Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 31 maja–14 czerwca 2019

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 31 maja–14 czerwca 2019

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. 18 33 11 660

Kadra:
Piotr Ambroszczyk, Radomił Baran, Damian Burczyk, Tomasz Cieśla, Agata Dubiak, Teodor Jerzak, Karol Kaszuba, Michał Kieza, Mateusz Kobak, Natalia Kucharczuk, Mikołaj Leonarski, Wojciech Nadara, Dominika Regiec.

Uczestnicy:
Cezary Botta, Dominik Bysiewicz, Dominik Chmura, Adam Dankowiakowski, Jan Dobrakowski, Paweł Gadziński, Daniel Goc, Stanisław Hauke, Iga Janik, Justyna Jaworska, Kosma Kasprzak, Mateusz Nowak, Krzysztof Olejniczak, Łukasz Orski, Alicja Pietrzak, Iwo Pilecki-Silva, Rafał Pyzik, Mateusz Scharmach, Michał Szwej, Tomasz Ślusarczyk.

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`om.mimuw.edu.pl`
`www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 31 maja–14 czerwca 2019 w Mszanie Dolnej, w Ośrodku Sportowo-Rekreacyjnym „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Piotr Ambroszczyk, Radomił Baran, Damian Burczyk, Tomasz Cieśla, Agata Dubiak, Teodor Jerzak, Karol Kaszuba, Michał Kieza, Mateusz Kobak, Natalia Kucharczuk, Mikołaj Leonarski, Wojciech Nadara i Dominika Regiec.

W dniach 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11 i 12 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 2 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 8 i 13 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny ośmiu zadań i trwały od rana do wieczora, a mecze matematyczne — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 149, 143 i 139 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyła się wycieczka: 9 czerwca na Ćwilin i Mogielicę.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z Obozu wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `om.mimuw.edu.pl`.

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	14	1	1	3
2.	14	1	0	4
3.	4	3	1	11
4.	1	0	0	18
5.	18	2	0	0
6.	11	4	0	5
7.	13	0	0	7
8.	0	0	0	20
9.	18	2	0	0
10.	9	0	2	9
11.	5	2	0	13
12.	0	0	1	19
13.	19	0	0	1
14.	8	0	2	10
15.	8	0	2	10
16.	3	0	1	16
17.	17	1	1	1
18.	17	0	1	2
19.	10	1	1	8
20.	2	0	0	18
21.	16	0	0	4
22.	15	0	0	5
23.	13	0	0	7
24.	5	7	0	8
25.	16	3	0	1
26.	3	0	2	15
27.	5	0	0	15
28.	0	0	0	20
29.	9	6	0	5
30.	1	0	0	19
31.	2	0	0	18
32.	1	0	1	18
33.	12	1	1	6
34.	5	3	1	11
35.	2	0	0	18
36.	0	0	0	20

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Udowodnić, że istnieje wielomian $f(x)$ stopnia 100 o współczynnikach całkowitych taki, że dla każdego całkowitego n liczby

$$f(n),\ f(f(n)),\ f(f(f(n))),\ \ldots$$

są parami względnie pierwsze.

2. Niech $k \leqslant n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi i niech S będzie zbiorem zawierającym dokładnie n różnych liczb rzeczywistych. Niech T będzie zbiorem wszystkich liczb postaci $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ są różnymi elementami S. Wykazać, że zbiór T zawiera co najmniej $k(n-k)+1$ elementów.

3. W trójkącie ABC odcinki AD, BE, CF są wysokościami, punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio BF i CE, zaś punkt P jest rzutem prostokątnym punktu A na odcinek EF. Udowodnić, że symetralna odcinka DP przechodzi przez środek odcinka MN.

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz liczby rzeczywiste $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ spełniające równość

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = 0.$$

Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$a_1 \cdot \lfloor x \rfloor + a_2 \cdot \lfloor 2x \rfloor + \ldots + a_n \cdot \lfloor nx \rfloor \geqslant 0.$$

Uwaga: Dla liczby rzeczywistej t, przez $\lfloor t \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż t.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje różnowartościowa funkcja f określona na zbiorze dodatnich liczb całkowitych i przyjmująca wartości całkowite nieujemne, taka że

$$f(mn) = f(m) + f(n)$$

dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą, a $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Podzbiór zbioru S nazwiemy *sułtańskim*, jeśli ma co najmniej dwa elementy i średnia arytmetyczna jego wszystkich elementów jest liczbą całkowitą. Udowodnić, że liczba sułtańskich podzbiorów S jest parzysta.

7. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą, a A zbiorem takich liczb $i \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$, dla których istnieją liczby całkowite x, y takie, że liczby $i - x^2$ oraz $i + 1 - y^2$ są podzielne przez p. Wykazać, że

$$|A| = \frac{1}{4}\left(p + (-1)^{(p+1)/2}\right) - 1.$$

8. Okrąg ω wpisany w romb $ABCD$ jest styczny do jego boku CD w punkcie P. Okrąg ω_a jest styczny do odcinków AB, AD i zewnętrznie do okręgu ω. Okrąg ω_b jest styczny do odcinków BA, BC i zewnętrznie do okręgu ω. Na boku AB obrano takie punkty S i T, że proste PS i PT są styczne odpowiednio do okręgów ω_a i ω_b. Niech Γ będzie okręgiem dopisanym do trójkąta PST, stycznym do odcinka ST. Wykazać, że okręgi ω i Γ mają równe promienie.

9. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Odcinek AD jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC. Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt H przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że długość odcinka BC jest równa połowie obwodu trójkąta EFD.

10. Niech $k > 1$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita $n > 1$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, wszystkie większe od 1 takie, że

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_j)$$

są k-tymi potęgami liczb całkowitych.

Uwaga: Dla liczby całkowitej $n > 1$, $\varphi(n)$ to liczba dodatnich liczb całkowitych mniejszych od n i względnie pierwszych z n.

11. Dana jest niestała funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = f(x)^2 + f(y)^2.$$

Dowieść, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x) + f(y) = f(x+y).$$

12. Dane są liczby całkowite $k < n$ oraz graf prosty o n wierzchołkach $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Załóżmy, że dla każdego k-elementowego zbioru $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ spełniona jest następująca własność: liczba wierzchołków v_j, które są połączone krawędzią ze wszystkimi wierzchołkami v_i dla $i \in I$ jest nieparzysta. Udowodnić, że liczba $n + k$ jest nieparzysta.

13. Znaleźć największą liczbę rzeczywistą c o następującej własności: dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ o sumie równej 1, spełniających dla każdego $i = 1, \ldots, n$ zależność $0 \leqslant a_i \leqslant \frac{1}{2}$, istnieje podzbiór tych liczb o sumie z przedziału $[c, 1-c]$.

14. Dana jest rodzina $\mathcal{F}$ zbiorów 2019-elementowych o mocy większej niż $2019! \cdot 2018^{2019}$. Wykazać, że istnieje 2019-elementowa rodzina $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ oraz taki zbiór X, że dla dowolnych różnych zbiorów $A, B \in \mathcal{G}$ zachodzi $A \cap B = X$.

15. Punkt P leży na dwusiecznej wewnętrznej kąta przy wierzchołku A w trójkącie ABC. Odcinki PQ i PR są średnicami okręgów opisanych na trójkątach ABP i ACP. Proste BR i CQ przecinają się w punkcie X. Wykazać, że jeśli $X \neq P$, to proste XP i BC są prostopadłe.

16. Niech $p > 2019$ będzie liczbą pierwszą i niech $n = 5 \cdot \frac{p^p - 1}{p - 1}$. Oznaczmy

$$S = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \{-1, 0, 1\}, \ \sum_{i=1}^{n} a_i > 0 \right\}.$$

Wyznaczyć resztę z dzielenia przez p liczby $|S|$.

17. Na tablicy napisano liczby $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2019}$. Wykonujemy następującą operację: wybieramy dwie liczby a, b znajdujące się na tablicy i zastępujemy je liczbą $ab + a + b$. Postępowanie to kontynuujemy. Znaleźć wszystkie liczby, które mogą pojawić się na tablicy po wykonaniu 2018 kroków.

18. Nieprzystające okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach A i B oraz przecinają się w punktach C i D. Prosta CD przecina okrąg o odpowiednio w punktach E i F. Styczne do okręgu o w punktach E i F przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkty P, A, B leżą na jednej prostej.

19. Udowodnić, że istnieje tylko skończenie wiele takich trójek dodatnich liczb całkowitych a, b, n, że zachodzi równość

$$n! = 2^a - 2^b.$$

20. Niech a, b, c, d będą takimi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, że $a+b+c+d=3$. Udowodnić, że

$$\frac{ab}{4-a}+\frac{bc}{4-b}+\frac{cd}{4-c}+\frac{da}{4-d}\leqslant 1.$$

21. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. *Fejnym ciągiem* nazwiemy ciąg n-elementowy liczb rzeczywistych $a_1,\ldots,a_n$, który dla dowolnych liczb całkowitych $1\leqslant i,j\leqslant n$ spełnia warunek $a_i+a_j\geqslant |i-j|$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą sumę elementów fejnego ciągu.

22. Niech $p>3$ będzie liczbą pierwszą. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite x, y, że liczba 2^x3^y-1 jest podzielna przez p, oraz co najmniej jedna z liczb x, y jest nieparzysta.

23. Niech G będzie nieskierowanym grafem prostym bez trójkątów, o n wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek ma stopień większy niż $\frac{2}{5}n$. Udowodnić, że graf G nie zawiera cyklu nieparzystej długości.

24. Dany jest czworościan $ABCD$ i punkt P w jego wnętrzu. Proste AP, BP, CP, DP przecinają sferę opisaną na tym czworościanie ponownie odpowiednio w punktach A', B', C', D'. Płaszczyzna $A'B'C'$ i płaszczyzna przechodząca przez punkt P i równoległa do płaszczyzny ABC przecinają się wzdłuż prostej ℓ_D. Proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C określamy analogicznie. Wykazać, że proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D leżą na jednej płaszczyźnie.

25. Wykazać, że dla dowolnych liczb pierwszych $p>q$ układ równań

$$\begin{cases} a^2+b^2=p \\ x^2+y^2=q \\ (a-x)^2+(b-y)^2=p-q \end{cases}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b, x, y.

26. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Prosta AD przecina okrąg ω w punkcie G różnym od D. Prosta styczna do okręgu ω w punkcie G przecina boki AC oraz AB odpowiednio w punktach E i F. Okręgi opisane na trójkątach DEF, GBC przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach M, N różnych od D, G. Wykazać, że proste AD oraz MN są równoległe.

27. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające równość $a^2+b^2+c^2=3$. Dowieść, że

$$\frac{a^5}{c^3+1}+\frac{b^5}{a^3+1}+\frac{c^5}{b^3+1}\geqslant\frac{3}{2}.$$

28. Danych jest $2n-1$ różnych dodatnich liczb rzeczywistych o sumie równej S. Udowodnić, że można na co najmniej $\binom{2n-2}{n-1}$ sposobów wybrać spośród nich n takich liczb, że ich suma jest równa co najmniej $S/2$.

29. Punkt P leży na boku BC trójkąta ABC. Prosta równoległa do prostej AC przechodząca przez punkt P przecina symetralną boku AB w punkcie B'. Prosta równoległa do prostej AB przechodząca przez punkt P przecina symetralną boku AC w punkcie C'. Wykazać, że niezależnie od wyboru punktu P okręgi opisane na trójkątach $AB'C'$ przechodzą przez ustalony punkt, różny od A.

30. Chcecie bajki? Oto bajka: była sobie Pchła Szachrajka, i był także skończony zbiór A punktów na płaszczyźnie oraz $r>0$. Pchła Szachrajka na początku stoi w pewnym punkcie, który jest w odległości mniejszej niż r od pewnego punktu należącego do A. Co sekundę Pchła Szachrajka przeskakuje na środek ciężkości zbioru punktów, które są aktualnie w odległości mniejszej niż r od niej. Wykazać, że od pewnego momentu Pchła Szachrajka będzie skakać w miejscu.

31. Niech $P(k)$ oznacza liczbę *podziałów* liczby k, tj. liczbę niemalejących ciągów liczb całkowitych dodatnich sumujących się do k.

Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których spełniona jest równość

$$P(n) + P(n+4) = P(n+2) + P(n+3).$$

Przykładowo $P(4) = 5$, *bo* $4 = 2 + 2 = 1 + 3 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$.

32. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej d istnieje dokładnie jeden unormowany wielomian $P(x)$ stopnia d o współczynnikach rzeczywistych o następujących własnościach:

- $P(1) \neq 0$,
- Dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $a_0, a_1, a_2, \ldots$, który dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ spełnia zależność
$$P(1)a_{n-1} + P(2)a_{n-2} + \ldots + P(n)a_0 = 0$$
istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że $a_k = a_{k+1} = \ldots = 0$.

33. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita, którą można zapisać na co najmniej dwa różne sposoby (kolejność składników nie ma znaczenia) jako sumę 2019 parami różnych 2018-tych potęg dodatnich liczb całkowitych.

34. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dodatnich liczb całkowitych oraz ciąg $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb pierwszych, przy czym dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi

$$p_n \mid a_n \quad \text{oraz} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}(p_n^{1009} - 1).$$

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $2018 \mid a_n$.

35. Na płaszczyźnie danych jest n parami różnych okręgów, przy czym:

- każdy z nich ma promień 1,
- żadne dwa z nich nie są styczne,
- nie ma wśród nich okręgu rozłącznego ze wszystkimi pozostałymi okręgami.

Niech A będzie zbiorem wszystkich punktów przecięcia danych okręgów. Udowodnić, że $|A| \geqslant n$.

36. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o środku O. Punkty X, Y leżą odpowiednio na bokach AB, AC, przy czym odbicie prostej BC względem prostej XY jest styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AXY i BCO są styczne.

Zawody drużynowe

1. Dane są liczba rzeczywista a, liczba całkowita $n > 0$ oraz funkcje addytywne $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, przy czym dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = ax^n.$$

Wykazać, że istnieje $b \in \mathbb{R}$ oraz $i \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $f_i(x) = bx$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Uwaga: Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest addytywna, jeżeli dla dowolnych liczb rzeczywistych* x, y *zachodzi* $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2. Wyznaczyć wszystkie pary unormowanych wielomianów P, Q o współczynnikach rzeczywistych, dla których zachodzi

$$P \mid Q^2 + 1 \quad \text{oraz} \quad Q \mid P^2 + 1.$$

Uwaga: Wielomian nazywamy unormowanym, jeżeli jego współczynnik wiodący jest równy 1.

3. Mszana Dolna ma n mieszkańców i każdy z nich zna dokładnie 1000 innych mieszkańców. Udowodnić, że można wybrać pewną grupę mieszkańców S tak, że co najmniej $\frac{n}{2019}$ osób w S ma dokładnie dwóch znajomych w S.

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz zbiór X składający się z $2n$ punktów płaszczyzny, przy czym żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. *Skojarzeniem* nazwiemy zbiór n odcinków, których zbiór końców jest równy X. Skojarzenie nazwiemy *ładnym*, jeśli każde dwa z odcinków skojarzenia są rozłączne. Niech $f(n)$ będzie największą liczbą o własności: dla dowolnego $2n$-elementowego zbioru punktów (z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej) istnieje co najmniej $f(n)$ różnych ładnych skojarzeń. Udowodnić, że $f(n)$ jest liczbą nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $n+1$ jest potęgą dwójki.

5. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty M_A, M_B, M_C są środkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C, zaś punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że proste M_AD, M_BE, M_CF oraz OI przecinają się w jednym punkcie.

6. Dany jest trójkąt ABC. Niech Ω będzie okręgiem dopisanym do tego trójkąta, stycznym do boku BC w punkcie D. Okrąg ω jest styczny wewnętrznie do okręgu Ω w punkcie D oraz do okręgu opisanego na ABC w punkcie T. Styczne do ω z punktu A przecinają bok BC w punktach X, Y, przy czym X leży na odcinku BY. Punkt $P \neq A$ jest punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach ABX i ACY. Wykazać, że punkty A, P, T są współliniowe.

7. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych n takich, że $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ jest potęgą dwójki.

8. Niech m, p będą dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym p jest liczbą pierwszą. Załóżmy, że istnieją liczby całkowite $a, c_1, \ldots, c_m$ takie, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ zachodzi

$$p \nmid a + i \quad \text{oraz} \quad p \mid a + i - c_i^2.$$

Wykazać, że $m < 2\sqrt{p}$.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y równość

$$f(x^2 + 2f(y)) = f(x)^2 + y + f(y).$$

2. Dane są dodatnie liczby całkowite $s \leqslant t$. Rozważmy ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dany wzorem

$$a_n = \sum_{k=s}^{t} \binom{n}{k}.$$

Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność $a_n^2 \geqslant a_{n-1}a_{n+1}$.

3. Ustalmy graf H oraz liczbę naturalną k. Alicja i Bob grają w następującą grę na grafie G, początkowo złożonym z N wierzchołków i nieposiadającym żadnych krawędzi. W każdym ruchu Alicja wskazuje k wierzchołków w G, pomiędzy którymi nie ma żadnej krawędzi. Następnie Bob dodaje do G dowolny zbiór krawędzi pomiędzy wierzchołkami wybranymi przez Alicję, przy czym musi dodać co najmniej jedną krawędź. Alicja wygrywa grę w momencie, gdy w G pojawi się podgraf indukowany izomorficzny z H, zaś Bob wygrywa, gdy Alicja nie może już wykonać ruchu. Wykazać, że dla każdego grafu H i liczby k istnieje taka liczba N, że Alicja ma strategię wygrywającą w powyższej grze.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c o następującej własności: dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej z każdy wielokąt ściśle wypukły o wierzchołkach w punktach o współrzędnych ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, z\}$ ma co najwyżej $100z^c$ wierzchołków.

5. Niech P, Q będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych spełniającymi równość

$$P\left(P(x)\right) = \left(Q(x)\right)^2$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Rozstrzygnąć, czy z tego wynika, że istnieje taki wielomian R o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $P(x) = \left(R(x)\right)^2$.

6. Zbiór punktów na płaszczyźnie pokolorowanych na czerwono i zielono nazwiemy *trójkątnym*, jeżeli istnieje na płaszczyźnie trójkąt Δ taki, że wszystkie punkty jednego koloru leżą we wnętrzu Δ, a wszystkie punkty drugiego koloru leżą poza Δ. Dany jest skończony zbiór A (o mocy większej niż 2019) punktów na płaszczyźnie pokolorowanych na czerwono lub zielono, leżących w położeniu ogólnym. Czy zawsze prawdą jest, że jeśli dowolne 2019 punktów z A tworzą zbiór trójkątny, to zbiór A też jest trójkątny?

7. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i opisany na okręgu. Półproste $BA^{\rightarrow}$ i $CD^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie E, zaś półproste $DA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie F. Niech Γ będzie okręgiem o średnicy EF, a τ okręgiem stycznym do prostych EB, EC oraz stycznym wewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie EBC. Wykazać, że okręgi Γ oraz τ są prostopadłe.

Uwaga: dwa okręgi są prostopadłe, jeżeli przecinają się oraz proste styczne do tych okręgów w ich punkcie przecięcia są prostopadłe.

8. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkt M jest środkiem BC, a punkt L jest środkiem łuku BAC okręgu opisanego na ABC. Proste przechodzące przez M i równoległe do BI i CI przecinają AB i AC odpowiednio w E i F oraz przecinają LB i LC odpowiednio w P i Q. Okręgi opisane na trójkątach EMF i PMQ przecinają się w punkcie $T \neq M$. Wykazać, że punkty I, M i T są współliniowe.

9. Niech J będzie środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC stycznego do boku BC. Okrąg przechodzący przez punkty A i J przecina półproste $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ (poza bokami trójkąta) odpowiednio w punktach X i Y. Punkty S i T leżą odpowiednio na odcinkach BJ i CJ, przy czym $\sphericalangle BTJ = \sphericalangle AXJ$

oraz $\sphericalangle CSJ = \sphericalangle AYJ$. Proste BT i CS przecinają się w punkcie K, a proste KJ i TS przecinają się w punkcie Z. Wykazać, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

10. Dany jest rosnący ciąg dodatnich liczb całkowitych $\{a_n\}$. Wiadomo, że każda dodatnia liczba całkowita jest elementem dokładnie jednego z ciągów $\{a_n\}$, $\{a_n + n\}$. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych k, dla których liczba a_k^2 jest podzielna przez k.

11. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c większe od 1, przy czym $a, b \neq c$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $p \mid a^n + b^n - c^n$.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $47 = a_0 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ oraz

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2 - a_{n+1}a_na_{n-1} = 4$$

dla $n \geqslant 1$. Udowodnić, że dla dowolnego $n \geqslant 0$ liczba

$$2 + \sqrt{2 + a_n}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Dana jest liczba rzeczywista $a > 1$. Określamy ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ wzorem

$$a_n = \lfloor a^{n+1} \rfloor - a \cdot \lfloor a^n \rfloor.$$

Znaleźć wszystkie liczby $a > 1$, dla których ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dany powyższym wzorem jest od pewnego miejsca okresowy.

3. Ciąg (a_n) jest określony wzorami:

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2 \quad \text{oraz} \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{dla } n \geqslant 3.$$

Wykazać, że $p \mid a_p$ dla każdej liczby pierwszej p.

4. Udowodnić, że istnieje taki nieskończony zbiór dodatnich liczb całkowitych, że suma jego każdych dwóch różnych elementów ma parzyście wiele różnych dzielników pierwszych.

5. Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech n będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, która ma dokładnie k dzielników. Załóżmy, że n jest sześcianem liczby całkowitej. Wykazać, że k nie ma dzielników pierwszych dających resztę 2 z dzielenia przez 3.

6. Dane są dodatnie liczby całkowite p, q, m, zbiory p-elementowe $A_1, \ldots, A_m$ i zbiory q-elementowe $B_1, \ldots, B_m$. Spełniony jest przy tym następujący warunek: dla każdych $1 \leqslant i, j \leqslant m$ zbiory A_i, B_j są rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy $i = j$. Wykazać, że $m \leqslant \binom{p+q}{p}$.

7. Udowodnić, że w każdym grafie o $3k+1$ wierzchołkach niezawierającym wierzchołków izolowanych istnieje skojarzenie wielkości $k+1$ lub można podzielić zbiór wierzchołków na trzy zbiory A, B, C tak, że:

- zbiór A jest niepusty oraz nie ma wewnątrz niego krawędzi,
- nie ma żadnych krawędzi pomiędzy zbiorami A i C,
- istnieje skojarzenie między zbiorami A i B zawierające wszystkie wierzchołki ze zbioru B.

8. Dane są nieparzyste liczby całkowite x, y, przy czym $|x| \neq |y|$. Każda liczba całkowita została pomalowana na jeden z czterech kolorów: arbuzowy, łososiowy, malinowy, truskawkowy. Udowodnić, że istnieją dwie liczby tego samego koloru, których różnica wynosi x, y, $x+y$ lub $x-y$.

9. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω. Okrąg styczny do boków AD i AB jest styczny wewnętrznie do okręgu ω w punkcie T. Proste styczne do okręgu ω w punktach A i T przecinają się w punkcie P. Wykazać, że jeśli okręgi wpisane w trójkąty ABC oraz ACD mają równe promienie, to prosta łącząca środki tych okręgów przechodzi przez punkt P.

10. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Na bokach BC i AD budujemy na zewnątrz trójkąty BCE i ADF, przy czym

$$BE = CE, \quad AF = DF \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BEC + \sphericalangle AOD = \sphericalangle AFD + \sphericalangle BOC = 180^\circ.$$

Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i CD. Wykazać, że proste BN, CM i EF mają punkt wspólny.

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty przy wierzchołkach A i C są równe. Udowodnić, że jedna ze wspólnych stycznych do okręgów wpisanych w trójkąty ABD i BCD przechodzi przez środek przekątnej AC.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Udowodnić, że istnieje wielomian $f(x)$ stopnia 100 o współczynnikach całkowitych taki, że dla każdego całkowitego n liczby

$$f(n),\ f(f(n)),\ f(f(f(n))),\ \ldots$$

są parami względnie pierwsze.

Rozwiązanie:

Rozważmy wielomian $f(x) = x^{100} - x + 1$. Wtedy $f(0) = f(1) = 1$. Niech f^k oznacza k-krotne złożenie funkcji f. Jeżeli dla pewnej liczby pierwszej p zachodzi $p \mid f^k(n)$, to dla $l > k$ otrzymujemy $f^l(n) \equiv f^{l-k}(f^k(n)) \equiv f^{l-k}(0) \equiv 1 \pmod{p}$. Oznacza to, że jeżeli $p \mid f^k(n)$, to dla każdego $l > k$, $p \nmid f^l(n)$, czyli zadane liczby są parami względnie pierwsze.

2. Niech $k \leqslant n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi i niech S będzie zbiorem zawierającym dokładnie n różnych liczb rzeczywistych. Niech T będzie zbiorem wszystkich liczb postaci $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ są różnymi elementami S. Wykazać, że zbiór T zawiera co najmniej $k(n-k)+1$ elementów.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności załóżmy, że $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, gdzie $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Dla $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ niech $T_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ oraz dla zbioru A przez $s(A)$ oznaczmy sumę jego elementów.

Wtedy dla $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, jeżeli zachodzi $i_1 \leqslant j_1$, $i_2 \leqslant j_2$, $\ldots$, $i_k \leqslant j_k$ i jedna z tych nierówności jest ostra, to $s(T_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) < s(T_{j_1,j_2,\ldots,j_k})$.

Zauważmy, że jeżeli $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \neq \{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}$, to $i_k < n$ lub dla pewnego l zachodzi $i_l + 1 < i_{l+1}$. Zatem możemy zwiększyć jeden z indeksów o 1, tak aby nierówności $i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ pozostały prawdziwe. Wtedy zgodnie z wcześniejszą obserwacją $s(T_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$ zwiększy się. Tym sposobem, zaczynając od $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_k = k$, a kończąc na $i_1 = n-k+1, i_2 = n-k+2, \ldots, i_k = n$ otrzymamy podzbiory S wielkości k o różnych sumach. Za każdym razem suma indeksów zwiększa się o 1, czyli otrzymamy

$$\begin{gathered}((n-k+1)+(n-k+2)+\ldots+n)-(1+2+\ldots+k)+1 = \\ ((n-k+1-1)+(n-k+2-2)+\ldots+(n-k))+1 = k(n-k)+1\end{gathered}$$

zbiorów o różnych sumach elementów. Stąd T zawiera co najmniej $k(n-k)+1$ elementów.

3. W trójkącie ABC odcinki AD, BE, CF są wysokościami, punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio BF i CE, zaś punkt P jest rzutem prostokątnym punktu A na odcinek EF. Udowodnić, że symetralna odcinka DP przechodzi przez środek odcinka MN.

Rozwiązanie:

Niech K i L będą środkami odpowiednio odcinków BE i CF. Zauważmy, że punkty K i L są różne, gdyż w przeciwnym przypadku czworokąt $BCEF$ byłby równoległobokiem, a nie jest. Ponadto trójkąty ABC i AEF są podobne, a AD i AP są ich odpowiadającymi sobie wysokościami, więc

$$\frac{BD}{CD} = \frac{EP}{FP} = \alpha$$

dla pewnej liczby α.

Umieśćmy w punktach B i E masy 1, zaś w punktach C i F masy α. Z otrzymanej równości stosunków wynika, że punkty D i P są odpowiednio środkami mas układów $\{B, C\}$ i $\{E, F\}$. Wobec tego jeśli przeniesiemy masy z punktów B i C do punktu D, a masy z punktów E i F do punktu P, to środek masy całego układu nie zmieni się. W punktach D i P będą masy $1+\alpha$, więc środek masy całego układu jest środkiem odcinka DP.

Z drugiej strony, jeśli przeniesiemy masy z punktów B i E do punktu K, a masy z punktów C i F do punktu L, to środek masy całego układu również się nie zmieni. Wynika stąd, że środek masy całego układu leży na prostej KL. Innymi słowy, środek odcinka DP leży na prostej KL.

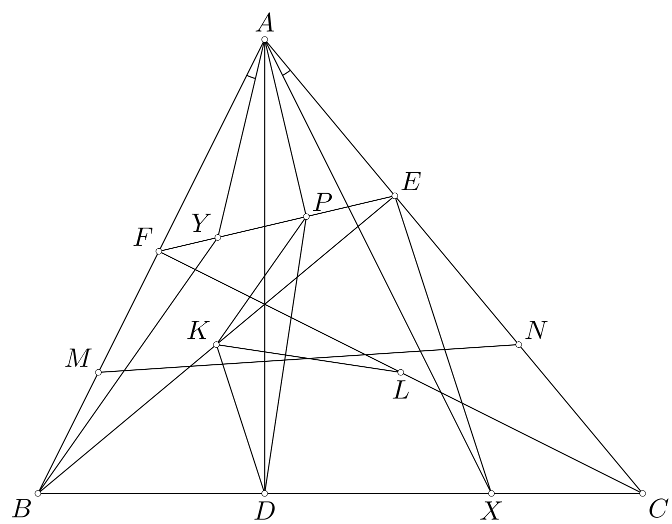
Analogicznie, poprzez umieszczenie mas jednostkowych w punktach B, C, E, F i przeprowadzenie podobnego rozumowania dowodzimy, że środek odcinka MN także leży na prostej KL.

Wystarczy dowieść, że prosta KL jest symetralną odcinka DP. Bez straty ogólności załóżmy, że punkt K nie pokrywa się ze środkiem odcinka DP — możemy to zrobić, gdyż któryś z punktów K, L ma tę własność. Wystarczy udowodnić, że $KP = KD$, gdyż prosta KL przechodzi przez środek odcinka DP.

Niech X i Y będą obrazami symetrycznymi punktów B i E odpowiednio względem D i P. Wówczas $AB = AX$ i $AY = AE$. Oprócz tego

$$\sphericalangle BAY = \sphericalangle FAP - \sphericalangle YAP = \sphericalangle FAP - \sphericalangle PAE = \sphericalangle DAC - \sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC - \sphericalangle DAX = \sphericalangle XAE.$$

W takim razie trójkąty BAY i XAE są przystające (cecha przystawania bok-kąt-bok), zatem $BY = EX$. Ponadto z twierdzenia o linii środkowej w trójkącie mamy $BY = 2KP$ i $EX = 2KD$, skąd $KP = KD$.



Uwaga: To, że środek odcinka MN leży na prostej KL można też wykazać w następujący sposób. Z twierdzenia o linii środkowej wynika, że $\overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ML}$. Wobec tego czworokąt $KNLM$ jest równoległobokiem, więc środek odcinka MN pokrywa się ze środkiem odcinka KL.

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz liczby rzeczywiste $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ spełniające równość

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = 0.$$

Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$a_1 \cdot \lfloor x \rfloor + a_2 \cdot \lfloor 2x \rfloor + \ldots + a_n \cdot \lfloor nx \rfloor \geqslant 0.$$

Uwaga: Dla liczby rzeczywistej t, przez $\lfloor t \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż t.

Rozwiązanie:

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie po n. Dla $n = 1$ mamy $a_1 = 0$, więc $a_1 \cdot \lfloor x \rfloor = 0 \geqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Załóżmy, że teza zadania jest prawdziwa dla n i niech $a_1 \leqslant a_2 \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1}$ będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi równanie z treści zadania oraz niech x będzie ustaloną liczbą rzeczywistą.

Zauważmy, że $a_{n+1} \geqslant 0$. Zdefiniujmy liczby $b_i = a_i + \frac{2a_{n+1}}{n}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, a ponadto

$$\sum_{i=1}^{n} ib_i = \sum_{i=1}^{n} i\left(a_i + \frac{2a_{n+1}}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} ia_i + \frac{2}{n}(1+2+\ldots+n)a_{n+1} = -(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} = 0.$$

Możemy zatem skorzystać z założenia indukcyjnego:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \lfloor ix \rfloor = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \lfloor ix \rfloor + a_{n+1}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \lfloor ix \rfloor .$$

Korzystając z nierówności $\lfloor u \rfloor + \lfloor w \rfloor \leqslant \lfloor u + w \rfloor$, prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych u, w, mamy:

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \lfloor ix \rfloor = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\lfloor ix \rfloor + \lfloor (n+1-i)x \rfloor\right) \leqslant \lfloor (n+1)x \rfloor .$$

Ponieważ $a_{n+1} \geqslant 0$, więc

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \lfloor ix \rfloor + a_{n+1}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \lfloor ix \rfloor \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot \lfloor ix \rfloor ,$$

co kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje różnowartościowa funkcja f określona na zbiorze dodatnich liczb całkowitych i przyjmująca wartości całkowite nieujemne, taka że

$$f(mn) = f(m) + f(n)$$

dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n.

Rozwiązanie:
Odpowiedź: Nie istnieje taka funkcja f.
Załóżmy, że f spełnia warunki zadania. Wówczas

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1),$$

skąd $f(1) = 0$. Ponieważ funkcja f jest różnowartościowa, więc dla argumentów różnych od 1 przyjmuje wartości dodatnie. Ponadto dla dowolnych m, k zachodzi ciąg równości

$$f(m^k) = f(m \cdot m^{k-1}) = f(m) + f(m^{k-1}) = f(m) + f(m \cdot m^{k-2}) = 2f(m) + f(m^{k-2}) = \ldots = kf(m).$$

Wobec tego

$$f(3^{f(2)}) = f(2) \cdot f(3) = f(2^{f(3)}).$$

Liczby $3^{f(2)}$ i $2^{f(3)}$ są różne (ponieważ $f(2)$ i $f(3)$ są różne od 0), co przeczy różnowartościowości funkcji f. Zatem nie istnieje funkcja f spełniająca warunki zadania.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą, a $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Podzbiór zbioru S nazwiemy *sułtańskim*, jeśli ma co najmniej dwa elementy i średnia arytmetyczna jego wszystkich elementów jest liczbą całkowitą. Udowodnić, że liczba sułtańskich podzbiorów S jest parzysta.

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez $\mathcal{U}$ rodzinę wszystkich podzbiorów sułtańskich zbioru S. Niech

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{U} \colon \text{średnia arytmetyczna elementów zbioru } A \text{ należy do } A\}.$$

Zauważmy, że dla każdego $A \in \mathcal{A}$ zachodzi $|A| \geqslant 3$. Istotnie, taki zbiór nie może być dwuelementowy, gdyż jeśli $a \neq b$, to $a \neq \frac{a+b}{2} \neq b$, zatem $\frac{a+b}{2} \notin \{a, b\}$.

Wskażemy bijekcję między elementami rodzin $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{U} \setminus \mathcal{A}$ dowodząc tym samym, że moc rodziny $\mathcal{U}$ jest parzysta.

Rozważmy dowolny zbiór $A \in \mathcal{A}$ i oznaczmy średnią arytmetyczną jego elementów przez a. Wówczas $a \in A$. Rozważmy zbiór $B_A = A \setminus \{a\}$. Wówczas średnia arytmetyczna elementów tego zbioru jest równa a i ma on co najmniej dwa elementy. Wobec tego zbiór B_A jest sułtański i należy do $\mathcal{U} \setminus \mathcal{A}$. Zbiorowi A przyporządkujmy zbiór B_A. Wprost z definicji wynika, że przyporządkowanie $A \mapsto B_A$ jest różnowartościowe oraz każdy zbiór B z rodziny $\mathcal{U} \setminus \mathcal{A}$ jest przyporządkowany pewnemu zbiorowi należącemu do $\mathcal{A}$ (mianowicie zbiorowi $B \cup \{b\}$, gdzie b jest średnią arytmetyczną elementów zbioru B). Zatem tak określone przyporządkowanie jest bijekcją, co kończy rozwiązanie zadania.

7. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą, a A zbiorem takich liczb $i \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$, dla których istnieją liczby całkowite x, y takie, że liczby $i - x^2$ oraz $i + 1 - y^2$ są podzielne przez p. Wykazać, że

$$|A| = \frac{1}{4}\left(p + (-1)^{(p+1)/2}\right) - 1.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Udowodnimy najpierw, że kongruencja $y^2 - x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ ma dokładnie $p-1$ rozwiązań. Zauważmy bowiem, że $1 \equiv y^2 - x^2 \equiv (y+x)(y-x) \pmod{p}$. Wynika stąd w szczególności, że $y + x \not\equiv 0 \pmod{p}$. Dla każdej liczby $c \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ istnieje dokładnie jedna para (x, y) spełniająca to równanie, taka że $y + x \equiv c \pmod{p}$, ponieważ jeżeli $y + x \equiv c \pmod{p}$, to $y - x \equiv c^{-1} \pmod{p}$, a to jest równoważne warunkom $y \equiv \frac{1}{2}(c + c^{-1}) \pmod{p}$ oraz $x \equiv \frac{1}{2}(c - c^{-1}) \pmod{p}$. Wobec tego istnieje dokładnie $p-1$ takich par.

Zauważmy teraz, że jeżeli para (x, y) jest rozwiązaniem równania $y^2 - x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, to takowymi są także pary $(x, -y)$, $(-x, y)$ oraz $(-x, -y)$ i każda z nich odpowiada tej samej liczbie $i \in A$. Ponieważ dla każdego $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ równanie $x^2 \equiv i \pmod{p}$ ma dokładnie dwa rozwiązania lub nie ma żadnego rozwiązania, więc powyższe cztery pary są wszystkimi odpowiadającymi temu elementowi $i \in A$. Jeśli $x \neq 0$ oraz $y \neq 0$, to są to 4 różne rozwiązania. Stąd wniosek, że

$$p - 1 = 4|A| + z, \tag{1}$$

gdzie z jest liczbą rozwiązań równania $y^2 - x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, w których x lub y wynosi 0. Dla $x = 0$ otrzymujemy pary (x, y) równe $(0, 1)$ oraz $(0, p-1)$. Dla $y = 0$ mamy $(c, 0)$ oraz $(-c, 0)$, o ile istnieje taka liczba c, że $c^2 \equiv p - 1 \pmod{p}$ lub nie mamy rozwiązań, jeśli taka liczba c nie istnieje. Wobec tego z wynosi 4 lub 2. Łącząc tę informację z analizą modulo 4 równania (1) wnioskujemy, że

$$z = \begin{cases} 4, & \text{jeśli } p = 4k+1, \\ 2, & \text{jeśli } p = 4k+3. \end{cases}$$

Wnioskujemy stąd, że

$$|A| = \begin{cases} k-1, & \text{jeśli } p = 4k+1, \\ k, & \text{jeśli } p = 4k+3, \end{cases}$$

co jak łatwo sprawdzić w obu przypadkach jest zgodne z formułą z zadania.

Uwaga: Powyższe rozumowanie dowodzi faktu, że jeśli $p > 2$ jest liczbą pierwszą, to -1 jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy p daje resztę 1 z dzielenia przez 4.

Sposób II

W rozwiązaniu będziemy korzystać z kluczowej obserwacji, że dla $i \in \{1, 2 \ldots, p-2\}$ zachodzi

$$\left(1+\left(\frac{i}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{i+1}{p}\right)\right)=\begin{cases}4, & \text{jeśli } i\in A,\\ 0, & \text{jeśli } i\notin A,\end{cases}$$

gdzie $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ jest symbolem Legendre'a.

Moc zbioru A z treści zadania jest równa $\frac{1}{4}\sum_{x=1}^{p-2}\left(1+\left(\frac{x}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{x+1}{p}\right)\right)$. Zauważmy i zapamiętajmy, że jest ona nieujemna i mniejsza niż p. Mamy

$$\frac{1}{4}\sum_{x=1}^{p-2}\left(1+\left(\frac{x}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{x+1}{p}\right)\right)=-\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)+\frac{1}{4}\sum_{x=1}^{p-1}\left(1+\left(\frac{x}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{x+1}{p}\right)\right).$$

Z kryterium Eulera wiemy, że $\left(\frac{x}{p}\right)\equiv x^{(p-1)/2} \pmod p$, zatem

$$|A|\equiv\frac{-1-(-1)^{(p-1)/2}}{4}+\frac{1}{4}\sum_{x=1}^{p-1}\left(1+x^{(p-1)/2}\right)\left(1+(1+x)^{(p-1)/2}\right) \pmod p.$$

Fakt 1. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to*

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k\equiv\begin{cases}0 \pmod p, & \textit{jeśli } p-1\nmid k,\\ -1 \pmod p, & \textit{jeśli } p-1\mid k.\end{cases}$$

Dowód. Niech g będzie generatorem modulo p, czyli taką liczbą, że liczby $g, g^2, \ldots, g^{p-1}$ dają wszystkie niezerowe reszty z dzielenia przez p. Wówczas

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k\equiv\sum_{i=1}^{p-1}(g^i)^k\equiv\sum_{i=1}^{p-1}(g^k)^i \pmod p.$$

Jeśli $p-1\mid k$, to z małego twierdzenia Fermata $g^k\equiv 1 \pmod p$. Wtedy wszystkie składniki sumy przystają do 1 modulo p, więc cała suma przystaje do $p-1$.

Jeśli natomiast $p-1\nmid k$, to $g^k\not\equiv 1 \pmod p$ oraz $(g^k)^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, zatem

$$\sum_{i=1}^{p-1}(g^k)^i=g^k\frac{(g^k)^{p-1}-1}{g^k-1}\equiv 0 \pmod p. \qquad \square$$

Fakt 2. *Jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą oraz $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{p-1}x^{p-1}$ jest wielomianem stopnia $p-1$ o współczynnikach całkowitych, to*

$$\sum_{x=1}^{p-1} f(x)\equiv -a_0-a_{p-1} \pmod p.$$

Dowód. Korzystając z Faktu 1 mamy

$$\sum_{x=1}^{p-1} f(x)=\sum_{x=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1}a_kx^k=\sum_{k=0}^{p-1}a_k\sum_{x=1}^{p-1}x^k\equiv -a_0-a_{p-1} \pmod p. \qquad \square$$

Rozważmy wielomian $f(x) = \left(1 + x^{(p-1)/2}\right)\left(1 + (1+x)^{(p-1)/2}\right) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{p-1}x^{p-1}$. Wówczas $a_0 = 2$ i $a_{p-1} = 1$. Wykorzystując Fakt 2 otrzymujemy

$$|A| \equiv \frac{-1-(-1)^{(p-1)/2}}{4} + \frac{1}{4}\left(-a_0 - a_{p-1}\right) \equiv \frac{-1-(-1)^{(p-1)/2}}{4} - \frac{3}{4} \equiv \frac{p+(-1)^{(p+1)/2}}{4} - 1 \pmod{p}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\frac{1}{4}\left(p + (-1)^{(p+1)/2}\right) - 1$ jest nieujemną liczbą całkowitą mniejszą niż p. W takim razie liczba ta jest równa $|A|$, gdyż $|A|$ też jest nieujemną liczbą całkowitą mniejszą niż p i obie liczby dają tę samą resztę z dzielenia przez p.

8. Okrąg ω wpisany w romb $ABCD$ jest styczny do jego boku CD w punkcie P. Okrąg ω_a jest styczny do odcinków AB, AD i zewnętrznie do okręgu ω. Okrąg ω_b jest styczny do odcinków BA, BC i zewnętrznie do okręgu ω. Na boku AB obrano takie punkty S i T, że proste PS i PT są styczne odpowiednio do okręgów ω_a i ω_b. Niech Γ będzie okręgiem dopisanym do trójkąta PST, stycznym do odcinka ST. Wykazać, że okręgi ω i Γ mają równe promienie.

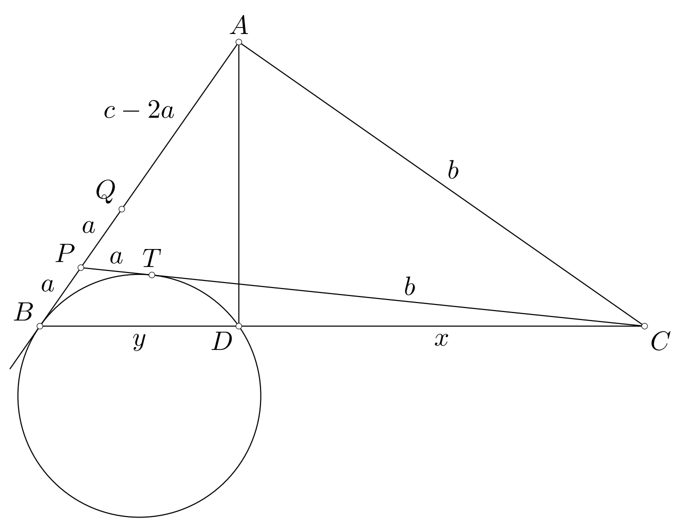
Rozwiązanie:
Rozpoczniemy od udowodnienia następującego lematu.

Lemat. *Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Punkt D jest rzutem punktu A na prostą BC. Okrąg o przechodzi przez punkt D i jest styczny do prostej AB w punkcie B. Prosta styczna do okręgu o poprowadzona z punktu C przecina odcinek AB w punkcie P. Punkt Q jest odbiciem punktu B względem punktu P. Wtedy $\sphericalangle QDB = 45°$.*

Dowód. Niech $a = PB$, $b = AC$, $c = AB$, $x = CD$ i $y = DB$. Niech T będzie punktem styczności prostej CP z okręgiem o. Wtedy $CT^2 = CD \cdot CB = CA^2$, przy czym druga równość wynika z podobieństwa trójkątów CAD i CBA. Stąd $CT = b$. Mamy również $PT = a$ oraz $AP = c - a$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CAP mamy $b^2 + (c-a)^2 = (b+a)^2$, czyli $c^2 - 2ac = 2ab$. Teraz $QB = 2a$ i $AQ = c - 2a$. Mamy

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{c-2a}{2a} = \frac{b}{c} = \frac{AD}{DB},$$

przy czym ostatnia równość wynika z podobieństwa trójkątów ABC, DBA. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwusiecznej wynika więc, że DQ jest dwusieczną kąta ADB, skąd $\sphericalangle QDB = 45°$.

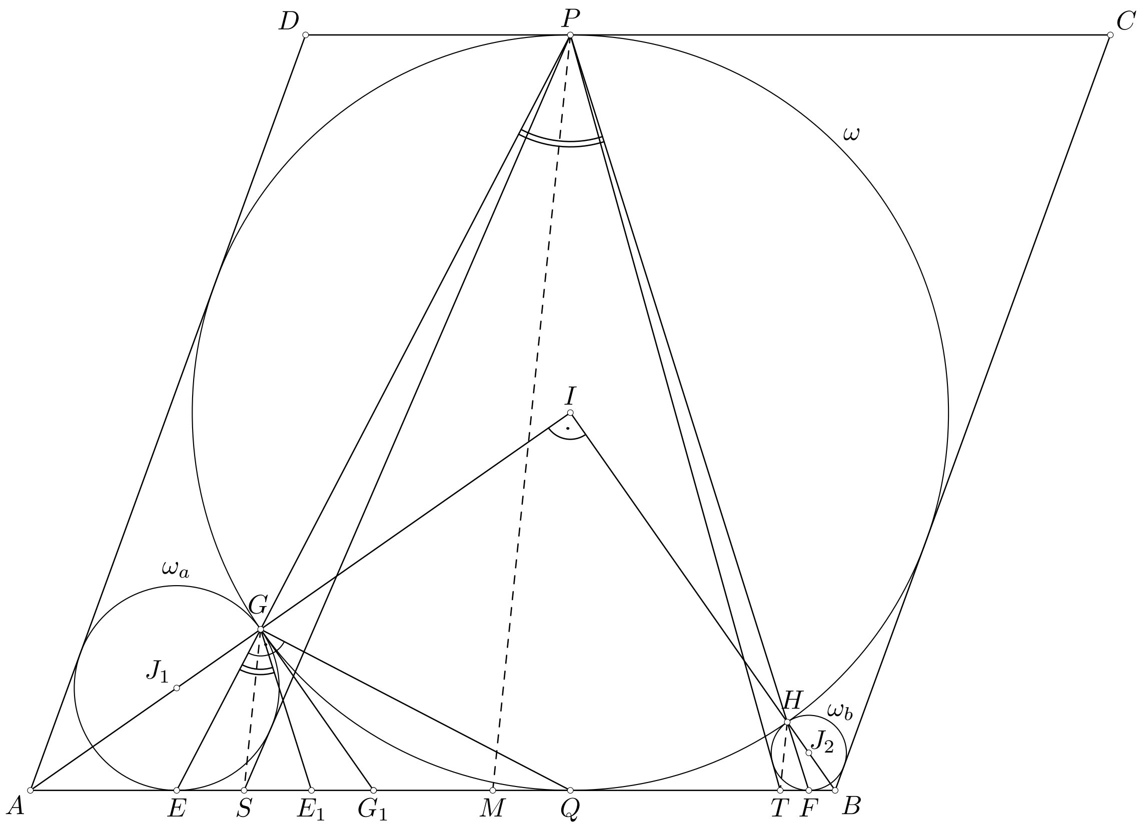


□

Wróćmy do rozwiązania zadania. Niech J_1 i J_2 będą środkami okręgów odpowiednio ω_a i ω_b. Niech E i F będą punktami styczności odcinka AB odpowiednio z okręgami ω_a i ω_b. Niech G i H będą punktami styczności ω odpowiednio z okręgami ω_a i ω_b. Niech Q będzie punktem styczności okręgu ω

z bokiem AB. Oznaczmy przez $J_+(o_1, o_2)$ i $J_-(o_1, o_2)$ jednokładności o skali odpowiednio dodatniej i ujemnej przekształcające dany okrąg o_1 na dany okrąg o_2. Wtedy S jest środkiem $J_-(\omega_a, \Gamma)$, G jest środkiem $J_-(\omega_a, \omega)$, T jest środkiem $J_-(\omega_b, \Gamma)$ i H jest środkiem $J_-(\omega_b, \omega)$.

Załóżmy nie wprost, że okręgi ω i Γ mają różne promienie. Wtedy istnieje jednokładność o skali dodatniej przekształcająca jeden okrąg na drugi. Niech zatem Z będzie środkiem jednokładności $J_+(\omega, \Gamma)$. Z twierdzenia o złożeniu jednokładności wiemy, że punkty Z, G i S są współliniowe. Analogicznie punkty Z, H i T są współliniowe. Zatem żeby wykazać sprzeczność wystarczy dowieść, że proste SG i TH nie przecinają się, czyli że są równoległe. Udowodnimy, że obie te proste są równoległe do PM, gdzie M jest środkiem odcinka EF.



Niech G_1 będzie punktem przecięcia wspólnej stycznej okręgów ω i ω_a w punkcie G z prostą AB. Wtedy $G_1E = G_1G = G_1Q$, czyli kąt EGQ jest prosty. Odcinek PQ jest średnicą okręgu ω, zatem kąt PGQ też jest prosty. Stąd punkty P, G i E są współliniowe. Analogicznie punkty P, H i F są współliniowe.

Niech teraz E_1 będzie punktem symetrycznym do E względem S. Wtedy z lematu zastosowanego w trójkącie EGQ wynika, że $\sphericalangle EGE_1 = 45°$. Ponieważ

$$\sphericalangle EPF = \sphericalangle GPH = \frac{1}{2}\sphericalangle GIH = \frac{1}{2}\sphericalangle AIB = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°,$$

więc trójkąty EGE_1, EPF są jednokładne. W szczególności środkowe GS, PM tych trójkątów są równoległe. Analogicznie dowodzimy, że $HT \parallel PM$. Wobec tego $GS \parallel HT$, co kończy rozwiązanie zadania.

9. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Odcinek AD jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC. Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt H przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że długość odcinka BC jest równa połowie obwodu trójkąta EFD.

Rozwiązanie:

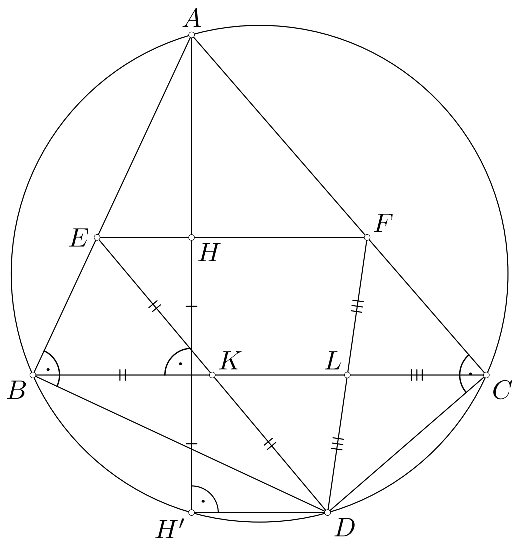
Obraz symetryczny H' punktu H względem prostej BC leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, ponieważ

$$\begin{aligned}\sphericalangle BH'C &= \sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle CBH - \sphericalangle HCB = 180^\circ - (90^\circ - \sphericalangle ACB) - (90^\circ - \sphericalangle CBA)\\ &= \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle BAC.\end{aligned}$$

Mamy $\sphericalangle DH'A = 90^\circ$, skąd wniosek, że proste DH', BC, EF są równoległe. Proste EF i DH' są jednakowo oddalone od prostej BC gdyż H' jest odbiciem H względem BC. Niech K i L będą punktami przecięcia odcinka BC odpowiednio z odcinkami DE i DF. Wówczas $KE = KD$. Ponadto trójkąt DBE jest prostokątny, więc $BK = KE = KD$. Analogicznie uzasadniamy, że $CL = LF = LD$. Z twierdzenia o linii środkowej $KL = \frac{1}{2}EF$. Ostatecznie

$$BC = BK + KL + CL = DK + \frac{1}{2}EF + DL = \frac{1}{2}(DE + EF + DF),$$

co kończy rozwiązanie.



10. Niech $k > 1$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita $n > 1$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, wszystkie większe od 1 takie, że

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_j)$$

są k-tymi potęgami liczb całkowitych.

Uwaga: Dla liczby całkowitej $n > 1$, $\varphi(n)$ to liczba dodatnich liczb całkowitych mniejszych od n i względnie pierwszych z n.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dla pewnych $n > m > 0$ liczby $a_1 = \ldots = a_m = 2$ oraz $a_{m+1} = \ldots = a_n = 3$ spełniają warunki postulowane w zadaniu. Zauważmy, że przy tak dobranych liczbach zachodzą równości

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 2m + 3(n - m) = 3n - m \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_j) = m + 2(n - m) = 2n - m. \tag{1}$$

Wystarczy więc tak dobrać liczby $m > n > 0$, że $3n - m$ i $2n - m$ są k-tymi potęgami pewnych liczb całkowitych.

Niech q będzie dowolną liczbą wymierną z przedziału $\left(\sqrt[k]{\frac{3}{2}}, \sqrt[k]{2}\right)$. Zapiszmy $q = \frac{a}{b}$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Zauważmy, że wówczas zachodzi $2 > \left(\frac{a}{b}\right)^k > \frac{3}{2}$. Wynika stąd, że

$$a^k - b^k > 2a^k - 3b^k \quad \text{oraz} \quad 2a^k - 3b^k > 0.$$

Wobec tego przyjmując $n = a^k - b^k$ oraz $m = 2a^k - 3b^k$ otrzymujemy $n > m > 0$, $3n - m = a^k$ oraz $2n - m = b^k$, co na mocy (1) pociąga za sobą tezę zadania.

11. Dana jest niestała funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = f(x)^2 + f(y)^2.$$

Dowieść, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x) + f(y) = f(x+y).$$

Rozwiązanie:

Przez $P(a, b)$ będziemy rozumieć podstawienie $x = a$, $y = b$ w równości danej w treści zadania.

Funkcja f jest niestała, zatem istnieje taki argument x_0, że $f(x_0) \neq f(0)$. Wtedy podstawienie $P(x_0, 0)$ daje

$$f(x_0)^2 + f(0)f(x_0) = f(x_0)^2 + f(0)^2,$$

więc $f(0)(f(x_0) - f(0)) = 0$. Ponieważ $f(x_0) \neq f(0)$, więc

$$f(0) = 0. \tag{1}$$

Jeżeli $f(x_1) = 0$, to podstawienie $P(x_1, y)$ oraz (1) daje $f(y)f(x_1 + y) = f(y)^2$. Funkcja f ma zatem następującą własność:

$$\text{jeżeli } f(x_1) = 0 \text{ i } f(y) \neq 0, \text{ to } f(x_1 + y) = f(y). \tag{2}$$

Wykażemy indukcyjnie, że

$$\text{jeżeli } k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \text{ i } x \in \mathbb{R}, \text{ to } f(kx) = kf(x). \tag{3}$$

Rozważmy najpierw przypadek, w którym $f(x) \neq 0$. Dla $k = 0$ teza wynika z (1), a dla $k = 1$ równość jest oczywista. Niech $k_0 \geqslant 1$ i załóżmy prawdziwość tezy indukcyjnej dla $k \leqslant k_0$. Podstawienie $P(k_0x, x)$ oraz założenie indukcyjne dają zależność

$$k_0(k_0 - 1)f(x)^2 + f(x)f((k_0 + 1)x) = (k_0^2 + 1)f(x)^2,$$

co po uproszczeniu i podzieleniu przez $f(x)$ daje $f\left((k_0 + 1)x\right) = (k_0+1)f(x)$, co kończy dowód indukcyjny dla $f(x) \neq 0$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym $f(x) = 0$. Załóżmy nie wprost, że $f(x) = 0$ i $f(kx) \neq 0$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Wtedy stosując wielokrotnie (2) otrzymujemy

$$0 \neq f(kx) = f(kx + x) = f(kx + 2x) = \ldots = f(2kx),$$

zaś na mocy już udowodnionego przypadku (3) mamy $f(2kx) = 2f(kx)$. Zatem $f(kx) = 2f(kx)$, skąd $f(kx) = 0$ wbrew wyborowi k. Dowód własności (3) został zakończony.

Udowodnimy teraz, że f jest funkcją nieparzystą. Korzystając z podstawienia $P(x, -x)$ oraz własności (1) i (3) otrzymujemy

$$2f(x)^2 = f(x)^2 + f(-x)^2.$$

Stąd dla każdego x mamy $f(x)^2 = f(-x)^2$. Z drugiej strony podstawienie $P(x, 2x)$ oraz własność (3) daje

$$f(x)f(-x) + 6f(x)^2 = 5f(x)^2,$$

skąd $f(x)f(-x) = -f(x)^2$. Wobec tego dla dowolnego x otrzymujemy

$$0 = f(x)^2 + 2f(x)f(-x) + f(-x)^2 = (f(x) + f(-x))^2.$$

Stąd
$$f(x) = -f(-x). \tag{4}$$

Przystąpimy teraz do dowodu równości $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Korzystając z podstawień $P\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$, $P(x,y)$, $P(x,-y)$ oraz własności (3), (4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(f(x+y)^2 + f(x-y)^2\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + f\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \\
&= f\left(\frac{x+y}{2}\right) f(y) + f\left(\frac{x-y}{2}\right) f(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x)^2 + f(y)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x)^2 + f(-y)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x)f(x-(-y)) + f(-y)f(x-y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x)f(x+y) - f(y)f(x-y)\right).
\end{aligned}$$

Zatem
$$\begin{aligned}
f(x+y)^2 + f(x-y)^2 &= 2f(x)^2 + 2f(y)^2 \\
&= 2f(x)f(x-y) + 2f(y)f(x+y) \\
&= 2f(x)f(x+y) - 2f(y)f(x-y).
\end{aligned} \tag{5}$$

Oznaczmy $a = f(x)+f(y)$, $b = f(x)-f(y)$, $c = f(x+y)$ oraz $d = f(x-y)$. Wówczas $2f(x) = a+b$, $2f(y) = a-b$ oraz $2f(x)^2 + 2f(y)^2 = a^2+b^2$. Przepisując (5) w terminach a, b, c, d dostajemy

$$\begin{aligned}
c^2 + d^2 &= a^2 + b^2 \\
&= (a+b)d + (a-b)c \\
&= (a+b)c - (a-b)d.
\end{aligned}$$

Wobec tego
$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2 = \frac{(a+b)d + (a-b)c}{2} + \frac{(a+b)c - (a-b)d}{2} = bd + ac.$$

Stąd
$$0 = (a^2+b^2) + (c^2+d^2) - 2(bd+ac) = (a-c)^2 + (b-d)^2.$$

Wnioskujemy stąd w szczególności, że $a = c$, tj. $f(x)+f(y) = f(x+y)$.

12. Dane są liczby całkowite $k < n$ oraz graf prosty o n wierzchołkach $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Załóżmy, że dla każdego k-elementowego zbioru $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ spełniona jest następująca własność: liczba wierzchołków v_j, które są połączone krawędzią ze wszystkimi wierzchołkami v_i dla $i \in I$ jest nieparzysta. Udowodnić, że liczba $n+k$ jest nieparzysta.

Rozwiązanie:

Niech G będzie grafem z treści zadania. W rozwiązaniu przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na k.

Rozważmy najpierw przypadek $k = 1$. Wtedy każdy wierzchołek ma stopień nieparzysty. Suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie jest więc tej samej parzystości co n. Z drugiej strony otrzymana suma jest podwojoną liczbą krawędzi w grafie, czyli jest liczbą parzystą. Wobec tego n jest parzyste, czyli $n+1$ jest nieparzyste.

Rozważmy teraz przypadek $k = 2$. Weźmy dowolny wierzchołek v i oznaczmy przez $N(v)$ zbiór jego sąsiadów. Wtedy dla każdego wierzchołka $w \in N(v)$ liczba wspólnych sąsiadów v i w jest nieparzysta, czyli liczba sąsiadów w, którzy należą do $N(v)$, jest nieparzysta. Oznacza to, że w podgrafie indukowanym przez $N(v)$ każdy wierzchołek ma stopień nieparzysty, co (jak pokazaliśmy w przypadku $k = 1$) implikuje, że $|N(v)|$ jest liczbą parzystą. Udowodniliśmy więc, że każdy wierzchołek w grafie G ma stopień parzysty.

Niech teraz V będzie zbiorem wszystkich wierzchołków w grafie G. Wybierzmy dowolny wierzchołek v i rozważmy zbiór $W = V \setminus (N(v) \cup \{v\})$. Wtedy dla dowolnego wierzchołka $w \in N(v)$ mamy, że jego stopień w grafie $N(v)$ jest nieparzysty, czyli jego stopień w podgrafie indukowanym przez $N(v) \cup \{v\}$ jest parzysty. Stąd i z faktu, że stopień wierzchołka w w grafie G jest parzysty wynika, że z wierzchołka w wychodzi parzyście wiele krawędzi do zbioru W. Zatem łączna liczba krawędzi pomiędzy zbiorami $N(v)$ i W jest liczbą parzystą.

Wybierzmy teraz dowolny wierzchołek $u \in W$. Z założenia wiemy, że wierzchołki v i u mają nieparzyście wiele wspólnych sąsiadów, czyli liczba krawędzi wychodzących z wierzchołka u do zbioru $N(v)$ jest nieparzysta. Zatem gdyby zbiór W miał nieparzyście wiele elementów, to łączna liczba krawędzi między $N(v)$ i W byłaby nieparzysta, co jest sprzeczne z konkluzją uzyskaną w poprzednim akapicie. Wobec tego do W należy parzysta liczba wierzchołków. Stąd i z parzystości $|N(v)|$ dostajemy, że liczba $n = |V| = |N(v)| + |W| + 1$ jest nieparzysta, czyli $n + 2$ jest liczbą nieparzystą.

W kroku indukcyjnym pokażemy, że jeśli dowolne $k + 2$ wierzchołków grafu G ma nieparzyście wiele wspólnych sąsiadów, to także dowolne k wierzchołków ma nieparzyście wiele wspólnych sąsiadów. Niech U będzie zbiorem dowolnych k wierzchołków grafu G. Ponieważ dowolne $k+2$ wierzchołków ma co najmniej jednego wspólnego sąsiada (bo ich liczba jest nieparzysta), więc również wierzchołki ze zbioru U posiadają niezerową liczbę wspólnych sąsiadów. Oznaczmy zbiór wszystkich wspólnych sąsiadów elementów U przez $N(U)$. Pokażemy teraz, że liczba $|N(U)|$ jest nieparzysta.

Dla $|N(U)| = 1$ powyższe stwierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że $|N(U)| \geqslant 2$. Weźmy dowolne dwa wierzchołki $v_1, v_2 \in N(U)$ i rozważmy zbiór $W = U \cup \{v_1, v_2\}$. Składa się on z $k + 2$ wierzchołków, więc z założenia wiemy, że jego wierzchołki mają nieparzystą liczbę wspólnych sąsiadów. Oznacza to, że wierzchołki v_1 i v_2 mają nieparzystą liczbę wspólnych sąsiadów w zbiorze $N(U)$. Zatem dla dowolnych dwóch wierzchołków w podgrafie indukowanym przez zbiór $N(U)$ liczba ich wspólnych sąsiadów jest nieparzysta. Wobec tego na mocy udowodnionego już przypadku $k = 2$ wiemy, że liczba wierzchołków w tym podgrafie jest nieparzysta, czyli $|N(U)|$ jest liczbą nieparzystą.

Otrzymaliśmy więc, że dla każdych k wierzchołków grafu G liczba wierzchołków sąsiadujących z każdym spośród nich jest nieparzysta. Zatem z założenia indukcyjnego dostajemy, że $n + k$ jest liczbą nieparzystą, czyli również $n + k + 2$ jest liczbą nieparzystą, co kończy dowód indukcyjny.

13. Znaleźć największą liczbę rzeczywistą c o następującej własności: dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ o sumie równej 1, spełniających dla każdego $i = 1, \ldots, n$ zależność $0 \leqslant a_i \leqslant \frac{1}{2}$, istnieje podzbiór tych liczb o sumie z przedziału $[c, 1 - c]$.

Rozwiązanie:
Odpowiedź: $c = \frac{1}{3}$.

Przyjmując $n = 3$ oraz $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ otrzymujemy, że $c \leqslant \frac{1}{3}$. Pokażemy, że jest to optymalna stała.

Jeśli istnieje taki indeks i, że $a_i \geqslant \frac{1}{3}$, to $\{a_i\}$ jest szukanym podzbiorem. W przeciwnym razie nierówność $a_i < \frac{1}{3}$ zachodzi dla każdego indeksu i. Rozważmy najmniejszy indeks ℓ, dla którego

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\ell \geqslant \frac{1}{3}.$$

Ponieważ $a_1 < \frac{1}{3}$, więc $\ell \geqslant 2$. Z wyboru ℓ wynika, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_{\ell-1} < \frac{1}{3}$. W takim razie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{\ell-1} + a_\ell < \frac{1}{3} + a_\ell < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Zatem podzbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$ spełnia warunki zadania.

14. Dana jest rodzina $\mathcal{F}$ zbiorów 2019-elementowych o mocy większej niż $2019! \cdot 2018^{2019}$. Wykazać, że istnieje 2019-elementowa rodzina $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ oraz taki zbiór X, że dla dowolnych różnych zbiorów $A, B \in \mathcal{G}$ zachodzi $A \cap B = X$.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu udowodnimy ogólniejszą tezę: dla każdej liczby całkowitej dodatniej k i rodziny $\mathcal{F}$ k-elementowych zbiorów o mocy większej niż $k! \cdot 2018^k$ istnieje 2019-elementowa rodzina $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ oraz taki zbiór X, że dla dowolnych różnych zbiorów $A, B \in \mathcal{G}$ zachodzi $A \cap B = X$. Wówczas przyjmując $k = 2019$ otrzymamy tezę zadania.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na k. Dla $k = 1$, czyli dla rodziny $\mathcal{F}$ zbiorów jednoelementowych o mocy większej niż 2018, wystarczy przyjąć jako $\mathcal{G}$ dowolną 2019-elementową podrodzinę rodziny $\mathcal{F}$ oraz $X = \emptyset$. Załóżmy więc, że $k > 1$.

Niech $\mathcal{G}' = \{G_1, \ldots, G_m\}$ będzie najliczniejszą rodziną parami rozłącznych elementów rodziny $\mathcal{F}$. Jeśli $m \geqslant 2019$, to przyjmując $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{2019}\}$ oraz $X = \emptyset$ otrzymujemy tezę. Załóżmy więc, że $m \leqslant 2018$. Oznaczmy $G = G_1 \cup \ldots \cup G_m$. Wówczas $|G| \leqslant 2018k$. Z definicji $\mathcal{G}'$ wynika, że każdy zbiór $F \in \mathcal{F}$ ma przynajmniej jeden element wspólny z pewnym elementem rodziny $\mathcal{G}'$ (to znaczy: dla każdego $F \in \mathcal{F}$ istnieje indeks i taki, że $F \cap G_i \neq \emptyset$). Wobec tego istnieje taki element a, który należy do przynajmniej

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|G|} > \frac{k! \cdot 2018^k}{k \cdot 2018} = (k-1)! \cdot 2018^{k-1}$$

zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$.

Rozważmy wszystkie te elementy rodziny $\mathcal{F}$, które zawierają element a i oznaczmy przez $\mathcal{F}'$ rodzinę tych zbiorów z usuniętym elementem a. Ponieważ $|\mathcal{F}'| > (k-1)! \cdot 2018^{k-1}$, więc na mocy założenia indukcyjnego istnieje taki zbiór X' oraz taka rodzina $\{G'_1, \ldots, G'_{2019}\} \subseteq \mathcal{F}'$, że $G'_i \cap G'_j = X'$ dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant 2019$. Niech $\mathcal{G} = \{G'_1 \cup \{a\}, \ldots, G'_{2019} \cup \{a\}\}$ oraz $X = X' \cup \{a\}$. Wówczas $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, rodzina $\mathcal{G}$ jest 2019-elementowa, a przecięcie dowolnych dwóch różnych zbiorów z $\mathcal{G}$ jest równe zbiorowi X, co dowodzi tezy indukcyjnej.

15. Punkt P leży na dwusiecznej wewnętrznej kąta przy wierzchołku A w trójkącie ABC. Odcinki PQ i PR są średnicami okręgów opisanych na trójkątach ABP i ACP. Proste BR i CQ przecinają się w punkcie X. Wykazać, że jeśli $X \neq P$, to proste XP i BC są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Sposób I

Zauważmy, że

$$\sphericalangle CRP = \sphericalangle CAP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle BQP,$$

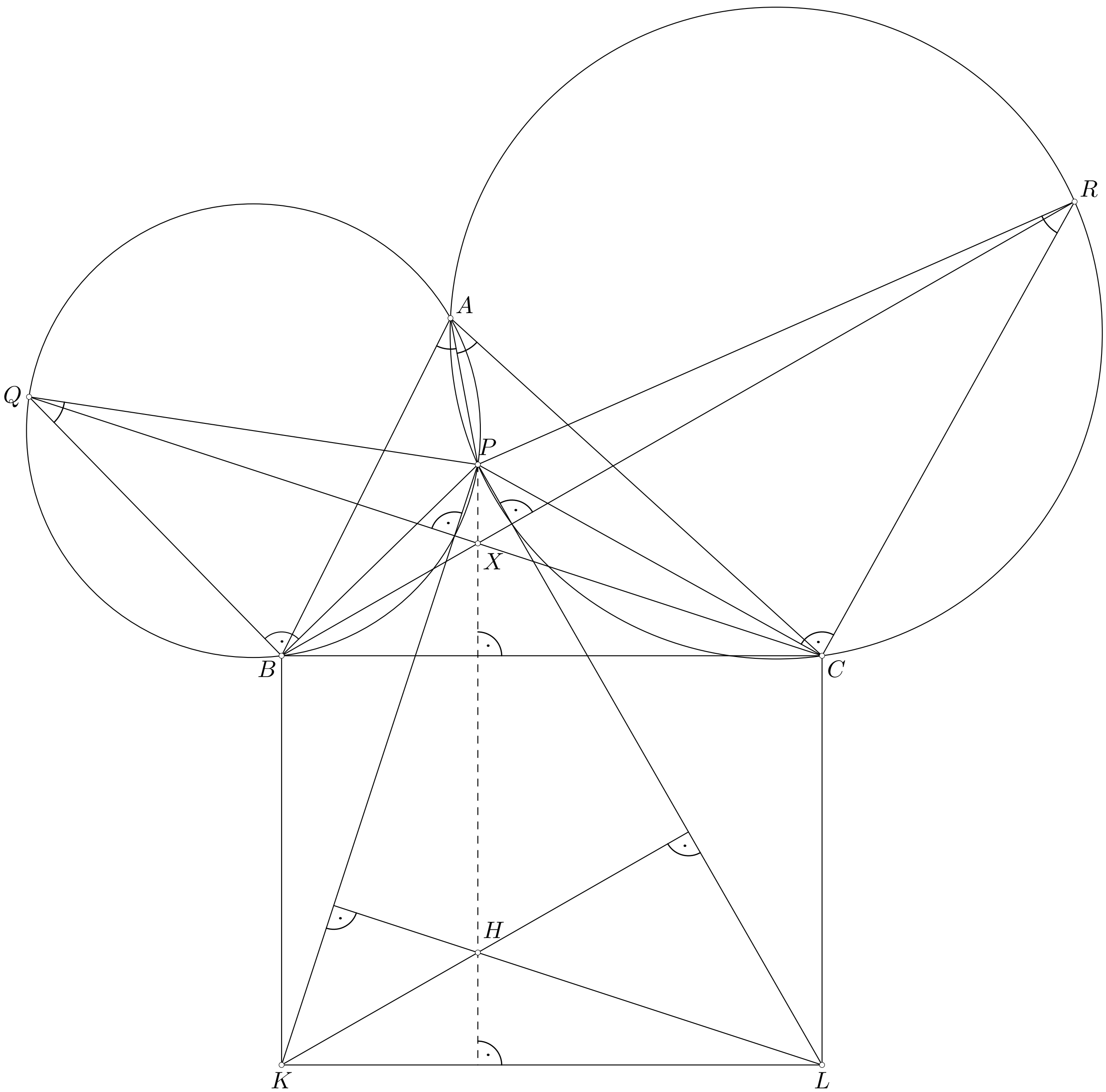
więc trójkąty prostokątne PBQ i PCR są podobne, skąd

$$\frac{BP}{BQ} = \frac{CP}{CR} = \alpha$$

dla pewnej liczby α. Na boku BC trójkąta ABC zbudujmy po zewnętrznej stronie prostokąt $BKLC$, przy czym $BK = \alpha BC$. Wówczas

$$\frac{BK}{BP} = \frac{BC}{BQ} = \beta$$

dla pewnej liczby β. Złożenie jednokładności o środku B i skali β z obrotem o kąt -90° wokół punktu B przeprowadza punkty Q i C odpowiednio na punkty P i K. Stąd wniosek, że $QC \perp PK$. Analogicznie dowodzimy, że $BR \perp PL$.



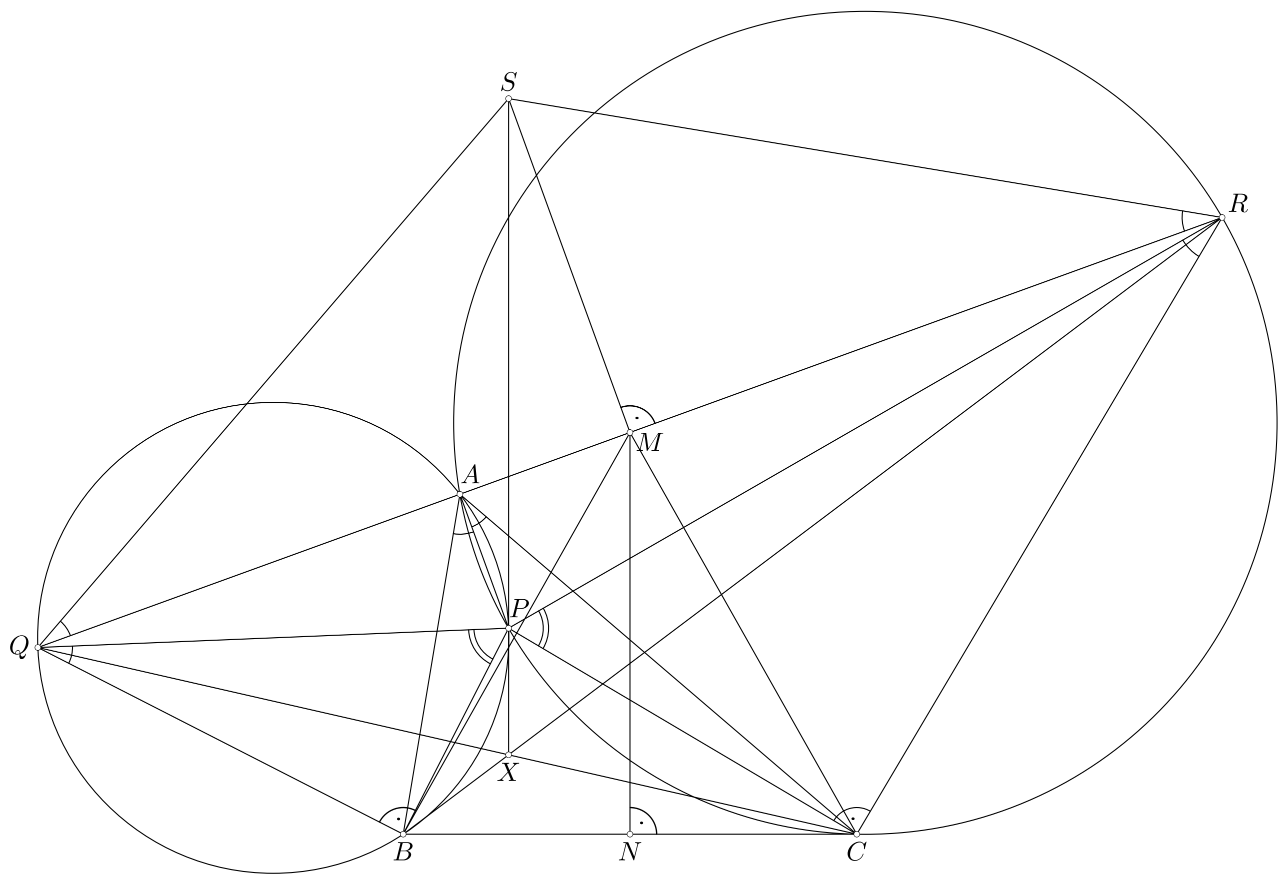
Niech H będzie takim punktem, że $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{XH}$. Wówczas $KH \parallel BX \perp PL$, a zatem $KH \perp PL$. Analogicznie dowodzimy, że $LH \perp PK$. Stąd H jest ortocentrum trójkąta PKL. Wobec tego $PH \perp KL \parallel BC$. Z drugiej strony, $XH \parallel BK \perp BC$. Z powyższych prostopadłości wynika więc, że P i X leżą na prostej prostopadłej do BC przechodzącej przez H, co kończy dowód.

Sposób II

Oznaczmy $\sphericalangle BAC = 2\alpha$. Wówczas

$$\sphericalangle CRP = \sphericalangle CAP = \alpha = \sphericalangle BAP = \sphericalangle BQP,$$

skąd otrzymujemy $\sphericalangle CPR = \sphericalangle BPQ$. Na boku QR trójkąta PQR zbudujmy na zewnątrz trójkąt QRS taki, że $\sphericalangle SRQ = \sphericalangle SQR = \alpha$. Z twierdzenia Jacobiego wynika, że proste BR, CQ i PS przecinają się w jednym punkcie. Wobec tego punkt X leży na prostej PS. Wystarczy więc udowodnić, że $PS \perp BC$.



Niech M i N będą odpowiednio środkami odcinków QR i BC. Trójkąty prostokątne PRC i SRM są podobne i jednakowo zorientowane, więc trójkąty CRM i PRS także są podobne i jednakowo zorientowane. Stąd otrzymujemy

$$\frac{CM}{PS} = \frac{CR}{PR} = \cos\alpha$$

oraz $\sphericalangle(PS, CM) = \alpha$. Analogicznie uzasadniamy, że

$$\frac{BM}{PS} = \frac{BQ}{PQ} = \cos\alpha$$

oraz $\sphericalangle(BM, PS) = \alpha$. Wobec tego $CM = BM$, zatem $MN \perp BC$. Ponadto

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle(PS, CM) + \sphericalangle(BM, PS) = 2\alpha,$$

więc $\sphericalangle(MN, CM) = \alpha$. Ta równość wraz z zależnością $\sphericalangle(PS, CM) = \alpha$ oznacza, że $PS \parallel MN$. Stąd $PS \perp BC$, co kończy dowód.

16. Niech $p > 2019$ będzie liczbą pierwszą i niech $n = 5 \cdot \frac{p^p - 1}{p-1}$. Oznaczmy

$$S = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \{-1, 0, 1\},\ \sum_{i=1}^{n} a_i > 0 \right\}.$$

Wyznaczyć resztę z dzielenia przez p liczby $|S|$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Reszta z dzielenia liczby $|S|$ przez p wynosi 96.

Sposób I

Niech A będzie zbiorem wszystkich ciągów n-elementowych o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Z symetrii wynika, że do A należy tyle samo ciągów o dodatniej sumie elementów, co o ujemnej sumie elementów.

Niech R będzie zbiorem wszystkich ciągów należących do A, których suma elementów jest równa 0. Wówczas zachodzi $2|S|+|R|=|A|=3^n$, zatem $|S|=\frac{1}{2}(3^n-|R|)$.

Zauważmy, że $n=5\cdot\frac{p^p-1}{p-1}=5+5p+\ldots+5p^{p-1}$. Ponieważ dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej k zachodzi $p^k\equiv 1 \pmod{p-1}$, więc

$$n\equiv\underbrace{5+5+\ldots+5}_{p\text{ liczb}}\equiv 5p\equiv 5 \pmod{p-1}.$$

Na mocy małego twierdzenia Fermata zachodzi $3^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, zatem $3^n\equiv 3^5\equiv 243 \pmod p$.

W każdym ciągu należącym do R liczba jedynek jest równa liczbie minus jedynek i liczba ta nie przekracza $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. Dla $k\in\{0,1,\ldots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$ liczba ciągów należących do R o dokładnie k jedynkach wynosi $\binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{k}$. Wobec tego

$$|R|=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{k}. \tag{1}$$

Pozostaje zatem wyznaczyć resztę z dzielenia liczby $|R|$ przez p. W tym celu skorzystamy z twierdzenia Lucasa.

Twierdzenie (Lucas)**.** *Dana jest liczba pierwsza q oraz nieujemne liczby całkowite*

$$a=a_0+a_1q+\ldots+a_\ell q^\ell, \qquad b=b_0+b_1q+\ldots+b_\ell q^\ell,$$

przy czym $a_i,b_i\in\{0,1,2,\ldots,q-1\}$ dla $0\leqslant i\leqslant \ell$. Wtedy

$$\binom{a}{b}\equiv\binom{a_0}{b_0}\cdot\binom{a_1}{b_1}\cdot\ldots\cdot\binom{a_\ell}{b_\ell} \pmod q.$$

Dowód. Zdefiniujmy funkcję $D(z)$ jako iloczyn wszystkich liczb od 1 do z niepodzielnych przez q, tzn.

$$D(z)=\frac{z!}{q\cdot 2q\cdot\ldots\cdot\lfloor\frac{z}{q}\rfloor q}.$$

Zauważmy, że $z!=\left\lfloor\frac{z}{q}\right\rfloor!\cdot D(z)\cdot q^{\lfloor z/q\rfloor}$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\binom{a}{b}&=\frac{a!}{b!(a-b)!}=\frac{\lfloor\frac{a}{q}\rfloor!\cdot D(a)\cdot q^{\lfloor a/q\rfloor}}{\lfloor\frac{b}{q}\rfloor!\cdot D(b)\cdot q^{\lfloor b/q\rfloor}\cdot\lfloor\frac{a-b}{q}\rfloor!\cdot D(a-b)\cdot q^{\lfloor (a-b)/q\rfloor}}\\&=\frac{D(a)}{D(b)D(a-b)}\cdot q^{\lfloor a/q\rfloor-\lfloor b/q\rfloor-\lfloor (a-b)/q\rfloor}\cdot\frac{\lfloor\frac{a}{q}\rfloor!}{\lfloor\frac{b}{q}\rfloor!\cdot\lfloor\frac{a-b}{q}\rfloor!}.\end{aligned} \tag{2}$$

Ostatni czynnik stojący po prawej stronie równości (2) jest równy

$$\frac{\lfloor\frac{a}{q}\rfloor!}{\lfloor\frac{b}{q}\rfloor!\cdot\lfloor\frac{a-b}{q}\rfloor!}=\frac{\lfloor\frac{a}{q}\rfloor!}{\left(\lfloor\frac{b}{q}\rfloor+\lfloor\frac{a-b}{q}\rfloor\right)!}\cdot\frac{\left(\lfloor\frac{b}{q}\rfloor+\lfloor\frac{a-b}{q}\rfloor\right)!}{\lfloor\frac{b}{q}\rfloor!\cdot\lfloor\frac{a-b}{q}\rfloor!}=\frac{\lfloor\frac{a}{q}\rfloor!}{\left(\lfloor\frac{b}{q}\rfloor+\lfloor\frac{a-b}{q}\rfloor\right)!}\cdot\binom{\lfloor\frac{b}{q}\rfloor+\lfloor\frac{a-b}{q}\rfloor}{\lfloor\frac{b}{q}\rfloor},$$

jest więc liczbą całkowitą, gdyż $\lfloor\frac{a}{q}\rfloor\geqslant\lfloor\frac{b}{q}\rfloor+\lfloor\frac{a-b}{q}\rfloor$. Dodatkowo wyrazy $D(a)$, $D(b)$, $D(a-b)$ z definicji są niepodzielne przez q. Korzystając z założeń twierdzenia zauważmy dodatkowo, że

$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{a}{q}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{b}{q}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a-b}{q}\right\rfloor &= \left\lfloor\frac{a_0+a_1q+\ldots+a_\ell q^\ell}{q}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{b_0+b_1q+\ldots+b_\ell q^\ell}{q}\right\rfloor\\ &\quad-\left\lfloor\frac{(a_0-b_0)+(a_1-b_1)q+\ldots+(a_\ell-b_\ell)q^\ell}{q}\right\rfloor\\ &=\left\lfloor\frac{a_0}{q}\right\rfloor+a_1+a_2q+\ldots+a_\ell q^{\ell-1}-\left\lfloor\frac{b_0}{q}\right\rfloor-b_1-b_2q-\ldots-b_\ell q^{\ell-1}\\ &\quad-\left\lfloor\frac{a_0-b_0}{q}\right\rfloor-(a_1-b_1)-(a_2-b_2)q-\ldots-(a_\ell-b_\ell)q^{\ell-1}\\ &=-\left\lfloor\frac{a_0-b_0}{q}\right\rfloor.\end{aligned} \tag{3}$$

Jeśli $\left\lfloor\frac{a}{q}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{b}{q}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a-b}{q}\right\rfloor>0$, to korzystając z (2) otrzymujemy, że $q\mid\binom{a}{b}$. Ponadto na mocy (3) widzimy, że $\left\lfloor\frac{a_0-b_0}{q}\right\rfloor<0$, czyli $a_0<b_0$. W tym przypadku mamy więc

$$\binom{a}{b}\equiv 0\equiv\binom{a_0}{b_0}\cdot\binom{a_1}{b_1}\cdot\ldots\cdot\binom{a_\ell}{b_\ell}\pmod q.$$

Pozostało rozpatrzyć przypadek $\left\lfloor\frac{a}{q}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{b}{q}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a-b}{q}\right\rfloor=0$. Wówczas

$$\frac{\left\lfloor\frac{a}{q}\right\rfloor!}{\left\lfloor\frac{b}{q}\right\rfloor!\cdot\left\lfloor\frac{a-b}{q}\right\rfloor!}=\binom{\left\lfloor\frac{a}{q}\right\rfloor}{\left\lfloor\frac{b}{q}\right\rfloor}.$$

Wyznaczymy teraz resztę z dzielenia liczby $\frac{D(a)}{D(b)D(a-b)}$ przez q. Mamy

$$D(a)=\left(\prod_{i=0}^{\lfloor a/q\rfloor-1}\prod_{j=1}^{q-1}(iq+j)\right)\cdot\prod_{j=1}^{a_0}\left(\left\lfloor\frac{a}{q}\right\rfloor q+j\right),$$

zatem $D(a)\equiv((q-1)!)^{\lfloor a/q\rfloor}\cdot a_0!\pmod q$. Podobnie otrzymujemy $D(b)\equiv((q-1)!)^{\lfloor b/q\rfloor}\cdot b_0!\pmod q$ oraz $D(a-b)\equiv((q-1)!)^{\lfloor(a-b)/q\rfloor}\cdot(a_0-b_0)!\pmod q$. Korzystając z równości $\left\lfloor\frac{a}{q}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{b}{q}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{a-b}{q}\right\rfloor$ dostajemy

$$\frac{D(a)}{D(b)D(a-b)}\equiv\binom{a_0}{b_0}\pmod q.$$

Łącząc otrzymane wnioski, na mocy (2) otrzymujemy, że

$$\binom{a}{b}\equiv\binom{a_0}{b_0}\cdot\binom{\left\lfloor\frac{a}{q}\right\rfloor}{\left\lfloor\frac{b}{q}\right\rfloor}\pmod q. \tag{4}$$

Zauważmy, że jeśli $a=a_0+a_1q+\ldots+a_lq^l$ oraz $b=b_0+b_1q+\ldots+b_lq^l$, to $\left\lfloor\frac{a}{q}\right\rfloor=a_1+a_2q+\ldots+a_\ell q^{\ell-1}$ oraz $\left\lfloor\frac{b}{q}\right\rfloor=b_1+b_2q+\ldots+b_\ell q^{\ell-1}$. Do zakończenia dowodu pozostaje zastosować indukcję względem ℓ. □

Wniosek. *Niech $a=a_0+a_1q+\ldots+a_\ell q^\ell$ oraz $b=b_0+b_1q+\ldots+b_\ell q^\ell$, gdzie $a_i,b_i\in\{0,1,2,\ldots,q-1\}$ dla $0\leqslant i\leqslant\ell$. Wówczas $\binom{a}{b}\equiv 0\pmod q$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje i, dla którego $a_i<b_i$.* □

Zastanówmy się, kiedy liczba $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$ nie dzieli się przez p. Z powyższego wniosku wiemy, że jeżeli $n = n_0 + n_1p + \ldots + n_\ell p^\ell$ oraz $k = k_0 + k_1p + \ldots + k_\ell p^\ell$, gdzie $n_i, k_i \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ dla $0 \leqslant i \leqslant \ell$, to $\binom{n}{k} \not\equiv 0 \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego i zachodzi $k_i \leqslant n_i$. Gdy te nierówności są spełnione, to $n - k = (n_0 - k_0) + (n_1 - k_1)p + \ldots + (n_\ell - k_\ell)p^\ell$ oraz $0 \leqslant n_i - k_i < p$ dla każdego i. Zatem obie liczby $\binom{n}{k}$, $\binom{n-k}{k}$ są niepodzielne przez p wtedy i tylko wtedy, gdy $n_i - k_i \geqslant k_i$ dla każdego i, czyli $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} \not\equiv 0 \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy gdy $2k_i \leqslant n_i$ dla każdego i.

Stąd wniosek, że możemy w sumie występującej w kongruencji (1) uwzględniać jedynie wyrazy dla k spełniających wspomniany w powyższym akapicie warunek. Jednak każda liczba $k = k_0 + k_1p + \ldots + k_\ell p^\ell$ spełniająca warunek $2k_i \leqslant n_i$ dla każdego i, spełnia także $2k \leqslant n$, czyli jest uwzględniona w sumie występującej w kongruencji (1). W takim razie

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k} \equiv \sum_{k_0=0}^{\lfloor n_0/2 \rfloor} \sum_{k_1=0}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} \ldots \sum_{k_\ell=0}^{\lfloor n_\ell/2 \rfloor} \binom{n_0 + \ldots + n_\ell p^\ell}{k_0 + \ldots + k_\ell p^\ell} \cdot \binom{(n_0 - k_0) + \ldots + (n_\ell - k_\ell)p^\ell}{k_0 + \ldots + k_\ell p^\ell} \pmod{p}.$$

Z twierdzenia Lucasa wynika, że

$$\binom{n_0 + \ldots + n_\ell p^\ell}{k_0 + \ldots + k_\ell p^\ell} \cdot \binom{(n_0 - k_0) + \ldots + (n_\ell - k_\ell)p^\ell}{k_0 + \ldots + k_\ell p^\ell} \equiv \binom{n_0}{k_0} \cdot \binom{n_0 - k_0}{k_0} \cdot \ldots \cdot \binom{n_\ell}{k_\ell} \cdot \binom{n_\ell - k_\ell}{k_\ell} \pmod{p}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k} &\equiv \sum_{k_0=0}^{\lfloor n_0/2 \rfloor} \sum_{k_1=0}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} \ldots \sum_{k_\ell=0}^{\lfloor n_\ell/2 \rfloor} \binom{n_0 + \ldots + n_\ell p^\ell}{k_0 + \ldots + k_\ell p^\ell} \cdot \binom{(n_0 - k_0) + \ldots + (n_\ell - k_\ell)p^\ell}{k_0 + \ldots + k_\ell p^\ell} \\
&\equiv \sum_{k_0=0}^{\lfloor n_0/2 \rfloor} \sum_{k_1=0}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} \ldots \sum_{k_\ell=0}^{\lfloor n_\ell/2 \rfloor} \binom{n_0}{k_0} \cdot \binom{n_0 - k_0}{k_0} \cdot \ldots \cdot \binom{n_\ell}{k_\ell} \cdot \binom{n_\ell - k_\ell}{k_\ell} \\
&\equiv \left(\sum_{k_0=0}^{\lfloor n_0/2 \rfloor} \binom{n_0}{k_0}\binom{n_0 - k_0}{k_0} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_\ell=0}^{\lfloor n_\ell/2 \rfloor} \binom{n_\ell}{k_\ell}\binom{n_\ell - k_\ell}{k_\ell} \right) \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Jednakże $\ell = p - 1$ i $n_0 = n_1 = \ldots = n_{p-1} = 5$, zatem dla dowolnego $0 \leqslant i \leqslant p - 1$ zachodzi

$$\sum_{k_i=0}^{\lfloor n_i/2 \rfloor} \binom{n_i}{k_i}\binom{n_i - k_i}{k_i} = \binom{5}{0} \cdot \binom{5}{0} + \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 51.$$

Stąd wniosek, że

$$\left(\sum_{k_0=0}^{\lfloor n_0/2 \rfloor} \binom{n_0}{k_0}\binom{n_0 - k_0}{k_0} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_\ell=0}^{\lfloor n_\ell/2 \rfloor} \binom{n_\ell}{k_\ell}\binom{n_\ell - k_\ell}{k_\ell} \right) = 51^p.$$

Wobec tego $|R| \equiv 51^p \equiv 51 \pmod{p}$ na mocy małego twierdzenia Fermata. Stąd

$$|S| \equiv \frac{1}{2} \cdot (3^n - |R|) \equiv \frac{1}{2} \cdot (243 - 51) = 96 \pmod{p}.$$

Sposób II

Dla każdego $i \geqslant 1$ zdefiniujmy $n_i = 5 \cdot \frac{p^i - 1}{p-1}$ oraz

$$R_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{n_i}) \in \{-1, 0, 1\}^{n_i} \colon a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_i} = 0\}.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że $R_i \equiv 51^i \pmod{p}$ dla każdego $i \geqslant 1$. Dla $i = p$ otrzymamy sytuację z zadania i rozumując podobnie jak w sposobie pierwszym otrzymamy $|S| \equiv 96 \pmod{p}$.

Obliczymy najpierw $|R_1|$. Należy obliczyć liczbę pięcioelementowych ciągów o wyrazach -1, 0, 1, których suma jest podzielna przez p. Ponieważ $p > 2019 > 5$, więc suma wyrazów każdego takiego ciągu równa się 0. Jest jeden taki ciąg złożony z samych zer, $\binom{5}{3} \cdot 2$ ciągi zawierające dokładnie 3 zera oraz $5 \cdot \binom{4}{2}$ ciągi zawierające dokładnie jedno zero. Łącznie jest ich

$$|R_1| = 1 + \binom{5}{3} \cdot 2 + 5 \cdot \binom{4}{2} = 1 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 1 + 20 + 30 = 51.$$

W szczególności $|R_1| \equiv 51^1 \pmod{p}$.

Załóżmy teraz, że $|R_i| \equiv 51^i \pmod{p}$ dla pewnego $i \geqslant 1$. Udowodnimy, że $|R_{i+1}| \equiv 51^{i+1} \pmod{p}$.

Powiemy, że ciąg $(x_k)_{k=1}^p$ jest *cyklicznym przestawieniem* ciągu $(y_k)_{k=1}^p$, gdy istnieje taki indeks j, że

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_p, y_1, y_2, \ldots, y_j).$$

Skoro p jest liczbą pierwszą, to cyklicznych przestawień ciągu niestałego jest dokładnie p.

Zauważmy, że $n_{i+1} \equiv 5 \pmod{p}$. Możemy więc podzielić dowolny ciąg w R_i na $\frac{n_{i+1}-5}{p} = n_i$ podciągów długości p oraz jeden podciąg długości 5.

Powiemy, że dwa ciągi $(a_k)_{k=1}^{n_{i+1}}, (b_k)_{k=1}^{n_{i+1}} \in R_i$ są *cyklicznie równoważne*, gdy dla każdego $0 \leqslant j < \frac{n_{i+1}-5}{p}$ ciąg $(a_k)_{k=pj+1}^{pj+p}$ jest cyklicznym przestawieniem ciągu $(b_k)_{k=pj+1}^{pj+p}$, oraz $(a_k)_{k=n_{i+1}-4}^{n_{i+1}} = (b_k)_{k=n_{i+1}-4}^{n_{i+1}}$.

Wprost z definicji wynika, że cykliczna równoważność jest relacją równoważności. Jeśli dla danego $a = (a_k)_{k=1}^{n_{i+1}} \in R_i$ spośród $\frac{n_{i+1}-5}{p}$ podciągów wskazanej postaci dokładnie m jest niestałych, to klasa równoważności ciągu a ma p^m elementów. W szczególności $|R_{i+1}| \equiv |R'_{i+1}| \pmod{p}$, gdzie R'_{i+1} jest zbiorem tych ciągów $a \in R_{i+1}$, dla których wszystkie rozważane p-wyrazowe podciągi są stałe.

Każdy element $a \in R'_{i+1}$ jest postaci

$$a = (\underbrace{a_p, a_p, \ldots, a_p}_{p \text{ razy}}, \underbrace{a_{2p}, a_{2p}, \ldots, a_{2p}}_{p \text{ razy}}, \ldots, \underbrace{a_{n_ip}, a_{n_ip}, \ldots, a_{n_ip}}_{p \text{ razy}}, a_{n_ip+1}, a_{n_ip+2}, a_{n_ip+3}, a_{n_ip+4}, a_{n_ip+5}).$$

Wobec tego suma pierwszych $n_{i+1} - 5$ wyrazów ciągu a jest podzielna przez p, a skoro suma wszystkich wyrazów wynosi 0, to suma 5 ostatnich wyrazów też jest podzielna przez p. Stąd ciąg złożony z ostatnich pięciu wyrazów ciągu a jest w zbiorze R_1. To oznacza również, że suma pierwszych $n_{i+1} - 5$ wyrazów ciągu a musi być równa 0, czyli $p \cdot \sum_{j=1}^{n_i} a_{jp} = 0$, skąd $\sum_{j=1}^{n_i} a_{jp} = 0$. Zatem $(a_p, a_{2p}, \ldots, a_{n_ip}) \in R_i$.

Otrzymaliśmy więc, że każdy ciąg $a \in R'_{i+1}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez pewien ciąg $b \in R_i$ oraz pewien ciąg $c \in R_1$ i vice versa — każda para ciągów $b \in R_i$, $c \in R_1$ jednoznacznie wyznacza pewien ciąg $a \in R'_{i+1}$. Wobec tego $|R'_{i+1}| = |R_i| \cdot |R_1|$.

Ostatecznie

$$|R_{i+1}| \equiv |R'_{i+1}| = |R_i| \cdot |R_1| \equiv 51^i \cdot 51 = 51^{i+1} \pmod{p},$$

co kończy dowód indukcyjny.

17. Na tablicy napisano liczby $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2019}$. Wykonujemy następującą operację: wybieramy dwie liczby a, b znajdujące się na tablicy i zastępujemy je liczbą $ab + a + b$. Postępowanie to kontynuujemy. Znaleźć wszystkie liczby, które mogą pojawić się na tablicy po wykonaniu 2018 kroków.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Szukana liczba wynosi 2019.

Niech $S = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2019}\}$. Wykażemy indukcyjnie ze względu na liczbę wykonanych operacji, że każda liczba znajdująca się na tablicy jest postaci $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \ldots (s_m + 1) - 1$, gdzie $s_1, \ldots, s_m \in S$

i każdy element S występuje w dokładnie jednej liczbie napisanej na tablicy. Wówczas otrzymamy, że po wykonaniu 2018 operacji liczba zapisana na tablicy jest równa

$$\prod_{i=1}^{2019}\left(\frac{1}{i}+1\right)-1=\prod_{i=1}^{2019}\frac{i+1}{i}-1=2020-1=2019.$$

Oznaczmy przez k liczbę wykonanych operacji. Dla $k=0$ teza indukcyjna oczywiście zachodzi, ponieważ każda liczba jest postaci $\frac{1}{i}=(\frac{1}{i}+1)-1$. Załóżmy teraz, że $k\geqslant 1$. Oznaczmy przez c liczbę, która została zapisana na tablicy po wykonaniu k-tej operacji. Wówczas $c=a+b+ab$ i z założenia indukcyjnego $a=(a_1+1)\dots(a_m+1)-1$ oraz $b=(b_1+1)\dots(b_n+1)-1$, gdzie $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n$ to różne elementy zbioru S. Wówczas

$$\begin{aligned}c&=a+b+ab=(a+1)(b+1)-1\\&=((a_1+1)\dots(a_m+1)-1+1)((b_1+1)\dots(b_n+1)-1+1)-1\\&=(a_1+1)\dots(a_m+1)(b_1+1)\dots(b_n+1)-1,\end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

18. Nieprzystające okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach A i B oraz przecinają się w punktach C i D. Prosta CD przecina okrąg o odpowiednio w punktach E i F. Styczne do okręgu o w punktach E i F przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkty P, A, B leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Sposób I

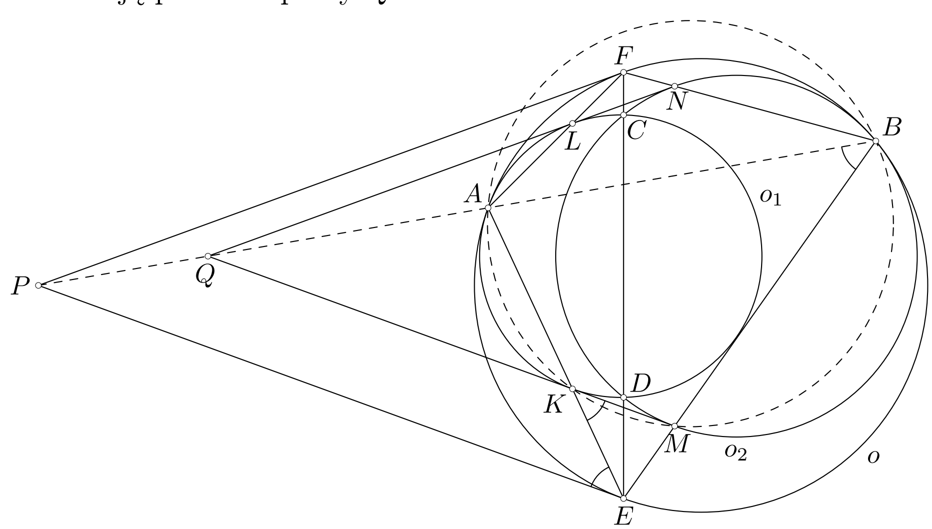
Załóżmy bez straty dla ogólności, że punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej CD. Niech proste AE i AF przecinają okrąg o_1 ponownie w punktach odpowiednio K i L, zaś proste BE i BF przecinają okrąg o_2 ponownie w punktach odpowiednio M i N. Mamy

$$EK\cdot EA=EC\cdot ED=EM\cdot EB,$$

więc na czworokącie $ABMK$ można opisać okrąg. Stąd i z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą dostajemy

$$\sphericalangle MKE=\sphericalangle ABE=\sphericalangle AEP,$$

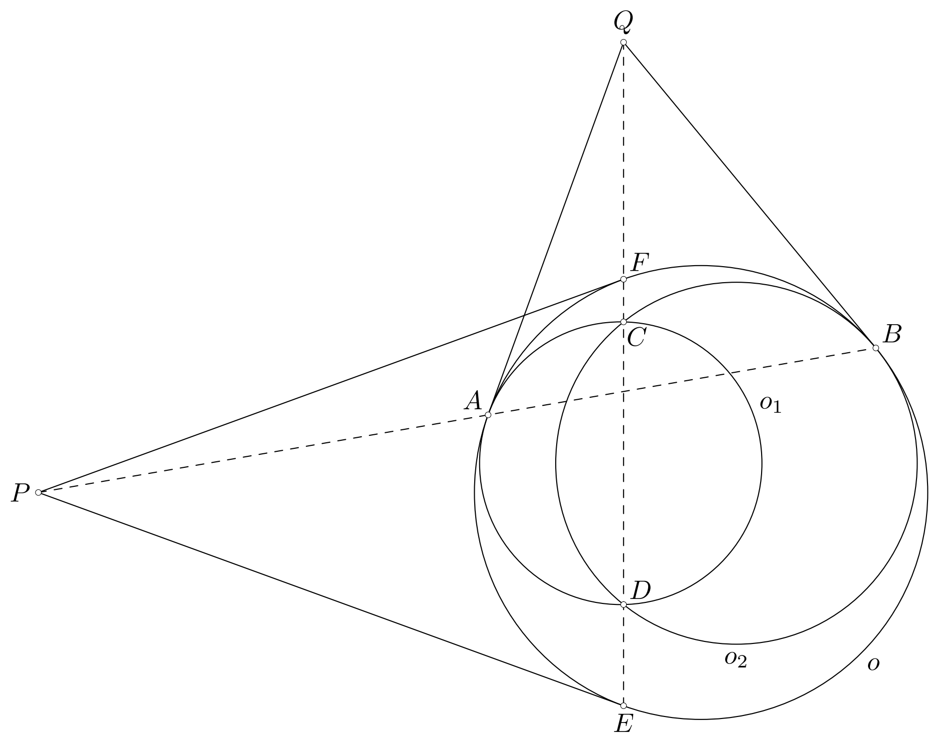
więc prosta KM jest równoległa do prostej PE. Jednokładność o środku A przekształcająca okrąg o na okrąg o_1 przeprowadza punkt E na punkt K, zaś styczną do okręgu o w punkcie E na styczną do okręgu o_1 w punkcie K. W związku z tym prosta KM jest styczna do okręgu o_1. Analogicznie uzasadniamy, że prosta KM jest styczna do okręgu o_2, więc jest wspólną styczną obu tych okręgów. W podobny sposób dowodzimy, że prosta LN jest wspólną styczną okręgów o_1 i o_2. Ponieważ okręgi te nie są przystające, więc proste KM i LN mają punkt wspólny Q.



Jednokładność o środku A przekształcająca okrąg o_1 na okrąg o przeprowadza punkty K i L odpowiednio na punkty E i F, a więc proste QK i QL odpowiednio na proste PE i PF. W takim razie obrazem punktu Q jest punkt P, co prowadzi do wniosku, że punkty A, P, Q są współliniowe. Punkt Q jest ponadto środkiem jednokładności o skali dodatniej przekształcającej okrąg o_1 na okrąg o_2. Jednokładność ta jest złożeniem jednokładności o środku A i skali dodatniej przekształcającej okrąg o_1 na okrąg o z jednokładnością o środku B i skali dodatniej przekształcającą okrąg o na okrąg o_2. Z twierdzenia o złożeniu jednokładności wnosimy, że punkty Q, A, B leżą na jednej prostej. W takim razie punkty P, Q, A, B są współliniowe, skąd otrzymujemy tezę.

Sposób II

Jeśli odcinek AB jest średnicą okręgu o, to teza jest oczywista ze względu na symetrię rysunku. W przeciwnym razie proste styczne do o w punktach A i B przecinają się. Oznaczmy ich punkt przecięcia przez Q. Wówczas z twierdzenia o trzech osiach potęgowych dla okręgów o, o_1, o_2 dostajemy, że punkt Q leży na prostej CD. Punkt Q leży więc na biegunowej punktu P względem o, skąd na mocy prawa wzajemności biegunowych, P leży na biegunowej Q. Biegunową punktu Q jest prosta AB, zatem punkty P, A, B są współliniowe.



Uwaga: W powyższym rozwiązaniu zamiast prawa wzajemności biegunowych można skorzystać z własności symedian lub z własności czworokątów harmonicznych.

19. Udowodnić, że istnieje tylko skończenie wiele takich trójek dodatnich liczb całkowitych a, b, n, że zachodzi równość

$$n! = 2^a - 2^b.$$

Rozwiązanie:

Wybierzmy liczbę N tak dużą, że dla $n > N$ zachodzi nierówność $3^{n/3-2} > n^2$. Wystarczy udowodnić, że dla $n > N$ równanie z treści zadania nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b. Załóżmy więc, że $n > N$.

Z równania $n! = 2^a - 2^b$ otrzymujemy natychmiast $a > b$. Co więcej, liczba $2^a - 2^b = 2^b(2^{a-b} - 1)$ dzieli się przez 3. Stąd $3 \mid 2^{a-b} - 1$.

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej m zachodzi $3 \mid 2^m - 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $2 \mid m$. Stąd $2 \mid a - b$.

Dla liczby pierwszej p oraz niezerowej liczby całkowitej x symbolem $v_p(x)$ będziemy oznaczać największy wykładnik m, dla którego $p^m \mid x$. Skorzystamy z następującego lematu:

Lemat (Lifting The Exponent Lemma)**.** *Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, m, że $x \neq y$, $m > 0$, $p \mid x - y$ oraz $p \nmid xy$. Wówczas*

$$v_p(x^m - y^m) = v_p(x - y) + v_p(m).$$

Dowód. Udowodnimy najpierw lemat dla $m = p$. Niech $k = v_p(x - y)$. Wówczas $x = p^k\ell + y$ dla pewnej liczby ℓ niepodzielnej przez p. Wobec tego

$$x^p - y^p = \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(p^k\ell\right)^i y^{p-i}\right) - y^p = \left(\sum_{i=2}^{p} \binom{p}{i} \left(p^k\ell\right)^i y^{p-i}\right) + p^{k+1}\ell y^{p-1}.$$

Każdy składnik w indeksowanej sumie jest podzielny przez p^{k+2}, a składnik $p^{k+1}\ell y^{p-1}$ jest podzielny przez p^{k+1} i nie jest podzielny przez p^{k+2}. Wobec tego $v_p(x^p - y^p) = k + 1 = v_p(x - y) + 1$, co dowodzi lematu w przypadku $m = p$.

Udowodnimy teraz lemat dla $p \nmid m$. Mamy

$$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \ldots + xy^{m-2} + y^{m-1}).$$

Ponieważ $x \equiv y \not\equiv 0 \pmod{p}$, więc

$$x^{m-1} + x^{m-2}y + \ldots + xy^{m-2} + y^{m-1} \equiv m \cdot x^{m-1} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Wobec tego $p \nmid x^{m-1} + x^{m-2}y + \ldots + xy^{m-2} + y^{m-1}$, zatem

$$v_p(x^m - y^m) = v_p\left((x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \ldots + xy^{m-2} + y^{m-1})\right) = v_p(x - y),$$

co kończy dowód lematu w przypadku $p \nmid m$.

Rozważmy teraz ogólny przypadek. Niech $m = p^k \cdot \ell$, przy czym $p \nmid \ell$. Korzystając z wcześniej udowodnionych przypadków otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_p(x^m - y^m) &= v_p\left(\left(x^{p^k}\right)^\ell - \left(y^{p^k}\right)^\ell\right) = v_p\left(x^{p^k} - y^{p^k}\right) = v_p\left(x^{p^{k-1}} - y^{p^{k-1}}\right) + 1 \\ &= v_p\left(x^{p^{k-2}} - y^{p^{k-2}}\right) + 2 = \ldots = v_p(x^p - y^p) + k - 1 = v_p(x - y) + k \\ &= v_p(x - y) + v_p(m). \end{aligned}$$

□

Z powyższego lematu otrzymujemy, że dla dowolnego $m > 0$ zachodzi równość

$$v_3(4^m - 1) = v_3(4 - 1) + v_3(m) = 1 + v_3(m).$$

Zatem

$$v_3(2^a - 2^b) = v_3(2^{a-b} - 1) = v_3(4^{(a-b)/2} - 1) = 1 + v_3\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Przypomnijmy teraz znaną równość

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

Wynika z niej w szczególności, że $v_3(n!) \geqslant \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor > \frac{n}{3} - 1$. W takim razie

$$1 + v_3\left(\frac{a-b}{2}\right) = v_3(2^a - 2^b) = v_3(n!) > \frac{n}{3} - 1.$$

Zatem
$$\frac{a-b}{2} > 3^{n/3-2} > n^2.$$
Otrzymujemy więc
$$n! = 2^a - 2^b \geqslant 2^{a-b} - 1 > 2^{2n^2} - 1 > 2^{n^2} > 2^{n\log_2 n} = n^n > n!,$$
co jest niedorzecznością. Zatem dla $n > N$ równanie dane w treści zadania nie ma rozwiązań.

20. Niech a, b, c, d będą takimi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, że $a+b+c+d = 3$. Udowodnić, że
$$\frac{ab}{4-a} + \frac{bc}{4-b} + \frac{cd}{4-c} + \frac{da}{4-d} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Sposób I
Zauważmy, że jeśli $a = c = 0$ lub $b = d = 0$, to teza jest oczywista. Przyjmijmy więc, że tak nie jest. Niech
$$S = \frac{ab}{4-a} + \frac{bc}{4-b} + \frac{cd}{4-c} + \frac{da}{4-d}.$$
Wtedy
$$\begin{aligned} S &= \frac{3ab}{12-3a} + \frac{3bc}{12-3b} + \frac{3cd}{12-3c} + \frac{3da}{12-3d} \\ &= \frac{3ab}{a+4b+4c+4d} + \frac{3bc}{b+4c+4d+4a} + \frac{3cd}{c+4d+4a+4b} + \frac{3da}{d+4a+4b+4c} \\ &\leqslant \frac{3ab}{a+4b+2c+2d} + \frac{3bc}{b+4c+2d+2a} + \frac{3cd}{c+4d+2a+2b} + \frac{3da}{d+4a+2b+2c}. \end{aligned} \tag{1}$$
Z nierówności między średnimi harmoniczną i arytmetyczną dla liczb $\frac{1}{a+2c}$, $\frac{1}{2b+d}$ i $\frac{1}{2b+d}$ dostajemy
$$\frac{3}{a+4b+2c+2d} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+2c} + \frac{2}{2b+d}\right). \tag{2}$$
Analogicznie otrzymujemy nierówności
$$\frac{3}{b+4c+2d+2a} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b+2d} + \frac{2}{2c+a}\right), \tag{3}$$
$$\frac{3}{c+4d+2a+2b} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c+2a} + \frac{2}{2d+b}\right), \tag{4}$$
$$\frac{3}{d+4a+2b+2c} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d+2b} + \frac{2}{2a+c}\right). \tag{5}$$
Zatem aplikując nierówności (2)–(5) do nierówności (1) dostajemy
$$\begin{aligned} S &\leqslant \frac{3ab}{a+4b+2c+2d} + \frac{3bc}{b+4c+2d+2a} + \frac{3cd}{c+4d+2a+2b} + \frac{3da}{d+4a+2b+2c} \\ &\leqslant \frac{ab}{3}\left(\frac{1}{a+2c} + \frac{2}{2b+d}\right) + \frac{bc}{3}\left(\frac{1}{b+2d} + \frac{2}{2c+a}\right) + \frac{cd}{3}\left(\frac{1}{c+2a} + \frac{2}{2d+b}\right) + \frac{da}{3}\left(\frac{1}{d+2b} + \frac{2}{2a+c}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{ab+2bc}{a+2c} + \frac{bc+2cd}{b+2d} + \frac{cd+2da}{c+2a} + \frac{da+2ab}{d+2b}\right) \\ &= \frac{1}{3}(b+c+d+a) = 1, \end{aligned}$$

czyli tezę.

Sposób II

Załóżmy bez straty dla ogólności, że a jest największą spośród danych liczb. Wówczas

$$a, b, c, d \leqslant a + c,$$

zatem

$$\frac{1}{4-a} \leqslant \frac{1}{4-a-c}, \quad \frac{1}{4-b} \leqslant \frac{1}{4-a-c}, \quad \frac{1}{4-c} \leqslant \frac{1}{4-a-c}, \quad \frac{1}{4-d} \leqslant \frac{1}{4-a-c}.$$

W takim razie

$$\frac{ab}{4-a} + \frac{bc}{4-b} + \frac{cd}{4-d} + \frac{da}{4-a} \leqslant \frac{ab+bc+cd+da}{4-a-c} = \frac{(a+c)(b+d)}{4-(a+c)} = \frac{x(3-x)}{4-x},$$

gdzie $x = a + c$. Pozostaje zauważyć, że wartość ostatniego ułamka nie przekracza 1, gdyż

$$\frac{x(3-x)}{4-x} \leqslant 1 \iff 3x - x^2 \leqslant 4 - x \iff 0 \leqslant (x-2)^2.$$

Uwaga: Równość w danej nierówności zachodzi dla czwórki $(2, 1, 0, 0)$ i jej cyklicznych permutacji.

21. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. *Fejnym ciągiem* nazwiemy ciąg n-elementowy liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$, który dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leqslant i, j \leqslant n$ spełnia warunek $a_i + a_j \geqslant |i - j|$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą sumę elementów fejnego ciągu.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Rozważmy dwa przypadki ze względu na parzystość n.

Przypadek 1: $n = 2k + 1$.

Z założenia dostajemy następujące nierówności

$$\begin{aligned} a_1 + a_{2k+1} &\geqslant 2k, \\ a_2 + a_{2k} &\geqslant 2k-2, \\ &\vdots \\ a_k + a_{k+2} &\geqslant 2, \\ a_{k+1} &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Sumując te nierówności stronami otrzymujemy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k+1} \geqslant 2(1 + 2 + \ldots + k) = k(k+1).$$

Uzyskaliśmy więc oszacowanie z dołu na sumę elementów fejnego ciągu.

Rozważmy teraz ciąg $a_1, \ldots, a_{2k+1}$ dany wzorem $a_i = |k + 1 - i|$. Ciąg ten jest fejny, gdyż na mocy nierówności trójkąta dla dowolnych i, j mamy

$$a_i + a_j = |k+1-i| + |k+1-j| \geqslant |(k+1-i) - (k+1-j)| = |i-j|.$$

Suma elementów tego ciągu wynosi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k+1} = k + (k-1) + \ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots + k = k(k+1),$$

zatem oszacowanie otrzymane w poprzednim paragrafie jest optymalne. Zatem w tym przypadku $k(k+1)$ jest najmniejszą możliwą sumą elementów fejnego ciągu.

Przypadek 2: $n = 2k$.

Ponownie z założenia mamy

$$\begin{aligned} a_1 + a_{2k} &\geqslant 2k-1, \\ a_2 + a_{2k-1} &\geqslant 2k-3, \\ &\vdots \\ a_k + a_{k+1} &\geqslant 1, \end{aligned}$$

co po zsumowaniu daje

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k} \geqslant 1 + 3 + \ldots + (2k-1) = k^2.$$

Rozważmy ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ dany wzorem $a_i = |k-i|$. Ciąg ten jest fejny, gdyż z nierówności trójkąta wynika, że

$$a_i + a_j = |k-i| + |k-j| \geqslant |(k-i)-(k-j)| = |i-j|.$$

Suma elementów tego ciągu wynosi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k} = (k-1) + (k-2) + \ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots + (k-1) + k = k^2,$$

zatem szacowanie otrzymane wyżej jest optymalne. Najmniejszą możliwą sumą elementów fejnego ciągu w tym przypadku jest k^2.

Ostatecznie łącząc oba przypadki otrzymujemy, że najmniejszą możliwą sumą elementów fejnego ciągu jest $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

22. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite x, y, że liczba $2^x 3^y - 1$ jest podzielna przez p, oraz co najmniej jedna z liczb x, y jest nieparzysta.

Rozwiązanie:

Niech g będzie generatorem modulo p. Niech $2 \equiv g^{2^a s} \pmod{p}$ oraz $3 \equiv g^{2^b t} \pmod{p}$, przy czym $2 \nmid s, t$. Oznacza to, że podzielność $p \mid 2^x 3^y - 1$ jest równoważna kongruencji

$$2^a sx + 2^b ty \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Niech $p - 1 = 2^\alpha m$, gdzie $2 \nmid m$. Udowodnimy, że dla $x = m$ istnieje taka liczba y postaci my', że powyższa kongruencja jest spełniona. Podstawmy więc $x = m$ oraz $y = my'$. Powyższa kongruencja przyjmuje postać

$$2^a sm + 2^b tmy' \equiv 0 \pmod{p-1},$$

co jest równoważne temu, że

$$2^a s + 2^b ty' \equiv 0 \pmod{2^\alpha}.$$

Bez straty ogólności załóżmy, że $a \geqslant b$ i weźmy $\beta = \alpha - a$. Zażądajmy dodatkowo, by liczba y' była postaci $2^{a-b}y''$. Podstawiając $y' = 2^{a-b}y''$ otrzymujemy

$$2^a s + 2^a ty'' \equiv 0 \pmod{2^\alpha},$$

co jest równoważne kongruencji

$$s + ty'' \equiv 0 \pmod{2^\beta}.$$

Wystarczy dobrać y'' tak, aby spełniona była powyższa kongruencja. Skoro liczba t jest nieparzysta, to istnieje taka dodatnia liczba nieparzysta w, że $w \cdot t \equiv 1 \pmod{2^\beta}$. Niech s' będzie resztą z dzielenia s przez 2^β. Połóżmy $y'' = w\left(2^\beta - s'\right)$. Wówczas

$$s + ty'' = s + tw\left(2^\beta - s'\right) \equiv s + 2^\beta - s' \equiv 0 \pmod{2^\beta}.$$

Zatem liczby $x = m$ oraz $y = m \cdot 2^{a-b} \cdot w \cdot \left(2^\beta - s'\right)$ spełniają warunki zadania.

23. Niech G będzie nieskierowanym grafem prostym bez trójkątów, o n wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek ma stopień większy niż $\frac{2}{5}n$. Udowodnić, że graf G nie zawiera cyklu nieparzystej długości.

Rozwiązanie:

Dla $n \leqslant 4$ teza jest oczywista. Od teraz będziemy zakładać, że $n \geqslant 5$. Załóżmy też nie wprost, że w grafie G istnieje cykl nieparzystej długości: $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$. Możemy założyć, że jest to najkrótszy cykl spośród wszystkich takich cykli.

Rozważmy wierzchołki v_1, v_2, v_{k+2}. Wtedy wierzchołek v_{k+2} dzieli ścieżkę v_2, v_3, $\ldots$, v_{2k+1}, v_1 na dwie równe części. Jeżeli v_2 jest połączony krawędzią z v_{k+2}, to jeden z cykli $v_2, v_{k+2}, v_{k+3}, \ldots, v_{2k+1}, v_1$ lub $v_2, v_3, \ldots, v_{k+2}$ jest nieparzystej długości, co przeczy minimalności oryginalnego cyklu. Analogicznie uzasadniamy, że wierzchołki v_1 i v_{k+2} nie są połączone krawędzią. Zgodnie z tymi obserwacjami łączna liczba krawędzi wychodzących z wierzchołków v_1, v_2, v_{k+2} do pozostałych wierzchołków w grafie wynosi co najmniej

$$3\left(\left\lfloor \frac{2}{5}n \right\rfloor + 1\right) - 2 = \frac{6}{5}n + 1 - 3\left\{\frac{2}{5}n\right\} > \frac{6}{5}n - 2 \geqslant n + 1 - 2 = (n-3) + 2.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieje pewien wierzchołek x różny od v_1, v_2, v_{k+2}, który jest połączony z co najmniej dwoma z nich. Nie może on być połączony jednocześnie z v_1 i z v_2, gdyż wówczas trójka wierzchołków v_1, v_2, x stanowiłaby trójkąt. Oznacza to, że x jest połączony z v_{k+2} oraz z jednym z wierzchołków v_1, v_2. Bez straty ogólności załóżmy, że x i v_2 są połączone krawędzią. Wtedy jeden z cykli $v_{k+2}, v_{k+3}, \ldots, v_{2k+1}, v_1, v_2, x$ o długości $k+3$ lub $v_2, v_3, \ldots, v_{k+2}, x$ o długości $k+2$ miałby nieparzystą długość. Z minimalności cyklu $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$ wynika, że $2k+1 \leqslant k+3$ lub $2k+1 \leqslant k+2$. Wnioskujemy, że $k \leqslant 2$, a zatem nasz minimalny cykl ma długość 5 (bo w grafie G nie ma trójkątów).

Dalej przyjmujemy oznaczenie $v_{i+5} = v_i$ dla każdego i. Wtedy jedyne krawędzie pomiędzy wierzchołkami $v_1, v_2, \ldots, v_5$ to te łączące v_i z v_{i+1}, gdyż graf G nie zawiera trójkątów. Dla każdego indeksu i oznaczmy przez S_i zbiór wszystkich wierzchołków połączonych z v_{i-1} oraz v_{i+1}, różnych od v_i. Łączna liczba krawędzi wychodzących z wierzchołków v_{i-1}, v_i, v_{i+1} do pozostałych wierzchołków wynosi co najmniej

$$3\left(\left\lfloor \frac{2}{5}n \right\rfloor + 1\right) - 4 = \frac{6}{5}n - 1 - 3\left\{\frac{2}{5}n\right\}.$$

Ponieważ żaden wierzchołek nie może być połączony jednocześnie z v_j i v_{j+1} (gdyż w grafie G nie ma trójkątów), więc

$$|S_i| \geqslant \frac{6}{5}n - 1 - 3\left\{\frac{2}{5}n\right\} - (n-3) = \frac{1}{5}n + 2 - 3\left\{\frac{2}{5}n\right\}.$$

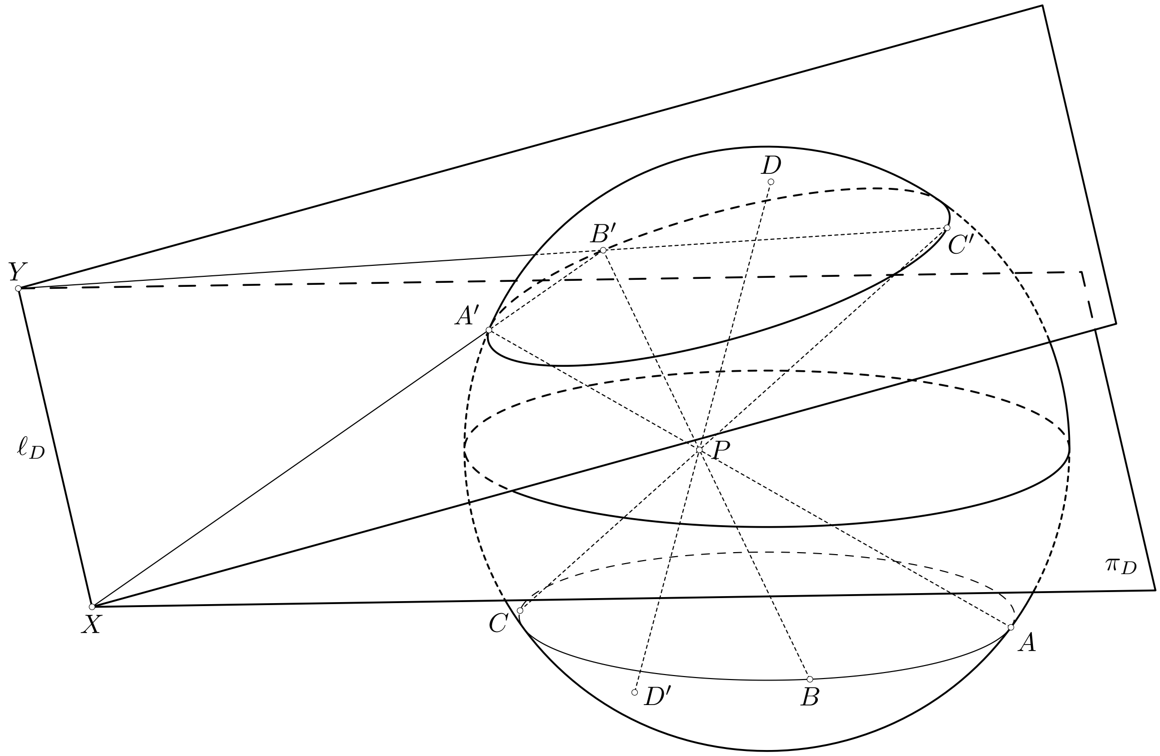
Graf G nie zawiera trójkątów, zatem rozważany cykl oraz zbiory $S_1, \ldots, S_5$ są parami rozłączne. Oznacza to, że

$$n \geqslant 5 + 5\left(\frac{1}{5}n + 2 - 3\left\{\frac{2}{5}n\right\}\right) = n + 15 - 15\left\{\frac{2}{5}n\right\}.$$

Stąd $\left\{\frac{2}{5}n\right\} \geqslant 1$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

24. Dany jest czworościan $ABCD$ i punkt P w jego wnętrzu. Proste AP, BP, CP, DP przecinają sferę opisaną na tym czworościanie ponownie odpowiednio w punktach A', B', C', D'. Płaszczyzna $A'B'C'$ i płaszczyzna przechodząca przez punkt P i równoległa do płaszczyzny ABC przecinają się wzdłuż prostej ℓ_D. Proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C określamy analogicznie. Wykazać, że proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D leżą na jednej płaszczyźnie.

Rozwiązanie:

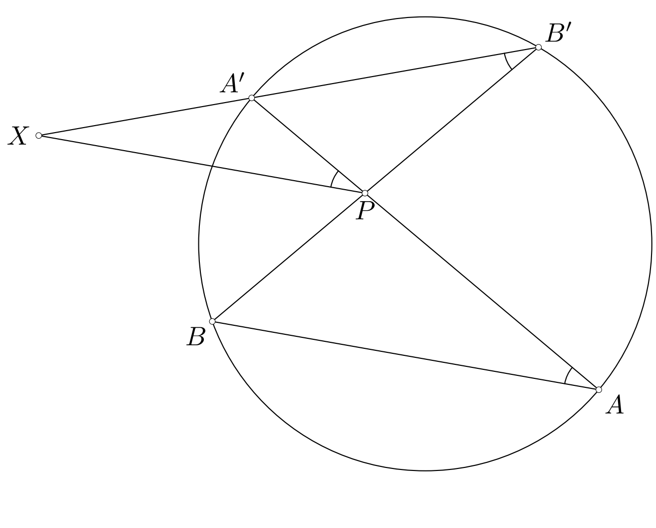


Niech π_D będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt P równoległą do płaszczyzny ABC. Skoro płaszczyzna $A'B'C'$ nie jest równoległa do π_D, to przynajmniej dwie z prostych $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ przecinają prostą ℓ_D; bez straty ogólności przyjmijmy, że są to $A'B'$ i $B'C'$. Niech X będzie punktem przecięcia prostych $A'B'$ i ℓ_D, a Y punktem przecięcia prostych $B'C'$ i ℓ_D.

Rozpatrzmy płaszczyznę π wyznaczoną przez proste AA', BB'. Zauważmy, że na tej płaszczyźnie leżą także punkty P i X. Prosta PX zawiera się w płaszczyźnie π_D równoległej do płaszczyzny ABC, a więc nie ma punktów wspólnych z prostą AB. Skoro jednak proste PX i AB zawierają się w płaszczyźnie π, to muszą być równoległe. Punkty A, B, A', B' leżą jednocześnie na jednej sferze, więc leżą na jednym okręgu. W takim razie

$$\measuredangle XPA' = \measuredangle BAA' = \measuredangle BB'A'.$$

To prowadzi do wniosku, że $XA' \cdot XB' = XP^2$, zatem potęgi punktu X względem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ oraz punktu P są równe. Innymi słowy, punkt X leży na płaszczyźnie potęgowej punktu P i sfery opisanej na czworościanie $ABCD$. Analogicznie uzasadniamy, że punkt Y także leży na rozważanej płaszczyźnie potęgowej, wobec tego cała prosta ℓ_D się w niej zawiera.



W podobny sposób dowodzimy, że pozostałe proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C także są zawarte w płaszczyźnie potęgowej sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ oraz punktu P, co kończy rozwiązanie.

25. Wykazać, że dla dowolnych liczb pierwszych $p > q$ układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = p \\ x^2 + y^2 = q \\ (a-x)^2 + (b-y)^2 = p - q \end{cases}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b, x, y.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że czwórka liczb całkowitych (a, b, x, y) jest rozwiązaniem układu równań z zadania.

Sposób I

Zauważmy, że

$$p - q = (a-x)^2 + (b-y)^2 = a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - 2(ax + by) = p + q - 2(ax + by), \quad \text{skąd} \quad q = ax + by.$$

Korzystając z tożsamości Diofantosa i przyjmując $c = ay - bx$ otrzymujemy

$$pq = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = q^2 + c^2.$$

Skoro c jest liczbą całkowitą, a q jest liczbą pierwszą, to $c = qc_1$ dla pewnej liczby całkowitej c_1. Toteż

$$pq = q^2 + q^2 c_1^2, \quad \text{czyli} \quad p = q(1 + c_1^2).$$

To zaś oznacza, że $q \mid p$ i stoi w sprzeczności z założeniami zadania.

Sposób II

Rozpatrzmy układ współrzędnych i jego punkty kratowe $A = (0,0)$, $B = (a,b)$, $C = (x,y)$. Łatwo sprawdzić, że punkty te są parami różne.

Z założeń zadania wynika, że $|AB| = \sqrt{p}$, $|AC| = \sqrt{q}$, $|BC| = \sqrt{p-q}$. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa widzimy więc, że kąt ACB jest prosty.

Z drugiego równania układu widzimy, że x, y są względnie pierwsze. Oznacza to, że wszystkie punkty kratowe leżące na prostej AC mają współrzędne postaci (nx, ny) dla pewnej liczby całkowitej n. Ale obraz punktu B przy obrocie wokół punktu C o kąt 90 stopni jest punktem kratowym leżącym na prostej AC. Oznacza to, że długość odcinka BC jest wielokrotnością długości odcinka AC, czyli $BC = c\sqrt{q}$ dla pewnej liczby całkowitej c. Ale wtedy

$$p = |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = q(1 + c^2).$$

Toteż $q \mid p$, sprzeczność.

26. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Prosta AD przecina okrąg ω w punkcie G różnym od D. Prosta styczna do okręgu ω w punkcie G przecina boki AC oraz AB odpowiednio w punktach E i F. Okręgi opisane na trójkątach DEF, GBC przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach M, N różnych od D, G. Wykazać, że proste AD oraz MN są równoległe.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez K i L punkty styczności okręgu ω odpowiednio do boków AC i AB. Niech P będzie punktem przecięcia prostych BC i EF. Widzimy, że punkt A leży na prostej DG, która jest biegunową punktu P względem okręgu ω. Stąd i z prawa wzajemności biegunowych wnioskujemy, że punkt P leży na biegunowej punktu A, czyli prostej KL.

Wystarczy udowodnić, że proste NG i MD przechodzą odpowiednio przez środki odcinków PD i PG. Wtedy otrzymamy, że odcinki NG i MD są symetryczne względem symetralnej odcinka DG, więc $GNMD$ będzie trapezem równoramiennym i stąd wyniknie teza.

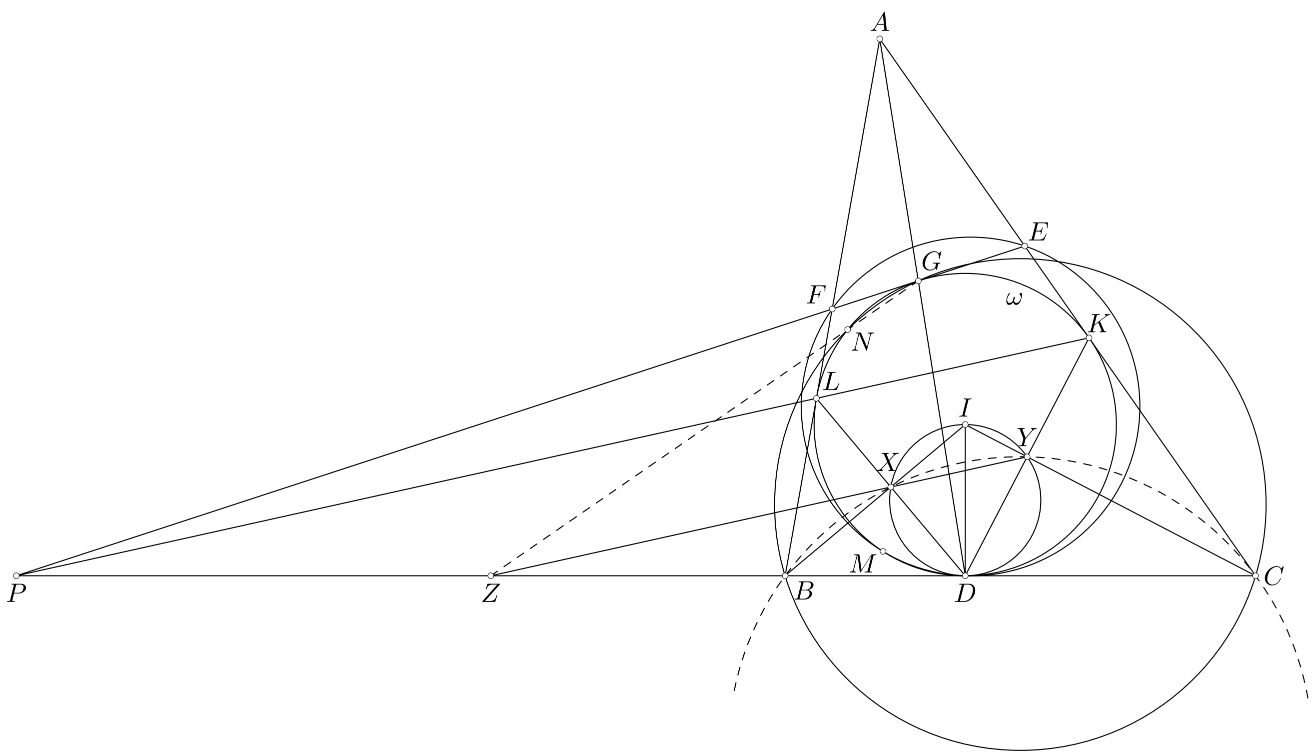
Niech I będzie środkiem okręgu ω, zaś X i Y niech będą odpowiednio środkami odcinków DL i DK. Z podobieństwa trójkątów prostokątnych IDB oraz IXD wnioskujemy, że $IX \cdot IB = ID^2$. Analogicznie uzyskujemy, że $IY \cdot IC = ID^2$. Zatem $IX \cdot IB = IY \cdot IC$, wobec czego punkty X, Y, C, B leżą na jednym okręgu.

Niech Z będzie środkiem odcinka DP. Wówczas Z leży na XY, gdyż X, Y są środkami odcinków DL, DK. Ponadto okrąg opisany na trójkącie DXY jest styczny do prostej BC w punkcie D.

Mamy

$$ZD^2 = ZX \cdot ZY = ZB \cdot ZC.$$

Wobec tego Z leży na osi potęgowej okręgu ω i okręgu opisanego na trójkącie BCG, czyli na prostej GN. W takim razie GN dzieli odcinek PD na dwie równe części. Zupełnie analogicznie dowodzimy, że MD dzieli odcinek PG na dwie równe części. To kończy dowód.



27. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające równość $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dowieść, że

$$\frac{a^5}{c^3+1} + \frac{b^5}{a^3+1} + \frac{c^5}{b^3+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie:
Sposób I
Korzystając z nierówności między ciągami jednomonotonicznymi otrzymujemy

$$\frac{a^5}{a^3+1} + \frac{b^5}{b^3+1} + \frac{c^5}{c^3+1} \leqslant \frac{a^5}{c^3+1} + \frac{b^5}{a^3+1} + \frac{c^5}{b^3+1}.$$

Wystarczy więc dowieść, że

$$\frac{a^5}{a^3+1} + \frac{b^5}{b^3+1} + \frac{c^5}{c^3+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Wykażemy teraz, że jeśli $x > 0$, to
$$\frac{x^5}{x^3+1} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{7(x^2-1)}{8}.$$
Istotnie,
$$\begin{aligned}\frac{x^5}{x^3+1} - \frac{1}{2} - \frac{7(x^2-1)}{8} &= \frac{8x^5 - 4(x^3+1) - 7(x^2-1)(x^3+1)}{8(x^3+1)}\\ &= \frac{x^5+3x^3-7x^2+3}{8(x^3+1)}\\ &= \frac{(x-1)^2(x^3+2x^2+6x+3)}{8(x^3+1)} \geqslant 0.\end{aligned}$$
Z powyższej nierówności wynika więc, że
$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^3+1} + \frac{b^5}{b^3+1} + \frac{c^5}{c^3+1} &\geqslant \frac{1}{2} + \frac{7(a^2-1)}{8} + \frac{1}{2} + \frac{7(b^2-1)}{8} + \frac{1}{2} + \frac{7(c^2-1)}{8}\\ &= \frac{3}{2} + \frac{7}{8}\cdot(a^2+b^2+c^2-3) = \frac{3}{2},\end{aligned}$$
co kończy dowód.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie pierwszym sprowadzamy tezę do udowodnienia nierówności
$$\frac{a^5}{a^3+1} + \frac{b^5}{b^3+1} + \frac{c^5}{c^3+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$
Ponieważ
$$\frac{t^5}{t^3+1} = t^2 - \frac{t^2}{t^3+1},$$
więc korzystając z założenia $a^2+b^2+c^2 = 3$ wnioskujemy, że postulowana nierówność jest równoważna następującej:
$$\frac{a^2}{a^3+1} + \frac{b^2}{b^3+1} + \frac{c^2}{c^3+1} \leqslant \frac{3}{2}.$$
Nierówność tę udowodnimy korzystając z nierówności między średnimi:
$$\frac{a^2}{a^3+1} + \frac{b^2}{b^3+1} + \frac{c^2}{c^3+1} \leqslant \frac{a^2}{2a^{3/2}} + \frac{b^2}{2b^{3/2}} + \frac{c^2}{2c^{3/2}} = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \leqslant \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[4]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Sposób III

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela otrzymujemy
$$\frac{a^5}{c^3+1} + \frac{b^5}{a^3+1} + \frac{c^5}{b^3+1} = \frac{a^8}{a^3c^3+a^3} + \frac{b^8}{a^3b^3+b^3} + \frac{c^8}{b^3c^3+c^3} \geqslant \frac{(a^4+b^4+c^4)^2}{a^3+b^3+c^3+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}.$$
Wystarczy więc udowodnić, że
$$2(a^4+b^4+c^4)^2 \geqslant 3(a^3+b^3+c^3+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3).$$
Stosując nierówność Cauchy'ego-Schwarza otrzymujemy
$$\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)} = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)} \geqslant a^3+b^3+c^3.$$

Korzystając z nierówności $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$ otrzymujemy

$$(a^3+b^3+c^3)^2 \geqslant 3(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3).$$

Wobec tego

$$3(a^3+b^3+c^3+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) \leqslant 3(a^3+b^3+c^3)+(a^3+b^3+c^3)^2 \leqslant 3\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}+3(a^4+b^4+c^4).$$

Oznaczmy $t = a^4+b^4+c^4$. Chcemy uzasadnić, że

$$2t^2 \geqslant 3\sqrt{3t}+3t.$$

Z nierówności $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}(x+y+z)^2$ otrzymujemy

$$t = a^4+b^4+c^4 \geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 = \frac{1}{3}\cdot 3^2 = 3.$$

W takim razie

$$2t^2 = t^2+t^2 \geqslant 3\sqrt{3t}+3t,$$

co kończy dowód.

Sposób IV

Udowodnimy najpierw, że funkcja $f(x) = \dfrac{x^{5/2}}{x^{3/2}+1}$ jest rosnąca na przedziale $(0,3)$ i wypukła na przedziale $\left(0,5^{2/3}\right)$. Zauważmy, że

$$f'(x) = \frac{\left(x^{5/2}\right)'\left(x^{3/2}+1\right)-\left(x^{5/2}\right)\left(x^{3/2}+1\right)'}{\left(x^{3/2}+1\right)^2} = \frac{x^3+\frac{5}{2}x^{3/2}}{\left(x^{3/2}+1\right)^2}.$$

Dla $x \in (0,3)$ powyższe wyrażenie jest dodatnie, więc $f(x)$ jest rosnąca na tym przedziale. Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^3+\frac{5}{2}x^{3/2}}{\left(x^{3/2}+1\right)^2}\right)' = \frac{\left(x^3+\frac{5}{2}x^{3/2}\right)'\left(x^{3/2}+1\right)^2-\left(x^3+\frac{5}{2}x^{3/2}\right)\left(\left(x^{3/2}+1\right)^2\right)'}{\left(x^{3/2}+1\right)^4} \\ &= \frac{\left(3x^2+\frac{15}{4}x^{1/2}\right)\left(x^{3/2}+1\right)-\left(x^3+\frac{5}{2}x^{3/2}\right)\cdot 2\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}}{\left(x^{3/2}+1\right)^3} = \frac{3\sqrt{x}\left(5-x^{3/2}\right)}{4\left(x^{3/2}+1\right)^3}. \end{aligned}$$

Druga pochodna f jest dodatnia dla $x \in \left(0,5^{2/3}\right)$, więc f jest wypukła na tym przedziale.

Oznaczmy $x=a^2$, $y=b^2$, $z=c^2$. Wówczas $0<x,y,z<3$ i $x+y+z=3$. Sprowadzamy tezę zadania w oparciu o ciągi jednomonotoniczne podobnie jak w sposobach pierwszym i drugim do postaci $f(x)+f(y)+f(z) \geqslant \frac{3}{2}$.

Rozważmy najpierw przypadek $\max(x,y,z) \geqslant 5^{2/3}$. Skoro f jest rosnąca i nieujemna na przedziale $(0,3)$, to

$$f(x)+f(y)+f(z) \geqslant f\left(\max(x,y,z)\right) \geqslant f\left(5^{2/3}\right) = \frac{5^{5/3}}{6} > \frac{3}{2}.$$

W przeciwnym przypadku $\max(x,y,z) < 5^{2/3}$. Skoro liczby x, y, z są dodatnie, a funkcja f jest wypukła na przedziale $(0,5^{2/3})$, to na mocy nierówności Jensena otrzymujemy

$$f(x)+f(y)+f(z) \geqslant 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3f(1) = \frac{3}{2}.$$

Zatem dla dowolnych dodatnich x, y, z spełniających $x+y+z=3$ zachodzi $f(x)+f(y)+f(z) \geqslant \frac{3}{2}$, co było do udowodnienia.

28. Danych jest $2n-1$ różnych dodatnich liczb rzeczywistych o sumie równej S. Udowodnić, że można na co najmniej $\binom{2n-2}{n-1}$ sposobów wybrać spośród nich n takich liczb, że ich suma jest równa co najmniej $S/2$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $2n-1$ liczb z treści zadania przez $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$. Powiemy, że $(n-1)$-elementowy zbiór indeksów I jest *zły*, jeśli $\sum_{i \in I} x_i > \frac{1}{2}S$. W przeciwnym razie nazwiemy zbiór I *dobrym*. Zauważmy, że każde dwa zbiory złe muszą mieć niepuste przecięcie, bo inaczej zachodziłaby nierówność $S > \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S$.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Erdős-Ko-Rado)**.** *Niech* $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \leqslant \frac{n}{2}$ *oraz* $\mathcal{F}$ *będzie rodziną podzbiorów* X *taką, że*

$$|A| = k \text{ dla } A \in \mathcal{F},$$

oraz

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ dla } A, B \in \mathcal{F}.$$

Wówczas zachodzi

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}.$$

Dowód. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie permutacją liczb $1, 2, \ldots, n$. Umieśćmy liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ na okręgu. Zastanówmy się ile zbiorów $A \in \mathcal{F}$ występuje w tej permutacji jako *cyklicznie spójny fragment*, to znaczy wszystkie jego elementy zajmują k kolejnych miejsc na okręgu. Jako że każde dwa zbiory z rodziny $\mathcal{F}$ się przecinają i każdy ma moc $k \leqslant \frac{n}{2}$, łatwo się przekonać, że zbiorów występujących jako cyklicznie spójny fragment może być co najwyżej k.

Rozważmy pary (S, A), gdzie S jest permutacją zbioru $\{1, \ldots n\}$, zaś $A \in \mathcal{F}$ występuje w S jako cyklicznie spójny fragment.

Z jednej strony liczba takich par jest ograniczona z góry przez $n! \cdot k$, co wynika z powyższej obserwacji. Z drugiej strony, możemy tę liczbę obliczyć w następujący sposób: wybieramy najpierw zbiór A na $|\mathcal{F}|$ sposobów, następnie wybieramy miejsce w permutacji, gdzie A ma występować jako cyklicznie spójny fragment na n sposobów, elementy zbioru A możemy ustawić na $k!$ sposobów, a elementy spoza zbioru A możemy ustawić na $(n-k)!$ sposobów. Zatem liczba ta wynosi

$$|\mathcal{F}| \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)!.$$

Zatem

$$n! \cdot k \geqslant |\mathcal{F}| \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)! \iff \binom{n-1}{k-1} \geqslant |\mathcal{F}|,$$

co należało udowodnić. $\square$

Z powyższego twierdzenia natychmiast wynika, że zbiorów złych może być co najwyżej $\binom{2n-2}{n-2}$. Zatem zbiorów dobrych jest co najmniej $\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} = \binom{2n-2}{n-1}$.

Jednak jeśli D jest zbiorem dobrym, to $F = \{1, 2, \ldots, 2n-1\} \setminus D$ jest zbiorem n-elementowym takim, że suma $\sum_{i \in F} x_i$ jest równa co najmniej $S/2$. Zatem skoro zbiorów dobrych jest co najmniej $\binom{2n-1}{n-1}$, to zbiorów spełniających warunki zadania też jest co najmniej tyle.

29. Punkt P leży na boku BC trójkąta ABC. Prosta równoległa do prostej AC przechodząca przez punkt P przecina symetralną boku AB w punkcie B'. Prosta równoległa do prostej AB przechodząca przez punkt P przecina symetralną boku AC w punkcie C'. Wykazać, że niezależnie od wyboru punktu P okręgi opisane na trójkątach $AB'C'$ przechodzą przez ustalony punkt, różny od A.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Ponadto niech M i N będą środkami boków odpowiednio AB i AC. Udowodnimy, że na czworokącie $AB'OC'$ można opisać okrąg. Załóżmy, że punkt B' leży wewnątrz trójkąta ABC i wewnątrz odcinka MO. Rozumowanie w pozostałych konfiguracjach jest podobne. Zauważmy, że

$$\sphericalangle BOB' = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle B'PB.$$

Zatem na czworokącie $BPOB'$ można opisać okrąg. Analogicznie wykazujemy, że na czworokącie $PCC'O$ można opisać okrąg.

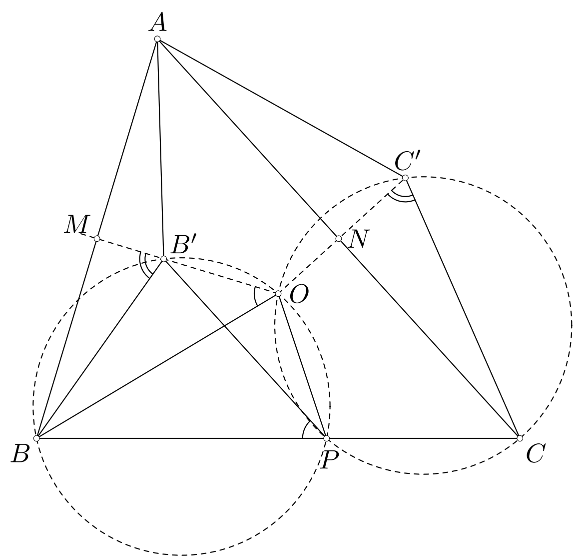
Z równości kątów

$$\frac{1}{2}\sphericalangle BB'A = \sphericalangle MB'B = \sphericalangle OPB = \sphericalangle OC'C = \frac{1}{2}\sphericalangle AC'C$$

oraz z faktu, że $AB' = BB'$ i $AC' = CC'$ wynika, że trójkąty ABB' i ACC' są podobne. Wobec tego $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle CAC'$. Zatem

$$\sphericalangle B'AC' = \sphericalangle B'AC + \sphericalangle CAC' = \sphericalangle BAB' + \sphericalangle B'AC = \sphericalangle BAC.$$

Stąd $\sphericalangle B'AC' + \sphericalangle C'OB' = \sphericalangle BAC + \sphericalangle MON = 180°$. Na czworokącie $AB'OC'$ można więc opisać okrąg, co kończy dowód.



30. Chcecie bajki? Oto bajka: była sobie Pchła Szachrajka, i był także skończony zbiór A punktów na płaszczyźnie oraz $r > 0$. Pchła Szachrajka na początku stoi w pewnym punkcie, który jest w odległości mniejszej niż r od pewnego punktu należącego do A. Co sekundę Pchła Szachrajka przeskakuje na środek ciężkości zbioru punktów, które są aktualnie w odległości mniejszej niż r od niej. Wykazać, że od pewnego momentu Pchła Szachrajka będzie skakać w miejscu.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu użyjemy następującego lematu.

Lemat. *Na płaszczyźnie danych jest n punktów $P_1, \ldots, P_n$. Punktem S, który minimalizuje sumę*

$$\sum_{i=1}^{n} |SP_i|^2$$

jest środek ciężkości $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Dowód. Niech $P_i = (x_i, y_i)$ oraz $S = (x, y)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |SP_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y-y_i)^2 \\ &= \left(nx^2 - x\cdot 2\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \left(ny^2 - y\cdot 2\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\end{aligned}$$

Z własności funkcji kwadratowej widzimy, że obydwa wyrażenia w nawiasach przyjmują najmniejszą wartość, jeśli

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{oraz} \quad y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

czyli dokładnie wtedy, gdy S jest środkiem ciężkości punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$. □

Niech O będzie aktualnym położeniem Pchły Szachrajki i niech

$$S_O = \sum_{P\in A} \min(|OP|^2, r^2).$$

Wykażemy, że S_O po każdym skoku Pchły Szachrajki na odległość większą od zera się zmniejsza. Ponieważ możliwych pozycji Pchły Szachrajki jest skończenie wiele (gdyż podzbiorów A jest skończenie wiele) otrzymamy, że Pchła Szachrajka po skończonej liczbie skoków musi zacząć skakać w miejscu.

Niech $O' \neq O$ będzie punktem, na który przeskoczy Pchła Szachrajka. Wtedy

$$\begin{aligned}S_{O'} &= \sum_{P\in A} \min\left(|O'P|^2, r^2\right) \\ &= \sum_{P\in A:|OP|<r} \min\left(|O'P|^2, r^2\right) + \sum_{P\in A:|OP|\geqslant r} \min\left(|O'P|^2, r^2\right) \\ &\leqslant \sum_{P\in A:|OP|<r} \min\left(|O'P|^2, r^2\right) + \sum_{P\in A:|OP|\geqslant r} \min\left(|OP|^2, r^2\right) \\ &< \sum_{P\in A:|OP|<r} \min\left(|OP|^2, r^2\right) + \sum_{P\in A:|OP|\geqslant r} \min\left(|OP|^2, r^2\right) \\ &= S_O,\end{aligned}$$

przy czym słaba nierówność wynika z tego, że wszystkie składniki w prawej sumie szacujemy z góry przez r^2, zaś ostra nierówność wynika z lematu. To kończy rozwiązanie zadania.

31. Niech $P(k)$ oznacza liczbę *podziałów* liczby k, tj. liczbę niemalejących ciągów liczb całkowitych dodatnich sumujących się do k.

Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których spełniona jest równość

$$P(n) + P(n+4) = P(n+2) + P(n+3).$$

Przykładowo $P(4) = 5$, *bo* $4 = 2+2 = 1+3 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedynymi rozwiązaniami są 1, 3 i 5.

Liczbę podziałów N niezawierających elementów ze zbioru S będziemy oznaczać przez $P_S(N)$.

Spostrzeżenie. *Jeśli* $0 < k \notin S$, *to*

$$P_S(N+k) = P_S(N) + P_{S\cup\{k\}}(N+k).$$

Korzystając ze spostrzeżenia możemy zapisać następujące równości:

$$P(n+4) = P_{\{1\}}(n+4) + P(n+3), \tag{1}$$
$$P_{\{1\}}(n+4) = P_{\{1,2\}}(n+4) + P_{\{1\}}(n+2), \tag{2}$$
$$P(n+2) - P(n) = P_{\{1\}}(n+1) + P_{\{1\}}(n+2). \tag{3}$$

Korzystając z (1), równość z zadania możemy zapisać jako

$$P_{\{1\}}(n+4) = P(n+2) - P(n). \tag{4}$$

Na mocy (3) możemy zamienić w powyższej równości prawą stronę na $P_{\{1\}}(n+1) + P_{\{1\}}(n+2)$, a na mocy (2) lewa strona jest równa $P_{\{1,2\}}(n+4) + P_{\{1\}}(n+2)$. Wobec tego równanie dane w treści zadania jest równoważne równaniu

$$P_{\{1,2\}}(n+4) + P_{\{1\}}(n+2) = P_{\{1\}}(n+1) + P_{\{1\}}(n+2). \tag{5}$$

Jeśli n spełnia (5), to $m = n+4$ spełnia

$$P_{\{1,2\}}(m) = P_{\{1\}}(m-3). \tag{6}$$

Udowodnimy, że (6) nie ma rozwiązań dla $m \geqslant 15$. W tym celu załóżmy, że $m \geqslant 15$ i rozpatrzmy podziały jedno-, dwu- i więcej niż dwuelementowe.

1. Istnieje dokładnie jeden jednoelementowy podział m niezawierający liczb 1 i 2. Również tyle jest jednoelementowych podziałów $m-3$ niezawierających 1.

2. Każdy dwuelementowy podział liczby m na liczby większe od 2 możemy jednoznacznie przyporządkować jakiemuś dwuelementowemu podziałowi liczby $m-4$ poprzez zmniejszenie obu składników o 2. Analogicznie, dwuelementowych podziałów liczby $m-3$ na liczby większe od 1 jest tyle samo, co dwuelementowych podziałów liczby $m-5$.

   Dwuelementowych podziałów liczby k jest $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$, bo tyle jest sposobów na wybranie nie większej liczby w podziale, zaś nie mniejsza jest wtedy wyznaczona jednoznacznie. Czyli odpowiednich podziałów liczby m jest co najwyżej o jeden więcej niż odpowiednich podziałów liczby $m-3$.

3. Niech $\ell > 2$ i $2 < k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_\ell$ będzie podziałem liczby m. Wtedy

   $$1 < k_1 - 1 \leqslant k_2 - 1 \leqslant k_3 - 1 \leqslant k_4 \leqslant \ldots \leqslant k_\ell$$

   jest podziałem liczby $m-3$. Zauważmy, że każdemu takiemu podziałowi liczby m przyporządkujemy inny podział liczby $m-3$ oraz że podziałów $(2,2,2,2,m-11)$ oraz $(2,2,2,2,2,m-13)$ nie przyporządkowaliśmy żadnemu podziałowi liczby m, bo to by znaczyło, że $3 = k_1 \leqslant k_4 = 2$.

   Zatem odpowiednich podziałów o więcej niż 2 elementach liczby $m-3$ jest co najmniej o 2 więcej, niż odpowiednich podziałów liczby m.

Podsumowując, dla $m \geqslant 15$ zachodzi nierówność

$$P_{\{1,2\}}(m) + 2 \leqslant P_{\{1\}}(m-3) + 1,$$

czyli

$$P_{\{1,2\}}(m) < P_{\{1\}}(m-3).$$

Zatem aby prawdziwa była równość z zadania, musi zachodzić $m < 15$, czyli $n < 11$. Sprawdzając ręcznie te 10 przypadków otrzymujemy, że równanie ma trzy rozwiązania:

$$\begin{aligned}
P(1) + P(5) &= \ 8 \ = P(3) + P(4), \\
P(3) + P(7) &= 18 = P(5) + P(6), \\
P(5) + P(9) &= 37 = P(7) + P(8).
\end{aligned}$$

32. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej d istnieje dokładnie jeden unormowany wielomian $P(x)$ stopnia d o współczynnikach rzeczywistych o następujących własnościach:

- $P(1) \neq 0$,
- Dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $a_0, a_1, a_2, \ldots$, który dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ spełnia zależność
$$P(1)a_{n-1} + P(2)a_{n-2} + \ldots + P(n)a_0 = 0$$
istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że $a_k = a_{k+1} = \ldots = 0$.

Rozwiązanie:
Niech $P(x)$ będzie unormowanym wielomianem stopnia d i niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ będzie takim ciągiem liczb rzeczywistych, że $a_0 \neq 0$ oraz dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ zachodzi

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) \cdot a_{n-i} = 0. \tag{1}$$

W dalszej części rozwiązania wykorzystamy następujący lemat.

Lemat. *Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej j zachodzi*

$$\frac{j!}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+j)\ldots(n+1)x^n.$$

Dowód. Dla $j = 0$ jest to po prostu wzór na sumę szeregu geometrycznego. W kroku indukcyjnym różniczkujemy równość stronami względem x. Z jednej strony,

$$\left(\frac{j!}{(1-x)^{j+1}}\right)' = \frac{-j! \cdot (-(j+1))(1-x)^j}{(1-x)^{2j+2}} = \frac{(j+1)!}{(1-x)^{j+2}}$$

Z drugiej strony,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+j)\ldots(n+1)x^n\right)' = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+j)\ldots(n+1)nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+j+1)(n+j)\ldots(n+1)x^n. \ \square$$

Niech $P(x) = \sum_{j=0}^{d} b_j \cdot x(x+1)\ldots(x+j-1)$, $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wtedy dla każdego $j = 0, 1, \ldots, d$ zachodzi

$$\begin{aligned}
A(x) \cdot \frac{j!}{(1-x)^{j+1}} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+j)\ldots(n+1)x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \left(\sum_{i=0}^{n}(i+1)\ldots(i+j) \cdot a_{n-i}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\ldots(i+j-1) \cdot a_{n-i}\right).
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{d} b_j \cdot A(x) \cdot \frac{j!}{(1-x)^{j+1}} &= \sum_{j=0}^{d} b_j \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\ldots(i+j-1) \cdot a_{n-i}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} \cdot \sum_{j=0}^{d} b_j \cdot i(i+1)\ldots(i+j-1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} \cdot P(i) \\ &= a_0 \cdot P(1).\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$A(x) = \frac{a_0 \cdot P(1) \cdot (1-x)^{d+1}}{\sum_{j=0}^{d} b_j \cdot j! \cdot (1-x)^{d-j}}.$$

$P(x)$ spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy $A(x)$ jest wielomianem, czyli wtedy, gdy

$$\sum_{j=0}^{d} b_j \cdot j! \cdot (1-x)^{d-j} \mid a_0 \cdot P(1) \cdot (1-x)^{d+1}.$$

Ponieważ $b_d = 1$, więc musi być $b_0 = b_1 = \ldots = b_{d-1} = 0$. Stąd $P(x) = x(x+1)\ldots(x+d-1)$ jest jedynym wielomianem spełniającym warunki zadania.

33. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita, którą można zapisać na co najmniej dwa różne sposoby (kolejność składników nie ma znaczenia) jako sumę 2019 parami różnych 2018-tych potęg dodatnich liczb całkowitych.

Rozwiązanie:

Ustalmy dodatnią liczbę całkowitą N. Wykażemy, że jeśli liczba N jest dostatecznie duża, to istnieją takie dwa różne 2019-elementowe podzbiory A, B zbioru $X_N = \{1, 2, \ldots, N\}$, że $\sum_{a\in A} a^{2018} = \sum_{b\in B} b^{2018}$, co zakończy rozwiązanie zadania.

Zauważmy, że 2019-elementowych podzbiorów zbioru X_N jest dokładnie $\binom{N}{2019}$, natomiast możliwych wartości sumy 2018-tych potęg 2019-elementowego podzbioru zbioru X_N jest co najwyżej $2019 \cdot N^{2018}$. Wystarczy więc uzasadnić, że dla dostatecznie dużej wartości N zachodzi nierówność

$$\binom{N}{2019} \geqslant 2019 \cdot N^{2018}, \quad \text{równoważnie} \quad N(N-1)\ldots(N-2018) \geqslant 2019 \cdot 2019! \cdot N^{2018}.$$

Widzimy, że współczynnik wiodący wielomianu $P(x) = x(x-1)\ldots(x-2018) - 2019 \cdot 2019! \cdot x^{2018}$ jest dodatni. Wobec tego P przyjmuje wartości dodatnie dla dostatecznie dużych x; w szczególności istnieje dodatnia liczba całkowita N, dla której $P(N) \geqslant 0$. To kończy rozwiązanie zadania.

34. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dodatnich liczb całkowitych oraz ciąg $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb pierwszych, przy czym dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi

$$p_n \mid a_n \quad \text{oraz} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}(p_n^{1009} - 1).$$

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $2018 \mid a_n$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że $2018 = 2 \cdot 1009$ jest rozkładem liczby 2018 na czynniki pierwsze. Ponadto

$$p_n^{1009} - 1 = (p_n - 1)(p_n^{1008} + \ldots + p_n + 1).$$

Wykażemy, że istnieje $n \geqslant 1$, dla którego $1009 \mid p_n - 1$. To zakończy rozwiązanie zadania, gdyż wtedy $p_n \neq 2$, czyli $2 \cdot 1009 \mid p_n - 1 \mid a_{n+1}$.

Przypuśćmy, że dla dowolnego n zachodzi $1009 \nmid p_n - 1$. Wykażemy, że wówczas każdy dzielnik pierwszy liczby $p_n^{1008} + p_n^{1007} + \ldots + p_n + 1$ daje resztę 1 z dzielenia przez 1009, co doprowadzi do sprzeczności.

Niech więc p będzie dzielnikiem pierwszym $p_n^{1008} + p_n^{1007} + \ldots + p_n + 1$ dla pewnego n. Oczywiście $p \neq p_n$; niech d będzie rzędem p_n modulo p, czyli najmniejszą taką dodatnią liczbą całkowitą, dla której $p_n^d \equiv 1 \pmod{p}$. Ponieważ $p \mid p_n^{1008} + p_n^{1007} + \ldots + p_n + 1 \mid p_n^{1009} - 1$, więc z własności rzędu otrzymujemy, że $d \mid 1009$. Wobec tego $d = 1$ lub $d = 1009$.

Załóżmy, że $d = 1$. Oznacza to, że $p_n \equiv 1 \pmod{p}$, skąd

$$p \mid p_n^{1008} + p_n^{1007} + \ldots + p_n + 1 \equiv 1009 \pmod{p}.$$

Wobec tego $p = 1009$; to zaś przeczy założeniu $1009 \nmid p_n - 1$ dla każdego n.

Załóżmy więc, że $d = 1009$. Na mocy małego twierdzenia Fermata $p_n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Wobec tego $1009 = d \mid p - 1$. To kończy dowód tego, że każdy dzielnik pierwszy liczby $p_n^{1008} + p_n^{1007} + \ldots + p_n + 1$ daje resztę 1 z dzielenia przed 1009.

Niech $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie takim ciągiem dodatnich liczb całkowitych, że b_n jest największym dzielnikiem a_n niemającym żadnego dzielnika pierwszego dającego resztę 1 z dzielenia przez 1009. Wówczas na mocy poczynionej obserwacji oraz własności ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ otrzymujemy, że dla każdego n liczba b_{n+1} jest dzielnikiem liczby $\frac{b_n}{p_n}(p_n - 1)$. Stąd

$$b_{n+1} \leqslant \frac{b_n}{p_n}(p_n - 1) < b_n.$$

Wobec tego $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest nieskończonym ciągiem malejącym dodatnich liczb całkowitych. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

35. Na płaszczyźnie danych jest n parami różnych okręgów, przy czym:

- każdy z nich ma promień 1,
- żadne dwa z nich nie są styczne,
- nie ma wśród nich okręgu rozłącznego ze wszystkimi pozostałymi okręgami.

Niech A będzie zbiorem wszystkich punktów przecięcia danych okręgów. Udowodnić, że $|A| \geqslant n$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem n okręgów z treści zadania.

Dla każdego $C \in \mathcal{C}$ oznaczmy przez $N(C)$ liczbę elementów zbioru A leżących na C. Dla każdego punktu p ze zbioru A oznaczmy przez $m(p)$ liczbę okręgów przechodzących przez p.

Rozważmy punkt $p \in A$ oraz okrąg C przechodzący przez p. Zauważmy, że każdy okrąg $C' \neq C$ przechodzący przez p wyznacza jednoznacznie punkt $p' \in C \cap C'$ różny od p i każde dwa takie okręgi wyznaczają różne punkty. Wynika to z założeń zadania: żadne dwa z naszych okręgów nie są styczne i wszystkie okręgi mają ten sam promień. Liczba okręgów przechodzących przez p różnych od C wynosi $m(p)-1$, a liczba punktów $p' \in C \cap A$ różnych od p wynosi $N(C)-1$. Oznacza to, że $m(p)-1 \leqslant N(C)-1$, czyli $m(p) \leqslant N(C)$.

Rozważmy sumę

$$S = \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{p \in C \cap A} \frac{1}{N(C)}.$$

Z jednej strony, dla każdego $C \in \mathcal{C}$ suma $\sum_{p \in C \cap A} \frac{1}{N(C)}$ wynosi $|C \cap A| \cdot \frac{1}{N(C)} = 1$, gdyż na okręgu C znajduje się dokładnie $N(C)$ punktów ze zbioru A. Wobec tego

$$S = \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{p \in C \cap A} \frac{1}{N(C)} = \sum_{C \in \mathcal{C}} 1 = |\mathcal{C}| = n.$$

Z drugiej strony, oznaczając przez $\mathcal{C}(p)$ zbiór okręgów $C \in \mathcal{C}$ przechodzących przez p, otrzymujemy

$$S = \sum_{p \in A} \sum_{C \in \mathcal{C}(p)} \frac{1}{N(C)} \leqslant \sum_{p \in A} \sum_{C \in \mathcal{C}(p)} \frac{1}{m(p)} = \sum_{p \in A} \left(m(p) \cdot \frac{1}{m(p)} \right) = \sum_{p \in A} 1 = |A|.$$

Wobec tego $n \leqslant |A|$, co kończy dowód.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że jeśli $p \in A$ oraz okrąg $C \in \mathcal{C}$ przechodzi przez p, to $m(p) \leqslant N(C)$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po n. Dla $n = 2$ teza jest oczywista. Dalej załóżmy, że $n > 2$. Niech G będzie grafem dwudzielnym o krawędziach między zbiorami $\mathcal{C}$ i A, w którym krawędź pomiędzy okręgiem $C \in \mathcal{C}$ i punktem $p \in A$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in C$. Niech $\mathcal{C}_1$ będzie zbiorem dowolnych $n-1$ okręgów należących do $\mathcal{C}$.

Udowodnimy, że zbiór $\mathcal{C}_1$ spełnia warunek Halla w grafie G. Niech $\mathcal{C}_2$ będzie dowolnym niepustym podzbiorem $\mathcal{C}_1$. Niech H będzie grafem o wierzchołkach ze zbioru $\mathcal{C}_2$, w którym krawędź pomiędzy dwoma okręgami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy te dwa okręgi się przecinają. Wreszcie niech $\mathcal{C}_3$ będzie dowolną spójną składową H. Jeżeli $|\mathcal{C}_3| \geqslant 2$, to z założenia indukcyjnego wynika, że istnieje co najmniej $|\mathcal{C}_3|$ punktów należących do A, pochodzących z okręgów należących do $\mathcal{C}_3$. Jeżeli zaś $|\mathcal{C}_3| = 1$, to z założeń zadania istnieje co najmniej jeden punkt ze zbioru A należący do tego jednego okręgu tworzącego spójną składową $\mathcal{C}_3$. Zatem sumując po spójnych składowych H otrzymujemy, że w grafie G ze zbioru $\mathcal{C}_2$ krawędzie wychodzą do co najmniej $|\mathcal{C}_2|$ wierzchołków. Wobec tego $\mathcal{C}_1$ spełnia warunek Halla w grafie G.

Skoro zbiór $\mathcal{C}_1$ spełnia warunek Halla w grafie G, to $|A| \geqslant n-1$. Załóżmy wbrew tezie, że $|A| = n-1$. Na mocy twierdzenia Halla istnieje doskonałe skojarzenie pomiędzy wierzchołkami z $\mathcal{C}_1$ oraz A. Ponieważ dla każdych $p \in C$ zachodzi $m(p) \leqslant N(C)$, więc liczba krawędzi wychodzących ze zbioru $\mathcal{C}_1$ w grafie G jest nie mniejsza niż liczba krawędzi wychodzących ze zbioru A, czyli jest nie mniejsza niż liczba wszystkich krawędzi w grafie G, czyli jest równa liczbie wszystkich krawędzi w grafie G. Jednakże istnieje krawędź w G, która nie jest incydentna ze zbiorem $\mathcal{C}_1$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

36. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o środku O. Punkty X, Y leżą odpowiednio na bokach AB, AC, przy czym odbicie prostej BC względem prostej XY jest styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AXY i BCO są styczne.

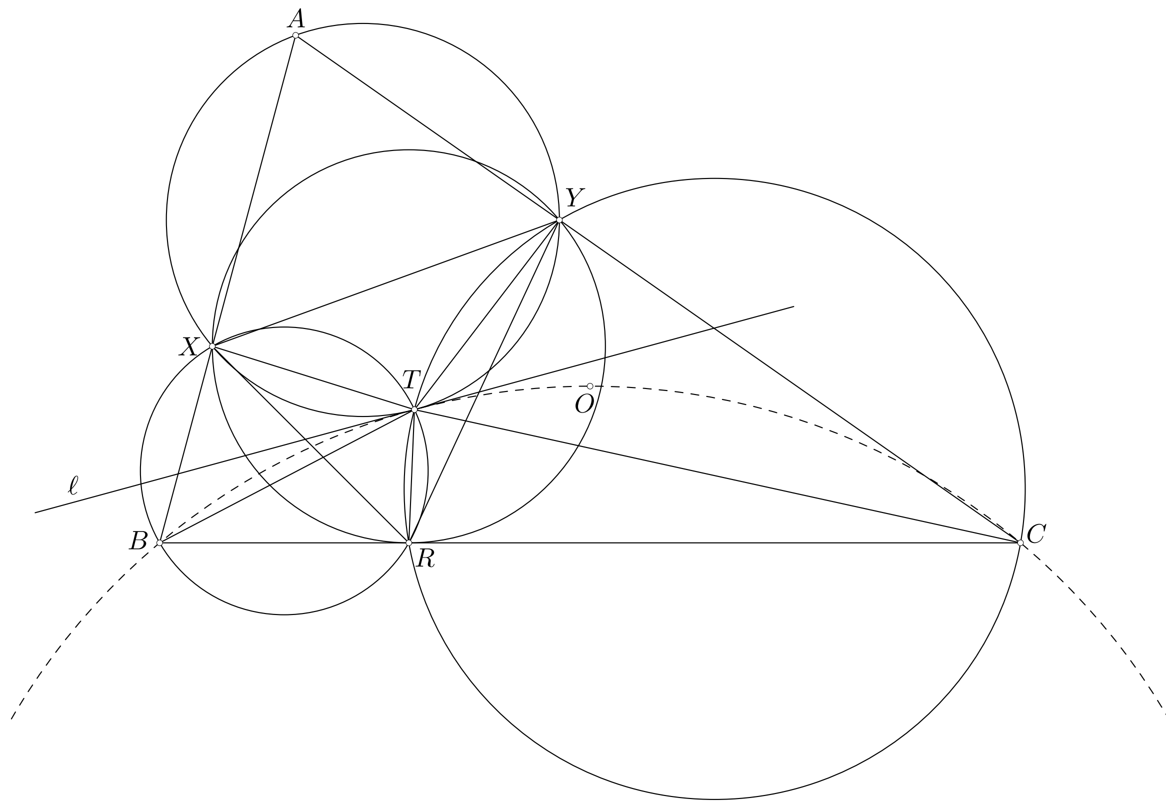
Rozwiązanie:

Rozważmy okrąg symetryczny do okręgu opisanego na trójkącie AXY względem XY. Okrąg ten jest styczny do prostej BC. Oznaczmy ten punkt styczności przez R.

Niech T będzie punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach BRX, CRY, różnym od R. Na mocy twierdzenia Miquela punkt T leży na okręgu opisanym na trójkącie AXY. Ponadto

$$\sphericalangle BTC = \sphericalangle BTR + \sphericalangle RTC = \sphericalangle BXR + \sphericalangle RYC = \sphericalangle XAY + \sphericalangle YRX = 2\sphericalangle BAC = \sphericalangle BOC.$$

Wobec tego punkty B, T, O, C leżą na jednym okręgu.



Udowodnimy teraz, że punkt T jest punktem styczności okręgów opisanych na trójkątach AXY, BCO. Niech ℓ będzie prostą styczną do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punkcie T. Mamy

$$\sphericalangle(XT,\ell)+\sphericalangle(\ell,TB)=\sphericalangle XTB=\sphericalangle XRB=\sphericalangle XYR=\sphericalangle XYT+\sphericalangle TYR=\sphericalangle(XT,\ell)+\sphericalangle TCR.$$

Wynika stąd, że $\sphericalangle(\ell,TB)=\sphericalangle TCR$. Równość ta oznacza, że prosta ℓ jest również styczna do okręgu opisanego na czworokącie $BTOC$. To kończy dowód.

Zawody drużynowe

1. Dane są liczba rzeczywista a, liczba całkowita $n > 0$ oraz funkcje addytywne $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, przy czym dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = ax^n.$$

Wykazać, że istnieje $b \in \mathbb{R}$ oraz $i \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $f_i(x) = bx$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Uwaga: Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest addytywna, jeżeli dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Rozwiązanie:

Dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$ oznaczmy $c_i = f_i(1)$. Wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby całkowitej m mamy

$$a(1+mx)^n = \prod_{i=1}^{n} f_i(1+mx) = \prod_{i=1}^{n} \left(c_i + mf_i(x)\right).$$

Załóżmy najpierw, że $a \neq 0$. Wówczas $c_i \neq 0$ dla każdego i. Ustalmy $x \neq 0$. Rozważmy wielomiany $P(t) = a(1+xt)^n$ oraz $Q(t) = \prod_{i=1}^{n}(c_i + f_i(x)t)$. Ponieważ $P(m) = Q(m)$ dla nieskończenie wielu m, więc wielomiany P, Q są równe. Z jednoznaczności rozkładu wielomianów wynika więc, że istnieją takie liczby b_1, b_2, $\ldots$, b_n , że $b_i(1+xt) = c_i + f_i(x)t$ dla każdego i. Porównując współczynniki otrzymujemy $b_i = c_i$ oraz $b_i x = f_i(x)$ dla każdego i. Wobec tego $f_i(x) = c_i x$ dla $x \neq 0$. Dla $x = 0$ z addytywności f_i mamy $f_i(0) = 0$. Ostatecznie, dla każdego i funkcja f_i jest dana wzorem $f_i(x) = c_i x$.

Przyjmijmy teraz, że $a = 0$. Wykażemy, że $f_i \equiv 0$ dla pewnego i. Przypuśćmy przeciwnie, czyli że dla każdego i istnieje taka liczba rzeczywista a_i, dla której $f_i(a_i) \neq 0$. Niech

$$x_m = a_1 + ma_2 + \ldots + m^{n-1}a_n$$

dla dowolnej liczby całkowitej m. Wtedy na mocy równości z zadania oraz addytywności funkcji f_i otrzymujemy

$$0 = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_m) = \prod_{i=1}^{n} \left(f_i(a_1) + f_i(a_2)m + \ldots + f_i(a_n)m^{n-1}\right),$$

skąd wniosek, że dla pewnego i wielomian zmiennej m

$$f_i(a_1) + f_i(a_2)m + \ldots + f_i(a_n)m^{n-1}$$

jest tożsamościowo równy 0, co stoi w sprzeczności z tym, że $f_i(a_i) \neq 0$. W takim razie dla pewnego indeksu i zachodzi $f_i(x) \equiv 0$.

2. Wyznaczyć wszystkie pary unormowanych wielomianów P, Q o współczynnikach rzeczywistych, dla których zachodzi

$$P \mid Q^2 + 1 \quad \text{oraz} \quad Q \mid P^2 + 1.$$

Uwaga: Wielomian nazywamy unormowanym, jeżeli jego współczynnik wiodący jest równy 1.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyna taka para (P, Q) to $(1, 1)$.

Zauważmy na początku, że P i Q muszą być względnie pierwsze, a stąd żądane podzielności są równoważne warunkowi $PQ \mid P^2 + Q^2 + 1$. Udowodnimy, że wtedy $\deg P = \deg Q$.

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje taka para (P, Q) spełniająca $PQ \mid P^2 + Q^2 + 1$, że $\deg P \neq \deg Q$. Wśród wszystkich takich par rozważmy tę z najmniejszą sumą $\deg P + \deg Q$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\deg P > \deg Q$.

Niech S będzie takim wielomianem, że

$$S = \frac{P^2 + Q^2 + 1}{PQ}.$$

Zauważmy, że P jest rozwiązaniem równania kwadratowego $X^2 - QSX + Q^2 + 1 = 0$. Stosując wzory Viète'a możemy zauważyć, że wielomian

$$R = QS - P = \frac{Q^2 + 1}{P}$$

jest unormowany oraz jest drugim rozwiązaniem tego równania. Zatem para (R, Q) również spełnia warunek postulowany w zadaniu. Pozostaje zauważyć, że $\deg R = 2 \deg Q - \deg P < \deg P$, co stoi w sprzeczności z założeniem o minimalności sumy $\deg P + \deg Q$.

Wobec tego $\deg(PQ) = \deg(P^2 + Q^2 + 1)$, czyli wielomian S jest stały. Jeśli P i Q nie są stałe, to współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $P^2 + Q^2 + 1$ jest równy 2. Wielomian PQ jest unormowany, więc $S = 2$, a co za tym idzie $P^2 + Q^2 + 1 = 2PQ$, czyli $(P - Q)^2 = -1$, co jest oczywiście niemożliwe. Prowadzi to do wniosku, że P i Q są stałe, co daje nam jedyne rozwiązanie $P = Q \equiv 1$.

3. Mszana Dolna ma n mieszkańców i każdy z nich zna dokładnie 1000 innych mieszkańców. Udowodnić, że można wybrać pewną grupę mieszkańców S tak, że co najmniej $\frac{n}{2019}$ osób w S ma dokładnie dwóch znajomych w S.

Rozwiązanie:

Rozważmy graf G, którego wierzchołkami są mieszkańcy Mszany Dolnej i w którym krawędź łączy dwa wierzchołki wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołki te się znają.

W rozwiązaniu będziemy korzystać z następujących faktów.

Fakt 1. *Jeśli graf o n wierzchołkach ma co najmniej n krawędzi, to zawiera on cykl.*

Fakt 2. *Jeśli graf zawiera cykl, to zawiera też cykl bez cięciw (tzw. cykl indukowany).*

Fakt 3. *Podwojona liczba krawędzi grafu jest równa sumie stopni wierzchołków.*

Podamy algorytm konstrukcji grupy mieszkańców S spełniającej warunki zadania.

Niech początkowo będzie to zbiór pusty. Dopóki graf G ma co najmniej n krawędzi, znajdźmy w nim dowolny cykl bez cięciw (niech to będzie cykl $c_1 c_2 \dots c_k$) i usuńmy z grafu G wierzchołki c_i oraz wszystkich ich sąsiadów, przy czym jeśli usuwamy z grafu wierzchołek, to usuwamy też wszystkie krawędzie, które z niego wychodzą. Równocześnie dodajmy $c_1, \dots, c_k$ do zbioru S.

Dzięki temu, że usuwamy wierzchołki cyklu wraz z sąsiadami mamy pewność, że wierzchołki dodane w różnych krokach algorytmu nie mają krawędzi między sobą. Wystarczy zatem pokazać, że łącznie dodamy ich więcej niż $\frac{n}{2019}$. Przez k_i oznaczmy wielkość cyklu znalezionego w i-tym kroku algorytmu.

Zauważmy, że usuwając z grafu cykl długości k wraz z sąsiadami liczba wierzchołków w grafie zmniejsza się o nie więcej niż $k + (1000 - 2) \cdot k = 999k$ wierzchołków, zatem liczba krawędzi w grafie zmniejsza się o nie więcej niż $1000 \cdot 999k = 999000k$. Zatem jeśli po j-tym kroku algorytmu w grafie pozostało mniej niż n krawędzi, to suma $n + \sum_{i=1}^{j} 999000 \cdot k_i$ wynosi więcej niż liczba krawędzi w początkowym grafie, która na mocy Faktu 3 jest równa $500n$. Stąd

$$n + \sum_{i=1}^{j} 999000 \cdot k_i > 500n,$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{j} k_i > \frac{499 \cdot n}{999000} > \frac{n}{2019}.$$

Zatem zbiór S ma więcej niż $\frac{n}{2019}$ elementów, co kończy rozwiązanie zadania.

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz zbiór X składający się z $2n$ punktów płaszczyzny, przy czym żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. *Skojarzeniem* nazwiemy zbiór n odcinków, których zbiór końców jest równy X. Skojarzenie nazwiemy *ładnym*, jeśli każde dwa z odcinków skojarzenia są rozłączne. Niech $f(n)$ będzie największą liczbą o własności: dla dowolnego $2n$-elementowego zbioru punktów (z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej) istnieje co najmniej $f(n)$ różnych ładnych skojarzeń. Udowodnić, że $f(n)$ jest liczbą nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $n+1$ jest potęgą dwójki.

Rozwiązanie:

Niech $P_1, \ldots, P_{2n}$ będą danymi punktami i niech $P_i = (x_i, y_i)$.

Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $P_1 = (0,0)$ oraz że dla każdego innego punktu P_i zachodzi $y_i > 0$ lub zachodzą oba warunki $y_i = 0$ oraz $x_i > 0$. Możemy też założyć, że dla dowolnych $2 \leqslant i < j \leqslant n$ zachodzi $\sphericalangle SP_1P_j > \sphericalangle SP_1P_i$, gdzie $S = (1,0)$.

Zauważmy teraz, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$ prosta P_1P_{2i} dzieli zbiór $X \setminus \{P_1, P_{2i}\}$ na zbiory $\{P_2, \ldots, P_{2i-1}\}$ oraz $\{P_{2i+1}, \ldots, P_{2n}\}$ o licznościach odpowiednio $2(i-1)$ oraz $2(n-i)$. Wówczas istnieje co najmniej $f(i-1)f(n-i)$ ładnych skojarzeń, w których P_1 jest połączony z P_{2i} (przy czym przyjmujemy $f(0) = 1$). Wobec tego dla każdego zbioru X zachodzi $f(n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} f(i-1)f(n-i)$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym X jest zbiorem wierzchołków wielokąta wypukłego. Wówczas punkty $P_1, \ldots, P_{2n}$ to jego kolejne wierzchołki. Wtedy jeśli $1 < i < j < k$, to odcinek P_iP_k przecina odcinek P_1P_j. Wobec tego jeśli istnieje ładne skojarzenie zawierające odcinek P_1P_j, to liczba j jest parzysta. Co więcej, dla każdego parzystego j, ładne skojarzenie można przedstawić jako sumę odcinka P_1P_j oraz ładnych skojarzeń zbiorów $\{P_2, \ldots, P_{j-1}\}$ oraz $\{P_{j+1}, \ldots, P_{2n}\}$, które również tworzą wielokąty wypukłe. Na mocy zasady indukcji matematycznej otrzymujemy więc, że jeżeli X jest zbiorem punktów tworzących wielokąt wypukły, to we wcześniej wykazanej nierówności zachodzi równość, to znaczy

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i-1)f(n-i).$$

Zadanie sprowadza się zatem do wykazania, że liczba $f(n)$ zadana przez powyższy wzór rekurencyjny (oraz warunki początkowe $f(0) = f(1) = 1$) jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $n+1$ jest potęgą dwójki.

Zauważmy, że jeśli $2 \mid n$, to

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i-1)f(n-i) = 2\sum_{i=1}^{n/2} f(i-1)f(n-i),$$

czyli $2 \mid f(n)$. Jeśli natomiast zachodzi $n = 2k+1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i-1)f(n-i) = 2\sum_{i=1}^{k} f(i-1)f(n-i) + f(k)^2.$$

Stąd wniosek, że $f(2k+1) \equiv f(k) \pmod 2$. Łącząc dwa powyższe fakty natychmiast dostajemy tezę.

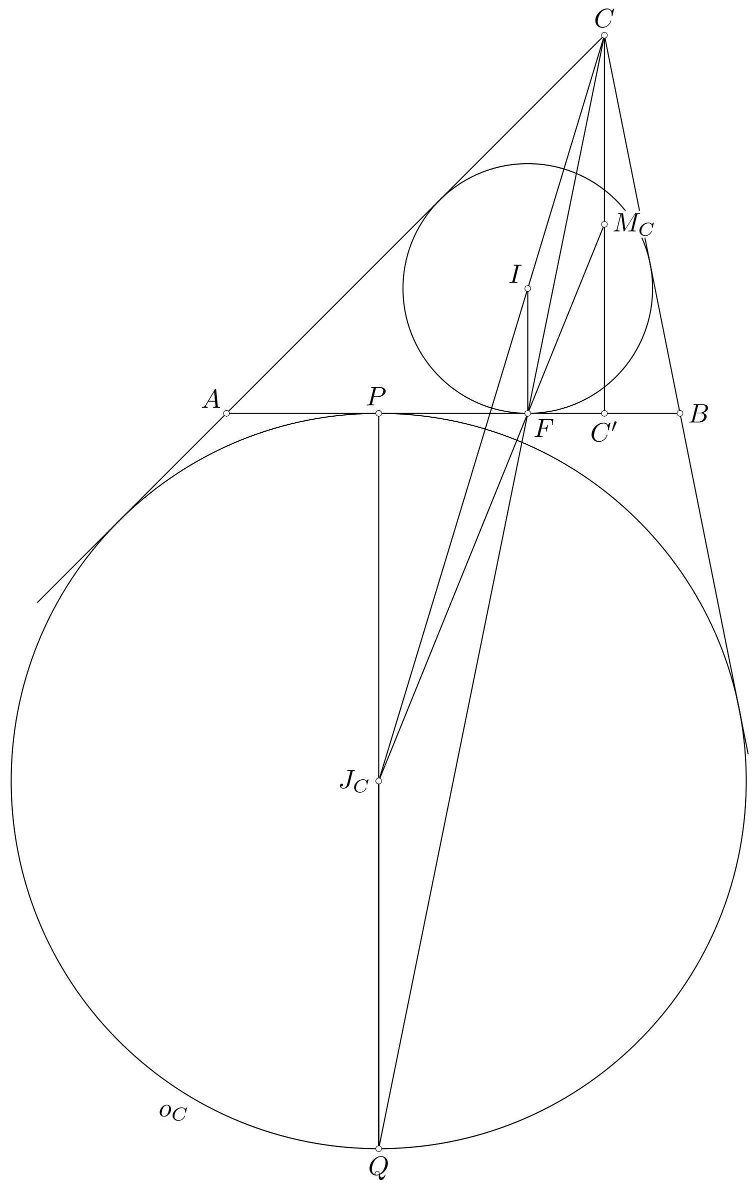
Uwaga: Otrzymany powyżej wzór rekurencyjny jest jednym ze wzorów definiujących liczby Catalana. Można udowodnić, że $f(n) = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$.

5. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty M_A, M_B, M_C są środkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C, zaś punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że proste M_AD, M_BE, M_CF oraz OI przecinają się w jednym punkcie.

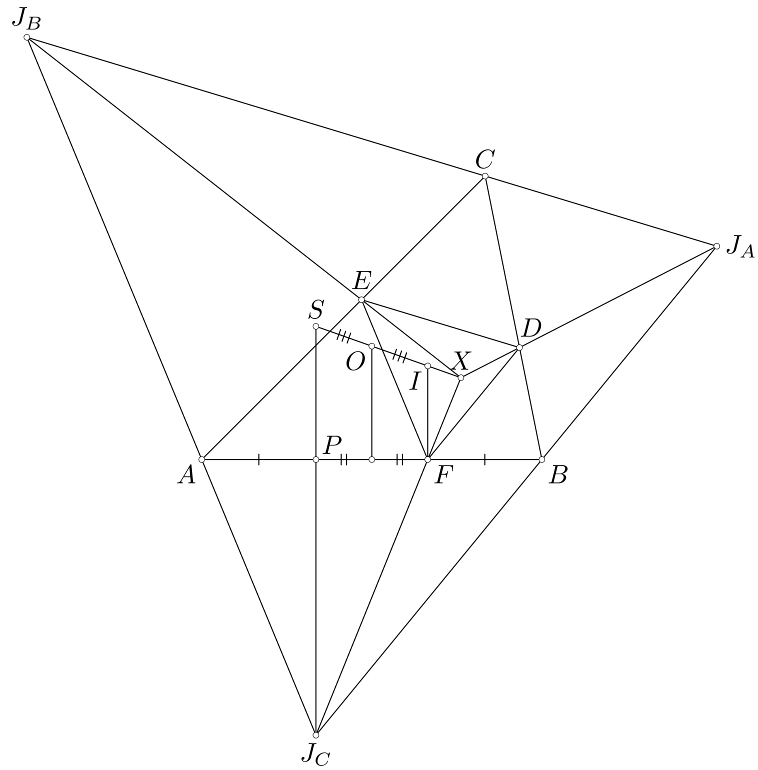
Rozwiązanie:

Rozpoczniemy od wykazania, że proste M_AD, M_BE, M_CF mają punkt wspólny. Niech J_A, J_B, J_C

będą środkami okręgów dopisanych do trójkąta ABC stycznych odpowiednio do boków BC, CA, AB. Udowodnimy najpierw, że punkty M_C, F, J_C leżą na jednej prostej. Niech C' będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C, o_C — okręgiem dopisanym do boku AB trójkąta ABC, P — punktem styczności okręgu o_C z bokiem AB, a Q — takim punktem, że PQ jest średnicą o_C. Jednokładność o środku C przekształcająca okrąg wpisany w trójkąt ABC na okrąg o_C przeprowadza promień IF na promień J_CQ, skąd wniosek, że punkty C, F, Q są współliniowe. Jednokładność o środku F przekształcająca punkt C na punkt Q przeprowadza odcinek CC' na odcinek QP, zatem przeprowadza też środek odcinka CC' na środek odcinka QP. Wobec tego punkty M_C, F, J_C są współliniowe. Analogicznie uzasadniamy, że punkty M_A, D, J_A są współliniowe oraz punkty M_B, E, J_B są współliniowe. W takim razie wystarczy wykazać, że proste J_AD, J_BE, J_CF mają punkt wspólny.



Prosta J_AJ_B jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta ABC, a więc jest prostopadła do dwusiecznej kąta wewnętrznego przy tym wierzchołku, czyli równoległa do prostej DE. Analogicznie uzasadniamy, że $J_BJ_C \parallel EF$ i $J_CJ_A \parallel FD$. Trójkąty $J_AJ_BJ_C$ i DEF mają więc odpowiednie boki równoległe i nie są przystające, bo drugi jest zawarty w pierwszym, więc proste J_AD, J_BE, J_CF mają punkt wspólny X, który jest środkiem jednokładności o skali dodatniej przekształcającej trójkąt $J_AJ_BJ_C$ na trójkąt DEF.



Niech S będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie $J_AJ_BJ_C$. Jednokładność o środku X i skali dodatniej przekształcająca trójkąt $J_AJ_BJ_C$ na trójkąt DEF przeprowadza punkt S na środek okręgu opisanego na trójkącie DEF, czyli na punkt I. Wobec tego punkty S, I, X są współliniowe. Ponadto przy tej jednokładności prosta SJ_C przechodzi na prostą IF, więc proste SJ_C i IF są równoległe. Stąd oraz z prostopadłości IF do AB wnioskujemy, że prosta SJ_C jest prostopadła do AB, zatem zawiera ona punkt P. Ponieważ $AP = BF$, więc rzut prostokątny środka odcinka SI na prostą AB jest środkiem odcinka AB. Innymi słowy, środek odcinka SI leży na symetralnej odcinka AB. W podobny sposób uzasadniamy, że środek odcinka SI leży na symetralnej odcinka BC, a więc pokrywa się on ze środkiem O okręgu opisanego na trójkącie ABC. Zatem prosta OI przechodzi przez punkt X, co kończy rozwiązanie.

6. Dany jest trójkąt ABC. Niech Ω będzie okręgiem dopisanym do tego trójkąta, stycznym do boku BC w punkcie D. Okrąg ω jest styczny wewnętrznie do okręgu Ω w punkcie D oraz do okręgu opisanego na ABC w punkcie T. Styczne do ω z punktu A przecinają bok BC w punktach X, Y, przy czym X leży na odcinku BY. Punkt $P \neq A$ jest punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach ABX i ACY. Wykazać, że punkty A, P, T są współliniowe.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw następujący lemat.

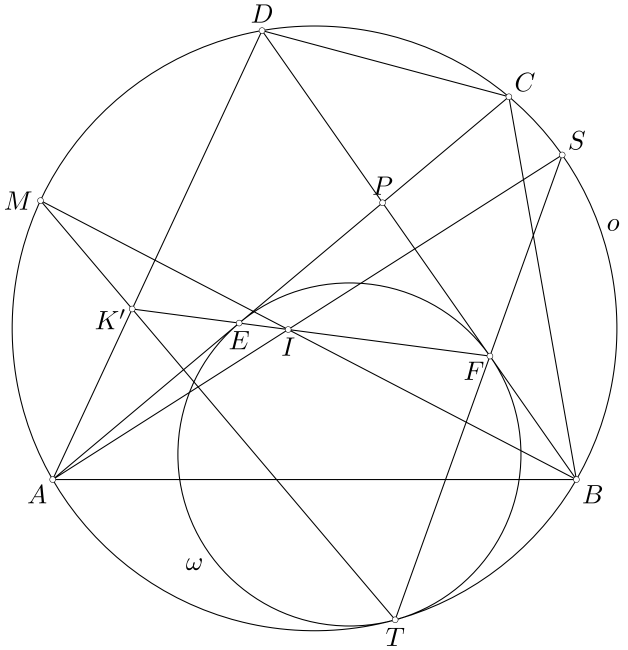
Lemat. *Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o przecinają się w punkcie P. Okrąg ω jest styczny do odcinków AP i BP odpowiednio w punktach E i F oraz do okręgu o w punkcie T. Prosta EF przecina odcinki AD i BC odpowiednio w punktach K i L. Wówczas okrąg opisany na trójkącie TKL jest styczny do o w punkcie T i do prostych AD i BC w punktach K i L.*

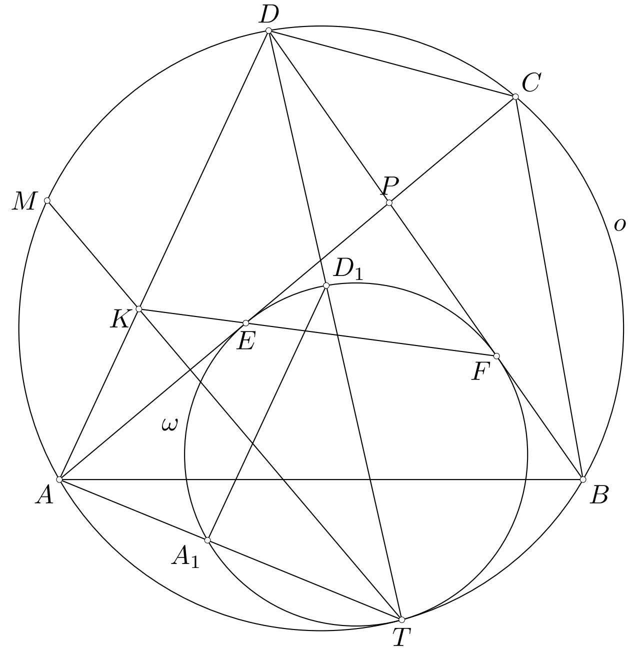
Dowód. Niech M, N będą środkami tych łuków AD i BC okręgu o, które nie zawierają punktu T. Wykażemy, że punkty M, K i T są współliniowe oraz punkty N, L i T są współliniowe. Można to zrobić na dwa sposoby.

Sposób I

Niech S będzie środkiem tego łuku DB okręgu o, który nie zawiera punktu T. Niech K' będzie punktem przecięcia prostych AD i TM, a I punktem przecięcia prostych BM i AS. Jednokładność o środku T przeprowadzająca ω na o przeprowadza punkt F na punkt S, zatem F jest punktem przecięcia prostych TS i BD. Z twierdzenia Pascala zastosowanego dla sześciokąta $TSADBM$ otrzymujemy, że punkty K', F i I są współliniowe.

Zauważmy, że I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ADB. Z lematu Sawayamy dla trójkąta ADB i okręgu ω wynika, że punkt I leży na prostej EF. Łącząc to z powyższą obserwacją otrzymujemy, że $K = K'$, czyli K leży na prostej TM. Analogicznie L leży na prostej TN.





Sposób II

Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta APD i prostej KEF mamy

$$\frac{PF}{FD} \cdot \frac{DK}{KA} \cdot \frac{AE}{EP} = 1,$$

co w połączeniu z faktem, że $PE = PF$ daje

$$\frac{DK}{KA} = \frac{FD}{AE}. \tag{1}$$

Niech teraz A_1 i D_1 będą różnymi od T punktami przecięcia okręgu ω odpowiednio z prostymi AT i DT. Wtedy z potęgi punktu mamy $DF^2 = DD_1 \cdot DT$, czyli

$$\frac{DT}{DF} = \sqrt{\frac{DT}{DF} \cdot \frac{DT}{DF}} = \sqrt{\frac{DF}{DD_1} \cdot \frac{DT}{DF}} = \sqrt{\frac{DT}{DD_1}}.$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$\frac{AT}{AE} = \sqrt{\frac{AT}{AA_1}}.$$

Jednokładność o środku T przekształcająca okrąg ω na okrąg o przeprowadza punkty A_1 i D_1 odpowiednio na A i D, skąd

$$\frac{AT}{A_1T} = \frac{DT}{D_1T},$$

co po przekształceniach daje

$$\frac{AT}{AA_1} = \frac{DT}{DD_1}.$$

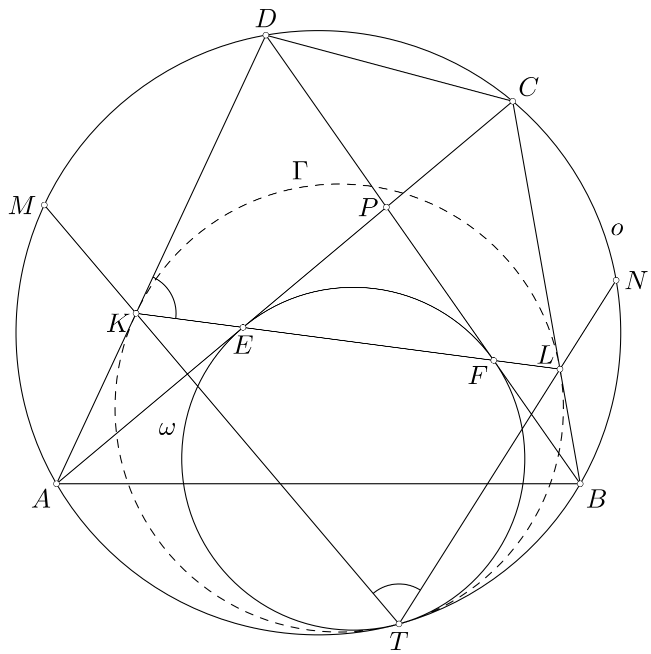
Stąd otrzymujemy

$$\frac{DT}{DF} = \sqrt{\frac{DT}{DD_1}} = \sqrt{\frac{AT}{AA_1}} = \frac{AT}{AE},$$

co w połączeniu z równością (1) prowadzi do wniosku

$$\frac{DK}{KA} = \frac{DT}{AT}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwusiecznej wynika, że prosta TK jest dwusieczną kąta ATD. Punkty M, K i T są zatem współliniowe. Analogicznie uzasadniamy, że punkty N, L i T są współliniowe.

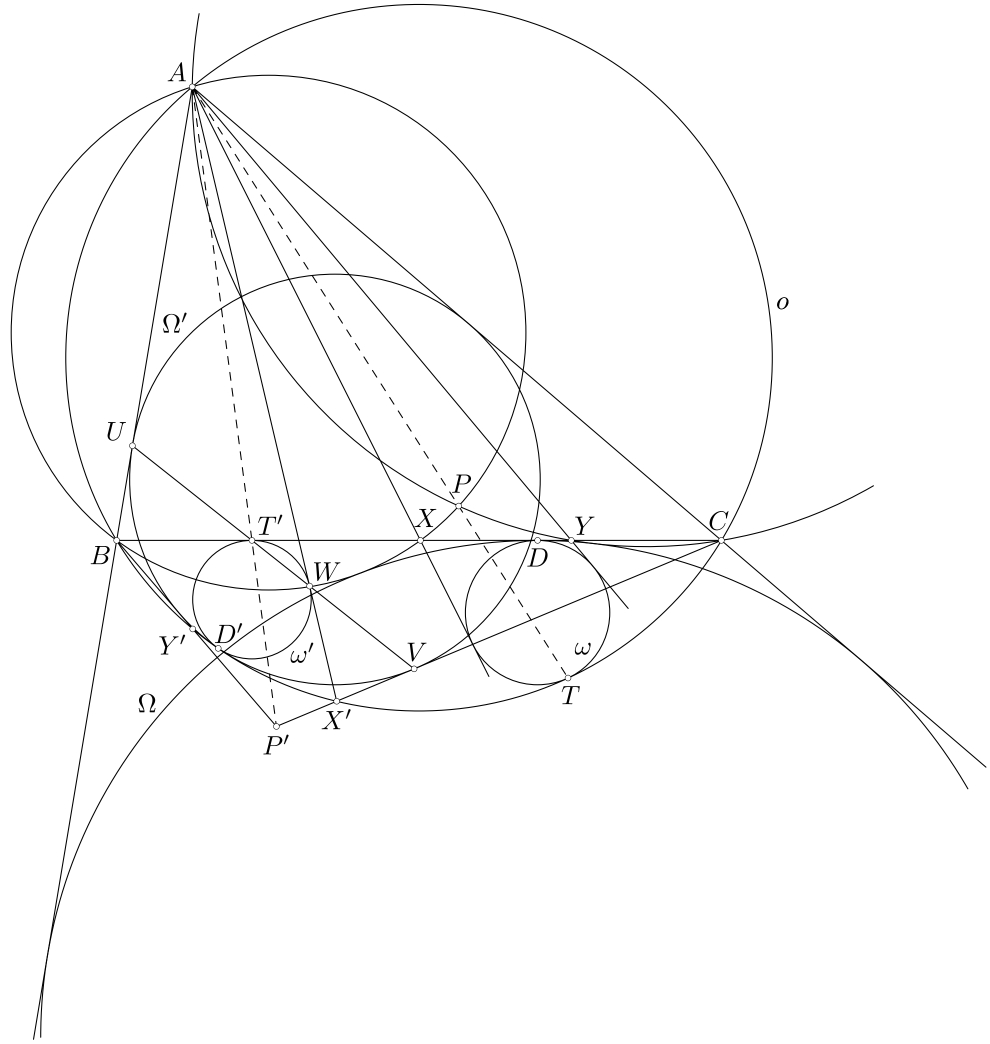


Wróćmy teraz do dowodu lematu. Przeprowadzając rachunki na kątach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sphericalangle DKL &= \sphericalangle KAE + \sphericalangle KEA = \sphericalangle DAC + \sphericalangle PEF = \sphericalangle DTC + \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle EPF)\\ &= \sphericalangle DTC + \frac{1}{2}(\sphericalangle DCA + \sphericalangle BDC) = \sphericalangle DTC + \sphericalangle MTD + \sphericalangle NTC = \sphericalangle KTL.\end{aligned}$$

Zatem okrąg opisany na trójkącie TKL jest styczny do prostej AD w punkcie K. Analogicznie dostajemy, że ten okrąg jest styczny do prostej BC w punkcie L. Wreszcie niech Γ będzie okręgiem stycznym wewnętrznie do o w punkcie T oraz do odcinka AD w punkcie K''. Jednokładność o środku T przeprowadzająca okrąg o na okrąg Γ przeprowadza punkt M na punkt K'', stąd T, K'', M są współliniowe, więc $K = K''$. Ostatecznie otrzymujemy, że Γ jest okręgiem opisanym na trójkącie TKL, a w szczególności okrąg ten jest styczny do okręgu o w punkcie T. □

Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Rozważmy przekształcenie będące złożeniem inwersji względem okręgu o środku A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta BAC. Obraz figury $\mathcal{F}$ w tym przekształceniu będziemy oznaczać przez $\mathcal{F}'$. Wtedy Ω' będzie okręgiem stycznym do boków AB, AC oraz do okręgu o w punkcie D'. Okrąg ω' jest styczny do o w punkcie D' i styczny do BC w punkcie T'. Punkty X' i Y' leżą na okręgu o, przy czym AX' i AY' są styczne do okręgu ω', a punkt Y' leży bliżej punktu B niż X'. Punkt P' jest punktem przecięcia prostych BY' i CX'. Pozostaje teraz wykazać, że punkty A, T' i P' są współliniowe.



Z lematu zastosowanego dla okręgów o, ω' oraz czworokąta $X'BAC$ dostajemy, że odcinek CX' jest styczny do okręgu Ω'. Analogicznie stosując lemat dla czworokąta $Y'CAB$ otrzymujemy, że odcinek BY' także jest styczny do okręgu Ω'.

Niech U i V będą punktami styczności okręgu Ω' odpowiednio z AB i CX', a W punktem styczności odcinka AX' z ω'. Ponownie korzystając z lematu otrzymujemy, że punkty U, T', W i V są współliniowe. Ponadto z twierdzenia Brianchona dla sześciokąta $AUBP'VC$ mamy, że proste AP', UV i BC przecinają się w jednym punkcie. Stąd T' leży na AP', co należało wykazać.

7. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych n takich, że $\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$ jest potęgą dwójki.

Rozwiązanie:

Niech $a_k = \frac{2^k}{\sqrt{2}}$. Wykażemy, że dla nieskończeniu wielu liczb n postaci $n = \lfloor a_k \rfloor + 1$ liczba $\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$ jest potęgą dwójki. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje taka liczba k_0, że dla każdego $k \geqslant k_0$ liczba $\left\lfloor (\lfloor a_k \rfloor + 1)\sqrt{2}\right\rfloor$ nie jest potęgą dwójki.

Niech $k \geqslant k_0$. Wykażemy najpierw, że $2^k < (\lfloor a_k \rfloor + 1)\sqrt{2} < 2^k + 2$. Istotnie,

$$2^k = a_k \cdot \sqrt{2} < (\lfloor a_k \rfloor + 1) \cdot \sqrt{2} < (a_k + 1) \cdot \sqrt{2} = 2^k + \sqrt{2} < 2^k + 2.$$

Ponieważ założyliśmy, że $\left\lfloor (\lfloor a_k \rfloor + 1)\sqrt{2}\right\rfloor$ nie jest potęgą dwójki, więc z powyższej nierówności wynika, że $\lfloor (\lfloor a_k \rfloor + 1)\sqrt{2}\rfloor = 2^k + 1$. Z tożsamości

$$(\lfloor a_k \rfloor + 1)\sqrt{2} = (a_k - \{a_k\} + 1)\sqrt{2} = 2^k - \{a_k\}\sqrt{2} + \sqrt{2}$$

otrzymujemy, że

$$\{a_k\} = \frac{2^k + \sqrt{2} - (\lfloor a_k \rfloor + 1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{2^k + \sqrt{2} - (2^k + 1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2}.$$

Wobec tego

$$\{a_{k+1}\} = \{2a_k\} = 2\{a_k\}.$$

Stosując m-krotnie powyższą równość otrzymujemy dla dowolnego m

$$\{a_{k+m}\} = 2\{a_{k+m-1}\} = \ldots = 2^m\{a_k\}.$$

Ponieważ a_k jest liczbą niewymierną, więc $\{a_k\} > 0$. Można więc dobrać liczbę m tak dużą, że $2^m\{a_k\} > 1$. Otrzymujemy wówczas $\{a_{k+m}\} > 1$, co daje sprzeczność, gdyż mantysa dowolnej liczby jest mniejsza od 1.

8. Niech m, p będą dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym p jest liczbą pierwszą. Załóżmy, że istnieją liczby całkowite $a, c_1, \ldots, c_m$ takie, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ zachodzi

$$p \nmid a + i \quad \text{oraz} \quad p \mid a + i - c_i^2.$$

Wykazać, że $m < 2\sqrt{p}$.

Rozwiązanie:

Liczbę całkowitą t niepodzielną przez p nazywamy *resztą kwadratową* modulo p, jeśli istnieje taka liczba całkowita x, że $t \equiv x^2 \pmod{p}$. Liczby całkowite niebędące resztami kwadratowymi nazywamy *nieresztami*. Będziemy korzystać z następujących prostych faktów: iloczyn dwóch reszt jest resztą, iloczyn reszty i niereszty jest nieresztą.

