK, KL, LM, MN, NP, PQ. Okręgi opisane na trójkątach OAD, OBE i OCF przechodzą zaś na proste łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $KLMNPQ$. Ponieważ $OA = OC = OE$, więc także $OA' = OC' = OE'$. Z twierdzenia Pitagorasa łatwo wynika wówczas równość odcinków KQ, LM, NP.



Niech α będzie miarą kąta wpisanego w ω opartego na łuku KQ (skoro $KQ = LM = NP$, to każdy z kątów wpisanych opartych na tych łukach ma miarę α). Skoro $KQ = LM$, to czworokąt $KLMQ$ jest trapezem równoramiennym. Stąd i z równoległości $KM \parallel B'C'$, $LQ \parallel B'A'$, $C'A' \parallel MQ$ mamy

$$\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle QMK = \alpha = \sphericalangle MQL = \sphericalangle C'A'B'.$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$\sphericalangle E'C'D' = \sphericalangle C'E'D' = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle A'E'F' = \sphericalangle E'A'F' = \alpha.$$

Teza wynika teraz z twierdzenia Jacobiego (jest to treść zadania 26 z Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu 2006 — uzasadnienie znajduje się w broszurze z tego obozu).

Uwaga

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Proste łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $ABCDEF$ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ACE i BDF są równe.

Dowód implikacji, że z równości pól trójkątów ACE i BDF wynika postulowana współpękowość znajduje się w broszurze Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu 2007 (zadanie 21).

Na mocy powyższego twierdzenia wnioskujemy, że wystarczy uzasadnić, że $[KMP] = [LNQ]$, czyli

$$[KLM] + [MNP] + [PQK] = [QKL] + [LMN] + [NPQ],$$

co natychmiast wynika z przystawania par trójkątów KLM i LKQ, LMN i MNP oraz NPQ i PQK.

8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz punkt P leżący wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie ABC po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A. Proste AP, BP, CP przecinają ten okrąg ponownie odpowiednio w punktach A', B', C'. Niech X będzie punktem przecięcia prostej BC oraz prostej łączącej punkt P z obrazem symetrycznym A'' punktu A' względem BC. Analogicznie definiujemy punkty Y i B'' oraz Z i C''. Wykazać, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że

$$\frac{[PBA'']}{[PAB'']} = \frac{PB \cdot BA'}{PA \cdot AB'}.$$

Wykorzystując fakt, że punkty A' i A'' są symetryczne względem prostej BC oraz twierdzenie o kątach wpisanych otrzymujemy

$$\sphericalangle A''BC = \sphericalangle A'BC = \sphericalangle A'AC.$$

Korzystając ponownie z twierdzenia o kątach wpisanych oraz tym razem z tego, że B' i B'' są symetryczne względem prostej AC dostajemy

$$\sphericalangle B'BC = \sphericalangle B'AC = \sphericalangle B''AC.$$

W takim razie

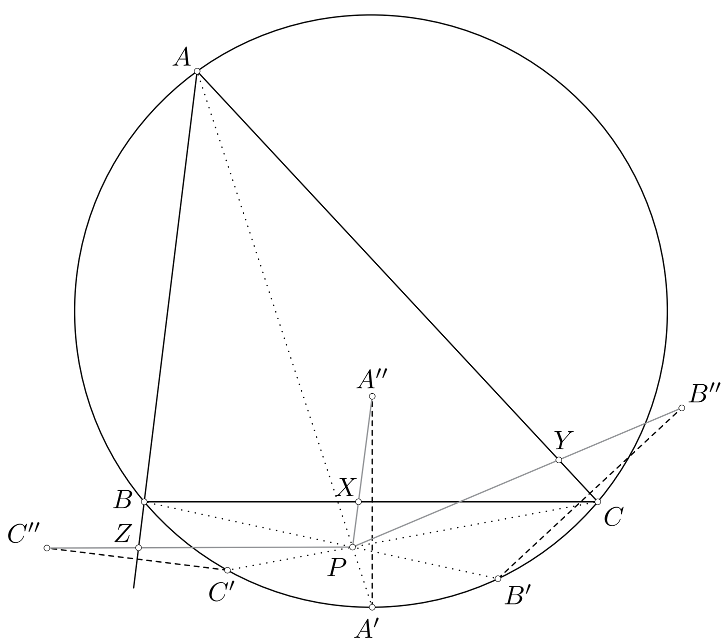
$$\sphericalangle PBA'' = \sphericalangle PAB''.$$

Zatem

$$\frac{[PBA'']}{[PAB'']} = \frac{PB \cdot BA''}{PA \cdot AB''} = \frac{PB \cdot BA'}{PA \cdot AB'}.$$

W analogiczny sposób udowodnimy, że

$$\frac{[PCB'']}{[PBC'']} = \frac{PC \cdot CB'}{PB \cdot BC'} \quad \text{oraz} \quad \frac{[PAC'']}{[PCA'']} = \frac{PA \cdot AC'}{PC \cdot CA'}.$$



To pozwala napisać, że

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{[PBA'']}{[PCA'']} \cdot \frac{[PCB'']}{[PAB'']} \cdot \frac{[PAC'']}{[PBC'']} = \frac{[PBA'']}{[PAB'']} \cdot \frac{[PCB'']}{[PBC'']} \cdot \frac{[PAC'']}{[PCA'']}$$

$$= \frac{PB \cdot BA'}{PA \cdot AB'} \cdot \frac{PC \cdot CB'}{PB \cdot BC'} \cdot \frac{PA \cdot AC'}{PC \cdot CA'} = \frac{BA'}{AB'} \cdot \frac{CB'}{BC'} \cdot \frac{AC'}{CA'}.$$

Skoro w „sześciokącie” $BA'CB'AC'$ główne przekątne mają punkt wspólny, to

$$\frac{BA'}{AB'} \cdot \frac{CB'}{BC'} \cdot \frac{AC'}{CA'} = 1$$

(uzasadnienie powyższego faktu jest analogiczne jak uzasadnienie ostatniego faktu w rozwiązaniu zadania 16). W takim razie

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1,$$

co na mocy twierdzenia Menelausa oznacza, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Jeśli zawodnik zostaje wybrany do referowania po raz n-ty, przystępuje do referowania z prawdopodobieństwem $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-n+m}$, gdzie m oznacza minimum liczby zakończonych referowań spośród wszystkich zawodników drużyny referującej. W przeciwnym wypadku Kapitan drużyny referującej wyznacza osobę do referowania zgodnie z punktem **7**.
9. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
10. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7–9**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
11. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.
12. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
13. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**. W tym przypadku, jeżeli przedstawione rozwiązanie nie zostanie uznane przez Jury za poprawne, drużyna otrzymuje -10 punktów i opuszcza się punkt 14.

14. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

15. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
16. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

17. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań lub gdy różnica pomiędzy wynikami obu drużyn jest większa niż 40 punktów. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
18. Po 3 godzinach meczu czas na referowanie zadania zostaje skrócony do 5 minut, a wszystkie punkty ujemne liczą się dwukrotnie.
19. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
20. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści