Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 4 – 17 czerwca 2023

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 4 – 17 czerwca 2023

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. 18 33 11 660

Kadra:
Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Jacek Jakimiuk, Michał Kieza, Mikołaj Leonarski, Konrad Majewski, Łukasz Orski, Mateusz Scharmach, Radosław Żak.

Uczestnicy:
Wojciech Domin, Jan Gwiazda, Jeremi Hyska, Grzegorz Kaczmarek, Robert Kluszczyński, Jan Kwieciński, Stanisław Lada, Antoni Łuczak, Wojciech Malinowski, Filip Manijak, Piotr Miernik, Miłosz Płatek, Alicja Przybylik, Magdalena Pudełko, Kajetan Ramsza, Patryk Rosół, Krzysztof Salata, Konstanty Smolira, Robert Soboński, Szymon Tobiasz.

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`om.mimuw.edu.pl`
`www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 4 – 17 czerwca 2023 w Mszanie Dolnej, w Ośrodku Sportowo-Rekreacyjnym „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Jacek Jakimiuk, Michał Kieza, Mikołaj Leonarski, Konrad Majewski, Łukasz Orski, Mateusz Scharmach i Radosław Żak.

W dniach 5, 6, 7, 9, 12, 13, 14 i 15 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 8 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 10 i 16 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny ośmiu zadań i trwały od rana do wieczora, a mecze matematyczne — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 192 punkty. Trzy najlepsze wyniki to 130, 122 i 107 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyła się wycieczka: 11 czerwca na Turbacz i Gorc.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z Obozu wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `om.mimuw.edu.pl`.

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	15	3	2	0
2.	14	2	0	4
3.	4	2	2	12
4.	2	2	0	16
5.	14	1	2	3
6.	7	0	2	11
7.	7	0	1	12
8.	10	1	1	8
9.	12	1	0	7
10.	5	1	2	12
11.	4	0	1	15
12.	4	0	0	16
13.	17	1	0	2
14.	10	5	1	4
15.	4	0	1	15
16.	0	1	0	19
17.	14	3	1	2
18.	6	0	1	13
19.	2	0	2	16
20.	0	0	0	20
21.	12	0	3	5
22.	12	0	0	8
23.	7	0	0	13
24.	2	0	0	18
25.	4	4	1	11
26.	5	1	1	13
27.	2	0	0	18
28.	1	0	0	19
29.	8	1	0	11
30.	15	0	0	5
31.	4	3	0	13
32.	0	0	1	19

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y równanie

$$f(x+2y) = 2f(x)f(y).$$

2. Dana jest liczba naturalna $n > 1$. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną m o następującej własności: z każdego m-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ można wybrać liczby a, b, dla których

$$n < a - b < 2n.$$

3. Dana jest liczba całkowita $n > 1$ względnie pierwsza z 6. Niech S będzie zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych mniejszych od n, które są względnie pierwsze z n. Stefan obliczył sumę odwrotności elementów zbioru S i zapisał wynik w postaci ułamka nieskracalnego. Udowodnić, że licznik tego ułamka dzieli się przez n^2.

4. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D leży na boku BC, przy czym okręgi wpisane w trójkąty ABD i ACD są przystające. Oznaczmy przez Ω_B okrąg o średnicy AB, a przez Ω_C — okrąg o średnicy AC. Udowodnić, że prosta AD jest prostopadła do jednej z dwóch wspólnych stycznych do okręgów Ω_B i Ω_C.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite m, n. Wykazać, że

$$(2^m - 1)^2 \mid 2^n - 1 \iff m(2^m - 1) \mid n.$$

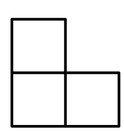
6. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu o. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E. Okrąg o_1 jest styczny do boku BC w punkcie K oraz do przedłużeń boków AB i CD, zaś okrąg o_2 jest styczny do boku AD w punkcie L oraz do przedłużeń boków AB i CD. Wykazać, że jeśli punkty E, K, L leżą na jednej prostej, to środki boków BC i AD oraz środek okręgu o są współliniowe.

7. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Rozważamy n liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ spełniających warunek $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$. Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\sum_{k=1}^{n} \left| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right|.$$

8. Danych jest $n \geqslant 2$ punktów na płaszczyźnie. Załóżmy, że dla każdego punktu X, istnieje dokładnie jeden punkt $N(X)$, który jest bliżej X niż wszystkie pozostałe punkty. Dla każdego punktu X, rysujemy z niego odcinek do $N(X)$ oraz kolorujemy $N(X)$ na czerwono. Załóżmy, że na koniec każde dwa z danych punktów są połączone łamaną. Udowodnić, że jest co najmniej $(n-2)/4$ czerwonych punktów.

9. Udowodnić, że planszy 5×7 nie można pokryć pewną dodatnią liczbą warstw poniższych klocków (które można obracać) w taki sposób, aby każde pole było pokryte przez tę samą liczbę klocków.



10. Znaleźć wszystkie takie liczby pierwsze $p \geqslant 3$, że dla dowolnej liczby pierwszej $q < p$, reszta z dzielenia p przez q jest bezkwadratowa.

Uwaga: liczba jest bezkwadratowa, jeżeli nie jest podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej większej od 1.

11. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB > AC$. Punkt Q leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, przy czym $\sphericalangle AQI = 90^\circ$. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie P. Prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie w punkcie $K \neq C$. Udowodnić, że środek okręgu opisanego na trójkącie QIC leży na prostej KP.

12. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y))$$

13. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = 3AB$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ABC. Niech D będzie rzutem na AC środka łuku BAC okręgu opisanego na ABC. Dowieść, że D leży na okręgu opisanym na trójkącie BIC.

14. Dane są unormowane i niestałe wielomiany $P_1, \ldots, P_n$ o współczynnikach rzeczywistych. Dla każdej liczby rzeczywistej y niech S_y oznacza zbiór takich liczb rzeczywistych x, że $P_i(x) = y$ dla pewnego i. Udowodnić, że jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych y_1, y_2 zbiory S_{y_1} i S_{y_2} mają tyle samo elementów, to wszystkie wielomiany $P_1, \ldots, P_n$ są tego samego stopnia.

15. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Ania wpisała liczby od 1 do n^2 w pola tablicy $n \times n$, tak że i oraz $i+1$ są w sąsiadujących komórkach dla $i = 1, 2, \ldots, n^2 - 1$. Bartek chciałby dowiedzieć się, w którym polu wpisana jest jedynka. Niestety Ania nie zamierza mu pokazać tablicy, ale Bartek może wybrać dowolną komórkę i spytać Anię o jej zawartość.

Liczbę n nazwiemy *miłą*, jeśli Bartek jest w stanie odnaleźć jedynkę nagabując Anię mniej niż $3n$ razy, niezależnie od układu liczb w tablicy. Rozstrzygnąć, czy liczb miłych jest nieskończenie wiele.

16. Dana jest funkcja $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, gdzie $\mathbb{Z}_+$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich, spełniająca następujące warunki dla dowolnych $x, y, k \in \mathbb{Z}_+$:

- $f(x) \leqslant 3x$;
- $2^k \mid x + y \iff 2^k \mid f(x) + f(y)$.

Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej a istnieje dokładnie jedna taka dodatnia liczba całkowita x, że $f(x) = 3a$.

17. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz liczby $x_1, \ldots, x_n \in [1, 2]$. Udowodnić nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i+1}| \leqslant \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

przy standardowej konwencji $x_1 = x_{n+1}$ oraz rozstrzygnąć, kiedy w tej nierówności zachodzi równość.

18. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś punkty M i N odpowiednio środkami łuków ABC i BAC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że M, I, N są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $AC + BC = 3AB$.

19. Zawodnika A turnieju nazwiemy λ-mistrzem, jeśli dla każdego zawodnika C, który wygrał z A istnieje co najmniej λ różnych zawodników B takich, ze A wygrał z B, a B wygrał z C. Wykazać, że jeśli każdy zawodnik jest λ-mistrzem w n-osobowym turnieju, to $n \geqslant 4\lambda - 1$.

Uwaga: Turniej to zawody, w których każdy gra z każdym dokładnie raz. Każdy pojedynek kończy się zwycięstwem jednego z graczy.

20. Dana jest taka liczba pierwsza p, że $8 \mid p+1$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{p} \left\lfloor \frac{k^2+k}{p} \right\rfloor = \frac{2p^2+3p+7}{6}.$$

21. Centralną Magistralą Kolejową jeździ $n \geqslant 2$ pociągów, z których każdy kursuje między pewnymi dwoma miastami. Wszystkie pociągi zatrzymują się na stacji Opoczno. Udowodnić, że dla pewnych dwóch pociągów, długość części wspólnej tras, na których kursują obydwa pociągi, wynosi co najmniej $\frac{n-2}{n-1}$ długości trasy jednego z tych pociągów.

22. Karol znalazł na strychu zepsuty kalkulator, w którym działa tylko jeden przycisk (ale za to jaki!). Jeśli na wyświetlaczu znajduje się liczba x będąca sześcianem liczby całkowitej, to przycisk zamienia ją na $\sqrt[3]{x}$. W przeciwnym razie zaś przycisk zamienia wyświetlaną liczbę x na $2x+1$. Kalkulator ma też pewną ograniczoną ilość pamięci, przez co nie może wyświetlać zbyt dużych liczb (próba wyświetlenia takowej kończy się jego zawieszeniem). Początkowo na ekranie widnieje pewna liczba całkowita $A > 1$. Udowodnić, że po pewnej skończonej liczbie naciśnięć przycisku kalkulator zawiesi się.

23. Jednowymiarowy pasikonik mieszka na łące będącej prostą rzeczywistą. W tym roku przygotowuje się do zawodów w skoku w dal. Dlatego n-tego dnia pasikonik wykonuje n skoków o długości kolejno $1^k, 2^k, \ldots, n^k$, gdzie k jest pewną ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Każdy skok może być wykonany w lewo lub w prawo. Pasikonik zaczyna każdy trening w swoim domu znajdującym się w punkcie 0. Udowodnić, że dla każdego wyboru k istnieje taka liczba $M > 0$ niezależna od n, że każdego dnia pasikonik może zakończyć swój trening w odległości najwyżej M od domu.

24. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F leżące odpowiednio na odcinkach BC, CA, AB. Załóżmy, że w czworokąty $AEDF$, $BFED$, $CDFE$ można wpisać okręgi. Udowodnić, że okrąg wpisany w trójkąt ABC ma dwa razy większy promień niż okrąg wpisany w trójkąt DEF.

25. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots$, że każda dodatnia liczba całkowita występuje w nim dokładnie raz oraz dla każdego $n \geqslant 1$ liczba $a_n + a_{n+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

26. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a, b, c \in [0,1]$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{bc+\frac{1}{2}}} + \frac{b}{\sqrt{ca+\frac{1}{2}}} + \frac{c}{\sqrt{ab+\frac{1}{2}}} \leqslant 2\sqrt{2}.$$

27. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Proste AD i BC przecinają się w punkcie E, a proste AC i BD przecinają się w punkcie F. Okrąg ω jest styczny do prostych AC i BD. Odcinek PQ jest średnicą okręgu ω. Udowodnić, że jeśli punkt F jest ortocentrum trójkąta EPQ, to środek okręgu ω leży na prostej OE.

28. W pewnym kraju jest n miast oraz pewna liczba dwukierunkowych dróg, z których każda łączy pewne dwa miasta. Fifonż zauważył, że dla dowolnego podziału kraju na dwie części, liczba dróg pomiędzy dwiema częściami jest równa co najwyżej kn (gdzie k jest ustaloną dodatnią liczbą całkowitą). Udowodnić, że istnieje zbiór złożony z przynajmniej $\frac{n}{4k}$ miast, z których żadne dwa nie są połączone drogą.

29. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równe. Na bokach AB, BC, CD, DA budujemy (na zewnątrz) cztery trójkąty równoboczne o środkach odpowiednio O_1, O_2, O_3, O_4. Wykazać, że proste O_1O_3 i O_2O_4 są prostopadłe.

30. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Janusz i Grażyna grają w grę. Najpierw Janusz wybiera $n+1$ podzbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ zbioru $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ o liczności 2^{n-1} każdy, po czym Grażyna wybiera $n+1$ liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Następnie Janusz wybiera liczbę całkowitą J. Jeśli Grażyna jest w stanie wskazać takie $1 \leqslant i \leqslant n+1$, że $(J - a_i) \bmod 2^n \in A_i$, to wygrywa, a w przeciwnym razie przegrywa. Udowodnić, że Grażyna może wygrać niezależnie od wyborów Janusza.

31. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których liczby

$$1^3 + 1,\ 2^3 + 2,\ \ldots,\ n^3 + n$$

dają parami różne reszty z dzielenia przez n.

32. Dane są dwie liczby całkowite $b > a > 0$. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita n oraz wielomian postaci

$$\pm 1 \pm x \pm x^2 \pm \ldots \pm x^n$$

podzielny przez wielomian $1 + x^a + x^b$.

Zawody drużynowe

1. Rozstrzygnąć, czy dla każdego ciągu liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że spełniona jest nierówność

$$n \cdot \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) > 1.$$

2. Udowodnić, że istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b > 0$ takich, że $a + b$ jest liczbą całkowitą, zachodzi

$$\{a^2\} + \{b^2\} + \frac{C}{(a+b)^2} \leqslant 2,$$

gdzie $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ oznacza część ułamkową liczby x.

3. Danych jest 101 kart, na których są napisane kolejne liczby naturalne od 0 do 100. Wykonujemy następującą operację: tasujemy karty, następnie zdejmujemy je po kolei z talii i po zdjęciu każdej karty z wyjątkiem ostatniej piszemy na tablicy średnią arytmetyczną dotychczas zdjętych kart. Powtarzamy tę operację 100 razy, za każdym razem licząc do średniej tylko karty zdjęte po ostatnim tasowaniu. W ten sposób napisaliśmy na tablicy 10000 liczb. Udowodnić, że pewne dwie z nich są równe.

4. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ liczba pokryć dominami prostokąta $n \times (n+1)$ jest nieparzysta.

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym H jest ortocentrum, a D jest spodkiem wysokości opuszczonej na bok BC. Punkt P spełnia warunek $AP = HP$ oraz prosta AP jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Prosta PD przecina proste AB, AC odpowiednio w punktach X, Y. Udowodnić, że kąty $\sphericalangle YHX$ oraz $\sphericalangle BAC$ są równe lub dopełniają się do $180°$.

6. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz jego ortocentrum H. Punkt P leży wewnątrz trójkąta BHC, przy czym $\sphericalangle HPC = 3\sphericalangle HBC$ oraz $\sphericalangle HPB = 3\sphericalangle HCB$. Punkty X i Y są odbiciami punktu P odpowiednio względem prostych BH i CH. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AXY. Udowodnić, że $\sphericalangle BAS = \sphericalangle CAP$.

7. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że największy dzielnik pierwszy liczby $n^4 + 1$ jest większy niż $2n$.

8. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Mówimy, że liczba m jest n-bezkwadratowa jeśli nie istnieje $2n + 1$ różnych liczb pierwszych p_i takich, że $p_i^2 \mid m$. Weźmy dwie względnie pierwsze dodatnie liczby całkowite a, b. Udowodnić, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite x, y że liczba $ax^n + by^n$ jest n-bezkwadratowa.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Ciągi $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ zdefiniowane są wzorami

$$a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n},\ b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n},$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że $a_{2023!} < 5$.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$ oraz liczby rzeczywiste dodatnie a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n spełniające równania $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ oraz $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$, przy czym liczby b_1, b_2, $\ldots$, b_n są parami różne. Udowodnić nierówność

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (1 - a_j)\, b_j \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b_j} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

3. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y równość

$$f(xy + f(y))f(x) = x^2 f(y) + f(xy).$$

4. Dane są skończone zbiory $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ o następującej własności: dla dowolnego nieskończonego zbioru $X \subset \mathbb{N}$ istnieją i, j takie, że $|A_i \cap X| \geqslant 2$ i $|B_j \cap X| \geqslant 2$. Rozstrzygnąć, czy muszą istnieć k, ℓ takie, że $|A_k \cap B_\ell| \geqslant 2$.

5. W pewnym państwie znajduje się n miast połączonych drogami. Każda droga łączy dwa miasta, zaś każde dwa miasta łączy co najwyżej jedna droga. Każda droga jest patrolowana przez pewną liczbę strażników. Z powodu inflacji wprowadzono następujące ograniczenia:

- na każdej drodze jest co najwyżej czterech strażników;
- jeśli każde dwa spośród miast A, B, C są połączone drogami, to na każdej z nich jest co najwyżej trzech strażników;
- jeśli każde dwa spośród miast A, B, C, D są połączone drogami, to na każdej z nich jest co najwyżej dwóch strażników.

Udowodnić, że wszystkie drogi są patrolowane łącznie przez co najwyżej n^2 strażników.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Danych jest $2n$ niepustych podzbiorów $A_1, \ldots, A_{2n}$ zbioru $\{0, 1, 2, ..., 2n-1\}$, przy czym $|A_1| + \cdots + |A_{2n}| = \binom{2n+1}{2}$. Udowodnić, że można tak wybrać po jednej liczbie z każdego podzbioru, aby suma wybranych liczb była równa $\binom{2n}{2}$.

7. Wykazać, że istnieje taka liczba rzeczywista $c > 0$, że dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje nie więcej niż $cp^{\frac{2}{3}}$ takich dodatnich liczb całkowitych n, że $p \mid n! + 1$.

8. Niech S będzie niepustym zbiorem dodatnich liczb całkowitych o tej własności, że jeśli $a, b \in S$, to $ab + 1 \in S$. Udowodnić, że zbiór wszystkich liczb pierwszych, które nie dzielą żadnego elementu S, jest skończony.

9. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Punkty X, Y leżą na okręgu o, a cięciwa XY przecina boki AB i AC odpowiednio w D i E. Wykazać, że środki odcinków XY, BE, CD, DE leżą na okręgu.

10. Dany jest trójkąt ABC. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ABC, J jest środkiem okręgu dopisanego stycznego do boku BC, a G środkiem ciężkości trójkąta BIC. Niech BI przecina AC w E, a CI przecina AB w F. Udowodnić, że $\sphericalangle BGC + \sphericalangle EJF = 180^\circ$.

11. Dane są dwie rozłączne przystające elipsy $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ o środkach odpowiednio X i Y, przy czym duża oś $\mathcal{E}_1$ i mała oś $\mathcal{E}_2$ leżą na jednej prostej. Niech ℓ_1 i ℓ_2 będą wspólnymi stycznymi wewnętrznymi do tych elips i załóżmy, że $\ell_1 \perp \ell_2$. Niech ℓ_3 będzie jedną ze wspólnych stycznych zewnętrznych do $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$. Niech P będzie punktem przecięcia ℓ_1 i ℓ_2, Q punktem przecięcia ℓ_1 i ℓ_3, a R punktem przecięcia ℓ_2 i ℓ_3. Przy tym $XQ < XR$. Udowodnić, że trójkąty PXQ i PRY są podobne.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Orzec, czy istnieje zbiór S złożony z 2023 liczb rzeczywistych o następującej własności: dla dowolnych $a, b \in S$ (niekoniecznie różnych) istnieją takie różne $c, d \in S$, że $ab = c + d$.

2. Dane są dodatnie liczby całkowite $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz funkcja $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ spełniająca dla dowolnych liczb całkowitych k oraz $\ell \neq 0$ równość

$$\sum_{i=1}^{n} f(k + a_i \ell) = 0.$$

Udowodnić, że funkcja $f(x)$ jest stale równa 0.

3. Dany jest skończony zbiór A oraz jego podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Załóżmy, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$ suma dowolnych k z nich zawiera co najmniej $k + 1$ elementów. Udowodnić, że elementy zbioru A można pomalować na biało i czerwono w taki sposób, że każdy ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_m$ zawiera elementy obu kolorów.

4. Przy okrągłym stole siedzi $n \geqslant 3$ graczy. Na początku graczom rozdano $3n$ kart ponumerowanych liczbami od 1 do $3n$ w taki sposób, że każda osoba dostała pewne 3 karty. Co minutę każdy gracz przekazuje kartę o najmniejszym numerze (spośród trzymanych przez siebie kart) graczowi po swojej lewej, a kartę o największym numerze graczowi po prawej. Udowodnić, że niezależnie od początkowego rozdania kart każdy gracz będzie miał w ręce taki sam zestaw kart po $n - 1$ minutach, co po $2n - 1$ minutach.

5. Każde pole planszy o wymiarach 2023×2023 zostało pomalowane na jeden z dwóch kolorów w taki sposób, że pola każdego z kolorów tworzą ścieżkę (tj. dla każdego z kolorów graf, w którym wierzchołkami są pola tego koloru, a krawędzie między nimi występują wtedy i tylko wtedy gdy pola mają wspólny bok, jest ścieżką). Wykazać, że środkowe pole planszy jest jednym z końców jednej z dwóch jednokolorowych ścieżek na które podzielona została plansza.

6. Niech $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie niezerowym wielomianem o współczynnikach całkowitych stopnia mniejszego niż n. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że jeśli $W(0, 0, \ldots, 0)$ jest podzielne przez p, to istnieją takie liczby całkowite $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nie wszystkie podzielne przez p, że $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jest podzielne przez p.

Uwaga. Stopień niezerowego wielomianu n zmiennych to największa suma $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ spośród tych $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, dla których współczynnik przy jednomianie $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ jest niezerowy.

7. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony zbiór S liczb pierwszych, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej m istnieje dodatnia liczba całkowita n i $p \in S$, dla których $p^m \mid n!$, ale $p^{m+1} \nmid n!$.

8. Wykazać, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p licznik liczby

$$\left(1 + p \sum_{k=1}^{p-1} k^{-1}\right)^2 - 1 + p^2 \sum_{k=1}^{p-1} k^{-2}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego dzieli się przez p^4.

9. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty P i Q, które są swoimi obrazami inwersyjnymi względem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech punkt X będzie punktem przecięcia prostej BC z prostą łączącą punkt P z obrazem symetrycznym punktu Q względem BC. Analogicznie dla prostych CA oraz AB definiujemy odpowiednio punkty Y oraz Z. Wykazać, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

10. Sfera wpisana w ostrosłup $ABCDS$ o podstawie równoległoboku $ABCD$ jest styczna do podstawy w punkcie P, a odcinek SQ jest wysokością ostrosłupa. Wykazać, że jeśli $P \neq Q$, to prosta PQ przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych równoległoboku.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y równanie

$$f(x+2y) = 2f(x)f(y).$$

Rozwiązanie:

Prawa strona jest symetryczna ze względu na x, y, więc lewa też musi, zatem

$$f(x+2y) = f(y+2x).$$

Podstawiając $x = -\frac{1}{3}t$, $y = \frac{2}{3}t$ dostajemy

$$f(t) = f(0),$$

skąd wniosek, że f jest funkcją stałą. Wstawiając do równania $f(x) = c$ dostajemy zależność $c = 2c^2$, skąd $c = 0$ lub $c = \frac{1}{2}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcje $f(x) \equiv 0$ i $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ spełniają warunki zadania.

2. Dana jest liczba naturalna $n > 1$. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną m o następującej własności: z każdego m-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ można wybrać liczby a, b, dla których

$$n < a - b < 2n.$$

Rozwiązanie:

Wykażemy, że najmniejszą liczbą o żądanej własności jest $n+2$.

Niech M będzie dowolnym $(n+2)$-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 3n\}$. Jeśli c jest największą liczbą w tym zbiorze, to zwiększając wszystkie liczby ze zbioru M o jednakowy składnik $3n - c$ otrzymujemy $(n+2)$-elementowy zbiór M', zawarty w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ i zawierający liczbę $3n$. Zbiór M zawiera taką parę liczb a, b, że $n < a - b < 2n$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór M' zawiera taką parę. Zatem wystarczy ograniczyć uwagę do zbiorów $(n+2)$-elementowych, których największym elementem jest liczba $3n$. Niech M będzie takim zbiorem.

Jeśli zbiór M zawiera co najmniej jedną liczbę b spełniającą nierówności $n < b < 2n$, to wystarczy przyjąć $a = 3n$: różnica $a - b$ jest wtedy większa od n i mniejsza od $2n$.

Jeśli zbiór M nie zawiera takiej liczby, to wówczas zbiór $M \setminus \{3n\}$ jest podzbiorem rozłącznej sumy $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ zbiorów dwuelementowych

$$A_1 = \{1, 2n\}, \quad A_2 = \{2, 2n+1\}, \quad \ldots, \quad A_n = \{n, 3n-1\}.$$

Zbiór $M \setminus \{3n\}$ ma $n+1$ elementów, więc co najmniej jeden ze zbiorów A_k ma dwuelementową część wspólną z tym zbiorem. Oznaczając elementy zbioru A_k przez a i b mamy szukaną parę: $a - b = 2n - 1$.

Zatem liczba $n+2$ ma własność, o którą chodzi. Liczba $n+1$ tej własności już nie ma, bowiem $(n+1)$-elementowy zbiór $\{1, 2 \ldots, n\} \cup \{3n\}$ nie zawiera pary liczb a, b, dla których $n < a - b < 2n$.

3. Dana jest liczba całkowita $n > 1$ względnie pierwsza z 6. Niech S będzie zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych mniejszych od n, które są względnie pierwsze z n. Stefan obliczył sumę odwrotności elementów zbioru S i zapisał wynik w postaci ułamka nieskracalnego. Udowodnić, że licznik tego ułamka dzieli się przez n^2.

Rozwiązanie:

Sposób 1. Zauważmy, że jeśli k jest liczbą całkowitą względnie pierwszą z n, to $n - k$ też. Ponadto jeśli $0 < k < n$, to $0 < n - k < n$. Stąd k należy do S wtedy i tylko wtedy, gdy $n - k$ należy do S. Elementy zbioru S możemy więc połączyć w pary postaci $\{k, n - k\}$. Zauważmy przy tym, że nie może zdarzyć się, że $k = n - k$, gdyż wtedy liczba n byłaby równa $2k$, a z założeń zadania wiemy, że n nie jest parzysta.

Oznaczmy

$$P = \sum_{k \in S} \frac{1}{k}.$$

W obrębie każdej pary $\{k, n - k\}$ jedna z liczb jest mniejsza od $\frac{n}{2}$, a druga — większa, a ponadto jedna jest parzysta, a druga nieparzysta. Oznaczmy przez X zbiór wszystkich liczb mniejszych od $\frac{n}{2}$ należących do zbioru S, a przez Y zbiór parzystych liczb ze zbioru S. Wówczas

$$P = \sum_{k \in X} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n - k} \right) = \sum_{k \in Y} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n - k} \right).$$

Zauważmy jeszcze, że k należy do X wtedy i tylko wtedy, gdy $2k$ należy do Y. Mamy zatem następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
3P &= 4 \cdot \sum_{k \in Y} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n - k} \right) - \sum_{k \in X} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n - k} \right) = \\
&= 4 \cdot \sum_{k \in X} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{n - 2k} \right) - \sum_{k \in X} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n - k} \right) = \\
&= \sum_{k \in X} \left(\frac{4}{2k} + \frac{4}{n - 2k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{n - k} \right) = \\
&= \sum_{k \in X} \left(\frac{1}{k} + \frac{4}{n - 2k} - \frac{1}{n - k} \right) = \\
&= \sum_{k \in X} \frac{n^2}{k(n - k)(n - 2k)} = \\
&= n^2 \cdot \sum_{k \in X} \frac{1}{k(n - k)(n - 2k)}.
\end{aligned}$$

Wszystkie ułamki stojące w ostatniej sumie mają mianowniki względnie pierwsze z n. Tę sumę można więc zapisać w postaci ułamka $\frac{s}{t}$, gdzie t jest względnie pierwsze z n. W takim razie

$$P = \frac{n^2 s}{3t}.$$

Z założeń zadania n nie dzieli się przez 3, więc powyższe wyrażenie zapisane w postaci ułamka nieskracalnego ma licznik podzielny przez n^2.

Sposób 2.

Parując liczby k, $n - k$ widzimy, że

$$\sum_{k \in S} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k \in S} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n - k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k \in S} \frac{(n - k) + k}{k(n - k)} = \frac{n}{2} \sum_{k \in S} \frac{1}{k(n - k)}.$$

Wystarczy dowieść, że licznik liczby $\sum_{k \in S} \frac{1}{k(n-k)}$ zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego dzieli się przez n.

W dalszej części rozwiązania wykonujemy działania modulo n. Należy udowodnić, że ostatnia suma przystaje do 0 modulo n. Mamy

$$\sum_{k\in S}\frac{1}{k(n-k)} \equiv \sum_{k\in S} k^{-1}(n-k)^{-1} \equiv -\sum_{k\in S}(k^{-1})^2 \equiv -\sum_{k\in S} k^2,$$

przy czym ostatnie przejście wynika z tego, że branie odwrotności modulo n, tj. funkcja $S \ni k \mapsto k^{-1} \in S$, jest bijekcją ze zbioru S w siebie. Również funkcja $S \ni k \mapsto (2k \bmod n) \in S$ jest bijekcją, bo $2 \nmid n$. W takim razie

$$\sum_{k\in S} k^2 \equiv \sum_{k\in S}(2k)^2 \equiv 4\sum_{k\in S} k^2,$$

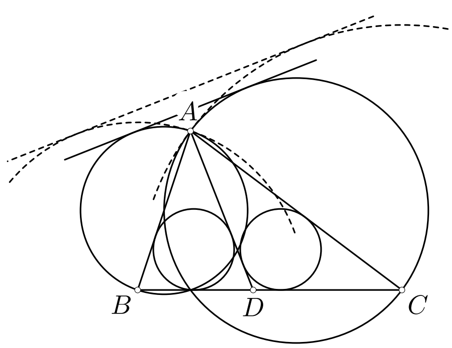
skąd $3\sum_{k\in S} k^2 \equiv 0$ i ze względu na to, że $3 \nmid n$, mamy $\sum_{k\in S} k^2 \equiv 0$.

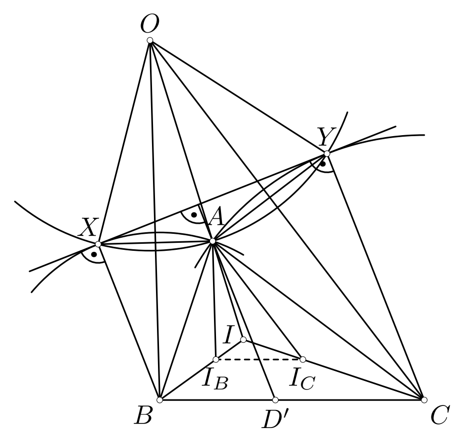
4. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D leży na boku BC, przy czym okręgi wpisane w trójkąty ABD i ACD są przystające. Oznaczmy przez Ω_B okrąg o średnicy AB, a przez Ω_C — okrąg o średnicy AC. Udowodnić, że prosta AD jest prostopadła do jednej z dwóch wspólnych stycznych do okręgów Ω_B i Ω_C.

Rozwiązanie:

Niech Γ_B i Γ_C będą obrazami odpowiednio Ω_B i Ω_C w jednokładności o środku A i skali 2. Wtedy środkami Γ_B i Γ_C są odpowiednio B i C i oba te okręgi przechodzą przez A. Wystarczy udowodnić, że prosta AD jest prostopadła do jednej ze wspólnych stycznych do okręgów Γ_B i Γ_C.

Niech ℓ będzie tą ze wspólnych stycznych do Γ_B i Γ_C, która leży bliżej punktu A. Oznaczmy punkty styczności prostej ℓ z okręgami Γ_B i Γ_C odpowiednio przez X i Y. Wówczas $BX \perp \ell$ i $CY \perp \ell$. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie AXY. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.





Z zależności między kątami środkowymi, wpisanymi i dopisanymi mamy

$$\sphericalangle XOA = 2\sphericalangle XYA = \sphericalangle YCA \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle ABX = 2\sphericalangle AXY = \sphericalangle AOY.$$

Z tych równości wynika, że $\sphericalangle OAX = \sphericalangle CAY$ i $\sphericalangle XAB = \sphericalangle YAO$. Po dodaniu stronami otrzymujemy $\sphericalangle OAB = \sphericalangle CAO$, co oznacza, że O leży na dwusiecznej kąta BAC, czyli na prostej AI.

Niech D' będzie takim punktem leżącym na BC, że $AD' \perp \ell$. Wystarczy udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty ABD' i ACD' są przystające. Oznaczmy środki tych okręgów odpowiednio przez I_B i I_C. Wystarczy sprawdzić, że $I_BI_C \parallel BC$.

Zauważmy, że prosta BO jest dwusieczną kąta ABX, bo $AB = BX$ i $OA = OX$. Mamy

$$\sphericalangle BAI_B = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD' = \frac{1}{2}\sphericalangle ABX = \sphericalangle ABO,$$

więc $I_BA \parallel BO$. Analogicznie dowodzimy, że $I_CA \parallel CO$. W takim razie z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{II_B}{IB} = \frac{IA}{IO} = \frac{II_C}{IC},$$

a z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa upragnioną równoległość $I_BI_C \parallel BC$.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite m, n. Wykazać, że

$$(2^m-1)^2 \mid 2^n-1 \iff m(2^m-1) \mid n.$$

Rozwiązanie:

Dla dowolnych k, d zachodzi kongruencja

$$2^{kn+d}-1 \equiv 2^d-1 \pmod{2^n-1},$$

więc 2^m-1 dzieli 2^n-1 wtedy i tylko wtedy, gdy m dzieli n. Zatem zarówno gdy $(2^m-1)^2 \mid 2^n-1$ jak i gdy $m(2^m-1) \mid n$, liczba n jest wielokrotnością m. Zapiszmy $n = km$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas

$$\frac{2^n-1}{2^m-1} = \frac{2^{km}-1}{2^m-1} = 1+2^m+\ldots+2^{m(k-1)}$$

oraz

$$1+2^m+\ldots+2^{m(k-1)} = 1+2^m+(2^m)^2+\ldots+(2^m)^{k-1} \equiv 1+1^2+\ldots+1^{k-1} = k \pmod{2^m-1}.$$

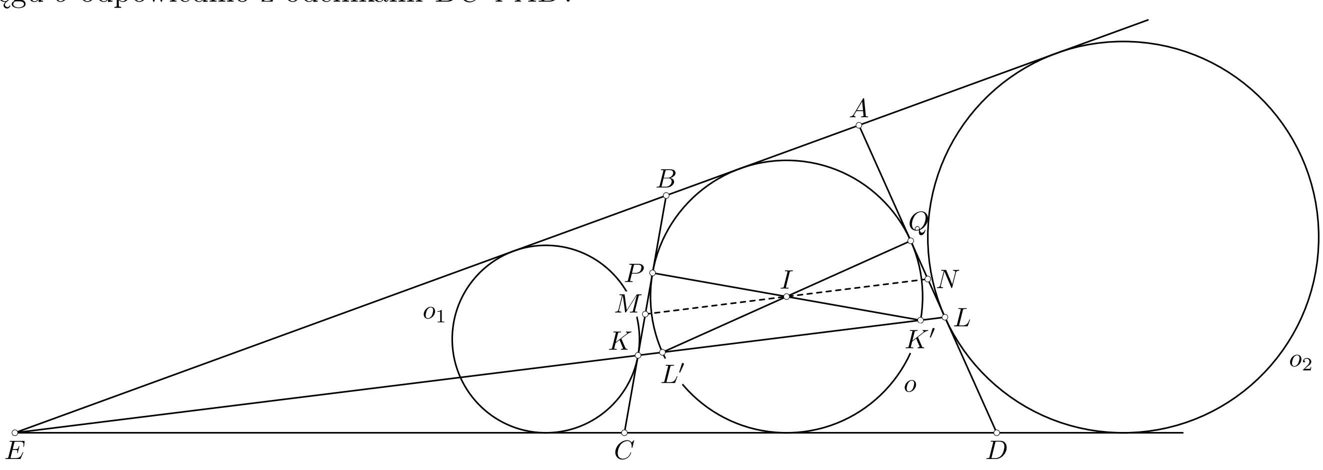
Zatem

$$(2^m-1)^2 \mid 2^n-1 \iff 2^m-1 \mid \frac{2^n-1}{2^m-1} \iff 2^m-1 \mid k \iff m(2^m-1) \mid n.$$

6. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu o. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E. Okrąg o_1 jest styczny do boku BC w punkcie K oraz do przedłużeń boków AB i CD, zaś okrąg o_2 jest styczny do boku AD w punkcie L oraz do przedłużeń boków AB i CD. Wykazać, że jeśli punkty E, K, L leżą na jednej prostej, to środki boków BC i AD oraz środek okręgu o są współliniowe.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że punkt B leży na odcinku AE, a punkt C leży na odcinku DE. Niech ponadto M i N będą środkami boków BC i AD, I środkiem okręgu o, a P i Q punktami styczności okręgu o odpowiednio z odcinkami BC i AD.



Załóżmy, że jednokładność o środku E przekształcająca okrąg o_2 na okrąg o przeprowadza punkt L na L'. Prosta AD przechodzi w tej jednokładności na styczną do okręgu o w punkcie L' równoległą do AD, a odcinek QL' jest średnicą okręgu o. Okrąg o jest wpisany w trójkąt ADE, a okrąg o_2 jest dopisany do boku AD tego trójkąta, więc N jest środkiem odcinka QL. Z twierdzenia Talesa wynika, że odcinek IN jest równoległy do prostej LL', czyli prostej EL.

Załóżmy, że jednokładność o środku E przekształcająca okrąg o_1 na okrąg o przekształca punkt K na K'. Punkt K' leży na prostej zawierającej punkty E, K, L. Prosta BC przechodzi w tej jednokładności na styczną do okręgu o w punkcie K' równoległą do BC, zaś odcinek $K'P$ jest średnicą okręgu o. Okrąg o_1 jest wpisany w trójkąt BCE, a okrąg o jest dopisany do boku BC tego trójkąta, więc $CP = BK$, skąd wniosek, że punkt M jest środkiem odcinka PK. Z twierdzenia Talesa wnioskujemy, że odcinek IM jest równoległy do prostej KK', czyli do prostej EL. To zaś oznacza, że punkty I, M, N leżą na prostej równoległej do EL.

7. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Rozważamy n liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ spełniających warunek $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$. Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\sum_{k=1}^{n} \left| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right| .$$

Rozwiązanie:

Połóżmy $x_1 = 2^{1-n}$, $x_i = 2^{i-1-n}$ dla $i = 2, 3, \ldots, n$. Prosty rachunek pozwala sprawdzić, że wówczas warunek $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$ jest spełniony oraz $x_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i = 0$ dla $k \geqslant 2$, więc

$$\sum_{k=1}^{n} \left| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right| = |x_1| = 2^{1-n}.$$

Pokażemy przez indukcję względem n, że 2^{1-n} jest szukanym minimum.

Przypadek bazowy $n = 1$ jest trywialny. W kroku indukcyjnym weźmy $n \geqslant 2$ i dowolne liczby $x_1, \ldots, x_n$ spełniające założenia zadania. Oznaczmy minimalizowane wyrażenie przez S_n. Jeśli $|x_n| = 1$, to $x_k = 0$ dla $k < n$, więc $S_n = 1 > 2^{1-n}$. Teraz załóżmy, że $|x_n| < 1$, zdefiniujmy $y_k = \frac{x_k}{1-|x_n|}$ dla $k = 1, \ldots, n-1$ i oznaczmy

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \left| y_k - \sum_{i=1}^{k-1} y_i \right| .$$

Wówczas z założenia indukcyjnego $S_{n-1} \geqslant 2^{2-n}$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $|x_n| \leqslant 2^{-1}$. Wówczas

$$S_n = (1 - |x_n|)\, S_{n-1} + \left| x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right| \geqslant 2^{-1} \cdot 2^{2-n} = 2^{1-n}.$$

2. $|x_n| > 2^{-1}$. Wówczas z nierówności trójkąta mamy

$$\left| x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right| \geqslant |x_n| - \sum_{k=1}^{n-1} |x_k| = 2|x_n| - 1.$$

Z powyższej nierówności i z założenia indukcyjnego mamy

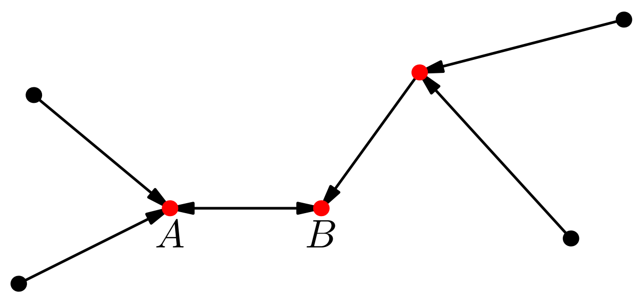
$$S_n = (1 - |x_n|)\, S_{n-1} + \left| x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right| \geqslant (1 - |x_n|)\, 2^{2-n} + 2|x_n| - 1 =$$
$$= 2^{1-n} + \left(|x_n| - 2^{-1}\right)\left(2 - 2^{2-n}\right) > 2^{1-n}.$$

W obu przypadkach uzyskaliśmy $S_n \geqslant 2^{1-n}$, co kończy dowód.

8. Danych jest $n \geqslant 2$ punktów na płaszczyźnie. Załóżmy, że dla każdego punktu X, istnieje dokładnie jeden punkt $N(X)$, który jest bliżej X niż wszystkie pozostałe punkty. Dla każdego punktu X, rysujemy z niego odcinek do $N(X)$ oraz kolorujemy $N(X)$ na czerwono. Załóżmy, że na koniec każde dwa z danych punktów są połączone łamaną. Udowodnić, że jest co najmniej $(n-2)/4$ czerwonych punktów.

Rozwiązanie:

Z każdego punktu X narysujmy krawędź skierowaną do punktu $N(X)$. Niech (A, B) będzie parą punktów o najmniejszej odległości między nimi. Wtedy $N(A) = B$ oraz $N(B) = A$, więc krawędź AB jest dwukierunkowa. Z treści zadania wynika, że graf nieskierowany utworzony z zaznaczonych krawędzi jest spójny, więc liczba zaznaczonych krawędzi jest większa lub równa $n-1$. Z drugiej strony mamy n punktów, przy czym dla punktów A i B zaznaczone krawędzie się pokrywają. Wynika stąd, że nie może się pokryć więcej zaznaczonych krawędzi, bo wtedy byłoby ich mniej niż $n-1$. W szczególności nie ma innych krawędzi dwukierunkowych niż AB.



Udowodnimy teraz następujący lemat.

Lemat. *Każdy punkt w powstałym grafie nieskierowanym ma stopień co najwyżej 5.*

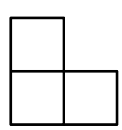
Dowód. Ustalmy punkt X i załóżmy, że ma przynajmniej sześciu sąsiadów. Wtedy istnieją tacy dwaj jego sąsiedzi Y, Z, że $\sphericalangle YXZ \leqslant 60°$. Bez straty ogólności załóżmy, że $XY \geqslant XZ$. Wówczas $N(X) \neq Y$. Gdyby $YZ > XY$, to YZ byłby najdłuższym bokiem trójkąta XYZ, więc kąt YXZ byłby większy od $60°$, sprzeczność. W takim razie $YZ \leqslant XY$ i $N(Y) \neq X$. Punkty X i Y nie są więc połączone krawędzią, sprzeczność. □

Zatem z każdego punktu różnego od A, B wychodzi jedna krawędź i wchodzą co najwyżej cztery inne. W przypadku punktów A i B mamy jedną krawędź która jednocześnie wchodzi i wychodzi oraz co najwyżej cztery inne wchodzące. Zatem łączna liczba krawędzi wchodzących wynosi najwyżej $4c + 2$, gdzie c to liczba czerwonych punktów. Ponieważ liczba krawędzi wychodzących i wchodzących jest równa, więc

$$n \leqslant 4c + 2 \implies \frac{n-2}{4} \leqslant c,$$

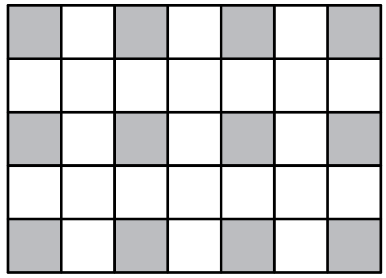
co kończy dowód.

9. Udowodnić, że planszy 5×7 nie można pokryć pewną dodatnią liczbą warstw poniższych klocków (które można obracać) w taki sposób, aby każde pole było pokryte przez tę samą liczbę klocków.



Rozwiązanie:

Załóżmy nie wprost, że pokrycie opisane w treści zadania jest możliwe i każde pole planszy zostało pokryte przez dokładnie k klocków. Kolorujemy pola w nieparzystych wierszach i nieparzystych kolumnach na czarno. Plansza składa się z 35 pól, spośród których 12 jest czarnych.



Zauważmy, że każdy klocek pokrywa co najwyżej jedno czarne pole. W takim razie liczba klocków, które pokrywają jakiekolwiek czarne pole to dokładnie $12k$. Te klocki pokrywają jakiekolwiek pole planszy dokładnie $3 \cdot 12k = 36k$ razy, skąd wniosek, że pewne pole zostało pokryte co najmniej $\frac{36}{35} \cdot k > k$ razy. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

10. Znaleźć wszystkie takie liczby pierwsze $p \geqslant 3$, że dla dowolnej liczby pierwszej $q < p$, reszta z dzielenia p przez q jest bezkwadratowa.

Uwaga: liczba jest bezkwadratowa, jeżeli nie jest podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej większej od 1.

Rozwiązanie:

Liczba $p = 3$ spełnia warunki zadania. Przyjmijmy, że $p > 3$. Jeśli $q \mid p-4$ dla jakiejś liczby pierwszej p i $q > 3$, to reszta z dzielenia p przez q wynosiłaby 4, co jest niemożliwe. W takim razie $p-4$, jako liczba nieparzysta, musi być potęgą trójki, czyli $p = 3^k + 4$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej k. Dla $k = 0$ dostajemy $p = 5$, dla $k = 1$ mamy $p = 7$, zaś dla $k = 2$ obliczamy $p = 13$, i bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie te liczby spełniają warunki zadania.

Od teraz zakładamy, że $p > 13$. Gdyby któraś z liczb $p-8$, $p-9$ miała dzielnik pierwszy $q > 9$, to ponownie reszta z dzielenia p przez q wynosiłaby 8 lub 9, co jest niemożliwe. W takim razie jedynymi dzielnikami pierwszymi tych liczb mogą być 2, 5 i 7. Ponadto $p-8$ i $p-9$ są względnie pierwsze, więc któraś z tych liczb jest potęgą liczby pierwszej. Ponieważ $2 \mid p-9$, dostajemy trzy przypadki: $p-9 = 2^m$, $p-8 = 5^m$ lub $p-8 = 7^m$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej m.

W pierwszym przypadku mamy $2^m + 5 = p - 4 = 3^k$. Dla $m < 2$ nie dostajemy rozwiązań, dla $m = 2$ mamy rozwiązanie $p = 13$, które już znaleźliśmy, zaś dla $m > 2$ mamy $3^k = 2^m + 5 \equiv 5 \pmod 8$, co daje sprzeczność, bo jedynymi możliwymi resztami potęg trójki modulo 8 są 1 i 3.

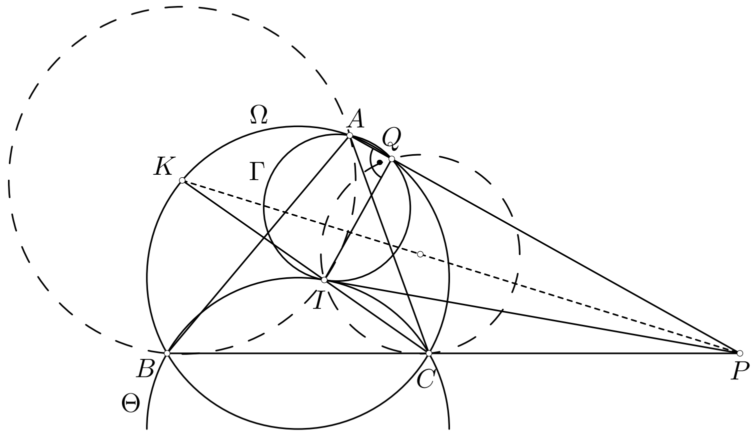
W drugim przypadku w podobny sposób otrzymujemy równanie $5^m + 4 = 3^k$. Rozważając równanie modulo 4 dostajemy, że $2 \mid k$, więc $5^m = (3^{k/2} - 2)(3^{k/2} + 2)$. Oba czynniki są potęgami piątki i różnią się o 4, więc są to 1 i 5, skąd $k = 2$, $m = 1$ i $p = 13$.

W ostatnim przypadku mamy $7^m + 4 = 3^k$, co daje sprzeczność modulo 3. W takim razie jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są 3, 5, 7, 13.

11. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB > AC$. Punkt Q leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, przy czym $\sphericalangle AQI = 90°$. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie P. Prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie w punkcie $K \neq C$. Udowodnić, że środek okręgu opisanego na trójkącie QIC leży na prostej KP.

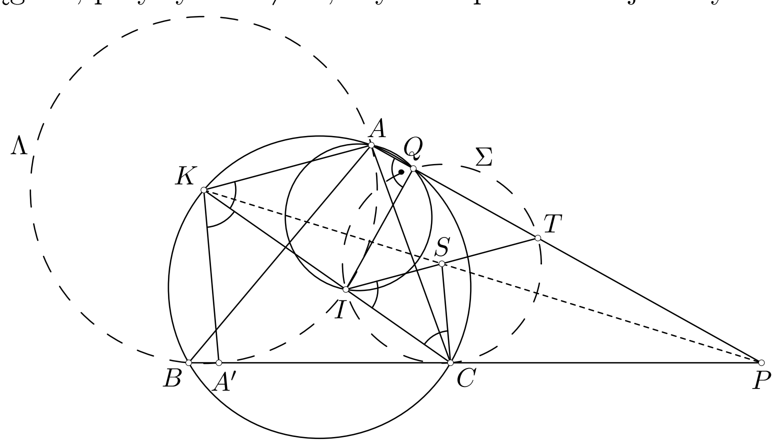
Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez Ω, okrąg o średnicy AI przez Γ, a okrąg opisany na trójkącie BIC przez Θ. Z lematu o trójliściu wiadomo, że środkiem okręgu Θ jest środek łuku BC okręgu Ω niezawierającego punktu A — leży w szczególności na prostej AI. Zauważmy, że okręgi Θ i Γ są styczne w punkcie I, gdyż środki obu okręgów leżą na prostej AI i oba przechodzą przez I. Prosta AQ jest osią potęgową okręgów Ω i Γ, a prosta BC — osią potęgową okręgów Ω i Θ. Przecięcie tych dwóch prostych, czyli punkt P, jest więc środkiem potęgowym okręgów Ω, Γ i Θ, a prosta PI jest styczna do Γ i Θ.



Rozważmy inwersję względem okręgu o środku P i promieniu $PI = \sqrt{PB \cdot PC} = \sqrt{PQ \cdot PA}$. Inwersja ta zamienia miejscami pary punktów B i C oraz A i Q, a ponadto I jest punktem stałym. W takim razie obrazem okręgu opisanego na trójkącie QIC jest okrąg opisany na trójkącie AIB. W szczególności środki tych dwóch okręgów oraz punkt P leżą na jednej prostej. Pozostaje zauważyć, że środkiem okręgu opisanego na trójkącie AIB jest punkt K na mocy lematu o trójliściu.

Sposób 2. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie AIB przez Λ. Punkt K jest środkiem Λ na mocy lematu o trójliściu. Niech A' będzie punktem symetrycznym do A względem prostej CI. Wtedy A' leży na prostej BC i na okręgu Λ; przy tym $A' \neq B$, chyba że prosta BC jest styczna do Λ w punkcie B.



Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie CIQ przez Σ, a jego środek przez S. Zauważmy, że

$$\sphericalangle ISC = 2\sphericalangle IQC = 2(\sphericalangle AQC - 90^\circ) = 2(180^\circ - \sphericalangle CKA - 90^\circ) = 2(90^\circ - \sphericalangle CKA),$$

skąd wniosek, że $\sphericalangle SCI = \sphericalangle CIS = \sphericalangle CKA = \sphericalangle A'KC$, więc $AK \parallel SI$ i $SC \parallel KA'$.

Niech $T \neq Q$ będzie drugim punktem przecięcia prostej AP z okręgiem Σ. Odcinek IT jest średnicą Σ, bo $\sphericalangle IQT = 90^\circ$. Zatem T jest odbiciem I względem S i w szczególności $ST \parallel KA$.

Z powyższych obserwacji wynika, że jednokładność przekształcająca okrąg Λ na okrąg Σ przeprowadza punkt A' na C, K na S i A na T. Środek tej jednokładności leży więc na prostych $A'C$, KS i AT. Innymi słowy: P leży na prostej KS.

12. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y))$$

Rozwiązanie:

Na początek rozważmy przypadek, gdy f jest funkcją stałą. Oznaczając jej jedyną wartość przez s i podstawiając $x = 0$ otrzymujemy związek $s = 2s$, skąd $s = 0$. Funkcja zerowa oczywiście spełnia zadane równanie.

Od teraz zakładamy, że f nie jest stała. Oznaczmy $c = f(0)$. Podstawiając $x = f(y)$ uzyskujemy

$$c = f(0) = 2f(f(y)) + f(y)^2.$$

Dla y będących wartościami funkcji f mamy zatem

$$f(y) = \frac{c - y^2}{2}$$

Rozważmy dowolne liczby rzeczywiste x', y'. Oznaczmy $x = f(x')$, $y = f(y')$ i $z = x - y$. Liczby x i y są wartościami funkcji f, więc

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x-y) = f(x - f(y')) = f(x) + xf(y') + f(f(y')) = f(x) + xy + f(y) = \\ &= \frac{c-x^2}{2} + xy + \frac{c-y^2}{2} = c - \frac{(x-y)^2}{2} = c - \frac{z^2}{2}. \end{aligned}$$

Udowodnimy teraz, że każda liczba rzeczywista z ma przedstawienie w postaci różnicy wartości funkcji f. Ustalmy a takie, że $f(a) \neq 0$. Wtedy dla dowolnego b mamy

$$f(b - f(a)) - f(b) = bf(a) + f(f(a)).$$

Dobierzmy b tak, by prawa strona powyższej równości była równa z, tzn. połóżmy $b = (z - f(f(a)))/f(a)$. Otrzymaliśmy w ten sposób przedstawienie z w postaci $f(x) - f(y)$ dla $x = f(b - f(a))$ i $y = f(b)$. W takim razie $f(z) = c - \frac{z^2}{2}$ dla dowolnego z. Skądinąd wiadomo, że dla z będących wartościami funkcji f mamy $f(z) = \frac{c-z^2}{2}$. To prowadzi do wniosku, że $c = 0$. Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcja $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ spełnia równanie z treści zadania.

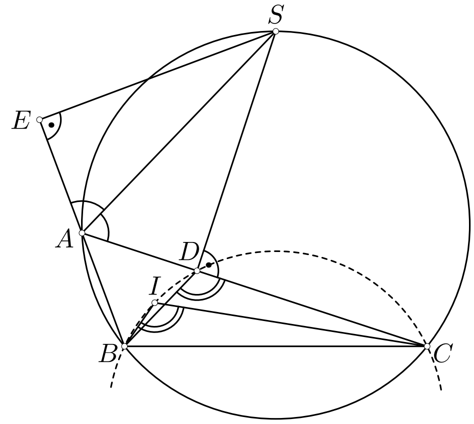
13. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = 3AB$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ABC. Niech D będzie rzutem na AC środka łuku BAC okręgu opisanego na ABC. Dowieść, że D leży na okręgu opisanym na trójkącie BIC.

Rozwiązanie:

Oznaczmy środek łuku BAC okręgu opisanego na trójkącie ABC przez S. Niech E będzie odbiciem punktu D względem prostej AS. Wtedy trójkąty ADS i AES są przystające, a ponieważ AS jest dwusieczną kąta zewnętrznego BAC, więc E leży na prostej AB. Również trójkąty SDC i SEB są przystające, bo oba są prostokątne, mają równe przeciwprostokątne SC i SB oraz równe przyprostokątne SD i SE. Wobec tego $DC = BE = AB + AE = AB + AD$. Mamy $AB + 2AD = AD + DC = AC = 3AB$, skąd $AB = AD$. Zauważmy, że $\sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ oraz

$$\sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle ADB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC,$$

więc $\sphericalangle BIC = \sphericalangle BDC$, skąd wynika teza.



14. Dane są unormowane i niestałe wielomiany $P_1, \ldots, P_n$ o współczynnikach rzeczywistych. Dla każdej liczby rzeczywistej y niech S_y oznacza zbiór takich liczb rzeczywistych x, że $P_i(x) = y$ dla pewnego i. Udowodnić, że jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych y_1, y_2 zbiory S_{y_1} i S_{y_2} mają tyle samo elementów, to wszystkie wielomiany $P_1, \ldots, P_n$ są tego samego stopnia.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy proste własności wielomianów. Nie tracąc ogólności załóżmy, że każde dwa z wielomianów $P_1, \ldots, P_n$ są różne. Dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $\lim_{x\to\infty} P_i(x) = \infty$. Ponadto $\lim_{x\to-\infty} P_i(x) = -\infty$ gdy $2 \nmid \deg P_i$ i $\lim_{x\to-\infty} P_i(x) = \infty$ gdy P_i jest niestały i $2 \mid \deg P_i$. Dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$ ustalmy taką liczbę $M_i > 0$, że wielomian P_i jest monotoniczny na przedziałach $(-\infty, -M_i)$ i (M_i, ∞) (rosnący na obu przedziałach jeśli $2 \nmid \deg P_i$, a jeśli $2 \mid \deg P_i$, to malejący na pierwszym i rosnący na drugim). Ponadto dla $i \neq j$ istnieje tylko skończenie wiele argumentów x takich, że $P_i(x) = P_j(x)$, gdyż każdy taki x jest pierwiastkiem niestałego wielomianu $P_i - P_j$. Ustalmy liczbę y większą od $M_1, M_2, \ldots, M_n$ i od wartości bezwzględnych pierwiastków wielomianów $P_i - P_j$ dla $i \neq j$. Z powyższych faktów wynika, że dla dowolnego i takiego, że $2 \nmid \deg P_i$ wielomian P_i przyjmuje wartości y i $-y$ dokładnie raz, a dla dowolnego i takiego, że $2 \mid \deg P_i$ wartość y jest przyjmowana dokładnie dwa razy, a wartość $-y$ ani razu. Poza tym z wyboru y wynika, że wartość y nie może być osiągana przez różne wielomiany dla takiego samego argumentu. Oznaczmy przez p liczbę takich indeksów i, że $2 \mid \deg P_i$. Z powyższej dyskusji wynika, że $|S_y| = 2p + (n-p) = n+p$ oraz $|S_{-y}| = n - p$. Z warunków zadania zbiory S_y i S_{-y} są równoliczne, więc $p = 0$. Zatem wszystkie wielomiany $P_1, P_2, \ldots, P_n$ są nieparzystego stopnia, a liczność zbioru S_t wynosi n dla dowolnego t.

Wykażemy teraz mocniejsze niż teza zadania stwierdzenie, że wykresy każdych dwóch spośród wielomianów $P_1, \ldots, P_n$ są rozłączne. Załóżmy nie wprost, że dla pewnych $i \neq j$ i x, y zachodzi równość $P_i(x) = P_j(x) = y$. Z warunku $|S_y| = n$ wynika, że któryś z rozważanych wielomianów, powiedzmy P_k, przyjmuje wartość y więcej niż raz. Wykażemy, że w takim razie zbiór takich y, że P_k przyjmuje wartość y więcej niż raz, zawiera przedział dodatniej długości. Istotnie, powiedzmy, że $P_k(a) = s = P_k(b)$ dla pewnych $a < b$ i s. Ponieważ P_k jest niestałym wielomianem, więc istnieje argument $c \in (a, b)$ taki, że $P_k(c) \neq s$. Przyjmując bez straty ogólności $P_k(c) > s$, z własności Darboux wynika, że P_k przyjmuje dowolną wartość z przedziału $(s, P_k(c))$ co najmniej dwa razy: co najmniej raz na przedziale (a, c) oraz co najmniej raz na przedziale (c, b).

Ponieważ wykresy każdych dwóch różnych wielomianów przecinają się tylko w skończenie wielu punktach, to istnieje $y \in (s, t)$ taki, że żadne dwa z rozważanych wielomianów nie przyjmują wartości y w tym samym punkcie. Ponieważ nasze wielomiany są nieparzystego stopnia, to każdy przyjmuje wartość y co najmniej raz, a P_k przyjmuje ją więcej niż raz. Stąd $|S_y| > n$, co daje sprzeczność.

15. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Ania wpisała liczby od 1 do n^2 w pola tablicy $n \times n$, tak że i oraz $i + 1$ są w sąsiadujących komórkach dla $i = 1, 2, \ldots, n^2 - 1$. Bartek chciałby dowiedzieć się, w którym polu wpisana jest jedynka. Niestety Ania nie zamierza mu pokazać tablicy, ale Bartek może wybrać dowolną komórkę i spytać Anię o jej zawartość.

Liczbę n nazwiemy *miłą*, jeśli Bartek jest w stanie odnaleźć jedynkę nagabując Anię mniej niż $3n$ razy, niezależnie od układu liczb w tablicy. Rozstrzygnąć, czy liczb miłych jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie:

Twierdzimy, że wszystkie liczby postaci $n = 2^k - 1$ dla $k \geqslant 1$ są miłe. Dowodzimy indukcyjnie. Dla $k = 1$ dostajemy $n = 1$, będące oczywiście miłą liczbą.

Teraz przyjmijmy, że liczba n jest miła. Dowiedziemy, że $2n + 1$ również jest miła. Zauważmy, że idąc po kolei od liczby 1 do liczby n^2, odpowiednie pola tworzą ścieżkę na szachownicy. Niech Bartek zapyta o wszystkie pola w środkowej kolumnie (jest ich $2n + 1$). Niech m będzie najmniejszą wartością, jaką tam znajdzie. Odpowiada ona pierwszemu momentowi, gdy ścieżka wejdzie na środkową kolumnę.

Jeśli Bartek znalazł liczbę 1, to nie musimy robić nic więcej, więc przyjmijmy że to się nie stało. Niech sprawdzi jedno pole na lewo od komórki zawierającej m. Jeśli to pole zawiera liczbę mniejszą niż m, to ścieżka przyszła do m z lewej połowy planszy, i nie przecięła środkowej kolumny planszy w żadnym z wcześniejszych momentów. Tak więc również pole zawierające liczbę 1 musi znajdować się na lewej połowie planszy.

Podobnie, jeśli pole na lewo od m zawiera liczbę większą niż m, to 1 musi znajdować się na prawej połowie planszy. W ten sposób Bartek wykorzystał $2n+2$ zapytań, i może ograniczyć się do połowy planszy. W podobny sposób, pytając o odpowiednią połowę środkowego rzędu i jedno dodatkowe pole, może ograniczyć się do kwadratu $n \times n$ wykorzystując jeszcze $n+1$ ruchów, a więc $3n+3$ ruchy łącznie. W tymże kwadracie, z założenia indukcyjnego, będzie w stanie zlokalizować jedynkę w $3n$ krokach, zatem łącznie wykona $3n+3+3n = 3(2n+1)$ zapytań, co kończy dowód.

16. Dana jest funkcja $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, gdzie $\mathbb{Z}_+$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich, spełniająca następujące warunki dla dowolnych $x, y, k \in \mathbb{Z}_+$:

- $f(x) \leqslant 3x$;
- $2^k \mid x+y \iff 2^k \mid f(x)+f(y)$.

Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej a istnieje dokładnie jedna taka dodatnia liczba całkowita x, że $f(x) = 3a$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $v_2(n)$ największą taką nieujemną liczbę całkowitą k, że $2^k \mid n$. Drugi warunek z treści zadania orzeka, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}_+$ mamy $v_2(x+y) = v_2(f(x)+f(y))$.

Zaczniemy od wykazania różnowartościowości f. Przypuśćmy przeciwnie, że dla pewnych dodatnich liczb całkowitych $x \neq y$ mamy $f(x) = f(y)$. Wówczas istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $v_2(x+n) \neq v_2(y+n)$ (taką liczbą jest na przykład $n = 2^\ell - \max(x,y)$ gdzie ℓ jest tak dużą liczbą, że $2^\ell > \max(x,y)$) i wówczas

$$v_2(x+n) = v_2(f(x)+f(n)) = v_2(f(y)+f(n)) = v_2(y+n),$$

sprzeczność. Wobec tego wystarczy wykazać, że dla dowolnego a istnieje taki argument x, że $f(x) = 3a$. Poczynimy kilka pomocnych spostrzeżeń.

Spostrzeżenie 1. *$v_2(f(x)) = v_2(x)$ dla wszystkich x.*

Dowód. Biorąc $x = y$ w drugim warunku dostajemy $v_2(x) = v_2(2x) - 1 = v_2(2f(x)) - 1 = v_2(f(x))$. □

Spostrzeżenie 2. *Jeśli $x+y = 2^k$, to albo $f(x)+f(y) = 2^k$, albo $f(x) = 3x$ i $f(y) = 3y$.*

Dowód. Skoro $v_2(x+y) = v_2(f(x)+f(y))$, to $f(x)+f(y) = n \cdot 2^k$ dla pewnej liczby nieparzystej n. Wobec tego, że $f(x) \leqslant 3x$ i $f(y) \leqslant 3y$, mamy $f(x)+f(y) \leqslant 3 \cdot 2^k$, więc $n = 1$ lub $n = 3$. W pierwszym przypadku dostajemy $f(x)+f(y) = 2^k$, w drugim musi być $f(x) = 3x$ i $f(y) = 3y$, inaczej nierówność $f(x)+f(y) \leqslant 3 \cdot 2^k$ byłaby ostra. □

Spostrzeżenie 3. *f wyznacza dobrze określoną funkcję modulo 2^k, to znaczy jeśli $x \equiv y \pmod{2^k}$, to $f(x) \equiv f(y) \pmod{2^k}$.*

Dowód. Weźmy z taki, że $x+z \equiv y+z \equiv 0 \pmod{2^k}$. Wówczas $f(x)+f(z) \equiv f(y)+f(z) \equiv 0 \pmod{2^k}$, więc $f(x) \equiv f(y) \equiv -f(z) \pmod{2^k}$. □

Spostrzeżenie 4. *f wyznacza bijekcję modulo 2^k.*

Dowód. Przypuśćmy, że x i y są takie, że $f(x) \equiv f(y) \pmod{2^k}$. Weźmy z taki, że $x+z \equiv 0 \pmod{2^k}$, wówczas $0 \equiv x+z \equiv f(x)+f(z) \equiv f(y)+f(z) \equiv y+z \pmod{2^k}$, co daje $x \equiv y \pmod{2^k}$. □

Możemy teraz przystąpić do dalszej części rozwiązania. Ustalmy dowolną dodatnią liczbę całkowitą a. Niech k będzie takim wykładnikiem, że $2^{k-1} < 3a < 2^k$. Na mocy spostrzeżenia (4) istnieje taka liczba $x < 2^k$, że $f(x) \equiv 3a \pmod{2^k}$ (nierówność jest ostra dzięki spostrzeżeniu (1)). Wykażemy, że $f(x) = 3a$. Przypuśćmy przeciwnie, wówczas skoro $f(x) > 0$ i $f(x)$ różni się od swojej reszty modulo 2^k, to $f(x) > 2^k$. Wówczas również $f(x) + f(2^k - x) > 2^k$, więc na mocy spostrzeżenia (2) zachodzi równość $f(x) = 3x$. Otrzymujemy więc $3x \equiv 3a \pmod{2^k}$, czyli $x \equiv a \pmod{2^k}$. Ale skoro $x, a < 2^k$, to $x = a$, więc jednak $f(x) = 3x = 3a$.

17. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz liczby $x_1, \ldots, x_n \in [1, 2]$. Udowodnić nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i+1}| \leqslant \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

przy standardowej konwencji $x_1 = x_{n+1}$ oraz rozstrzygnąć, kiedy w tej nierówności zachodzi równość.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jeśli $x, y \in [1, 2]$, to $|x - y| \leqslant \frac{1}{3}(x + y)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x \leqslant y$. Nierówność pomocnicza jest równoważna nierównościom:

$$y - x \leqslant \frac{1}{3}(x + y)$$
$$\frac{2}{3}y \leqslant \frac{4}{3}x,$$

a ta ostatnia jest prawdziwa, bowiem

$$\frac{2}{3}y \leqslant \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \leqslant \frac{4}{3}x.$$

Zauważmy przy tym, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb x, y jest równa 1, a druga 2.

Zapisując nierówność pomocniczą dla par $(x, y) = (x_i, x_{i+1})$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$ i sumując otrzymane nierówności dostajemy tezę. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy równość zbiorów $\{x_i, x_{i+1}\} = \{1, 2\}$. Gdy n jest parzyste, to otrzymujemy dwie n-tki realizujące równość: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 2, \ldots, 1, 2), (2, 1, \ldots, 2, 1)$. Jeśli zaś n jest nieparzyste, to nierówność zawsze jest ostra — warunki równości wymuszają jednocześnie $x_1 = x_n$ i $\{x_1, x_n\} = \{1, 2\}$.

18. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś punkty M i N odpowiednio środkami łuków ABC i BAC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że M, I, N są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $AC + BC = 3AB$.

Rozwiązanie:

Niech K i L będą środkami odpowiednio łuku AB niezawierającego punktu C i łuku BC niezawierającego punktu A. Zauważmy, że

$$\sphericalangle NCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BNC = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

Wobec tego

$$\sphericalangle NMK = \sphericalangle NCK = \sphericalangle NCB - \sphericalangle KCB = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA = \sphericalangle IBA.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle KNM = \sphericalangle BAI$. Zatem $\triangle KMN \sim \triangle IBA$ na mocy cechy podobieństwa kąt-kąt. Zauważmy też, że

$$\sphericalangle(NM, KC) = \sphericalangle MNC + \sphericalangle NCK = \sphericalangle MAC + \frac{1}{2}\sphericalangle CBA = 90^\circ,$$

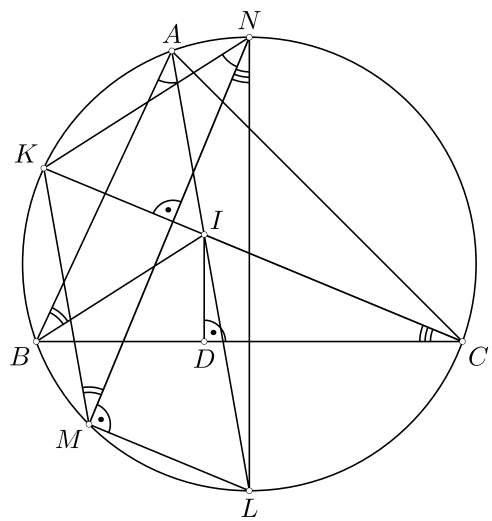
więc $MN \perp KI$. Warunek współliniowości punktów M, I, N jest zatem równoważny temu, że KI jest wysokością trójkąta KMN. To jest równoważne równości

$$\frac{r}{AB} = \frac{IK}{MN}, \qquad (\heartsuit)$$

gdzie r jest długością promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Czworokąt $KILM$ jest równoległobokiem, bo $KI \perp MN \perp LM$, czyli $KI \parallel LM$ oraz $\sphericalangle LMK = 90^\circ + \sphericalangle NMK = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ILM = \sphericalangle ACM = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle CMA = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle CBA$, skąd $\sphericalangle LMK + \sphericalangle ILM = 180^\circ$, więc $KM \parallel IL$. W takim razie $IK = LM$, więc

$$\frac{IK}{MN} = \frac{LM}{MN} = \cot\frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \frac{r}{DC},$$

gdzie D jest rzutem punktu I na BC. Stąd równość $(\heartsuit)$ jest równoważna równości $AB = DC$. Ponieważ $DC = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$, więc równość $AB = DC$ jest równoważna równości $3AB = AC + BC$, co kończy dowód.



19. Zawodnika A turnieju nazwiemy λ-mistrzem, jeśli dla każdego zawodnika C, który wygrał z A istnieje co najmniej λ różnych zawodników B takich, ze A wygrał z B, a B wygrał z C. Wykazać, że jeśli każdy zawodnik jest λ-mistrzem w n-osobowym turnieju, to $n \geqslant 4\lambda - 1$.

Uwaga: Turniej to zawody, w których każdy gra z każdym dokładnie raz. Każdy pojedynek kończy się zwycięstwem jednego z graczy.

Rozwiązanie:

Trójelementowy zbiór zawodników turnieju nazwiemy *trójką remisową* jeśli można ich oznaczyć przez A, B, C w taki sposób, że A wygrał z B, B wygrał z C oraz C wygrał z A.

Przypuśćmy, że w pewnym turnieju n-osobowym każdy jest λ-mistrzem i oznaczmy przez t łączną liczbę wszystkich trójek remisowych w tym turnieju. Skoro każdy mecz jest zawarty w co najmniej λ różnych trójkach remisowych, a wszystkich meczów jest $\binom{n}{2}$, to

$$3t \geqslant \lambda\binom{n}{2}, \quad \text{czyli} \quad \lambda \leqslant \frac{6t}{n(n-1)}.$$

Pozostaje oszacować liczbę trójek remisowych w turnieju. Policzymy dwoma sposobami liczbę uporządkowanych trójek różnych zawodników (A, B, C) o tej własności, że A wygrał z B oraz B wygrał z C. Z jednej strony każda trójka remisowa odpowiada trzem takim trójkom, a każda trójka nieremisowa — jednej, co oznacza, że łączna liczba rozważanych trójek jest równa

$$\binom{n}{3} + 2t.$$

Z drugiej strony dla każdego zawodnika B, który wygrał dokładnie k meczów jest k możliwych wyborów C oraz $n-1-k$ możliwych wyborów A, co daje $k(n-1-k) \leqslant \left(\frac{1}{2}(n-1)\right)^2$ trójek. Wobec tego

$$\binom{n}{3} + 2t \leqslant \frac{n(n-1)^2}{4}, \quad \text{czyli} \quad t \leqslant \frac{(n-1)n(n+1)}{24}.$$

Ostatecznie mamy więc

$$\lambda \leqslant \frac{6t}{n(n-1)} \leqslant \frac{n+1}{4},$$

czyli $n \geqslant 4\lambda - 1$, co było do udowodnienia.

20. Dana jest taka liczba pierwsza p, że $8 \mid p+1$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{p} \left\lfloor \frac{k^2+k}{p} \right\rfloor = \frac{2p^2+3p+7}{6}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$k^2 + k \bmod p = k^2 + k - p\left\lfloor \frac{k^2+k}{p} \right\rfloor. \tag{1}$$

W związku z tym wystarczy udowodnić, że

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p}(k^2+k \bmod p) &= \sum_{k=1}^{p}(k^2+k) - p \cdot \sum_{k=1}^{p} \left\lfloor \frac{k^2+k}{p} \right\rfloor \\
&= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + \frac{p(p+1)}{2} - \frac{p(2p^2+3p+7)}{6} \\
&= \frac{p(p-1)}{2}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Oznaczmy teraz przez $\mathbb{K}$ wszystkie reszty kwadratowe modulo p w zbiorze $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ czyli takie reszty r dla których istnieje pewna niezerowa reszta a, że $r \equiv a^2 \pmod{p}$. Wiadomo, że każda niezerowa reszta kwadratowa jest kwadratem dokładnie dwóch różnych reszt: a oraz $p-a$. Nie może być więcej takich reszt, bo jeśli $b^2 \equiv a^2 \pmod{p}$ to $p \mid b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ czyli $b = a$ lub $b = p - a$ (a i b to reszty modulo p).

Zauważmy teraz, że

$$k^2 + k \bmod p = R\left(k^2 + k + \frac{p+1}{4} \bmod p\right) - \frac{p+1}{4} \tag{3}$$

gdzie $R(r) = r$ jeśli $r > p/4$ oraz $R(r) = r + p$ jeśli $r < p/4$. Ponadto $k^2 + k + \frac{p+1}{4} = \left(k + \frac{p+1}{2}\right)^2$.

$$\left(1 + \frac{p+1}{2}\right)^2 \bmod p, \left(2 + \frac{p+1}{2}\right)^2 \bmod p, \left(3 + \frac{p+1}{2}\right)^2 \bmod p, \ldots, \left(p + \frac{p+1}{2}\right)^2 \bmod p$$

jest permutacją ciągu

$$0^2 \bmod p, 1^2 \bmod p, 2^2 \bmod p, \ldots, (p-1)^2 \bmod p$$

Wynika stąd, że

$$\sum_{k=1}^{p}(k^2+k \bmod p) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(R(k^2 \bmod p) - \frac{p+1}{4}\right) = R(0) + 2\sum_{r \in \mathbb{K}} R(r) - \frac{p(p+1)}{4}. \tag{4}$$

Dwójka przed sumą w ostatnim wyrażeniu bierze się z tego, że każda niezerowa reszta kwadratowa jest kwadratem dokładnie dwóch reszt. Oczywiście $R(0) = p$. Ponadto widzimy, że

$$\sum_{r\in\mathbb{K}} R(r) = \sum_{r\in\mathbb{K}} r + p \cdot |\mathbb{K} \cap (0, p/4)|. \tag{5}$$

Wstawiając to do (4) dostajemy

$$\sum_{k=1}^{p} (k^2 + k \bmod p) = p + 2\sum_{r\in\mathbb{K}} r + 2p \cdot |\mathbb{K} \cap (0, p/4)| - \frac{p(p+1)}{4}. \tag{6}$$

Zatem do rozwiązania zadania potrzebujemy wyznaczyć tylko sumę wszystkich elementów w $\mathbb{K}$ oraz liczność zbioru $\mathbb{K} \cap (0, p/4)$.

Ponieważ p jest postaci $8k+7$, to $2 \in \mathbb{K}$ oraz dla dowolnego $0 < r < p$ dokładnie jedna z reszt $r, p-r$ należy do $\mathbb{K}$. Ta druga własność wynika stąd, że niezerowych reszt kwadratowych jest dokładnie $(p-1)/2$ oraz w każdej parze $r, p-r$ *co najwyżej* jedna z nich jest resztą kwadratową, gdyż w przeciwnym razie, dla pewnych niezerowych reszt x, y zachodziłoby $p \mid x^2 + y^2$, co może zachodzić tylko dla $p \equiv 1 \pmod 4$.

Skoro $2 \in \mathbb{K}$, to mnożenie przez 2 modulo p jest permutacją $\mathbb{K}$. Zauważmy, że po przemnożeniu przez 2 zbiór $(\mathbb{K} \cap (0, p/4)) \cup (\mathbb{K} \cap (p/2, 3p/4))$ przejdzie na zbiór $\mathbb{K} \cap (0, p/2)$, przy czym jest to bijekcja między tymi zbiorami. Istotnie, reszty z przedziału $(0, p/4)$ przechodzą bijektywnie przy mnożeniu przez 2 na parzyste reszty z przedziału $(0, p/2)$. Z kolei reszty z przedziału $(p/2, 3p/4)$ przechodzą bijektywnie przy mnożeniu przez 2 na nieparzyste reszty z przedziału $(0, p/2)$. Stąd wynika równoliczność zbiorów $(\mathbb{K} \cap (0, p/4)) \cup (\mathbb{K} \cap (p/2, 3p/4))$ oraz $\mathbb{K} \cap (0, p/2)$, a więc w szczególności

$$|\mathbb{K} \cap (p/4, p/2)| = |\mathbb{K} \cap (p/2, 3p/4)|. \tag{7}$$

Teraz zauważamy, że zbiór reszt z przedziału $(p/4, 3p/4)$ czyli $\{(p+1)/4, \ldots, (3p-1)/4\}$ można podzielić na $(p+1)/4$ rozłącznych par postaci $\{r, p-r\}$. Ponieważ w każdej takiej parze dokładnie jedna liczba należy do $\mathbb{K}$, to

$$|\mathbb{K} \cap (p/4, 3p/4)| = (p+1)/4. \tag{8}$$

Łącząc (7) i (8) otrzymujemy

$$|\mathbb{K} \cap (p/4, p/2)| = (p+1)/8. \tag{9}$$

Stąd

$$|\mathbb{K} \cap (0, p/4)| = |\mathbb{K} \cap (0, p/2)| - (p+1)/8. \tag{10}$$

Oznaczmy teraz $\mathbb{L} = \mathbb{K} \cap (0, p/2)$. Zauważmy, że $2\mathbb{L}$, czyli zbiór elementów z $\mathbb{L}$ przemnożonych przez 2, to po prostu zbiór wszystkich parzystych reszt kwadratowych. Zauważmy ponadto że każda para postaci $\{r, p-r\}$ dla $0 < r < p$ ma dokładnie jeden element z przedziału $(0, p/2)$ oraz dokładnie jeden element parzysty. Skoro każda taka para zawiera dodatkowo dokładnie jeden element z $\mathbb{K}$ to możemy zapisać

$$\begin{aligned}
\sum_{r\in\mathbb{K}} r &= \sum_{\substack{r\in(0,p/2)\\ r\in\mathbb{K}}} r + \sum_{\substack{r\in(0,p/2)\\ r\notin\mathbb{K}}} (p-r) \\
&= \sum_{\substack{r\in(0,p/2)\\ r\in\mathbb{K}}} (2r-p) + \sum_{r\in(0,p/2)} (p-r) \\
&= 2\sum_{r\in\mathbb{L}} r - p|\mathbb{L}| + \frac{p(p-1)}{2} - \frac{p^2-1}{8}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Podobnie możemy rozważać tylko reszty parzyste i zbiór $2\mathbb{L}$, zapisując

$$\begin{aligned}\sum_{r\in\mathbb{K}} r &= \sum_{\substack{2|r\\ r\in\mathbb{K}}} r + \sum_{\substack{2|r\\ r\notin\mathbb{K}}} (p-r)\\ &= \sum_{\substack{2|r\\ r\in\mathbb{K}}} (2r-p) + \sum_{2|r} (p-r)\\ &= 2\sum_{r\in 2\mathbb{L}} r - p|2\mathbb{L}| + \frac{p(p-1)}{2} - \frac{p^2-1}{4}. \end{aligned} \tag{12}$$

Oczywiście

$$\sum_{r\in 2\mathbb{L}} r = 2\sum_{r\in\mathbb{L}} r. \tag{13}$$

Przenosząc wyrazy na drugą stronę w (11) i (12) oraz korzystając z równości $|\mathbb{L}| = |2\mathbb{L}|$ dostajemy

$$\sum_{r\in\mathbb{K}} r + p|\mathbb{L}| - \frac{p(p-1)}{2} = 2\sum_{r\in\mathbb{L}} r - \frac{p^2-1}{8} = 4\sum_{r\in\mathbb{L}} r - \frac{p^2-1}{4}. \tag{14}$$

Skoro ostatnie wyrażenie w powyższej równości jest dwukrotnością środkowego, to wszystkie muszą być równe zero. W szczególności

$$\sum_{r\in\mathbb{K}} r + p|\mathbb{L}| = \frac{p(p-1)}{2} \tag{15}$$

oraz

$$\sum_{r\in\mathbb{K}} r + p\cdot|\mathbb{K}\cap(0,p/4)| = \frac{p(p-1)}{2} - \frac{p(p+1)}{8}. \tag{16}$$

Wstawiając to do (6) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{p} (k^2 + k \bmod p) = p - \frac{p(p+1)}{4} + p(p-1) - \frac{p(p+1)}{4} = \frac{p(p-1)}{2}, \tag{17}$$

co jak wskazano wcześniej jest równoważne tezie. To kończy dowód.

21. Centralną Magistralą Kolejową jeździ $n \geqslant 2$ pociągów, z których każdy kursuje między pewnymi dwoma miastami. Wszystkie pociągi zatrzymują się na stacji Opoczno. Udowodnić, że dla pewnych dwóch pociągów, długość części wspólnej tras, na których kursują obydwa pociągi, wynosi co najmniej $\frac{n-2}{n-1}$ długości trasy jednego z tych pociągów.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oś liczbową na prostej z zadania (tj. Centralnej Magistrali Kolejowej). Oznaczmy odcinki tras pociągów jako $I_1, I_2, \ldots, I_n$ i niech i-ty odcinek ma końce w punktach a_i oraz b_i, przy czym $a_i < b_i$. Możemy założyć, że odcinki zostały ponumerowane w taki sposób, aby $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Zauważmy, że jeśli istnieją takie indeksy $i < j$, że $b_i \geqslant b_j$, to odcinek I_j jest zawarty w odcinku I_i, a stąd para odcinków (I_j, I_i) spełnia warunki zadania.

Załóżmy teraz, że $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Ponadto $a_n \leqslant b_1$, ponieważ wszystkie rozważane odcinki mają punkt wspólny. Rozważmy zbiór różnic

$$R = \{a_{i+1} - a_i \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{b_{i+1} - b_i \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Niech $r \in R$ będzie minimalną liczbą w zbiorze R. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $r = a_{k+1} - a_k$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Pokażemy, że para odcinków (I_k, I_{k+1}) spełnia warunki zadania. Zauważmy, że długość odcinka $I_k \cap I_{k+1}$ jest równa co najmniej

$$\begin{aligned} b_k - a_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k-1}(b_{i+1} - b_i) + (b_1 - a_n) + \sum_{i=k+1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \\ &\geqslant (k-1)r + (b_1 - a_n) + (n-1-k)r \geqslant (n-2)r. \end{aligned}$$

Ponadto długość odcinka $I_k \setminus I_{k+1}$ jest równa $a_{k+1} - a_k = r$, więc $|I_k| \geqslant (n-1)r$. Zatem

$$\frac{|I_k \cap I_{k+1}|}{|I_k|} = 1 - \frac{|I_k \setminus I_{k+1}|}{|I_k|} \geqslant 1 - \frac{r}{(n-1)r} = \frac{n-2}{n-1},$$

co należało dowieść.

22. Karol znalazł na strychu zepsuty kalkulator, w którym działa tylko jeden przycisk (ale za to jaki!). Jeśli na wyświetlaczu znajduje się liczba x będąca sześcianem liczby całkowitej, to przycisk zamienia ją na $\sqrt[3]{x}$. W przeciwnym razie zaś przycisk zamienia wyświetlaną liczbę x na $2x + 1$. Kalkulator ma też pewną ograniczoną ilość pamięci, przez co nie może wyświetlać zbyt dużych liczb (próba wyświetlenia takowej kończy się jego zawieszeniem). Początkowo na ekranie widnieje pewna liczba całkowita $A > 1$. Udowodnić, że po pewnej skończonej liczbie naciśnięć przycisku kalkulator zawiesi się.

Rozwiązanie:

Dla dodatniej liczby całkowitej x przez $v_2(x)$ oznaczamy największą liczbę naturalną n, dla której 2^n dzieli liczbę x.

Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem kolejnych liczb wyświetlanych na kalkulatorze, tj. $a_0 = A$, a dla $n \geqslant 1$ wyraz a_n jest liczbą powstałą po naciśnięciu przycisku kalkulatora, gdy na ekranie wyświetlała się liczba a_{n-1}. Definiujemy ciąg $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ wzorem $b_n = v_2(a_n + 1)$. Pokażemy, że ciąg (b_n) jest niemalejący. Ustalmy liczbę całkowitą $n \geqslant 1$. Jeśli a_{n-1} nie jest sześcianem liczby naturalnej, to

$$b_n = v_2(a_n + 1) = v_2(2a_{n-1} + 2) = 1 + v_2(a_{n-1} + 1) = 1 + b_{n-1}$$

Jeśli $a_{n-1} = k^3$ dla pewnej liczby całkowitej k, to

$$b_{n-1} = v_2(a_{n-1} + 1) = v_2(k^3 + 1) = v_2((k+1)(k^2 - k + 1)) = v_2(k+1) + v_2(k^2 - k + 1) = b_n,$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że liczba $k^2 - k + 1$ jest nieparzysta dla każdego k.

Przypuśćmy, że ciąg (a_n) jest ograniczony. Wtedy ciąg (b_n) z definicji również musiałby być ograniczony. Z powyższego rozumowania wynika, że dla dostatecznie dużych wartości n musi zachodzić $a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}}$, gdyż operacja $a_{n-1} \to 2a_{n-1} + 1$ powoduje wzrost ciągu b_n o 1. Gdyby równość $a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}}$ zachodziła dla wszystkich dostatecznie dużych liczb n, to od pewnego miejsca musiałoby zachodzić $a_n = 1$, co jest sprzeczne z tym, że $a_n > 1$ dla każdego n.

Uwaga. Podobne rozumowanie można przeprowadzić wprowadzając ciąg (c_n), gdzie c_n jest największym dzielnikiem nieparzystym liczby $a_n + 1$. Jeśli $a_n = 2a_{n-1} + 1$, to $c_n = c_{n-1}$, gdy zaś $a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}}$, to $c_n < c_{n-1}$. To dowodzi, że zaczynając od dowolnej liczby całkowitej $A > 1$, w ciągu (a_n) wystąpi tylko skończenie wiele sześcianów liczb naturalnych.

23. Jednowymiarowy pasikonik mieszka na łące będącej prostą rzeczywistą. W tym roku przygotowuje się do zawodów w skoku w dal. Dlatego n-tego dnia pasikonik wykonuje n skoków o długości kolejno $1^k, 2^k, \ldots, n^k$, gdzie k jest pewną ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Każdy skok może być wykonany w lewo lub w prawo. Pasikonik zaczyna każdy trening w swoim domu znajdującym się w punkcie 0. Udowodnić, że dla każdego wyboru k istnieje taka liczba $M > 0$ niezależna od n, że każdego dnia pasikonik może zakończyć swój trening w odległości najwyżej M od domu.

Rozwiązanie:

Zadanie sprowadza się do tego, by dla danego $k > 0$ znaleźć takie $M > 0$, że dla dowolnego $n > 0$ istnieje ciąg $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ spełniający nierówność

$$\left|\varepsilon_1 \cdot 1^k + \varepsilon_2 \cdot 2^k + \ldots + \varepsilon_n \cdot n^k\right| \leqslant M. \qquad (\heartsuit)$$

Ustalmy liczbę całkowitą $k > 0$. Zauważmy, że $(x+1)^k - x^k$ jest wielomianem stopnia $k-1$. Dlatego istnieje taka stała całkowita $C > 100$, że dla dowolnego $x > C$ zachodzi

$$(x-1)^k > (x+1)^k - x^k. \qquad (\spadesuit)$$

Udowodnimy, że stała $M = (C+1)^k$ spełnia warunki zadania.

Wystarczy dowodzić tezy dla $n \geqslant 3$. Ustalmy liczbę całkowitą $n \geqslant 3$. Udowodnimy, że liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ zdefiniowane wzorami $\varepsilon_n = 1$ oraz dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\varepsilon_{n-i} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \varepsilon_{n-i+1} \cdot (n-i+1)^k + \varepsilon_{n-i+2} \cdot (n-i+2)^k + \ldots + \varepsilon_n \cdot n^k < 0 \\ -1 & \text{jeśli } \varepsilon_{n-i+1} \cdot (n-i+1)^k + \varepsilon_{n-i+2} \cdot (n-i+2)^k + \ldots + \varepsilon_n \cdot n^k \geqslant 0. \end{cases}$$

spełniają nierówność $(\heartsuit)$ dla wyżej dobranej stałej M.