W rozwiązaniu będzie pomocny następujący

Lemat. *Niech n_0 będzie najmniejszą dodatnią nieresztą modulo p. Wówczas $n_0 < \sqrt{p} + 1$.*

Dowód. Niech $p = kn_0 - r$, gdzie liczby k, r są całkowite oraz $0 \leqslant r < n_0$. Skoro $p \nmid kn_0$, to $r > 0$. Z minimalności n_0, r musi być resztą kwadratową modulo p. Z drugiej strony, $kn_0 \equiv r \pmod{p}$, więc k musi być nieresztą, czyli $k \geqslant n_0$. Otrzymujemy $p = kn_0 - r > n_0^2 - n_0 = n_0(n_0 - 1)$, a stąd natychmiast wynika teza lematu. □

Rozwiązanie będziemy opierać na następującej kluczowej obserwacji: jeśli n jest nieresztą modulo p, to wszystkie liczby $an + n, an + 2n, \ldots, an + mn$ również są nieresztami jako iloczyny reszty i niereszty.

Ustalmy teraz nieresztę n. Przypuśćmy nie wprost, że n spełnia jednocześnie nierówności

$$n \leqslant m \quad \text{oraz} \quad mn > p. \tag{1}$$

Wykażemy, że wtedy dla pewnych $1 \leqslant i, j \leqslant m$ zachodzi

$$an + jn \equiv a + i \pmod{p}$$

co jest niemożliwe, gdyż $a + i$ jest resztą, a $an + jn$ nieresztą. Zauważmy, że wśród $(mn - n) + m$ liczb

$$an + n, an + n + 1, \ldots, an + mn - 1,$$

$$a + 1, a + 2, \ldots, a + m$$

pewne dwie muszą dawać te same reszty z dzielenia przez p, gdyż $mn + (m - n) > p$. Znaczy to, że dla pewnego k spełniającego $n \leqslant k < mn$, liczba $an + k$ przystaje do pewnej z reszt $a + 1, \ldots, a + m$, gdyż:

- $a+1, a+2, \ldots, a+m$ dają różne reszty z dzielenia przez p,
- jeśli pewnie dwie liczby wśród $an+n, an+n+1, \ldots, an+mn-1$ dają te same reszty modulo p, to skoro są to kolejne liczby całkowite, *wszystkie* reszty modulo p muszą się w tym ciągu pojawiać,
- jeśli liczby $an+n, an+n+1, \ldots, an+mn-1$ dają różne reszty modulo p, któraś z nich musi być równa pewnej z reszt $a+1, \ldots, a+m$.

Niech j_0 będzie takie, że $j_0 n \leqslant k < (j_0+1)n$. Z warunku $n \leqslant m$ wynika, że przynajmniej jedna z liczb $an+j_0 n$, $an+(j_0+1)n$ również przystaje do pewnej z reszt $a+1, \ldots, a+m$, co daje nam żądaną sprzeczność.

Skoro nierówności (1) nie mogą być jednocześnie prawdziwe, to dla dowolnej niereszty n zachodzi

$$m \leqslant \max\left\{n-1, \frac{p}{n}\right\}.$$

Wystarczy więc uzasadnić, że istnieje niereszta n modulo p w przedziale $\left(\frac{1}{2}\sqrt{p}, 2\sqrt{p}\right]$, gdyż wówczas $\max\left\{n-1, \frac{p}{n}\right\} < 2\sqrt{p}$.

Z lematu wiemy, że istnieje niereszta n_0 nie większa niż $\sqrt{p}$. Możemy zatem określić $n = 4^\ell n_0$, gdzie ℓ jest największym wykładnikiem, dla którego $4^\ell n_0 \leqslant 2\sqrt{p}$. Wówczas n jest nieresztą z przedziału $\left(\frac{1}{2}\sqrt{p}, 2\sqrt{p}\right]$, co kończy rozwiązanie.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y równość

$$f(x^2 + 2f(y)) = f(x)^2 + y + f(y).$$

Rozwiązanie:

Przez $P(a, b)$ będziemy oznaczać podstawienie $x = a,\ y = b$ w równości danej w treści zadania.

Zauważmy najpierw, że jeśli $f(a) = f(b)$, to z podstawień $P(x, a)$ i $P(x, b)$ wynika, że $a = b$. Zatem funkcja f jest różnowartościowa. Ponadto z podstawień $P(x, y)$ i $P(-x, y)$ dostajemy $f(x)^2 = f(-x)^2$. Korzystając z różnowartościowości otrzymujemy

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{dla } x \neq 0. \tag{1}$$

Niech $c = f(0)$. Przyjmijmy, że $c \neq 0$. Wtedy $P(0, -c^2)$ i $P(0, c^2)$ dają nam

$$f(2f(-c^2)) = f(0)^2 - c^2 + f(-c^2) = f(-c^2) \ \text{ oraz } \ f(2f(c^2)) = f(0)^2 + c^2 + f(c^2) = 2c^2 + f(c^2).$$

Z różnowartościowości otrzymujemy $2f(-c^2) = -c^2$, a dzięki założeniu $c \neq 0$ mamy $f(-c^2) = -f(c^2)$, czyli $2f(c^2) = c^2$. Wobec tego $f(c^2) = f(2f(c^2)) = 2c^2 + f(c^2)$, zatem $c^2 = 0$. Stąd $f(0) = 0$. Zatem równość (1) jest spełniona także dla $x = 0$.

Podstawiając teraz $P(x, 0)$ dostajemy

$$f(x^2) = f(x)^2, \tag{2}$$

czyli wyjściowe równanie można przekształcić do postaci $f(x^2 + 2f(y)) = f(x^2) + y + f(y)$, co daje nam

$$f(x + 2f(y)) = f(x) + f(y) + y \quad \text{dla } x \geqslant 0. \tag{3}$$

Jeśli $x < 0$, to $-x > 0$, więc wstawiając $-x$ w miejsce x oraz $-y$ w miejsce y w równości (3) i stosując równość (1) dostajemy

$$f(x + 2f(y)) = -f(-x + 2f(-y)) = -(f(-x) + f(-y) + (-y)) = f(x) + f(y) + y \ \text{ dla } x < 0,$$

zatem równość (3) zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y. Podstawiając w niej $x = -y$ dostajemy $f(-y + 2f(y)) = y$, zatem f jest surjekcją. Korzystając z podstawienia $P(0, y)$ otrzymujemy $f(2f(y)) = y + f(y)$, więc na mocy (3) dostajemy

$$f(x + 2f(y)) = f(x) + y + f(y) = f(x) + f(2f(y)),$$

co w połączeniu z tym, że f jest surjekcją implikuje

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zatem f spełnia równanie Cauchy'ego. Wiemy z (2), że f przyjmuje dodatnie wartości dla dodatnich argumentów. Z własności równania Cauchy'ego wynika, że w takim razie f musi być postaci

$$f(x) = ax$$

dla pewnej liczby rzeczywistej a. Podstawiając to do wyjściowego równania otrzymujemy zależność $ax^2 + 2a^2y = a^2x^2 + y + ay$, czyli równoważnie

$$(1 - a)(ax^2 - y - 2ay) = 0 \ \text{ dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}.$$

Powyższa tożsamość jest spełniona tylko dla $a = 1$. Zatem $f(x) = x$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcja $f(x) = x$ spełnia warunki zadania.

2. Dane są dodatnie liczby całkowite $s \leqslant t$. Rozważmy ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dany wzorem

$$a_n = \sum_{k=s}^{t} \binom{n}{k}.$$

Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność $a_n^2 \geqslant a_{n-1}a_{n+1}$.

Rozwiązanie:

Niech $F_n(x) = \sum_{k=s}^{t} \binom{n}{k} x^k$. Korzystając ze wzoru $\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \binom{a}{b}$ dostajemy

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=s}^{t} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) x^k \\ &= \sum_{k=s-1}^{t-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} + \sum_{k=s}^{t} \binom{n-1}{k} x^k \\ &= \left(xF_{n-1}(x) + \binom{n-1}{s-1} x^s - \binom{n-1}{t} x^{t+1} \right) + F_{n-1}(x) \\ &= \binom{n-1}{s-1} x^s - \binom{n-1}{t} x^{t+1} + (1+x)F_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Oznaczmy $P_n(x) = F_n^2(x) - F_{n-1}(x)F_{n+1}(x)$. Korzystając z (4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_n(x) &= F_n(x) \cdot F_n(x) - F_{n-1}(x) \cdot F_{n+1}(x) \\ &= F_n(x) \underbrace{\left(\binom{n-1}{s-1} x^s - \binom{n-1}{t} x^{t+1} + (1+x)F_{n-1}(x) \right)}_{F_n(x)} \\ &\quad - F_{n-1}(x) \underbrace{\left(\binom{n}{s-1} x^s - \binom{n}{t} x^{t+1} + (1+x)F_n(x) \right)}_{F_{n+1}(x)} \\ &= \left(\binom{n-1}{s-1} F_n(x) - \binom{n}{s-1} F_{n-1}(x) \right) x^s + \left(\binom{n}{t} F_{n-1}(x) - \binom{n-1}{t} F_n(x) \right) x^{t+1} \\ &= \sum_{k=s}^{t} \left(\binom{n-1}{s-1}\binom{n}{k} - \binom{n}{s-1}\binom{n-1}{k} \right) x^{k+s} + \sum_{k=s}^{t} \left(\binom{n}{t}\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{t}\binom{n}{k} \right) x^{k+t+1}. \end{aligned}$$

Ponieważ $s \leqslant k \leqslant t$, więc zachodzą nierówności

$$\binom{n-1}{s-1}\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{s-1}\binom{n-1}{k} \quad \text{i} \quad \binom{n}{t}\binom{n-1}{k} \geqslant \binom{n-1}{t}\binom{n}{k}.$$

Zatem wielomian P_n ma nieujemne współczynniki, skąd

$$0 \leqslant P_n(1) = F_n^2(1) - F_{n-1}F_{n+1}(1) = a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1},$$

co chcieliśmy udowodnić.

3. Ustalmy graf H oraz liczbę naturalną k. Alicja i Bob grają w następującą grę na grafie G, początkowo złożonym z N wierzchołków i nieposiadającym żadnych krawędzi. W każdym ruchu Alicja wskazuje k wierzchołków w G, pomiędzy którymi nie ma żadnej krawędzi. Następnie Bob dodaje do G dowolny zbiór krawędzi pomiędzy wierzchołkami wybranymi przez Alicję, przy czym musi dodać co najmniej jedną krawędź. Alicja wygrywa grę w momencie, gdy w G pojawi się podgraf indukowany izomorficzny z H, zaś Bob wygrywa, gdy Alicja nie może już wykonać ruchu. Wykazać, że dla każdego grafu H i liczby k istnieje taka liczba N, że Alicja ma strategię wygrywającą w powyższej grze.

Rozwiązanie:

Nazwijmy grę opisaną w treści zadania (H, N)-*grą*. Udowodnimy przez indukcję ze względu na liczbę krawędzi grafu H, że dla każdego H istnieje taka liczba N, że Alicja ma strategię wygrywającą w (H, N)-grze.

Jeżeli w grafie H nie ma żadnej krawędzi, to wystarczy przyjąć jako N liczbę wierzchołków grafu H, wówczas Alicja od razu wygrywa (H, N)-grę.

Następnie niech H' będzie ustalonym podgrafem H, który ma o jedną krawędź mniej niż H. Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje N', dla którego Alicja ma strategię wygrywającą w (H', N')-grze. Niech G' będzie grafem o takiej samej liczbie wierzchołków, co graf G, początkowo niezawierającym żadnej krawędzi. W dalszej części rozwiązania, dla każdego wierzchołka x grafu G przez x' oznaczamy odpowiadający mu wierzchołek grafu G'. W dowolnym momencie gry w grafie G' wierzchołki u', v' są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G

- wierzchołki u, v nie są połączone krawędzią,
- istnieje podgraf indukowany izomorficzny z H' zawierający u, v,
- dodanie krawędzi pomiędzy u, v utworzy podgraf indukowany izomorficzny z H.

Załóżmy, że dla dowolnego N Alicja nie ma strategii wygrywającej w (H, N)-grze. Wtedy Bob ma strategię wygrywającą w tej grze i załóżmy, że Bob gra według tej strategii. Zauważmy, że Bob w swoim ruchu nigdy nie połączy krawędzią wierzchołków, które były połączone krawędzią w grafie G', gdyż wtedy by przegrał.

Lemat 1. *Dla każdego ℓ istnieje takie N, że Alicja może dobierać ruchy w (H, N)-grze w taki sposób, że w grafie G' powstanie wierzchołek v' stopnia co najmniej ℓ, dla którego wierzchołki grafu G odpowiadające ℓ sąsiadom v' są parami niepołączone krawędzią.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na ℓ. Dla $\ell = 1$ wystarczy wziąć $N = N'$.

Teraz załóżmy, że teza zachodzi dla ℓ, udowodnimy ją dla $\ell + 1$. Na mocy założenia indukcyjnego istnieje taka dodatnia liczba całkowita T_ℓ, że Alicja może dobierać swoje ruchy w (H, T_ℓ)-grze w taki sposób, że w grafie G' powstanie wierzchołek v' stopnia co najmniej ℓ, dla którego pomiędzy wierzchołkami w grafie G odpowiadającymi ℓ sąsiadom v' nie ma krawędzi.

Niech $N = N' \cdot T_\ell$. Z założenia indukcyjnego wynika, że Alicja może dobierać ruchy w (H, N)-grze tak, że w grafie G' powstanie N' wierzchołków $v'_1, \ldots, v'_{N'}$, spośród których każdy ma własność z tezy lematu. Następnie Alicja może zastosować strategię wygrywającą w (H', N')-grze na grafie o wierzchołkach $v_1, \ldots, v_{N'}$. Wówczas w grafie G' pojawi się krawędź pomiędzy pewnymi dwoma wierzchołkami v'_i, v'_j. Wtedy wierzchołek v'_i spełnia tezę lematu, gdyż w grafie G nigdy nie powstała krawędź pomiędzy v_j a żadnym z wierzchołków odpowiadających ℓ sąsiadom v'_j. □

Lemat 2. *Dla każdego p istnieje takie N, że Alicja może dobierać ruchy w (H, N)-grze w taki sposób, że w grafie G' pojawi się klika p-elementowa.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na p. Dla $p = 1$ teza jest oczywista, gdyż już na samym początku gry w grafie G' istnieje klika jednoelementowa.

Teraz załóżmy, że teza zachodzi dla p, udowodnimy ją dla $p + 1$. Zatem istnieje takie U_p, że Alicja może tak dobierać ruchy w (H, U_p)-grze, że w grafie G' powstanie p-elementowa klika. Niech N będzie liczbą z Lematu 1 zastosowanego dla $\ell = U_p$. Wtedy Alicja może dobierać ruchy w (H, N)-grze w taki sposób, że w grafie G' pojawi się wierzchołek v' stopnia co najmniej U_p, taki że wierzchołki w grafie G odpowiadające U_p sąsiadom $v'_1, \ldots, v'_{U_p}$ wierzchołka v' są parami niepołączone krawędzią. Z założenia indukcyjnego wynika, że w dalszej części gry Alicja może dobierać ruchy tak, że w grafie G' powstanie klika K' o p wierzchołkach spośród $v'_1, \ldots, v'_{U_p}$. Wtedy $K' \cup \{v'\}$ tworzy klikę $(p+1)$-elementową. □

Z Lematu 2 zastosowanego dla $p = k$ otrzymujemy, że istnieje N, dla którego Alicja może dobierać ruchy w (H, N)-grze w taki sposób, że w grafie G' powstanie k-elementowa klika. W następnym ruchu Alicja wybiera odpowiadające k wierzchołków w grafie G, a Bob musi dodać krawędź pomiędzy dwoma z nich i przegrywa. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c o następującej własności: dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej z każdy wielokąt ściśle wypukły o wierzchołkach w punktach o współrzędnych ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, z\}$ ma co najwyżej $100z^c$ wierzchołków.

Rozwiązanie:
Odpowiedź: Szukany zbiór liczb c to $[\frac{2}{3}, \infty)$.

W pierwszej części rozwiązania udowodnimy, że wszystkie liczby $c \geqslant \frac{2}{3}$ spełniają warunki zadania. Wyróżnijmy w naszym wielokącie wierzchołek A o najmniejszej współrzędnej y (jeżeli są takie dwa, to ten z mniejszą współrzędną x) oraz wierzchołek B o największej współrzędnej x (jeżeli są takie dwa, to ten z mniejszą współrzędną y). Udowodnimy, że obchodząc obwód tego wielokąta przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara od wierzchołka A do wierzchołka B przejdziemy co najwyżej $6z^{2/3}$ boków. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla trzech pozostałych „ćwiartek” obwodu otrzymamy, że wielokąt ma co najwyżej $24z^{2/3}$ boków.

Oznaczmy odwiedzone w ten sposób wierzchołki przez $A_0, A_1, \ldots, A_k$ (gdzie $A_0 = A$, $A_k = B$). Oznaczmy także przez $v_i = (x_i, y_i)$ wektor $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$. Z definicji punktów A i B wynika, że $x_i \geqslant 1$ oraz $y_i \geqslant 0$. Dodatkowo jeżeli $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$, to $x_0 + x_1 + \ldots x_{k-1} = x_B - x_A \leqslant z$ oraz $y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-1} = y_B - y_A \leqslant z$.

Wektor (x_i, y_i) nazwiemy *wysokim*, jeżeli $y_i \geqslant z^{1/3}$, *szerokim*, jeżeli $x_i \geqslant z^{1/3}$ oraz *krótkim*, jeżeli nie jest on ani wysoki, ani szeroki. Zauważmy, że skoro $y_0 + \ldots + y_{k-1} \leqslant z$ oraz $y_i \geqslant 0$, to wektorów wysokich jest co najwyżej $z^{2/3}$. Analogicznie wektorów szerokich jest także co najwyżej $z^{2/3}$. Wektory krótkie mają obie współrzędne mniejsze niż $z^{1/3}$, zatem jest ich co najwyżej $(z^{1/3} + 1)^2 \leqslant 4z^{2/3}$. Każdy wektor jest wysoki, szeroki, lub krótki (choć może być jednocześnie wysoki i szeroki), zatem wszystkich wymienionych przez nas wektorów jest co najwyżej $z^{2/3} + z^{2/3} + 4z^{2/3} = 6z^{2/3}$. Pokazaliśmy więc, że wszystkie liczby $c \geqslant \frac{2}{3}$ spełniają warunki zadania.

W drugiej części rozwiązania udowodnimy, że dla każdego $z \geqslant 100$ istnieje wielokąt spełniający warunki zadania o liczbie wierzchołków większej niż $\frac{1}{100}z^{2/3}$. Stąd zaś wyniknie, że żadna liczba c mniejsza niż $\frac{2}{3}$ nie spełnia warunków zadania.

Rozważmy wszystkie wektory o takich współrzędnych całkowitych (x, y), że $1 \leqslant x, y \leqslant z^{1/3}$ oraz $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$. Ponieważ $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$, więc żadne dwa z tych wektorów nie są równoległe. Oznaczmy je przez $v_0, \ldots, v_{k-1}$ i bez straty ogólności załóżmy, że są one posortowane rosnąco względem kąta pomiędzy osią OX a danym wektorem. Następnie zdefiniujmy $A_0 = (0, 0)$ oraz $A_i = A_{i-1} + v_{i-1}$. Łatwo zauważyć, że tak zdefiniowane punkty $A_0, A_1, \ldots, A_k$ są wierzchołkami wielokąta wypukłego. Ponadto skoro tych wektorów jest co najwyżej $z^{2/3}$, a ich współrzędne wynoszą co najwyżej $z^{1/3}$, to jest jasne, że współrzędne wszystkich punktów A_i wynoszą co najwyżej z, zatem tak skonstruowany wielokąt spełnia warunki zadania. Pozostaje wykazać, że $k > \frac{1}{100}z^{2/3}$, tj. że par (x, y) takich że $1 \leqslant x, y \leqslant z^{1/3}$ oraz $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$ jest więcej niż $\frac{1}{100}z^{2/3}$.

Oznaczmy $M = \lfloor z^{1/3} \rfloor$. Parę (x, y) taką że $1 \leqslant x, y \leqslant M$ oraz $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$ nazwiemy *dobrą*, a taką że $1 \leqslant x, y \leqslant M$ oraz $\mathrm{NWD}(x, y) > 1$ nazwiemy *złą*. Jeżeli $\mathrm{NWD}(x, y) > 1$, to istnieje liczba pierwsza p, taka że $p \mid \mathrm{NWD}(x, y)$, czyli $p \mid x$ oraz $p \mid y$. Przez B_p oznaczmy zbiór takich par (x, y), że $1 \leqslant x, y \leqslant M$ oraz $p \mid x$ i $p \mid y$.

Niech $\mathbb{P}_M$ będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych nie większych od M. Wtedy zbiór $\bigcup_{p\in\mathbb{P}_M} B_p$ zawiera wszystkie złe pary. Ponadto jeśli $(x,y)\in B_p$, to $p \mid x$ i $p \mid y$, a więc

$$|B_p| \leqslant \left(\frac{M}{p}\right)^2 = \frac{M^2}{p^2}.$$

Otrzymujemy zatem następujące oszacowanie na liczbę złych par:

$$\left|\bigcup_{p\in\mathbb{P}_M} B_p\right| \leqslant \sum_{p\in\mathbb{P}_M} |B_p| \leqslant \sum_{p\in\mathbb{P}_M} \frac{M^2}{p^2} = M^2 \sum_{p\in\mathbb{P}_M} \frac{1}{p^2}.$$

Udowodnimy, że $\sum_{p\in\mathbb{P}_M} \frac{1}{p^2} < \frac{3}{4}$. Otrzymamy wówczas, że złych par jest co najwyżej $\frac{3}{4}M^2$, wobec czego dobrych par jest co najmniej $\frac{1}{4}M^2 > \frac{1}{100}z^{2/3}$, co zakończy dowód.

Niech $S_n = \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Udowodnimy indukcyjnie, że dla $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $S_n \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{n}$.

Dla $n=2$ zachodzi równość: $S_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$. Załóżmy teraz, że $S_n \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{n}$. Wówczas

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{3}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)n} = \frac{3}{4} - \frac{1}{n+1},$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zauważmy wreszcie, że $\sum_{p\in\mathbb{P}_M} \frac{1}{p^2} \leqslant S_M < \frac{3}{4}$. Wykazaliśmy więc, że dla każdego $z \geqslant 100$ istnieje wielokąt spełniający warunki zadania o liczbie wierzchołków większej niż $\frac{1}{100}z^{2/3}$. Pozostało zauważyć, że dla każdej liczby rzeczywistej $c < \frac{2}{3}$, dla dostatecznie dużych wartości z zachodzi nierówność

$$100z^c \leqslant \frac{1}{100}z^{2/3}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

5. Niech P, Q będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych spełniającymi równość

$$P\left(P(x)\right) = \left(Q(x)\right)^2$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Rozstrzygnąć, czy z tego wynika, że istnieje taki wielomian R o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $P(x) = \left(R(x)\right)^2$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak, taki wielomian R musi istnieć.

Możemy założyć bez straty ogólności, że P i Q są unormowane. Ponadto, jeśli Q jest wielomianem stałym, to P też jest wielomianem stałym oraz $P(x) = (Q(x))^2$, więc wystarczy przyjąć $R = Q$.

Załóżmy zatem, że Q nie jest wielomianem stałym. Porównując stopnie wielomianów otrzymujemy

$$\left(\deg P\right)^2 = 2\deg Q.$$

Zatem dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n mamy $\deg P = 2n$ oraz $\deg Q = 2n^2$.

Udowodnimy, że istnieją takie wielomiany R, S o współczynnikach rzeczywistych, że

$$P(x) = \left(R(x)\right)^2 + S(x)$$

oraz $\deg R = n$ i $\deg S < n$. Zapiszmy $P(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1}x + a_{2n}$. Należy znaleźć taki wielomian $R(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$, że $\deg(P(x) - R(x)^2) < n$. Mamy

$$R(x)^2 = b_0^2x^{2n} + 2b_0b_1x^{2n-1} + (2b_0b_2 + b_1^2)x^{2n-2} + (2b_0b_3 + 2b_1b_2)x^{2n-3} + (2b_0b_4 + 2b_1b_3 + b_2^2)x^{2n-4} + \ldots$$

Wobec tego spełnione muszą zostać równości

$$\begin{aligned}
1 &= b_0^2 \\
a_1 &= 2b_0b_1 \\
a_2 &= 2b_0b_2 + b_1^2 \\
&\vdots \\
a_n &= 2b_0b_n + 2b_1b_{n-1} + \dots
\end{aligned}$$

Kładziemy $b_0 = 1$. Z drugiego równania obliczamy $b_1 = \frac{a_1}{2b_0}$, następnie z trzeciego równania jesteśmy w stanie obliczyć b_2, i tak dalej: mając wyznaczone $b_0, b_1, \dots, b_{k-2}$, obliczamy z k-tego równania

$$b_{k-1} = \frac{a_{k-1} - (2b_1b_{k-2} + 2b_2b_{k-3} + \dots)}{2b_0}.$$

Zatem istnieje wielomian R o postulowanej własności. Jako S wystarczy przyjąć wtedy $P(x) - R(x)^2$.

Teraz połóżmy

$$A(x) = R\left(P(x)\right) \text{ oraz } B(x) = S\left(P(x)\right).$$

Mamy zatem $\deg A = 2n^2 = \deg Q$ oraz

$$B(x) = S(P(x)) = P(P(x)) - R(P(x))^2 = Q(x)^2 - A(x)^2 = (Q(x) - A(x))(Q(x) + A(x)).$$

Któryś z wielomianów $Q(x) - A(x)$, $Q(x) + A(x)$ ma stopień $2n^2$, gdyż $\deg Q = \deg A = 2n^2$. Jeśli więc B jest wielomianem niezerowym, to $\deg B \geqslant 2n^2$. Jednakże skoro $B(x) = S(P(x))$, to mamy $\deg B \leqslant (n-1) \cdot 2n < 2n^2$, co daje sprzeczność. Wobec tego B jest wielomianem zerowym. Z drugiej strony wielomian P jest niestały, więc $S \equiv 0$. Otrzymujemy zatem $P(x) = (R(x))^2$, co należało dowieść.

6. Zbiór punktów na płaszczyźnie pokolorowanych na czerwono i zielono nazwiemy *trójkątnym*, jeżeli istnieje na płaszczyźnie trójkąt Δ taki, że wszystkie punkty jednego koloru leżą we wnętrzu Δ, a wszystkie punkty drugiego koloru leżą poza Δ. Dany jest skończony zbiór A (o mocy większej niż 2019) punktów na płaszczyźnie pokolorowanych na czerwono lub zielono, leżących w położeniu ogólnym. Czy zawsze prawdą jest, że jeśli dowolne 2019 punktów z A tworzą zbiór trójkątny, to zbiór A też jest trójkątny?

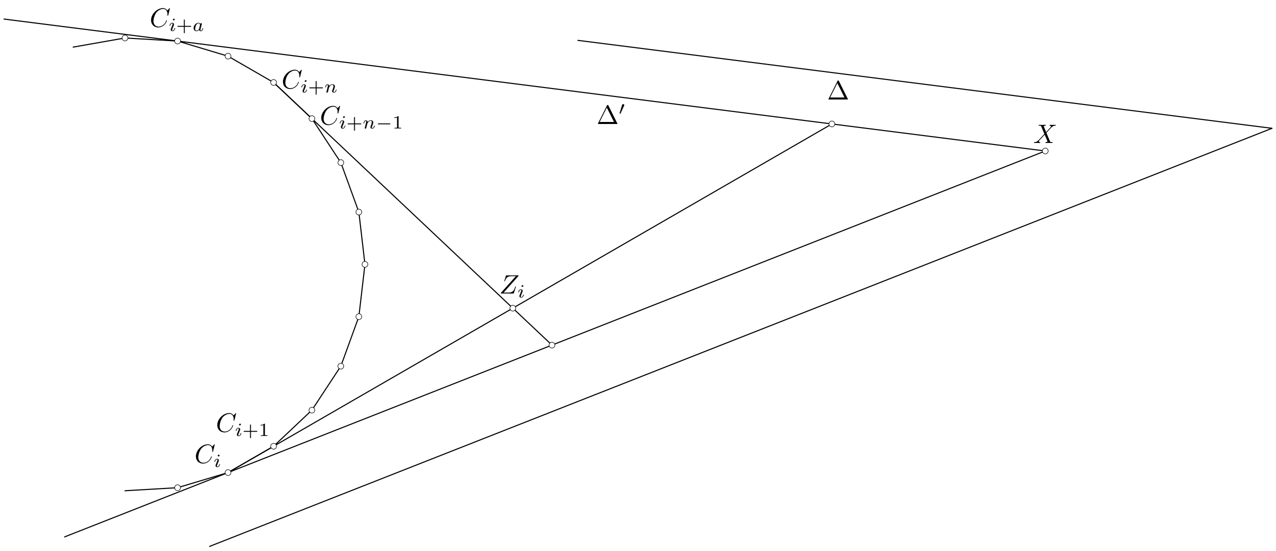
Rozwiązanie:

Wskażemy przykład świadczący o tym, że tak nie jest. Zapomnijmy na razie o warunku położenia ogólnego. Rozważmy $3n$-kąt foremny o wierzchołkach $C_1, C_2, \dots, C_{3n}$, przy czym przyjmujemy oznaczenie $C_i = C_{i+3n}$. Niech Z_i będzie punktem przecięcia prostych C_iC_{i+1} i $C_{i+n-1}C_{i+n}$. Punkty C_i kolorujemy na czerwono, a Z_i na zielono.

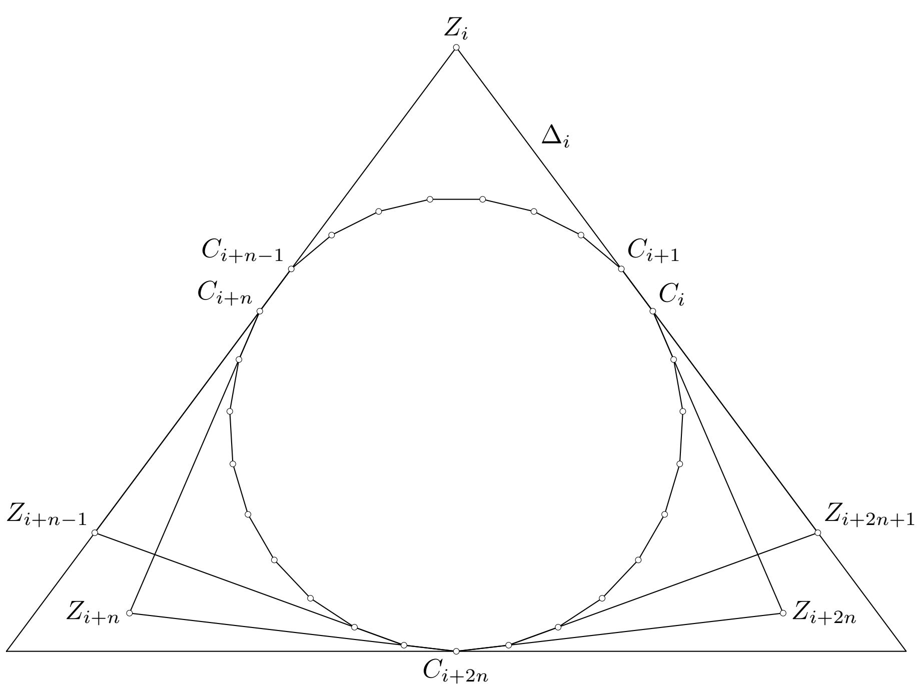
Wykażemy, że zbiór złożony z powyższych punktów nie jest trójkątny. Otoczka wypukła zielonych punktów zawiera wszystkie czerwone punkty, zatem nie istnieje trójkąt, który pokrywa tylko zielone punkty. Załóżmy nie wprost, że istnieje trójkąt Δ, wewnątrz którego leżą wszystkie czerwone punkty, ale nie leży w nim żaden zielony punkt. Dla każdego boku trójkąta Δ rozważmy czerwony punkt, który znajduje się najbliżej tego boku i poprowadźmy przez niego prostą równoległą do tego boku. Te trzy proste wyznaczają trójkąt $\Delta' \subseteq \Delta$, który zawiera wszystkie czerwone punkty w swoim wnętrzu lub na swoim brzegu i każdy bok Δ' zawiera co najmniej jeden czerwony punkt. Wówczas pewne dwa z tych trzech czerwonych punktów na bokach Δ' są postaci C_i, C_{i+a}, gdzie $a \geqslant n$. Niech X będzie tym wierzchołkiem trójkąta Δ', że jego boki, których jednym z końców jest X zawierają punkty C_i i C_{i+a}. Zauważmy, że prosta C_iC_{i+1} przecina odcinek $C_{i+a}X$. Ponadto z założenia $a \geqslant n$ wynika, iż prosta $C_{i+n}C_{i+n-1}$ przecina odcinek C_iX. Stąd przecięcie prostych C_iC_{i+1} i $C_{i+n}C_{i+n-1}$, czyli punkt Z_i, leży wewnątrz trójkąta $C_{i+a}C_iX$. W takim razie

$$Z_i \in C_{i+a}C_iX \subseteq \Delta' \subseteq \Delta,$$

co daje sprzeczność z założeniem, że wewnątrz trójkąta Δ nie leży żaden zielony punkt. Oznacza to, że nasz zbiór nie jest trójkątny.



Pokażemy teraz, że dla $n > \frac{5}{3} \cdot 2019$ ten zbiór spełnia założenia. Zdefiniujmy Δ_i jako trójkąt wyznaczony przez proste C_iC_{i+1}, $C_{i+n-1}C_{i+n}$ oraz prostą równoległą do prostej C_iC_{i+n} przechodzącą przez punkt C_{i+2n}. Wtedy jedyne zielone punkty leżące we wnętrzu trójkąta Δ_i lub na jego brzegu to Z_i, Z_{i+n-1}, Z_{i+n}, Z_{i+2n}, Z_{i+2n+1}. Oznacza to, że każdy zielony punkt zawiera się w dokładnie pięciu trójkątach Δ_i. Trójkątów Δ_i jest $3n > 5 \cdot 2019$, co oznacza, że dla dowolnego 2019-elementowego podzbioru istnieje takie j, że wszystkie zielone punkty znajdujące się w trójkącie Δ_j są poza tym podzbiorem. Trójkąt ten spełnia wszystkie założenia poza niezawieraniem czerwonych punktów na boku. Możemy zatem rozważyć trójkąt Δ'_j, będący obrazem trójkąta Δ_j przy jednokładności o środku będącym środkiem wielokąta $C_1C_2 \ldots C_{3n}$ i skali $1 + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest na tyle małą liczbą, że wszystkie zielone punkty są na zewnątrz Δ'_j. Wtedy wszystkie czerwone punkty leżą we wnętrzu trójkąta Δ'_j, czyli ten trójkąt świadczy o trójkątności wybranego 2019-elementowego podzbioru.



Trzeba jeszcze wprowadzić drobną zmianę w naszym zbiorze, aby punkty były w położeniu ogólnym. Wystarczy zauważyć, że przesuwając każdy zielony punkt w stronę środka wielokąta $C_1C_2\ldots C_{3n}$ o odległość ε, gdzie ε jest dostatecznie małą liczbą dodatnią, nie zaburzymy nigdzie naszego rozumowania. Wobec tego skonstruowany zbiór jest szukanym kontrprzykładem.

7. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i opisany na okręgu. Półproste $BA^{\rightarrow}$ i $CD^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie E, zaś półproste $DA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie F. Niech Γ będzie okręgiem o średnicy EF, a τ okręgiem stycznym do prostych EB, EC oraz stycznym wewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie EBC. Wykazać, że okręgi Γ oraz τ są prostopadłe.

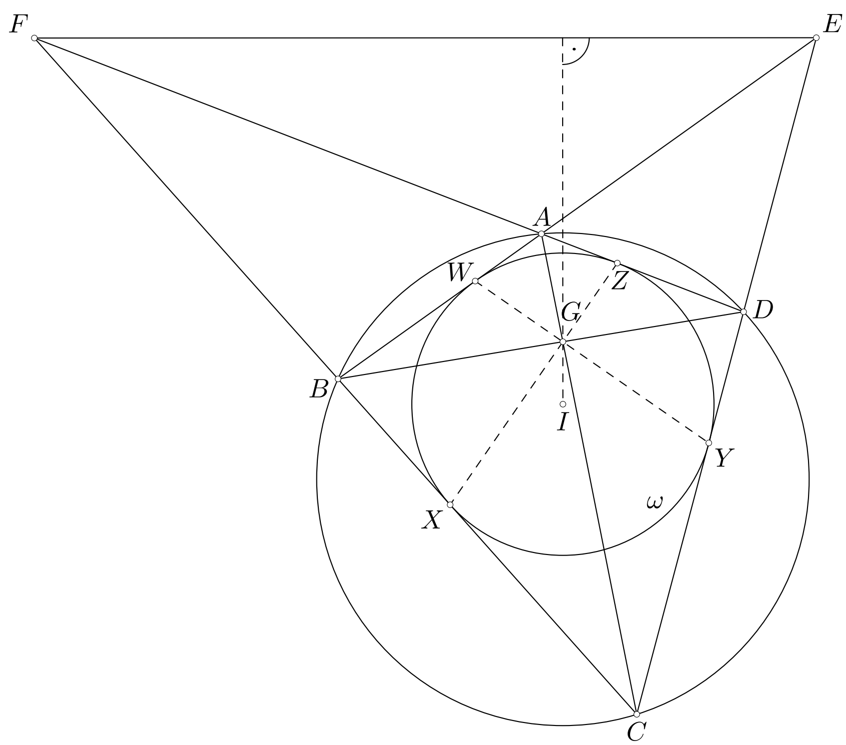
Uwaga: dwa okręgi są prostopadłe, jeżeli przecinają się oraz proste styczne do tych okręgów w ich punkcie przecięcia są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Udowodnijmy najpierw następujący lemat.

Lemat. *Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg i równocześnie opisany na okręgu ω o środku I. Półproste $BA^{\rightarrow}$ i $CD^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie E, a półproste $DA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie F. Niech ponadto G będzie punktem przecięcia prostych AC i BD. Okrąg opisany na trójkącie ABF przecina prostą EF ponownie w punkcie K. Wówczas punkty K, G, I leżą na prostej prostopadłej do EF.*

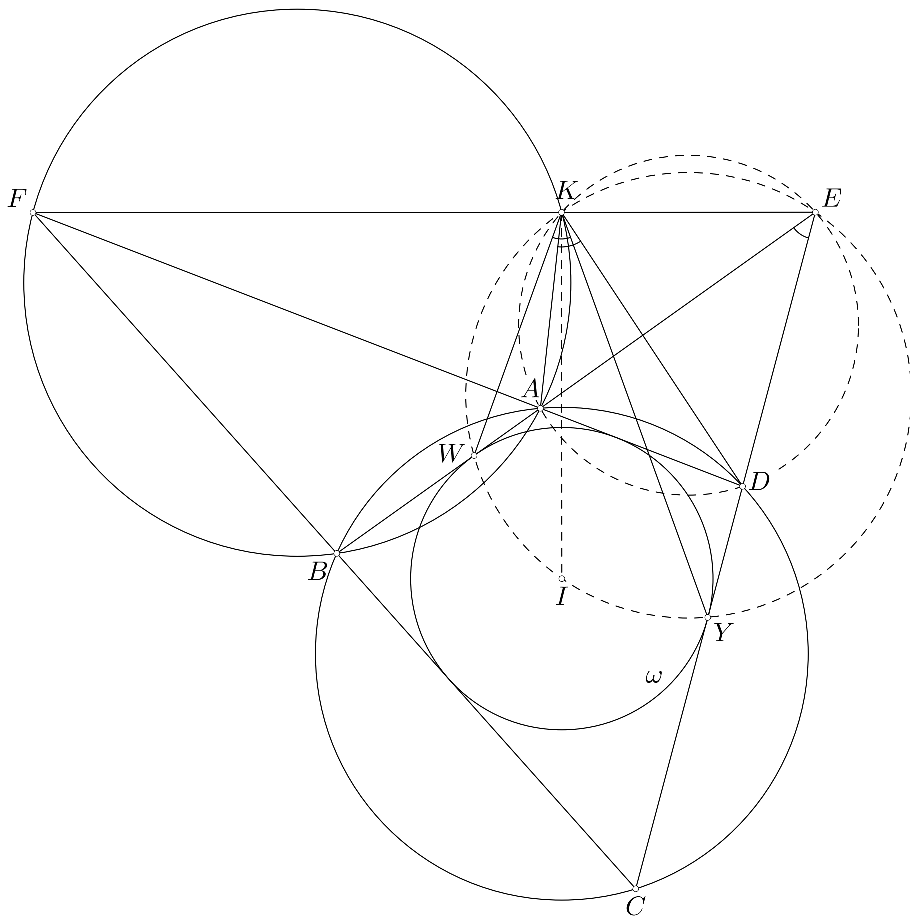
Dowód. Niech W, X, Y i Z będą punktami styczności okręgu ω odpowiednio z bokami AB, BC, CD i DA. Dwukrotnie stosując twierdzenie Brianchona dla okręgu ω oraz sześciokątów $ABXCDZ$ i $AWBCYD$ otrzymujemy, że proste WY i XZ przechodzą przez punkt G.



Rozważmy biegunową punktu G względem okręgu ω. Z powyższego wniosku punkt G leży na biegunowych punktów E i F, zatem EF jest biegunową G, czyli $GI \perp EF$.

Pozostaje więc udowodnić, że $KI \perp EF$. Skoro $\triangle FAB \sim \triangle FCD$ oraz ω jest okręgiem wpisanym w trójkąt FCD i dopisanym do boku AB trójkąta FAB, to

$$\frac{AW}{WB} = \frac{\frac{1}{2}(AB+BF-AF)}{\frac{1}{2}(AB+AF-BF)} = \frac{\frac{1}{2}(CD+DF-CF)}{\frac{1}{2}(CD+CF-DF)} = \frac{DY}{YC}.$$



Z twierdzenia Miquela wynika, że czworokąt $ADEK$ można wpisać w okrąg. W takim razie punkt K jest punktem Miquela czworoboku wyznaczonego przez proste AB, BC, CD i DA, więc jest też środkiem podobieństwa spiralnego ϕ przekształcającego odcinek AB na odcinek DC. Z wcześniejszej równości stosunków odcinków wynika więc, że ϕ przekształca również W na Y. Mamy stąd

$$\sphericalangle WKY = \sphericalangle AKD = \sphericalangle AED = \sphericalangle WEY,$$

czyli czworokąt $WYEK$ można wpisać w okrąg. Zauważmy, że $\sphericalangle IWE = 90^\circ = \sphericalangle IYE$, skąd I leży na okręgu opisanym na czworokącie $WYEK$. Zatem $\sphericalangle IKE = \sphericalangle IWE = 90^\circ$. □

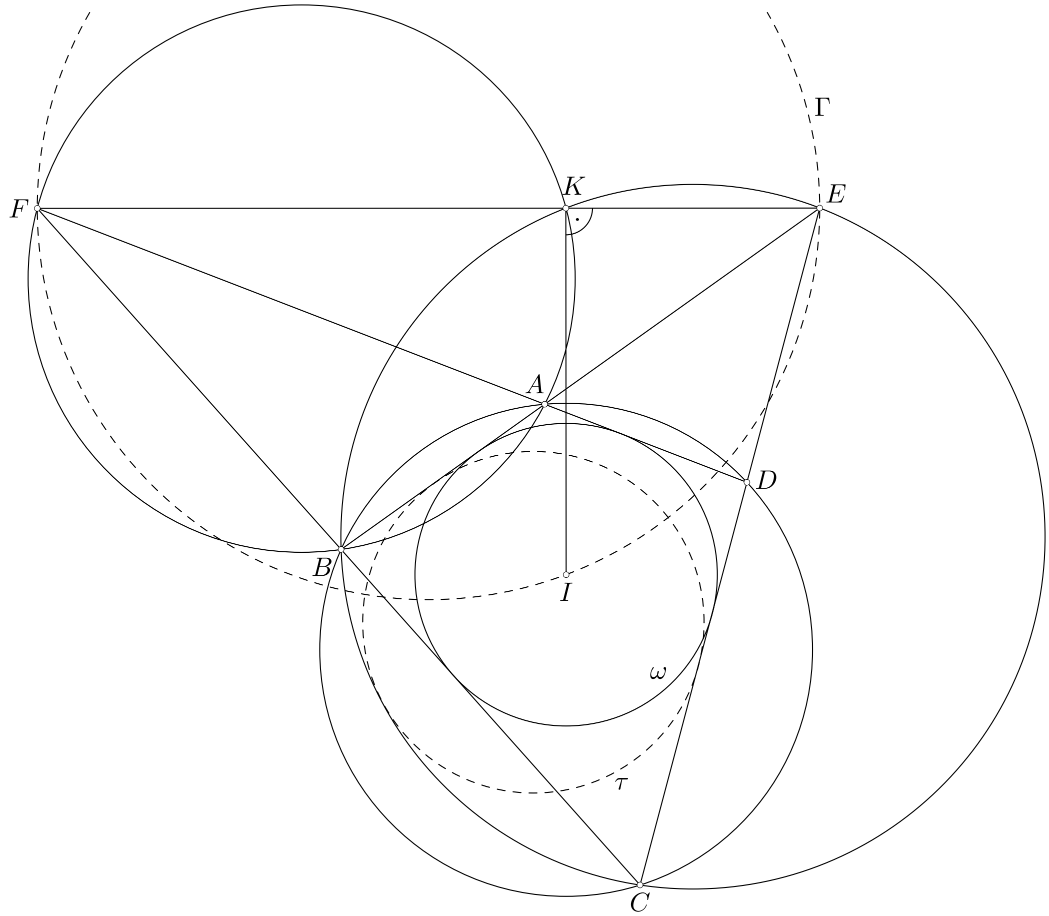
Przyjmijmy teraz oznaczenia jak w powyższym lemacie i rozważmy inwersję ψ względem okręgu o środku E i promieniu $\sqrt{EA \cdot EB}$. Wówczas z potęgi punktu otrzymujemy równość

$$EA \cdot EB = EK \cdot EF,$$

czyli $\psi(F) = K$. Inwersja zachowuje prostopadłość, zatem ψ przekształca okrąg Γ prostopadły do EF na prostą przechodzącą przez $\psi(F) = K$ i prostopadłą do $\psi(EF) = EF$. Korzystając z lematu mamy więc, że $\psi(\Gamma) = KI$.

Okrąg τ jest styczny do prostych EB, EC i okręgu opisanego na EBC, więc $\psi(\tau)$ jest okręgiem stycznym do ich obrazów, czyli do prostych EB, EC i AD. Ponadto, $\psi(\tau)$ leży po drugiej stronie prostej AD niż punkt E. Zatem $\psi(\tau) = \omega$.

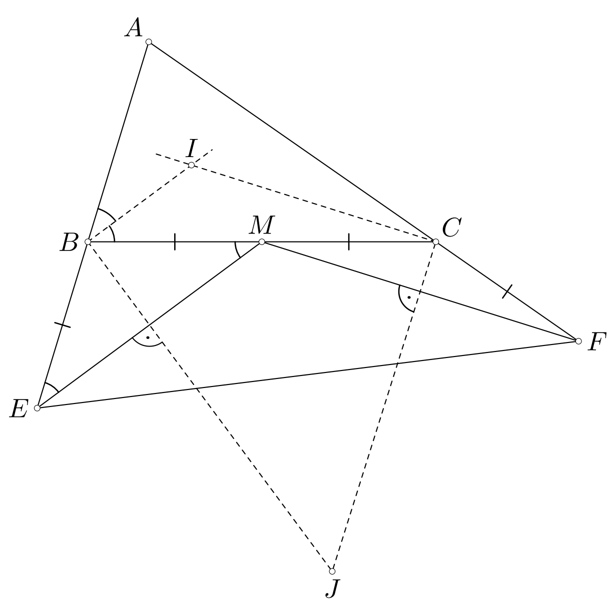
Obrazy okręgów Γ i τ w inwersji ψ to prosta KI i okrąg ω. Są one prostopadłe, gdyż prosta KI przechodzi przez środek okręgu ω. Skoro inwersja zachowuje prostopadłość, to okręgi Γ i τ też są prostopadłe.



8. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkt M jest środkiem BC, a punkt L jest środkiem łuku BAC okręgu opisanego na ABC. Proste przechodzące przez M i równoległe do BI i CI przecinają AB i AC odpowiednio w E i F oraz przecinają LB i LC odpowiednio w P i Q. Okręgi opisane na trójkątach EMF i PMQ przecinają się w punkcie $T \neq M$. Wykazać, że punkty I, M i T są współliniowe.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że punkt I leży na osi potęgowej okręgów opisanych na trójkątach EMF i PMQ, co jest równoważne tezie.

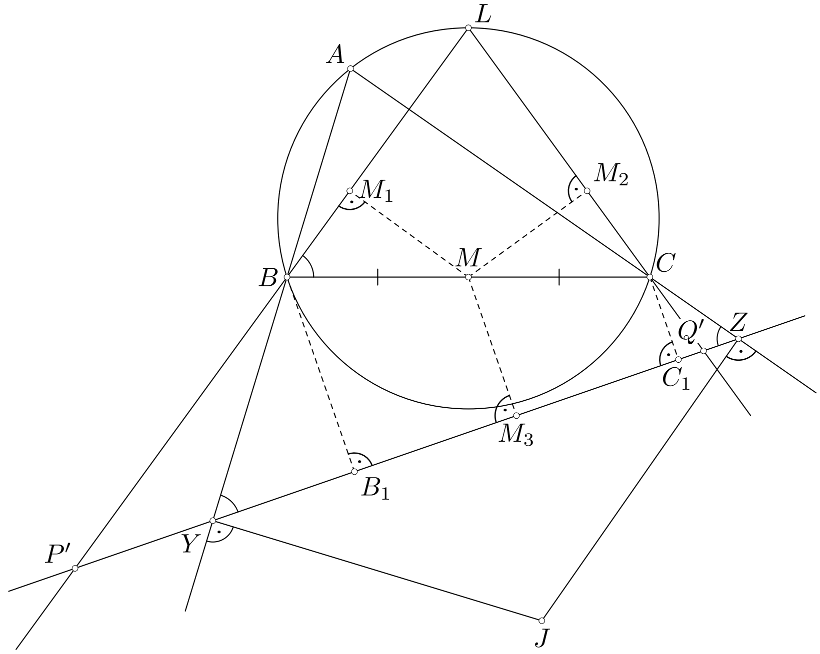


Załóżmy bez straty ogólności, że $AB < AC$. Niech J będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie EMF. Skoro $EM \parallel BI$, to

$$\sphericalangle BEM = \sphericalangle ABI = \sphericalangle IBC = \sphericalangle BME,$$

czyli $BE = BM$. Analogicznie uzasadniamy, że $CF = CM$. Zatem symetralne odcinków EM i FM są dwusiecznymi odpowiednio kątów EBM i FCM, czyli J jest środkiem okręgu ω dopisanego do trójkąta ABC stycznego do odcinka BC.

Niech teraz Y i Z będą punktami styczności tego okręgu odpowiednio z prostymi AB i AC. Niech ponadto P' i Q' będą punktami przecięcia prostej YZ odpowiednio z prostymi LB i LC. Wykażemy, że $P' = P$ oraz $Q' = Q$.



Udowodnimy najpierw, że M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $LP'Q'$. Niech M_1, M_2 i M_3 będą rzutami punktu M odpowiednio na proste LP', LQ' i $P'Q'$. Jako że LM jest dwusieczną kąta BLC, więc $MM_1 = MM_2$.

Niech B_1 i C_1 będą rzutami punktów B i C na prostą YZ. Przyjmijmy ponadto oznaczenia

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle A, \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle B, \quad \sphericalangle BCA = \sphericalangle C.$$

Z równoramienności trójkątów AYZ, LBC oraz równości $\sphericalangle YAZ = \sphericalangle BLC = \sphericalangle A$ otrzymujemy

$$\sphericalangle BYB_1 = \sphericalangle CZC_1 = \sphericalangle MBM_1 = 90^\circ - \frac{\sphericalangle A}{2}.$$

Wobec tego trójkąty BB_1Y, CC_1Z i MM_1B są podobne, zatem

$$\frac{BB_1}{BY} = \frac{CC_1}{CZ} = \frac{MM_1}{MB}.$$

Wiemy jednak, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, jeśli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$. Oprócz tego z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy $BY + CZ = BC$, natomiast MM_3 jest linią środkową w trapezie prostokątnym BB_1C_1C, a więc

$$\frac{MM_1}{MB} = \frac{BB_1 + CC_1}{BY + CZ} = \frac{2MM_3}{BC},$$

z czego bezpośrednio wnioskujemy, że $MM_3 = MM_1$. To dowodzi, że M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $AP'Q'$, w szczególności prosta $P'M$ jest dwusieczną kąta $BP'Q'$.

Rachunek na kątach daje $\sphericalangle ABL = \sphericalangle ABC - \sphericalangle LBC = \sphericalangle B - (90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle A) = \frac{1}{2}(\sphericalangle B - \sphericalangle C)$. Toteż

$$\sphericalangle BP'Y = \sphericalangle BYZ - \sphericalangle P'BY = 90^\circ - \frac{\sphericalangle A}{2} - \frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2} = \sphericalangle C,$$

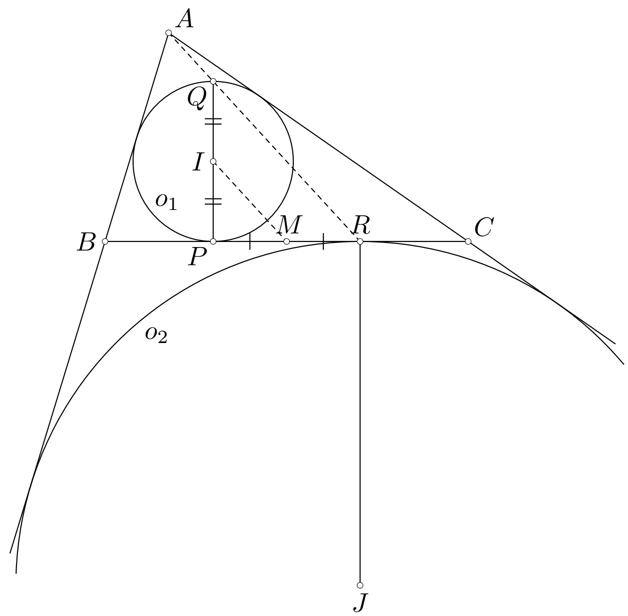
czyli $\sphericalangle BP'M = \frac{1}{2}\sphericalangle C$. Ale

$$\sphericalangle LBI = \sphericalangle ABI - \sphericalangle ABL = \frac{\sphericalangle B}{2} - \frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2} = \frac{\sphericalangle C}{2},$$

co oznacza, że proste MP' i BI są równoległe, zatem $P' = P$. Analogicznie dowodzimy, że $Q' = Q$.

W dalszym rozumowaniu potrzebny będzie następujący lemat.

Lemat. *Punkt I jest środkiem okręgu o_1 wpisanego w trójkąt ABC. Punkt M jest środkiem odcinka BC, punkt R zaś — punktem styczności okręgu o_2 dopisanego do boku BC trójkąta ABC z odcinkiem BC. Wówczas $IM \parallel AR$.*



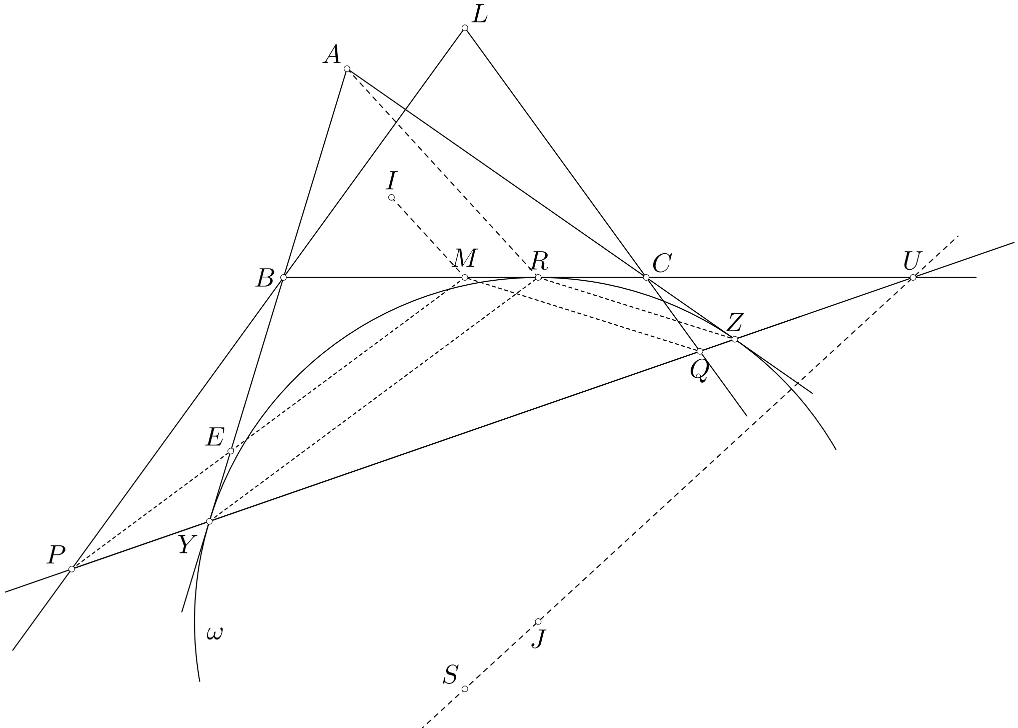
Dowód. Niech P będzie punktem styczności okręgu o_1 z bokiem BC oraz niech Q będzie takim punktem, że PQ jest średnicą okręgu o_1. Niech ponadto J będzie środkiem okręgu o_2. Rozpatrzmy jednokładność φ o środku w punkcie A przeprowadzającą okrąg o_2 na okrąg o_1. Ponieważ $\varphi(J) = I$ oraz $JR \parallel IQ$ (gdyż obie te proste są prostopadłe do BC), więc $\varphi(JR) = IQ$. Wobec tego $\varphi(R) = Q$, w związku z czym punkty A, Q, R są współliniowe.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że

$$BP = \frac{1}{2}(AB + BC - AC) = CR,$$

więc również $PM = MR$. Dodatkowo $PI = IQ$, wobec czego IM jest linią środkową w trójkącie PQR. Stąd natychmiast wynika teza lematu. □

Powróćmy do rozwiązania zadania. Niech S będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie PMQ oraz niech R będzie punktem styczności okręgu ω z prostą BC. Ponieważ trójkąty YBR, EBM są równoramienne, więc $YR \parallel EM \parallel PM$ i analogicznie $ZR \parallel QM$. Niech U będzie punktem przecięcia prostych BC i YZ. Na podstawie poczynionych obserwacji o równoległości odpowiednich prostych istnieje jednokładność o środku w punkcie U przeprowadzająca trójkąt PMQ na YRZ; oczywiście przeprowadza ona środek okręgu opisanego na PMQ na środek okręgu opisanego na YRZ, toteż punkty U, S, J są współliniowe.



Punkt U leży na prostych BC i YZ będących biegunowymi odpowiednio punktów R i A względem okręgu ω, wobec czego prosta AR jest biegunową punktu U względem tego okręgu. To oznacza, że $AR \perp JU \parallel JS$. Ale na mocy lematu $IM \parallel AR$, czyli $IM \perp JS$. Jednak M leży na osi potęgowej okręgów opisanych na MPQ i MEF, wobec czego I również będzie leżeć na tej osi, co daje tezę.

9. Niech J będzie środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC stycznego do boku BC. Okrąg przechodzący przez punkty A i J przecina półproste $AB^{\to}$ i $AC^{\to}$ (poza bokami trójkąta) odpowiednio w punktach X i Y. Punkty S i T leżą odpowiednio na odcinkach BJ i CJ, przy czym $\sphericalangle BTJ = \sphericalangle AXJ$ oraz $\sphericalangle CSJ = \sphericalangle AYJ$. Proste BT i CS przecinają się w punkcie K, a proste KJ i TS przecinają się w punkcie Z. Wykazać, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:
Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym E jest punktem przecięcia jego przekątnych, natomiast półproste $AD^{\to}$ i $BC^{\to}$ oraz $BA^{\to}$ i $CD^{\to}$ przecinają się odpowiednio w punktach F oraz G. Wówczas ortocentra trójkątów ABF, BCG oraz punkt E leżą na jednej prostej.*

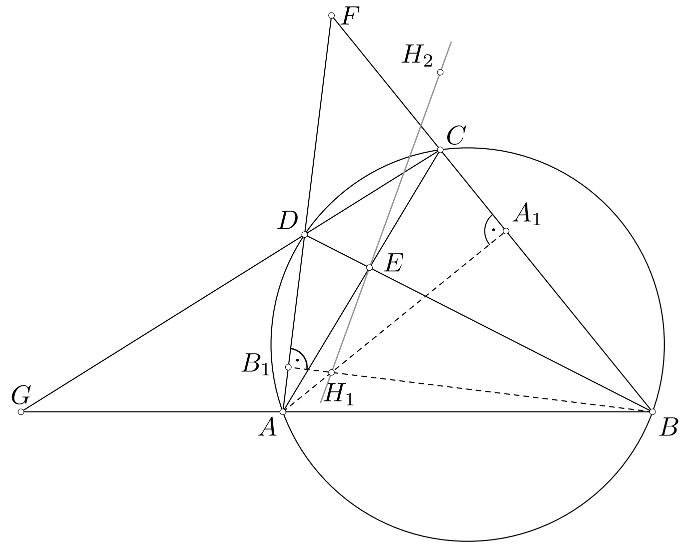
Dowód. Niech H_1, H_2 będą ortocentrami odpowiednio trójkątów ABF, BCG. Możemy założyć, że punkty H_1, H_2, E są parami różne.

Niech A_1, B_1 będą spodkami wysokości w trójkącie ABF opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B. Niech $o(XY)$ oznacza okrąg o średnicy XY oraz niech $\mathrm{pot}(P, o)$ będzie potęgą punktu P względem okręgu o. Łatwo zauważyć, że

$$\mathrm{pot}(H_1, o(AC)) = \overrightarrow{H_1A} \cdot \overrightarrow{H_1A_1} = \mathrm{pot}(H_1, o(AB)) = \overrightarrow{H_1B} \cdot \overrightarrow{H_1B_1} = \mathrm{pot}(H_1, o(BD)).$$

Analogicznie uzasadniamy, że punkt H_2 ma równe potęgi punktu względem dwóch rozważanych okręgów. Ale

$$\mathrm{pot}(E, o(AC)) = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED} = \mathrm{pot}(E, o(BD)).$$



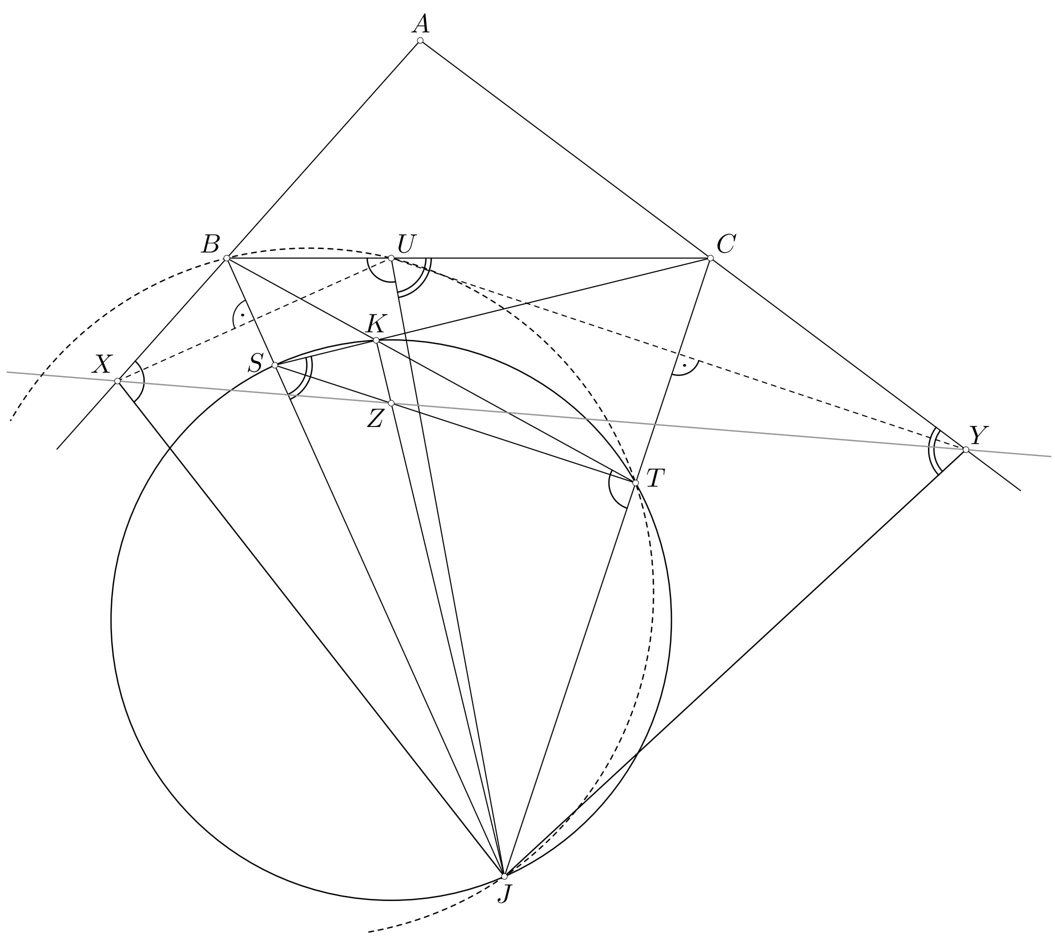
Pozostało zauważyć, że okręgi $o(AC)$ i $o(BD)$ są różne, gdyż w przeciwnym przypadku $ABCD$ jest prostokątem, co przeczy istnieniu punktów F i G. Wobec tego punkty H_1, H_2, E leżą na prostej będącej osią potęgową okręgów $o(AC)$ i $o(BD)$. □

Uwaga: W podobny sposób można uzasadnić, że na prostej z tezy powyższego lematu leżą również ortocentra trójkątów CDF i DAG.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Zauważmy, że

$$\sphericalangle KTJ = \sphericalangle BXJ = 180^\circ - \sphericalangle CYJ = 180^\circ - \sphericalangle CSJ,$$

wobec czego punkty K, S, T, J leżą na jednym okręgu. Udowodnimy, że ortocentra trójkątów BTJ, CSJ leżą na prostej XY, co na mocy udowodnionego lematu zakończy rozwiązanie zadania.



Bez straty ogólności niech $\sphericalangle AXJ \geqslant 90^\circ$. Niech U będzie punktem symetrycznym do punktu X względem prostej BJ. Ponieważ kąt BCJ jest ostry, więc punkt U leży we wnętrzu odcinka BC. Wobec tego $\sphericalangle UCJ = \sphericalangle YCJ$ oraz

$$\sphericalangle CUJ = 180^\circ - \sphericalangle BUJ = 180^\circ - \sphericalangle BXJ = \sphericalangle CYJ;$$

łącząc te równości z obserwacją, że trójkąty CUJ, CYJ mają wspólny bok CJ otrzymujemy, że punkt U jest symetryczny do punktu Y względem prostej CJ.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle BUJ = \sphericalangle BXJ = \sphericalangle BTJ,$$

więc punkty B, U, T, J leżą na jednym okręgu. Ale na mocy znanej własności prostej Steinera dla punktu U i trójkąta BTJ widzimy, że ortocentrum trójkąta BTJ leży na prostej XY. Analogicznie dowodzimy, że ortocentrum trójkąta CSJ leży na prostej XY. Oczywiście ortocentra te są różne; korzystając z lematu kończy to więc rozwiązanie zadania.

10. Dany jest rosnący ciąg dodatnich liczb całkowitych $\{a_n\}$. Wiadomo, że każda dodatnia liczba całkowita jest elementem dokładnie jednego z ciągów $\{a_n\}$, $\{a_n + n\}$. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych k, dla których liczba a_k^2 jest podzielna przez k.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że dla każdego k liczba a_{k+1} jest równa najmniejszej liczbie całkowitej, która nie jest równa żadnej z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1 + 1, a_2 + 2, \ldots a_k + k$, co oznacza, że ciąg ten jest wyznaczony jednoznacznie.

Niech teraz $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Wtedy $\varphi^2 = \varphi + 1$. Oznacza to, że

$$\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi + 1} = \frac{2\varphi + 1}{\varphi^2 + \varphi} = \frac{2\varphi + 1}{2\varphi + 1} = 1,$$

zatem z twierdzenia Beatty'ego dostajemy, że ciągi $\lfloor n\varphi \rfloor$ i $\lfloor n(\varphi + 1) \rfloor = \lfloor n\varphi \rfloor + n$ są rozłączne i każda liczba całkowita dodatnia występuje w którymś z tych ciągów. Oznacza to, że $a_n = \lfloor n\varphi \rfloor$.

Teraz dla dowolnego $s > 0$ wybierzmy $k = F_{2s-1}^2$, gdzie liczby F_n są dane wzorem rekurencyjnym $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, tj. F_n jest n-tą liczbą Fibonacciego. Udowodnimy, że wtedy $k \mid a_k^2$. W tym celu wykażemy, że

$$\left\lfloor F_{2s-1}^2 \varphi \right\rfloor = F_{2s-1} F_{2s}.$$

Ze wzoru Bineta mamy

$$F_{2s-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{2s-1} - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^{2s-1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\varphi^{4s-2} + 1}{\varphi^{2s-1}} \tag{1}$$

oraz

$$F_{2s} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{2s} - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^{2s} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\varphi^{4s} - 1}{\varphi^{2s}}. \tag{2}$$

Zatem

$$F_{2s-1}\varphi - F_{2s} = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi \frac{\varphi^{4s-2} + 1}{\varphi^{2s-1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\varphi^{4s} - 1}{\varphi^{2s}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\varphi^{4s} + \varphi^2 - (\varphi^{4s} - 1)}{\varphi^{2s}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^{2s}}, \tag{3}$$

co oznacza, że $F_{2s-1}\varphi - F_{2s} > 0$, więc także $F_{2s-1}^2 \varphi - F_{2s-1} F_{2s} > 0$.

Udowodnimy teraz, że $F_{2s-1}^2 \varphi - F_{2s-1} F_{2s} < 1$. Używając (1) i (3) otrzymujemy

$$F_{2s-1}^2 \varphi - F_{2s-1} F_{2s} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^{2s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\varphi^{4s-2} + 1}{\varphi^{2s-1}}. \tag{4}$$

Mamy jednak $1 < \varphi < 2$, co daje ciąg nierówności

$$1 < \varphi^{4s-1}, \quad \varphi^2 < \varphi^{4s-1}, \quad \varphi^{4s-2} < \varphi^{4s-1} \quad \text{i} \quad \varphi^{4s} < 2\varphi^{4s-1},$$

które po zsumowaniu dają

$$\varphi^{4s} + \varphi^{4s-2} + \varphi^2 + 1 < 5\varphi^{4s-1}, \quad \text{czyli}$$
$$(\varphi^2+1)(\varphi^{4s-2}+1) < 5\varphi^{4s-1} \quad \text{lub równoważnie}$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\varphi^2+1}{\varphi^{2s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\varphi^{4s-2}+1}{\varphi^{2s-1}} < 1. \tag{5}$$

Biorąc (4) i (5) otrzymujemy $F_{2s-1}^2\varphi - F_{2s-1}F_{2s} < 1$.

Udowodniliśmy zatem, że

$$0 < F_{2s-1}^2\varphi - F_{2s-1}F_{2s} < 1, \quad \text{skąd}$$
$$a_{F_{2s-1}^2} = \lfloor F_{2s-1}^2\varphi \rfloor = F_{2s-1}F_{2s}.$$

W szczególności

$$F_{2s-1} \mid a_{F_{2s-1}^2},$$

więc dla wszystkich k postaci F_{2s-1}^2 (czyli nieskończenie wielu) mamy $k \mid a_k^2$, co kończy rozwiązanie zadania.

11. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c większe od 1, przy czym $a, b \neq c$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $p \mid a^n + b^n - c^n$.

Rozwiązanie:

Na początku zauważmy, że możemy bez straty ogólności założyć, iż $\mathrm{NWD}(a,b,c) = 1$. Istotnie, jeżeli $d = \mathrm{NWD}(a,b,c)$ oraz wykażemy tezę dla liczb $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b}{d}$ oraz $c_1 = \frac{c}{d}$, to będzie ona spełniona również dla liczb a, b, c, gdyż dla każdego n zachodzi $a_1^n + b_1^n - c_1^n \mid d^n \cdot (a_1^n + b_1^n - c_1^n) = a^n + b^n - c^n$.

Załóżmy wbrew tezie, że istnieje jedynie skończenie wiele takich liczb pierwszych, które dzielą liczby postaci $a^n + b^n - c^n$. Niech S będzie zbiorem wszystkich takich liczb pierwszych. Niech

$$M = \prod_{p\in S}(p-1), \ a_2 = a^M, \ b_2 = b^M, \ c_2 = c^M.$$

Z małego twierdzenia Fermata wynika, że jeśli $p \in S$ nie dzieli abc, to dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi

$$\begin{aligned} a_2^n + b_2^n - c_2^n &= (a^M)^n + (b^M)^n - (c^M)^n \\ &= (a^{n\cdot M/(p-1)})^{p-1} + (b^{n\cdot M/(p-1)})^{p-1} - (c^{n\cdot M/(p-1)})^{p-1} \\ &\equiv 1 + 1 - 1 \\ &\not\equiv 0 \pmod p. \end{aligned}$$

Niech S_2 będzie zbiorem tych liczb pierwszych p, dla których istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $p \mid a_2^n + b_2^n - c_2^n$. Oczywiście $S_2 \subseteq S$. Z powyższych równości wynika, że każda liczba $p \in S_2$ dzieli abc.

W dalszej części rozwiązania, dla dowolnej liczby pierwszej p oraz niezerowej liczby całkowitej k, przez $v_p(k)$ oznaczymy największą nieujemną liczbę całkowitą m, dla której $p^m \mid k$.

Ustalmy liczbę pierwszą q, która nie należy do S_2 oraz

$$q > p, v_p(a), v_p(b), v_p(c), v_p(a+b), v_p(a-c), v_p(b-c)$$

dla dowolnej liczby pierwszej $p \in S_2$.

Rozważmy dowolną liczbę pierwszą $p \in S_2$. Bez straty ogólności załóżmy, że $p \mid c_2$; w przypadkach $p \mid a_2$, $p \mid b_2$ rozumowanie przebiega analogicznie. Wtedy $p \nmid a_2, b_2$, ponieważ $\mathrm{NWD}(a_2, b_2, c_2) = 1$. Wykażemy, że

$$v_p(a_2^{q^2} + b_2^{q^2} - c_2^{q^2}) = v_p(a_2^q + b_2^q - c_2^q).$$

Najpierw rozpatrzmy przypadek $p \nmid a_2 + b_2$. Ponieważ $q > p > p - 1$, więc $\mathrm{NWD}(q, p-1) = 1$. Zatem istnieje c takie, że $cq \equiv 1 \pmod{p-1}$. Z małego twierdzenia Fermata otrzymujemy więc

$$(a_2^q)^c \equiv a_2 \not\equiv -b_2 \equiv ((-b_2)^q)^c \pmod{p},$$

skąd $p \nmid a_2^q + b_2^q$. Analogicznie dowodzimy, że $p \nmid a_2^{q^2} + b_2^{q^2}$, zatem w tym przypadku

$$v_p(a_2^{q^2} + b_2^{q^2} - c_2^{q^2}) = 0 = v_p(a_2^q + b_2^q - c_2^q).$$

Teraz załóżmy, że $p \mid a_2 + b_2$. Wtedy

$$\sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i a_2^i b_2^{q-1-i} \equiv q \cdot (-1)^{q-1} a_2^{q-1} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Zatem

$$v_p(a_2^q + b_2^q) = v_p(a_2 + b_2) + v_p\left(\sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i a_2^i b_2^{q-1-i}\right) = v_p(a_2 + b_2) < q \leqslant q \cdot v_p(c_2) = v_p(c_2^q).$$

Wobec tego $v_p(a_2^q + b_2^q - c_2^q) = v_p(a_2^q + b_2^q) = v_p(a_2 + b_2)$. Analogicznie dowodzimy, że spełniona jest równość $v_p(a_2^{q^2} + b_2^{q^2} - c_2^{q^2}) = v_p(a_2 + b_2)$, w związku z czym $v_p(a_2^{q^2} + b_2^{q^2} - c_2^{q^2}) = v_p(a_2^q + b_2^q - c_2^q)$.

Ponieważ ta równość zachodzi dla dowolnej liczby pierwszej $p \in S_2$, więc

$$a_2^{q^2} + b_2^{q^2} - c_2^{q^2} = a_2^q + b_2^q - c_2^q.$$

Jednakże z założenia $a, b, c > 1$ wynika, że dla dostatecznie dużego q wartość bezwzględna lewej strony jest większa od wartości bezwzględnej prawej strony. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $47 = a_0 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ oraz

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2 - a_{n+1}a_na_{n-1} = 4$$

dla $n \geqslant 1$. Udowodnić, że dla dowolnego $n \geqslant 0$ liczba

$$2 + \sqrt{2 + a_n}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $b_n = 2 + a_n$. Korzystając z równości danej w treści zadania otrzymujemy dla $n \geqslant 0$

$$(b_{n+1} - 2)^2 + (b_n - 2)^2 + (b_{n-1} - 2)^2 - (b_{n+1} - 2)(b_n - 2)(b_{n-1} - 2) = 4,$$

co po wymnożeniu i przegrupowaniu wyrazów daje zależność

$$(b_{n+1} + b_n + b_{n-1} - 4)^2 = b_{n+1}b_nb_{n-1}. \tag{1}$$

Mamy $b_0 = 49$ oraz $b_1 = 49$. Korzystając ze związku (1) dowodzimy indukcyjnie, że dla każdego n liczba b_n jest kwadratem liczby wymiernej. W szczególności b_n jest również liczbą wymierną, więc dla $n \geqslant 2$, b_n jest pierwiastkiem wymiernym wielomianu unormowanego

$$(x + b_{n-1} + b_{n-2} - 4)^2 - xb_{n-1}b_{n-2}.$$

Na mocy twierdzenia o pierwiastkach wymiernych otrzymujemy, że b_n jest liczbą całkowitą. Łącząc te dwie obserwacje wnosimy, że b_n jest kwadratem liczby całkowitej.

Oznaczmy więc $c_n = \sqrt{b_n}$ dla $n \geqslant 0$. Po spierwiastkowaniu równości (1) otrzymujemy dla $n \geqslant 0$

$$c_{n+1}^2 + c_n^2 + c_{n-1}^2 - 4 = c_{n+1}c_nc_{n-1}.$$

Połóżmy $d_n = 2 + c_n$. Wykonując analogiczne przekształcenia jak na początku rozwiązania otrzymujemy

$$(d_{n+1} + d_n + d_{n-1} - 4)^2 = d_{n+1}d_nd_{n-1}. \tag{2}$$

Mamy $d_0 = 9$, $d_1 = 9$. Analogicznie jak w przypadku b_n dowodzimy, że liczba d_n jest kwadratem liczby całkowitej dla każdego $n \geqslant 0$. Ale $d_n = 2 + c_n = 2 + \sqrt{b_n} = 2 + \sqrt{2 + a_n}$, zatem otrzymaliśmy tezę zadania.

2. Dana jest liczba rzeczywista $a > 1$. Określamy ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ wzorem

$$a_n = \lfloor a^{n+1} \rfloor - a \cdot \lfloor a^n \rfloor.$$

Znaleźć wszystkie liczby $a > 1$, dla których ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dany powyższym wzorem jest od pewnego miejsca okresowy.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że ciąg a_n jest okresowy od pewnego miejsca wtedy i tylko wtedy, gdy a jest liczbą całkowitą.

Jeśli $a \in \mathbb{Z}$, to ciąg a_n jest stale równy zero, więc jest okresowy.

Ustalmy teraz niecałkowitą liczbę $a > 1$ i nie wprost przypuśćmy, że ciąg (a_n) jest okresowy począwszy od wyrazu o indeksie n_0. Niech T będzie okresem tego ciągu. Wówczas $a_{n+T} = a_n$ dla każdego $n \geqslant n_0$, skąd

$$\lfloor a^{n+1+T} \rfloor - \lfloor a^{n+T} \rfloor \cdot a = \lfloor a^{n+1} \rfloor - \lfloor a^n \rfloor \cdot a,$$

czyli

$$a \cdot \left(\lfloor a^{n+T} \rfloor - \lfloor a^n \rfloor\right) = \lfloor a^{n+1+T} \rfloor - \lfloor a^{n+1} \rfloor \tag{1}$$

dla $n \geqslant n_0$.

Udowodnimy, że $\lfloor a^{n_0+T} \rfloor - \lfloor a^{n_0} \rfloor = 0$. W przeciwnym razie równość (1) dla $n = n_0$ implikuje, że a jest liczbą wymierną.

Stosując równość (1) m-krotnie otrzymujemy

$$a^m \cdot \left(\lfloor a^{n+T} \rfloor - \lfloor a^n \rfloor\right) = \lfloor a^{n+m+T} \rfloor - \lfloor a^{n+m} \rfloor. \tag{2}$$

Zapiszmy $a = \frac{p}{q}$, przy czym p, q są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Ponieważ $a \notin \mathbb{Z}$, więc $q > 1$. Z równości (2) dla $n = n_0$ wynika wtedy, że

$$q^m \mid \lfloor a^{n_0+T} \rfloor - \lfloor a^{n_0} \rfloor$$

i z dowolności m otrzymujemy, że $\lfloor a^{n_0+T} \rfloor - \lfloor a^{n_0} \rfloor = 0$.

Możemy przyjąć bez straty ogólności, że $a^T - 1 > a^{-n_0}$, zastępując w razie potrzeby okres T jego dostatecznie dużą wielokrotnością. Wówczas

$$a^{n_0+T} - a^{n_0} = a^{n_0}(a^T - 1) > 1,$$

co przeczy temu, że $\lfloor a^{n_0+T} \rfloor = \lfloor a^{n_0} \rfloor$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

3. Ciąg (a_n) jest określony wzorami:

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2 \quad \text{oraz} \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{dla } n \geqslant 3.$$

Wykazać, że $p \mid a_p$ dla każdej liczby pierwszej p.

Rozwiązanie:

Prezentujemy trzy rozwiązania tego zadania. Pierwsze dwa wykorzystują podejścia algebraiczne i teorioliczbowe, natomiast trzecie rozwiązanie wykorzystuje podejście kombinatoryczne.

Sposób I

Rozpoczniemy od znalezienia wzoru jawnego na ciąg a_n. Zastosujemy metodę rozwiązywania rekurencji liniowych. Wielomianem charakterystycznym naszej rekurencji jest $W(x) = x^3 - x - 1$. Zbadamy najpierw, czy $W(x)$ ma trzy parami różne pierwiastki zespolone. W tym celu obliczymy największy wspólny dzielnik wielomianów $W(x)$, $W'(x)$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{C}[x]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{NWD}(W(x), W'(x)) &= \mathrm{NWD}(x^3 - x - 1, 3x^2 - 1) = \mathrm{NWD}(-3(x^3 - x - 1) + x(3x^2 - 1), 3x^2 - 1) \\
&= \mathrm{NWD}(2x + 3, 3x^2 - 1) = \mathrm{NWD}(2x + 3, -2(3x^2 - 1) + 3x(2x + 3)) \\
&= \mathrm{NWD}(2x + 3, 9x + 2) = \mathrm{NWD}(2x + 3, -2(9x + 2) + 9(2x + 3)) \\
&= \mathrm{NWD}(2x + 3, 23) = 1.
\end{aligned}$$

Powyższy rachunek pokazuje, że wielomiany $W(x)$ i $W'(x)$ nie mają wspólnych pierwiastków zespolonych. Zatem $W(x)$ ma trzy parami różne pierwiastki zespolone x_1, x_2, x_3. Wobec tego wzór jawny ciągu a_n jest postaci

$$a_n = ax_1^n + bx_2^n + cx_3^n,$$

dla pewnych stałych a, b, c. Wykorzystując równości

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1, \quad x_1x_2x_3 = 1$$

wynikające ze wzorów Viète'a otrzymujemy, że rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} a+b+c=a_0=3 \\ ax_1+bx_2+cx_3=a_1=0 \\ ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2=a_2=2 \end{cases}$$

jest trójka $(a,b,c)=(1,1,1)$. W takim razie uzyskujemy

$$a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n.$$

Stąd i z uogólnionego wzoru dwumianowego Newtona możemy napisać

$$\begin{aligned} a_p &= x_1^p + x_2^p + x_3^p \\ &= (x_1+x_2+x_3)^p - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=p \\ 0\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant k_3<p}} \binom{p}{k_1,k_2,k_3} S(k_1,k_2,k_3) \\ &= - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=p \\ 0\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant k_3<p}} \binom{p}{k_1,k_2,k_3} S(k_1,k_2,k_3), \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $S(k_1,k_2,k_3) = \sum_{\text{sym}} x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}$ jest wielomianem symetrycznym zmiennych x_1,x_2,x_3. Zauważmy, że każdy ze współczynników

$$\binom{p}{k_1,k_2,k_3} = \frac{p!}{k_1!k_2!k_3!}$$

jest podzielny przez p. Ponadto z podstawowego twierdzenia o wielomianach symetrycznych wynika, że każdy z wielomianów $S(k_1,k_2,k_3)$ jest wielomianem zmiennych $w_1 = x_1+x_2+x_3$, $w_2 = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$, $w_3 = x_1x_2x_3$ o współczynnikach całkowitych. Ze wzorów Viète'a wynika, że każda z liczb w_1, w_2, w_3 jest całkowita, więc każda z liczb $S(k_1,k_2,k_3)$ także jest całkowita. W takim razie z zależności (1) wnosimy, że $p \mid a_p$.

Sposób II

Na początku zauważmy, że $a_2=2$, $a_3=3$ oraz $a_{23}=644=23\cdot 28$. Zatem teza zadania jest spełniona dla $p\in\{2,3,23\}$.

Ustalmy teraz liczbę pierwszą $p\notin\{2,3,23\}$. Rozważmy ciąg zadany wzorem z treści zadania w ciele $\mathbb{Z}_p$ liczb całkowitych modulo p. Należy udowodnić, że $a_p =_{\mathbb{Z}_p} 0$.

Niech $\mathbb{K}$ będzie rozszerzeniem ciała $\mathbb{Z}_p$, w którym wielomian x^3-x-1 rozkłada się na czynniki liniowe. Jako $\mathbb{K}$ możemy przyjąć np. algebraiczne domknięcie ciała $\mathbb{Z}_p$ lub ciało rozkładu wielomianu x^3-x-1 nad $\mathbb{Z}_p$. Mamy $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = \operatorname{char}(\mathbb{Z}_p) = p$, gdzie char oznacza charakterystykę ciała.

Prowadząc identyczne rachunki jak w sposobie pierwszym otrzymujemy, że pierwiastki x_1, x_2, x_3 wielomianu $W(x) = x^3-x-1$ w ciele $\mathbb{K}$ są parami różne. Wobec tego ciąg a_n jest dany wzorem $a_n = ax_1^n+bx_2^n+cx_3^n$ i podobnie jak w sposobie pierwszym obliczamy $a=b=c=1$.

Ponieważ w dowolnym ciele charakterystyki p zachodzi równość $(t_1+t_2)^p = t_1^p+t_2^p$, więc

$$a_p =_{\mathbb{K}} x_1^p+x_2^p+x_3^p =_{\mathbb{K}} (x_1+x_2+x_3)^p =_{\mathbb{K}} a_1^p =_{\mathbb{K}} 0^p =_{\mathbb{K}} 0.$$

Wobec tego $a_p =_{\mathbb{Z}_p} 0$, co kończy dowód.

Uwaga: Wielomiany W i W' są względnie pierwsze również w ciałach charakterystyki 2 i 3. Tak więc powyższe wyprowadzenie wzoru jawnego na a_n jest poprawne także dla $p=2$ i $p=3$.

W dowolnym ciele charakterystyki 23 zachodzi równość $x^3-x-1=(x-3)(x-10)^2$; wielomian x^3-x-1 ma więc pierwiastek dwukrotny. Zatem w ciele $\mathbb{Z}_{23}$ wzór jawny na a_n jest postaci $a_n = a\cdot 3^n + b\cdot 10^n + c\cdot n\cdot 10^n$

dla pewnych stałych a, b, c. Wykorzystując warunki początkowe $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ można obliczyć $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$.

Sposób III

Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą, a C_n cyklem długości n. Udowodnimy, że a_n jest liczbą takich niepustych podzbiorów wierzchołków C_n, że pomiędzy każdą parą kolejnych wierzchołków z tego podzbioru znajduje się jeden inny wierzchołek lub dwa inne wierzchołki. Podzbiory o tej własności nazwiemy *dobrymi*. Ponumerujmy wierzchołki cyklu C_n kolejno $1, 2, \ldots, n$. Dwa podzbiory wierzchołków uważamy za różne, jeżeli istnieje takie k, że k-ty wierzchołek cyklu należy do jednego z tych podzbiorów, a do drugiego nie.

Zauważmy, że jeżeli udowodnimy powyższą własność, to teza zadania wyniknie z tego, że wszystkie takie podzbiory można pogrupować w klasy równoważności ze względu na obroty cyklu. Z racji tego, że żaden taki podzbiór nie jest ani pusty, ani pełny, oraz p jest liczbą pierwszą, każda klasa równoważności będzie miała p elementów. Skoro każda klasa równoważności ma p elementów, to liczba wszystkich podzbiorów (czyli a_p) będzie podzielna przez p.

Pozostaje zatem udowodnić wspomnianą równość. Niech S_n oznacza liczbę dobrych podzbiorów wierzchołków cyklu C_n. Udowodnimy, że $S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$ dla $n \geqslant 5$. Rozważmy pewien dobry podzbiór cyklu C_n. Weźmy dwa wierzchołki o najmniejszych indeksach należące do tego podzbioru. Następnie rozpatrzmy cykl, w którym „sklejamy” ze sobą te dwa wierzchołki. To znaczy, jeżeli mieliśmy do czynienia z podzbiorem $A = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k\}$ cyklu C_n, przy czym $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$, to rozpatrujemy podzbiór $B = \{e_1, e_3-(e_2-e_1), \ldots, e_k-(e_2-e_1)\}$ cyklu $C_{n-(e_2-e_1)}$. Mamy $e_2-e_1 = 2$ lub $e_2-e_1 = 3$. Zauważmy, że powyższe przyporządkowanie zbioru B zbiorowi A jest bijekcją pomiędzy dobrymi podzbiorami cyklu C_n oraz dobrymi podzbiorami cykli C_{n-2} oraz C_{n-3}. To pokazuje, że $S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$. Zauważmy ponadto, że $S_2 = 2 = a_2$, $S_3 = 3 = a_3$, $S_4 = 2 = a_4$, co w połączeniu z tym, że $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzi, że $S_n = a_n$ dla $n \geqslant 2$, co było do udowodnienia.

4. Udowodnić, że istnieje taki nieskończony zbiór dodatnich liczb całkowitych, że suma jego każdych dwóch różnych elementów ma parzyście wiele różnych dzielników pierwszych.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu nie będziemy konstruować tego zbioru. Skorzystamy z twierdzenia, które zagwarantuje jego istnienie.

Twierdzenie (Ramsey — wersja nieskończona)**.** *Dany jest graf pełny G o nieskończonym zbiorze wierzchołków X. Każdą krawędź w grafie G pokolorowano na czerwono lub zielono. Wówczas istnieje nieskończony zbiór $Y \subseteq X$, taki że wszystkie krawędzie łączące wierzchołki ze zbioru Y są tego samego koloru.*

Dowód. Konstruujemy ciąg wierzchołków $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz ciąg nieskończonych zbiorów wierzchołków $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ indukcyjnie.

Niech $B_0 = X$. Jeśli zbiór B_n jest już zdefiniowany, to definiujemy a_{n+1} jako dowolny element zbioru B_n. Jeśli wierzchołek a_{n+1} jest już zdefiniowany, to rozważamy krawędzie łączące a_{n+1} z wierzchołkami ze zbioru B_n. Ponieważ B_n jest nieskończony, więc nieskończenie wiele rozważanych krawędzi jest jednego koloru. Definiujemy B_{n+1} jako nieskończony zbiór wierzchołków ze zbioru B_n, taki że wszystkie krawędzie łączące a_{n+1} z wierzchołkami zbioru B_{n+1} są tego samego koloru.

Wreszcie, dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *liczbą czerwoną*, jeśli krawędzie między a_n a wierzchołkami ze zbioru B_n są czerwone. Jeśli krawędzie między a_n a elementami zbioru B_n są zielone, to n nazwiemy *liczbą zieloną*. Wówczas istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych jednego koloru, bez straty ogólności przyjmijmy, że istnieje nieskończenie wiele liczb zielonych. Wtedy wszystkie krawędzie między wierzchołkami ze zbioru $Y = \{a_n \colon n \text{ jest liczbą zieloną}\}$ są zielone. □

Skorzystamy z twierdzenia Ramseya w sposób następujący: niech

$$X = \{5k+1 : k \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{5k+2 : k \in \mathbb{Z}^+\},$$

zaś każdy dwuelementowy zbiór $\{a, b\} \subseteq X$ kolorujemy na czerwono, jeśli liczba $a+b$ ma parzyście wiele różnych dzielników pierwszych, albo na zielono w przeciwnym wypadku.

Twierdzenie Ramseya daje nam nieskończony zbiór $Y \subseteq X$, którego każde dwuelementowe podzbiory są jednego koloru, czyli albo suma każdych dwóch różnych elementów Y ma parzyście wiele różnych dzielników pierwszych, albo suma każdych dwóch ma nieparzyście wiele różnych dzielników pierwszych.

Jeśli zachodzi pierwszy przypadek, to mamy tezę. Załóżmy zatem, że suma każdych dwóch różnych elementów Y ma nieparzyście wiele różnych dzielników pierwszych. Jako że każdy element Y daje resztę 1 albo 2 z dzielenia przez 5, to suma dwóch elementów Y może dawać resztę 2, 3 albo 4 modulo 5. W szczególności nie może być ona podzielna przez 5.

Rozpatrzmy teraz zbiór
$$Z = \{5y : y \in Y\}.$$
Jeśli $z_1 \neq z_2 \in Z$, to istnieją elementy $y_1 \neq y_2 \in Y$ takie, że $z_1 = 5y_1$ i $z_2 = 5y_2$. W takim razie $z_1 + z_2 = 5(y_1 + y_2)$. Ponieważ $5 \nmid y_1 + y_2$ oraz $y_1 + y_2$ ma nieparzyście wiele różnych dzielników pierwszych, więc $z_1 + z_2 = 5(y_1 + y_2)$ ma parzyście wiele różnych dzielników pierwszych. Z jest więc poszukiwanym zbiorem.

5. Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech n będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, która ma dokładnie k dzielników. Załóżmy, że n jest sześcianem liczby całkowitej. Wykazać, że k nie ma dzielników pierwszych dających resztę 2 z dzielenia przez 3.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że istnieją dodatnie liczby całkowite k, n spełniające założenia zadania takie, że k ma dzielnik pierwszy dający resztę 2 z dzielenia przez 3. Niech $p_1 < p_2 < \ldots$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi oraz niech $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$, przy czym $\alpha_m \neq 0$. Wówczas $3 \mid \alpha_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$ oraz $k = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$. Ponadto na mocy minimalności n widzimy, że $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m > 0$.

W celu uzyskania sprzeczności posłużymy się następującym lematem.

Lemat. *Niech $\alpha_r + 1 = ab$ dla pewnych liczb całkowitych a, b większych niż jeden. Jeśli $p_s < p_r^a < p_{s+1}$, to $\alpha_s \geqslant b - 1 \geqslant \alpha_{s+1}$.*

Dowód. Zauważmy, że liczba $n_1 = p_r^{(\alpha_s+1)a-1} p_s^{b-1} \prod_{i \neq r,s} p_i^{\alpha_i}$ ma dokładnie k dzielników, toteż $n_1 \geqslant n$. Oznacza to, że
$$p_r^{(\alpha_s+1)a-1} p_s^{b-1} \geqslant p_r^{ab-1} p_s^{\alpha_s}, \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{p_r^a}{p_s}\right)^{\alpha_s - b + 1} \geqslant 1,$$
co na mocy założenia $p_s < p_r^a$ pociąga za sobą $\alpha_s \geqslant b - 1$.

Podobnie korzystając z założenia $p_r^a < p_{s+1}$ oraz nierówności
$$n_1' = p_r^{(\alpha_{s+1}+1)a-1} p_{s+1}^{b-1} \prod_{i \neq r, s+1} p_i^{\alpha_i} \geqslant n$$
otrzymujemy $\alpha_{s+1} \leqslant b - 1$. □

Niech r będzie największym indeksem takim, że $\alpha_r + 1$ ma dzielnik dający resztę 2 z dzielenia przez 3; niech a będzie takim dzielnikiem oraz niech $\alpha_r + 1 = ab$. Skoro $3 \mid \alpha_r$, to $b \equiv 2 \pmod 3$. Wykażemy, że $2 \mid a$ oraz $2 \mid b$. Wyniknie stąd, że α_r jest postaci $4c - 1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej c.

Niech s, t będą takie, że
$$p_s < p_r^a < p_{s+1} \quad \text{oraz} \quad p_t < p_r^b < p_{t+1}.$$
Na mocy postulatu Bertranda wiemy, że $\frac{1}{2} p_r^a < p_s$ oraz $p_{s+1} < 2p_r^a$, więc
$$p_r^{a-1} < p_s < p_r^a < p_{s+1} < p_r^{a+1} \quad \text{i analogicznie} \quad p_r^{b-1} < p_t < p_r^b < p_{t+1} < p_r^{b+1}.$$

Oznacza to w szczególności, że $s, t > r$. Ponadto $|s-t| \neq 1$; istotnie, gdyby $s = t+1$, to mielibyśmy $p_r^{a-1} < p_s < p_r^a$ oraz $p_r^b < p_{t+1} = p_s < p_r^{b+1}$. Oznaczałoby to, że $a = b+1$ i przeczyło temu, że $a \equiv b \equiv 2 \pmod 3$. Podobnie odrzucamy przypadek $t = s+1$.

Na mocy lematu otrzymujemy, że $\alpha_s > b-1 > \alpha_{s+1}$ i analogicznie $\alpha_t > a-1 > \alpha_{t+1}$; silne nierówności wynikają z rozważenia reszt z dzielenia liczb $a-1$, $b-1$, α_i przez 3.

Zauważmy teraz, że liczba $n_2 = p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-1} p_s^{b-1} p_{t+1}^{a-1} \prod_{i \neq r,s,t+1} p_i^{\alpha_i}$ ma k dzielników, więc $n_2 \geqslant n$. Oznacza to, że

$$1 \leqslant \frac{n_2}{n} = \frac{p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-1} p_s^{b-1} p_{t+1}^{a-1}}{p_r^{ab-1} p_s^{\alpha_s} p_{t+1}^{\alpha_{t+1}}} = \frac{p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-ab} p_{t+1}^{a-1-\alpha_{t+1}}}{p_s^{\alpha_s-b+1}} < \frac{p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-ab+(b+1)(a-1-\alpha_{t+1})}}{p_r^{(a-1)(\alpha_s-b+1)}}.$$

Wobec powyższego

$$\begin{aligned} 0 &< (\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1) - ab + (b+1)(a-1-\alpha_{t+1}) - (a-1)(\alpha_s-b+1) \\ &= 1 + \alpha_s\alpha_{t+1} - a\alpha_s + 2\alpha_s - b\alpha_{t+1} + ab - 2b \\ &= 1 - (\alpha_s - b)(-\alpha_{t+1} + a - 2), \end{aligned}$$

skąd $(\alpha_s - b)(-\alpha_{t+1} + a - 2) < 1$. Ponieważ $\alpha_s \geqslant b$, $3 \mid \alpha_s \neq b$ oraz $a - 2 \geqslant \alpha_{t+1}$, więc $a - 2 = \alpha_{t+1}$. Na mocy założenia o maksymalności r, $\alpha_i + 1$ nie ma dzielników postaci $3j+2$ dla $m \geqslant i > r$; w szczególności dla takich i zachodzi $2 \mid \alpha_i$. Otrzymujemy więc, że $2 \mid \alpha_{t+1}$, czyli również $2 \mid a$. Analogicznie dowodzimy, że $2 \mid b$, czyli $\alpha_r = 4c-1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej c. Ponadto skoro $2 \mid \alpha_m$ oraz $3 \mid \alpha_m$, to $\alpha_m \geqslant 4$.

Korzystając z lematu dla $(a,b) = (c,4)$ otrzymujemy, że $\alpha_s \geqslant 3 \geqslant \alpha_{s+1}$. Wiemy jednak, że $\alpha_m \geqslant 4$, $\alpha_{m+1} = 0$ oraz ciąg α_i jest malejący. Wobec tego $s = m$ i w konsekwencji $p_m < p_r^c < p_{m+1}$.

Podobnie korzystając z lematu dla $(a,b) = (2c,2)$ otrzymujemy, że $p_m < p_r^{2c} < p_{m+1}$. Ta nierówność wraz z poprzednią oznacza, że w przedziale (p_r^c, p_r^{2c}) nie ma żadnej liczby pierwszej, co przeczy postulatowi Bertranda. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

6. Dane są dodatnie liczby całkowite p, q, m, zbiory p-elementowe $A_1, \ldots, A_m$ i zbiory q-elementowe $B_1, \ldots, B_m$. Spełniony jest przy tym następujący warunek: dla każdych $1 \leqslant i, j \leqslant m$ zbiory A_i, B_j są rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy $i = j$. Wykazać, że $m \leqslant \binom{p+q}{p}$.

Rozwiązanie:

Niech

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \cup B_i$$

będzie zbiorem wszystkich elementów wszystkich zbiorów z treści zadania. Rozważmy losową permutację elementów S. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$, niech C_i oznacza zdarzenie, w którym wszystkie elementy zbioru A_i znajdą się w permutacji przed wszystkimi elementami zbioru B_i. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe prawdopodobieństwu, że w losowej permutacji zbioru $A_i \cup B_i$ wszystkie elementy A_i znajdą się przed elementami B_i, czyli dokładnie

$$\frac{p! \cdot q!}{(p+q)!} = \frac{1}{\binom{p+q}{p}}.$$

Zauważmy, że zdarzenia C_i oraz C_j dla $i \neq j$ wykluczają się wzajemnie. Istotnie, jeżeli zachodzi C_i, to pewien element zbioru $A_i \cap B_j \subseteq B_j$ znajduje się w wylosowanej permutacji przed pewnym elementem zbioru $B_i \cap A_j \subseteq A_j$.

Prawdopodobieństwo tego, że zajdzie którekolwiek ze zdarzeń $C_1, \ldots, C_m$ jest ograniczone z góry przez 1. Z drugiej strony, jako że każde dwa z tych zdarzeń się wzajemnie wykluczają, prawdopodobieństwo tego, że zajdzie którekolwiek z nich jest równe sumie prawdopodobieństw ich zajścia. Stąd

$$m \cdot \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \leqslant 1, \quad \text{zatem} \quad m \leqslant \binom{p+q}{p}.$$

7. Udowodnić, że w każdym grafie o $3k+1$ wierzchołkach niezawierającym wierzchołków izolowanych istnieje skojarzenie wielkości $k+1$ lub można podzielić zbiór wierzchołków na trzy zbiory A, B, C tak, że:

- zbiór A jest niepusty oraz nie ma wewnątrz niego krawędzi,
- nie ma żadnych krawędzi pomiędzy zbiorami A i C,
- istnieje skojarzenie między zbiorami A i B zawierające wszystkie wierzchołki ze zbioru B.

Rozwiązanie:

Pokryciem wierzchołkowym grafu G nazywamy taki zbiór wierzchołków A, że dowolna krawędź w G jest incydentna z pewnym wierzchołkiem ze zbioru A.

W rozwiązaniu użyjemy następującego twierdzenia.

Twierdzenie (König)**.** *W grafie dwudzielnym G, rozmiar pokrycia wierzchołkowego G o najmniejszej liczbie wierzchołków jest równy rozmiarowi najliczniejszego skojarzenia G.*

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Niech G będzie grafem o $3k+1$ wierzchołkach, który nie zawiera wierzchołków izolowanych. Oznaczmy zbiór wierzchołków grafu G przez V. Niech M będzie najliczniejszym skojarzeniem w G i niech V_M będzie zbiorem końców krawędzi z M. Jeżeli $|M| > k$, to mamy tezę. Dalej załóżmy, że $|M| \leqslant k$ oraz $|V_M| \leqslant 2k$. Ponieważ M jest maksymalnym skojarzeniem, to dowolne dwa wierzchołki ze zbioru $I = V \setminus V_M$ nie są połączone krawędzią.

Rozważmy graf dwudzielny $G_{V_M,I}$ złożony z krawędzi grafu G pomiędzy wierzchołkami ze zbiorów V_M oraz I. Niech M' oraz X będą odpowiednio najliczniejszym skojarzeniem oraz pokryciem wierzchołkowym w grafie $G_{V_M,I}$ o najmniejszej liczbie wierzchołków. Z twierdzenia Königa otrzymujemy, że $|X| = |M'|$. Oczywiście $|M'| \leqslant |M| \leqslant k$, a stąd $|X| \leqslant k$.

Udowodnimy, że zbiór $V_M \cap X$ jest niepusty. Gdyby tak nie było, to $X \subseteq I$. Jednocześnie w G nie ma wierzchołków izolowanych, więc z każdego wierzchołka z I wychodzi krawędź. Ponieważ X jest pokryciem wierzchołkowym, więc w takim razie musi być $I = X$. Jednakże wtedy

$$|V| = |V_M| + |I| = |V_M| + |X| \leqslant 2k + k = 3k,$$

sprzeczność.

Ponieważ $|X| = |M'|$, więc każda krawędź z M' ma dokładnie jeden koniec w zbiorze X. Niech M^* będzie zbiorem tych krawędzi z M', które mają dokładnie jeden koniec w zbiorze $V_M \cap X$ i niech V_{M^*} będzie zbiorem końców krawędzi z M^*. Udowodnimy, że zbiory

$$A = V_{M^*} \cap I,\ B = V_M \cap X,\ C = V \setminus (A \cup B)$$

spełniają warunki zadania. Zauważmy, że zbiór A jest niepusty oraz pomiędzy wierzchołkami z A nie ma krawędzi, gdyż $A \subseteq I$. Ponadto pomiędzy zbiorami A oraz C nie krawędzi, gdyż wszyscy sąsiedzi wierzchołków należących do A są zarówno w V_M, jak i w X. Ostatni warunek tezy zadania jest spełniony, gdyż M^* jest doskonałym skojarzeniem między zbiorami A i B.

8. Dane są nieparzyste liczby całkowite x, y, przy czym $|x| \neq |y|$. Każda liczba całkowita została pomalowana na jeden z czterech kolorów: arbuzowy, łososiowy, malinowy, truskawkowy. Udowodnić, że istnieją dwie liczby tego samego koloru, których różnica wynosi x, y, $x+y$ lub $x-y$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje takie kolorowanie f liczb całkowitych na kolory Arbuzowy, Łososiowy, Malinowy, Truskawkowy, że każde dwie liczby całkowite różniące się o x, y, $x+y$ lub $x-y$ są różnokolorowe. To znaczy: istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{Z} \to \{\mathrm{A}, \mathrm{Ł}, \mathrm{M}, \mathrm{T}\}$, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$f(\{a, a+x, a+y, a+x+y\}) = \{\mathrm{A}, \mathrm{Ł}, \mathrm{M}, \mathrm{T}\}\,. \tag{1}$$

Rozpatrzmy kolorowanie g kraty $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadane wzorem

$$g(i,j) = f(ix + jy).$$

Na mocy (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} g\left(\{(i,j),(i+1,j),(i,j+1),(i+1,j+1)\}\right) &= f\left(\{ix+jy, ix+jy+x, ix+jy+y, ix+jy+x+y\}\right) \\ &= \{\mathrm{A}, \text{Ł}, \mathrm{M}, \mathrm{T}\}, \end{aligned}$$

czyli wierzchołki dowolnego kwadratu jednostkowego są różnokolorowe. $(\star)$

Powiemy, że wiersz $\mathbb{Z} \times \{k\}$ jest *poziomkowy*, jeśli funkcja $g|_{\mathbb{Z}\times\{k\}}$ jest okresowa o okresie 2. Podobnie definiujemy poziomkowość kolumn.

W celu uzyskania sprzeczności posłużymy się dwoma następującymi obserwacjami.

Spostrzeżenie 1. *Jeśli istnieje kolumna, która nie jest poziomkowa, to istnieje poziomkowy wiersz.*

Dowód. Załóżmy, że pewna kolumna nie jest poziomkowa. Wówczas istnieją trzy kolejne elementy tej kolumny, którym przypisaliśmy trzy różne kolory; bez straty ogólności niech będzie to sytuacja

$$\begin{matrix} \mathrm{A} \\ \text{Ł} \\ \mathrm{M} \end{matrix}.$$

Korzystając z obserwacji $(\star)$ widzimy, że kolorowanie to rozszerza się jednoznacznie do

$$\begin{matrix} \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} \\ \mathrm{T} & \text{Ł} & \mathrm{T} \\ \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} \end{matrix}.$$

Kontynuując to rozumowanie otrzymujemy, iż jedyne możliwe rozszerzenie kolorowania w tych trzech wierszach to

$$\ldots\begin{matrix} \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} \\ \text{Ł} & \mathrm{T} & \text{Ł} & \mathrm{T} & \text{Ł} & \mathrm{T} & \text{Ł} & \mathrm{T} & \text{Ł} & \mathrm{T} & \text{Ł} & \mathrm{T} & \text{Ł} \\ \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} \end{matrix}\ldots;$$

otrzymujemy więc trzy poziomkowe wiersze. □

Spostrzeżenie 2. *Jeśli istnieje wiersz $\mathbb{Z} \times \{k\}$, który jest poziomkowy, to każdy wiersz jest poziomkowy. Co więcej, jeśli $\ell \equiv k \pmod 2$, to zbiory kolorów użyte w wierszach $\mathbb{Z} \times \{k\}$ oraz $\mathbb{Z} \times \{\ell\}$ są równe, natomiast jeśli $\ell \not\equiv k \pmod 2$, to zbiory te są rozłączne.*

Dowód. Przyjmijmy, że kolorowanie w wierszu $\mathbb{Z} \times \{k\}$ to

$$\ldots \mathrm{A}\ \ \text{Ł}\ \ \mathrm{A}\ \ \text{Ł}\ \ \mathrm{A} \ldots.$$

Na mocy $(\star)$ widzimy, że kolorowanie to rozszerza się do poprawnego kolorowania zbioru $\mathbb{Z} \times \{k, k+1\}$ na dokładnie dwa sposoby:

$$\ldots\begin{matrix} \mathrm{M} & \mathrm{T} & \mathrm{M} & \mathrm{T} & \mathrm{M} \\ \mathrm{A} & \text{Ł} & \mathrm{A} & \text{Ł} & \mathrm{A} \end{matrix}\ldots \quad \text{lub} \quad \ldots\begin{matrix} \mathrm{T} & \mathrm{M} & \mathrm{T} & \mathrm{M} & \mathrm{T} \\ \mathrm{A} & \text{Ł} & \mathrm{A} & \text{Ł} & \mathrm{A} \end{matrix}\ldots,$$

wobec czego wiersz $\mathbb{Z} \times \{k+1\}$ jest poziomkowy. Kontynuując to rozumowanie otrzymujemy, że każdy wiersz powyżej $\mathbb{Z} \times \{k\}$ jest poziomkowy. Podobnie rozumując otrzymujemy, iż każdy wiersz poniżej $\mathbb{Z} \times \{k\}$ jest poziomkowy.

Z powyższego rozumowania natychmiast wynika też druga część spostrzeżenia. □

Ze względu na symetryczną rolę wierszy i kolumn przyjmijmy bez straty ogólności na mocy Spostrzeżenia 1, że istnieje poziomkowy wiersz. Korzystając ze Spostrzeżenia 2 wnosimy, iż każdy wiersz jest poziomkowy. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $g(0,0) = \text{A}$ oraz $g(1,0) = \text{Ł}$.

Ponieważ y jest nieparzyste, więc $g(y,0) = \text{Ł}$. Ponadto skoro x jest liczbą nieparzystą, to korzystając ponownie ze Spostrzeżenia 2 widzimy, iż $g(0,x) \in \{\text{M}, \text{T}\}$. Ale z określenia funkcji g wynika, że

$$g(y,0) = f(xy) = g(0,x).$$

Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

9. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω. Okrąg styczny do boków AD i AB jest styczny wewnętrznie do okręgu ω w punkcie T. Proste styczne do okręgu ω w punktach A i T przecinają się w punkcie P. Wykazać, że jeśli okręgi wpisane w trójkąty ABC oraz ACD mają równe promienie, to prosta łącząca środki tych okręgów przechodzi przez punkt P.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez K i L odpowiednio środki łuków AB i AD okręgu ω niezawierających C. Niech Γ będzie okręgiem stycznym do boków AD i AB oraz stycznym wewnętrznie do okręgu ω; niech ponadto X i Y będą odpowiednio punktami styczności okręgu Γ do boków AB i AD. Jednokładność o środku T przekształcająca okrąg ω na okrąg Γ przeprowadza punkt K na punkt X, zatem punkty T, K, X są współliniowe. Analogicznie uzasadniamy, że punkty T, L, Y są współliniowe. Ponadto $\frac{TX}{TK} = \frac{TY}{TL}$, gdyż oba te stosunki są równe skali rozważanej jednokładności. Wynika stąd, że $\frac{KX}{TK} = \frac{LY}{TL}$. Mamy też

$$\sphericalangle KAX = \sphericalangle KTA,$$

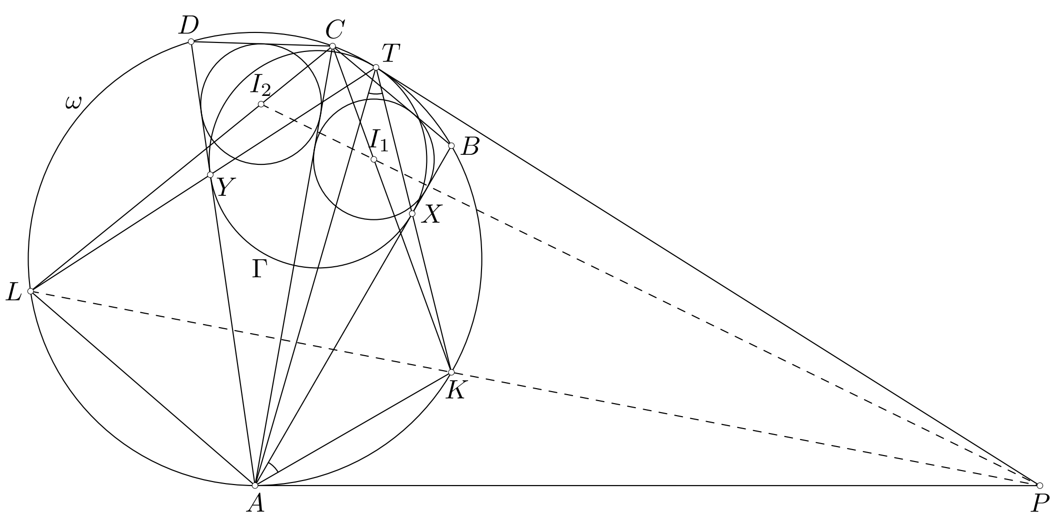
gdyż kąty te są oparte na równych łukach okręgu ω. Wobec tego trójkąty KAX oraz KTA są podobne. Stąd

$$\frac{AK}{TK} = \frac{KX}{AK} = \sqrt{\frac{AK}{TK} \cdot \frac{KX}{AK}} = \sqrt{\frac{KX}{TK}}$$

Analogicznie dowodzimy, że $\frac{AL}{TL} = \sqrt{\frac{LY}{TL}}$. Wobec tego

$$\frac{AK}{TK} = \frac{AL}{TL}.$$

Zatem z twierdzenia o symedianie wynika, że punkt P leży na prostej KL.



Oznaczmy przez I_1, I_2 odpowiednio środki okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ACD. Na mocy twierdzenia Menelaosa dla trójkąta CKL do wykazania tezy zadania potrzeba i wystarcza, by

$$\frac{KI_1}{CI_1} \cdot \frac{CI_2}{LI_2} = \frac{KP}{LP}.$$

Trójkąty PAK oraz PLA są podobne (gdyż $\sphericalangle ALP = \sphericalangle PAK$), więc

$$\frac{PK}{PL} = \frac{[PAK]}{[PLA]} = \left(\frac{AK}{AL}\right)^2,$$

gdzie symbolem $[\mathcal{F}]$ oznaczamy pole figury $\mathcal{F}$.

Z drugiej strony z lematu o trójliściu mamy $KI_1 = KA$ oraz $LI_2 = LA$, więc

$$\frac{KI_1}{LI_2} = \frac{AK}{AL}.$$

Oznaczmy przez O i R odpowiednio środek i promień okręgu ω. Niech r będzie promieniem okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ACD. Z twierdzenia Eulera wynika, że

$$OI_1^2 = R^2 - 2Rr = OI_2^2.$$

Wobec tego punkty I_1 oraz I_2 mają równą potęgę względem okręgu ω. Stąd $CI_1 \cdot KI_1 = CI_2 \cdot LI_2$, zatem

$$\frac{CI_2}{CI_1} = \frac{KI_1}{LI_2} = \frac{AK}{AL}.$$

Łącząc otrzymane równości otrzymujemy

$$\frac{KI_1}{CI_1} \cdot \frac{CI_2}{LI_2} = \frac{KI_1}{LI_2} \cdot \frac{CI_2}{CI_1} = \frac{AK}{AL} \cdot \frac{AK}{AL} = \frac{PK}{PL},$$

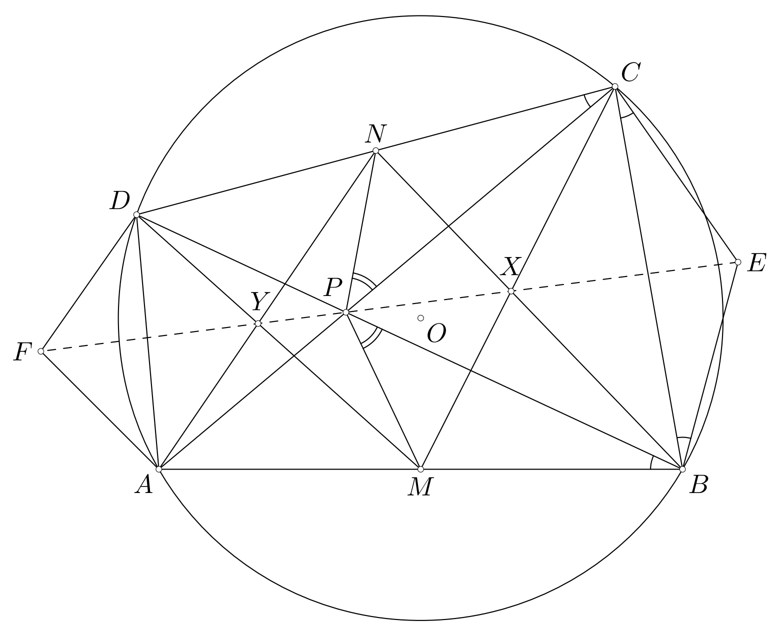
czyli równość, do której sprowadzona została teza zadania.

10. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Na bokach BC i AD budujemy na zewnątrz trójkąty BCE i ADF, przy czym

$$BE = CE, \quad AF = DF \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BEC + \sphericalangle AOD = \sphericalangle AFD + \sphericalangle BOC = 180^\circ.$$

Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i CD. Wykazać, że proste BN, CM i EF mają punkt wspólny.

Rozwiązanie:



Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Wykorzystując warunki dane w treści zadania otrzymujemy

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle AOD = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BEC = \sphericalangle BCE = \sphericalangle CBE.$$

Trójkąty ABP i DCP są podobne, skąd wniosek, że trójkąty BMP i CNP są podobne, więc mamy $\sphericalangle BPM = \sphericalangle CPN$. Stosując twierdzenie Jacobiego dla trójkąta BPC otrzymujemy, że proste BN, CM i PE mają punkt wspólny X. Analogicznie uzasadniamy, że proste AN, DM i PF mają punkt wspólny Y. Z twierdzenia Pappusa dla sześciokąta $ANBDMC$ otrzymujemy, że punkty Y, P, X są współliniowe, w związku z czym punkty E, X, P, Y, F leżą na jednej prostej, co kończy rozwiązanie.

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty przy wierzchołkach A i C są równe. Udowodnić, że jedna ze wspólnych stycznych do okręgów wpisanych w trójkąty ABD i BCD przechodzi przez środek przekątnej AC.

Rozwiązanie:

Jeżeli punkty A i C są symetryczne względem przekątnej BD lub względem środka przekątnej BD, to teza zadania jest oczywista. Od teraz będziemy rozważać pozostałe przypadki. Wtedy trójkąty ABD i CBD mają wspólną styczną zewnętrzną ℓ różną od BD i bez straty ogólności możemy założyć, że ℓ przecina proste AD i CD.

Niech ℓ przecina proste BD, AD, CD, AC odpowiednio w punktach X, Y, Z, M. Musimy wykazać, że $AM = MC$.

Stosując twierdzenie Menelaosa dla trójkąta ACD i prostej MYZ otrzymujemy

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DY}{YA} = 1.$$

Wobec tego wystarczy udowodnić, że

$$\frac{CZ}{ZD} = \frac{YA}{DY}.$$

Niech P i Q będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABD odpowiednio z bokami BD i AD. Korzystając z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $ABPXYQ$ wnioskujemy, że proste AX, BY, PQ przecinają się w jednym punkcie; oznaczmy go przez T. Stosując twierdzenie Menelaosa dla trójkąta ADX i prostej BYT otrzymujemy

$$\frac{AY}{YD} \cdot \frac{DB}{BX} \cdot \frac{XT}{TA} = 1.$$

Ponownie stosując twierdzenie Menelaosa, tym razem dla trójkąta ADX i prostej TQP otrzymujemy

$$\frac{XT}{TA} \cdot \frac{AQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PX} = 1.$$

Ponadto $DP = DQ$. Zatem

$$\frac{AY}{YD} = \frac{BX}{DB} \cdot \frac{AQ}{PX}. \tag{1}$$

Podobnie, oznaczmy przez R i S punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt BCD odpowiednio z bokami BD i CD. Z twierdzenia Brianchona zastosowanego do zdegenerowanego sześciokąta $CSZXRB$ dostajemy, że CX, SR, ZB przecinają się w jednym punkcie, powiedzmy U. Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta CDX i prostej BUZ wynika, że

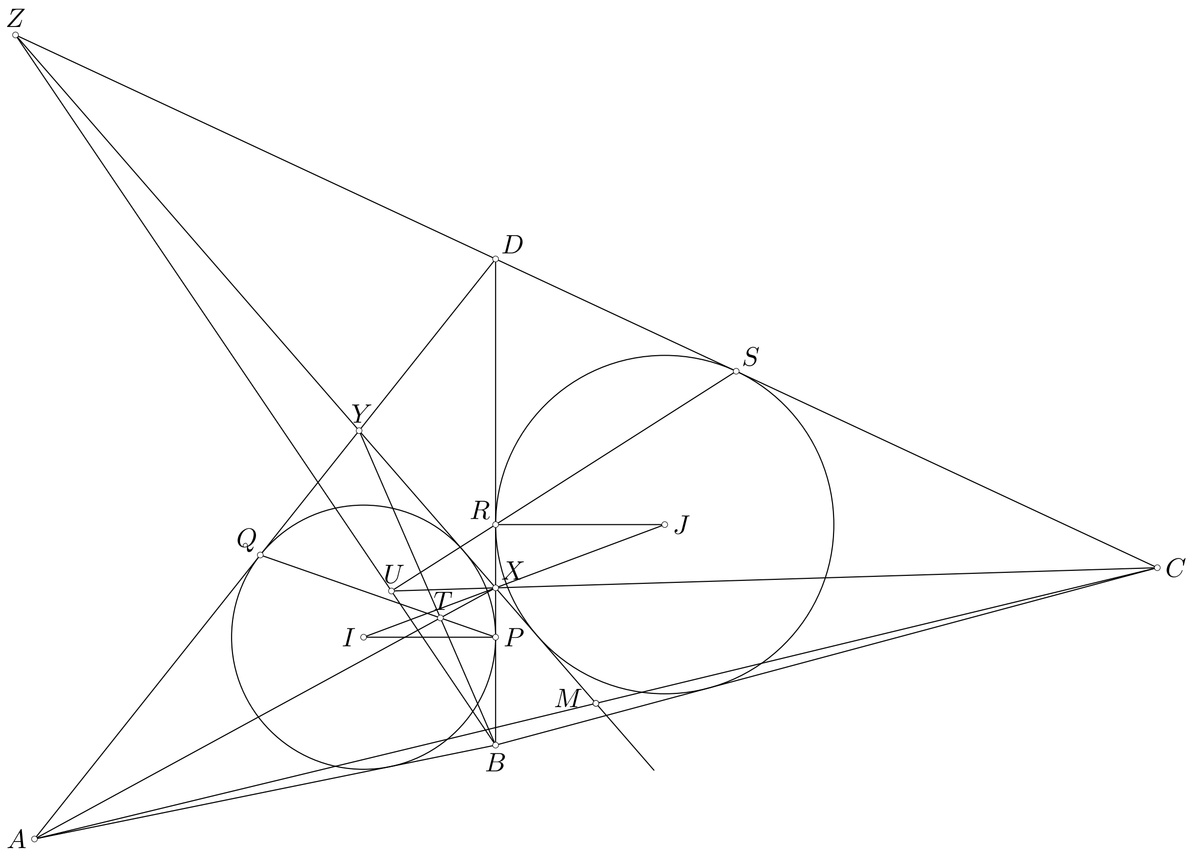
$$\frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DB}{BX} \cdot \frac{XU}{UC} = 1.$$

Twierdzenie Menelaosa dla trójkąta CDX i prostej USR daje

$$\frac{XU}{UC} \cdot \frac{CS}{SD} \cdot \frac{DR}{RX} = 1.$$

Ponieważ $DS = DR$, więc

$$\frac{CZ}{ZD} = \frac{BX}{DB} \cdot \frac{CS}{RX}. \tag{2}$$



Korzystając z zależności (1) i (2), możemy przepisać tezę do postaci

$$\frac{AQ}{CS} = \frac{PX}{RX}.$$

Niech I, J oraz r, r' będą środkami oraz promieniami okręgów wpisanych w trójkąty ABD, CBD. Wówczas

$$\frac{AQ}{CS} = \frac{r \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\sphericalangle BAD}{r' \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\sphericalangle BCD} = \frac{r}{r'} = \frac{IP}{JR} = \frac{PX}{RX},$$

co kończy dowód.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Jeśli zawodnik zostaje wybrany do referowania po raz n-ty, przystępuje do referowania z prawdopodobieństwem $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-n+m}$, gdzie m oznacza minimum liczby zakończonych referowań spośród wszystkich zawodników drużyny referującej. W przeciwnym wypadku Kapitan drużyny referującej wyznacza osobę do referowania zgodnie z punktem **7**.
9. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
10. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7–9**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
11. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.
12. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
13. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**. W tym przypadku, jeżeli przedstawione rozwiązanie nie zostanie uznane przez Jury za poprawne, drużyna otrzymuje -10 punktów i opuszcza się punkt 14.

14. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

15. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
16. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo −10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

17. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań lub gdy różnica pomiędzy wynikami obu drużyn jest większa niż 40 punktów. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
18. Po 3 godzinach meczu czas na referowanie zadania zostaje skrócony do 5 minut, a wszystkie punkty ujemne liczą się dwukrotnie.
19. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
20. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści

Treści zadań **5**

Zawody indywidualne 5
Zawody drużynowe 9
Pierwszy Mecz Matematyczny 10
Drugi Mecz Matematyczny 12

Rozwiązania **14**

Zawody indywidualne 14
Zawody drużynowe 53
Pierwszy Mecz Matematyczny 63
Drugi Mecz Matematyczny 80

Regulamin Meczu Matematycznego **92**