Niech $t \geqslant 2$ będzie najmniejszym indeksem, dla którego $\varepsilon_t \neq \varepsilon_1$ (taki indeks istnieje, bo ciąg $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ nie jest stały). Z określenia liczb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ wynika, że liczby $\sum_{j=i}^n \varepsilon_j j^k$ dla $i = 1, 2, \ldots, t$ mają taki sam znak (ujemny lub nieujemny), liczba $\sum_{j=t+1}^n \varepsilon_j j^k$ jest znaku przeciwnego, a ponadto

$$t^k \geqslant \left|\sum_{j=t}^n \varepsilon_j j^k\right| \geqslant \left|\sum_{j=t-1}^n \varepsilon_j j^k\right| \geqslant \ldots \geqslant \left|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j j^k\right|.$$

Liczby $\sum_{j=t}^n \varepsilon_j j^k$ i $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j j^k$ są tego samego znaku i różnią się o $1^k + 2^k + \ldots + (t-1)^k$, więc wartość bezwzględna którejś z nich jest równa co najmniej $1^k + 2^k + \ldots + (t-1)^k$. Stąd i z poprzedniej nierówności wynika, że

$$t^k \geqslant 1^k + 2^k + \ldots + (t-1)^k.$$

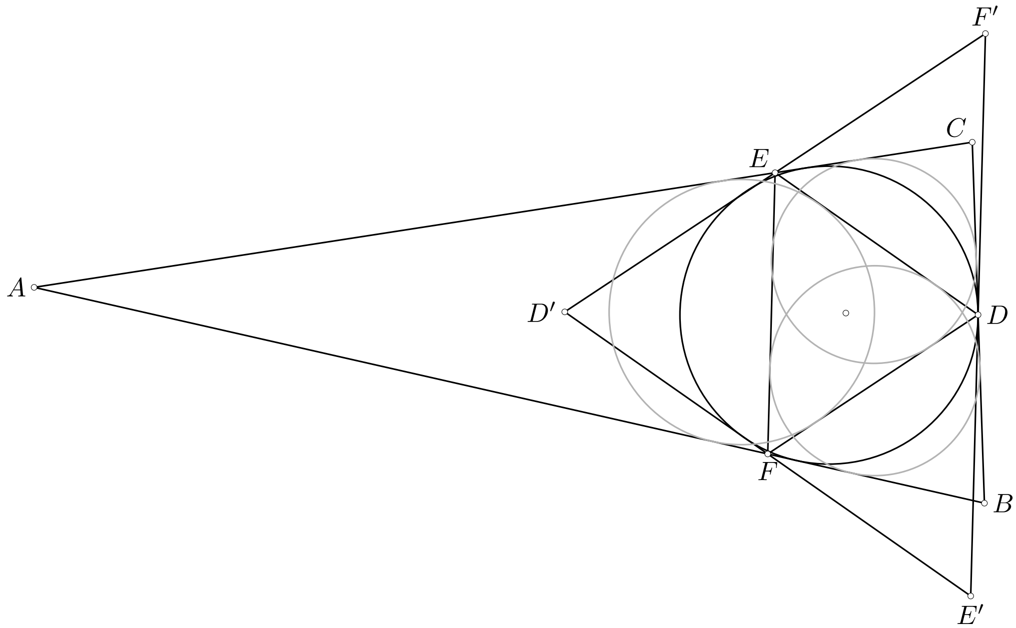
W szczególności $t^k - (t-1)^k \geqslant (t-2)^k$. Liczba $t-1$ nie spełnia zatem nierówności $(\spadesuit)$, więc $t - 1 \leqslant C$ i $t^k \leqslant (C+1)^k = M$. Stąd wynika, że $\left|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j j^k\right| \leqslant M$ i dowód jest zakończony.

24. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F leżące odpowiednio na odcinkach BC, CA, AB. Załóżmy, że w czworokąty $AEDF$, $BFED$, $CDFE$ można wpisać okręgi. Udowodnić, że okrąg wpisany w trójkąt ABC ma dwa razy większy promień niż okrąg wpisany w trójkąt DEF.

Rozwiązanie:

Sposób 1. Niech $D'E'F'$ będzie trójkątem, dla którego DEF jest trójkątem środkowym. Oczywiście $D'E'F'$ ma dwa razy dłuższy promień okręgu wpisanego niż DEF. Udowodnimy, że trójkąty $D'E'F'$ oraz ABC mają wspólny okrąg wpisany, co zakończy dowód.

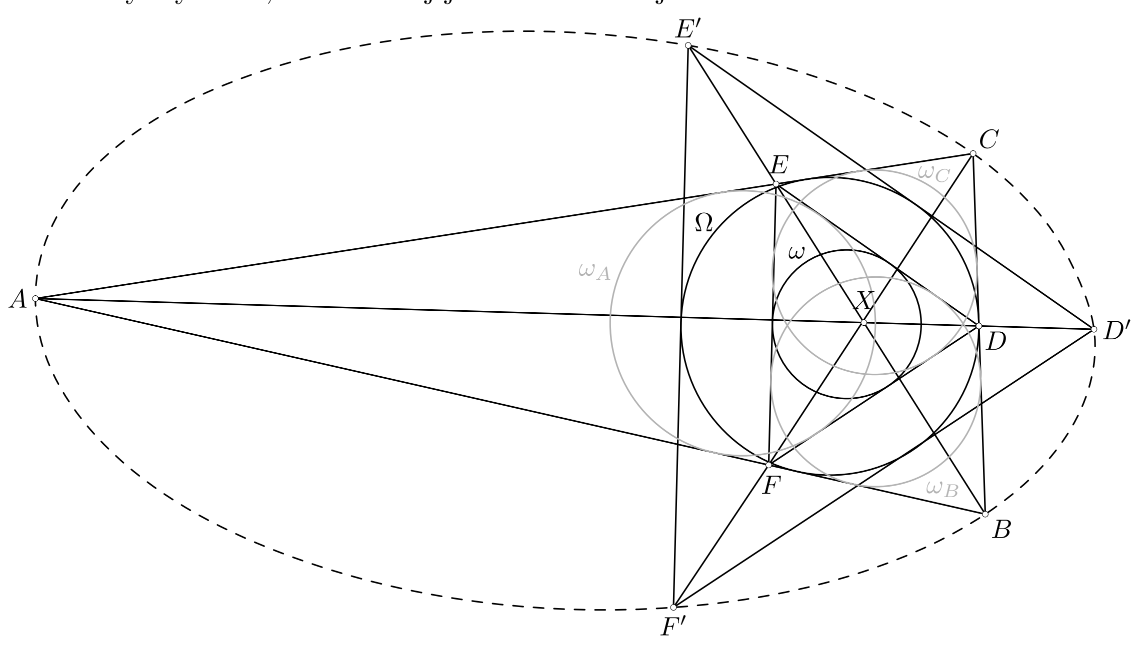
Ponieważ w czworokąt $AEDF$ można wpisać okrąg, więc $AE + DF = AF + DE$, więc $AE + D'E = AF + D'F$. Stąd istnieje okrąg styczny do półprostych $AE, AF, D'E, D'F$, oznaczmy go przez ω_a. Analogicznie definiujemy okręgi ω_b, ω_c.



Załóżmy nie wprost, że te okręgi są różne. Ponieważ $E'F'$ oraz BC są wspólnymi stycznymi zewnętrznymi okręgów ω_b i ω_c, to ich przecięcie (punkt D) jest środkiem jednokładności o skali dodatniej przeprowadzającej jeden okrąg na drugi. Analogicznie E i F są środkami jednokładności przeprowadzającej odpowiednio ω_c na ω_a oraz ω_a na ω_b. Z twierdzenia Monge'a wynika, że punkty D, E, F są współliniowe. Jednak jest to sprzeczność z założeniem, że te punkty leżą na bokach trójkąta ABC. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Sposób 2. Oznaczmy okręgi wpisane w wielokąty ABC, DEF, $AEDF$, $BDEF$, $CEFD$ odpowiednio przez $\Omega, \omega, \omega_A, \omega_B, \omega_C$. Oznaczmy środek jednokładności o skali dodatniej przeprowadzającej ω na Ω przez X. Zauważmy, że środkiem jednokładności o skali dodatniej przeprowadzającej Ω na ω_A jest A, a środkiem jednokładności o skali dodatniej przeprowadzającej ω_A na ω jest D. Z twierdzenia Monge'a wynika, że punkty A, D, X są współliniowe. Analogicznie dowodzimy, że X leży na BE oraz na CF.

Niech D', E', F' będą obrazami punktów D, E, F w jednokładności o skali dodatniej przeprowadzającej ω na Ω. Należy wykazać, że skala tej jednokładności jest równa 2.



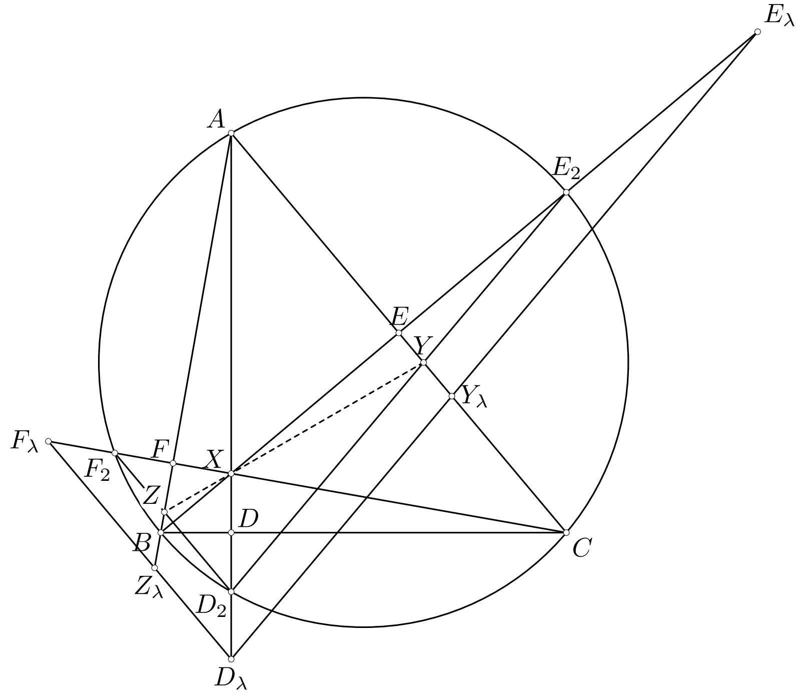
Proste $D'E'$, $E'F'$ i $F'D'$ są styczne do Ω, więc z twierdzenia Ponceleta wynika, że A, B, C, D', E', F' leżą na jednej stożkowej. Do dokończenia rozwiązania wystarczy udowodnić następujący lemat:

Lemat. *Dany jest trójkąt ABC. Czewiany AD, BE, CF przecinają się w punkcie X. Rozważamy parametr $\lambda > 0$. Punkty $D_\lambda, E_\lambda, F_\lambda$ leżą na półprostych XD, XE, XF, przy czym*

$$\frac{XD_\lambda}{XD} = \frac{XE_\lambda}{XE} = \frac{XF_\lambda}{XF} = \lambda.$$

Wówczas $A, B, C, D_\lambda, E_\lambda, F_\lambda$ leżą na jednej stożkowej wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda = 2$.

Dowód lematu. Stosując stosowne przekształcenie afiniczne możemy założyć bez straty ogólności, że X jest ortocentrum trójkąta ABC. Korzystając z faktu, że odbicia ortocentrum trójkąta leżą na okręgu opisanym widzimy, że punkty A, B, C, D_2, E_2, F_2 leżą na stożkowej. Niech Y_λ będzie przecięciem AB i $D_\lambda E_\lambda$, a Z_λ — punktem przecięcia AC i $D_\lambda F_\lambda$. Z twierdzenia Pascala dla sześciokąta $ABE_2D_2F_2C$ wynika, że punkty Y_2, X, Z_2 są współliniowe. Jeśli $\lambda > 2$, to punkty Y_λ i Z_λ leżą po tej samej stronie prostej Y_2Z_2 co punkt D i w szczególności punkty Y_λ, H, Z_λ nie leżą na jednej prostej. Z twierdzenia Pascala wynika więc, że sześciokąt $ABE_\lambda D_\lambda F_\lambda C$ nie jest wpisany w stożkową. Analogiczną sprzeczność otrzymujemy dla $\lambda < 2$ z tą różnicą, że punkty Y_λ i Z_λ leżą po drugiej stronie prostej Y_2Z_2. Dowód lematu został zakończony.



□

25. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots$, że każda dodatnia liczba całkowita występuje w nim dokładnie raz oraz dla każdego $n \geqslant 1$ liczba $a_n + a_{n+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Podamy konstrukcję ciągu o zadanej własności. Przyjmijmy, że $a_1 = 1$.

Przypuśćmy, że dla pewnej liczby $n \geqslant 1$ wyrazy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zostały już wybrane, a najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą niewystępującą pośród nich jest k. Niech $M > \max\{3, k, a_1, \ldots, a_n\}$ będzie taką liczbą całkowitą, że $2M + 1 + a_n + k$ jest kwadratem liczby całkowitej (można przyjąć na przykład $M = \frac{1}{2}(9a_n + 9k + 8)(a_n + k + 1))$. Ustalając

$$a_{n+1} = M^2 - a_n, \quad a_{n+2} = (M+1)^2 - a_{n+1} = 2M + 1 + a_n, \quad a_{n+3} = k,$$

nietrudno przekonać się, że $a_{n+1} \neq a_{n+2}$ oraz $a_{n+1} > M$, $a_{n+2} > M$, co oznacza, że liczby a_{n+1} oraz a_{n+2} nie pojawiły się wcześniej w ciągu. Ponadto każda z liczb $a_n + a_{n+1}$, $a_{n+1} + a_{n+2}$ oraz $a_{n+2} + a_{n+3}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

W opisany wyżej sposób wydłużając ciąg o trzy wyrazy, uzupełniliśmy go o najmniejszą niewystępującą w nim liczbę. Powtarzając to rozumowanie, uzyskujemy nieskończony różnowartościowy ciąg (a_n) o tej własności, że każda dodatnia liczba całkowita k znajduje się pośród początkowych $3k-2$ wyrazów tego ciągu.

26. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a, b, c \in [0,1]$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{bc+\frac{1}{2}}}+\frac{b}{\sqrt{ca+\frac{1}{2}}}+\frac{c}{\sqrt{ab+\frac{1}{2}}} \leqslant 2\sqrt{2}.$$

Rozwiązanie:

Sposób 1. Szacujemy wszystkie mianowniki przez $\sqrt{abc+\frac{1}{2}}$ i otrzymujemy

$$\frac{a}{\sqrt{bc+\frac{1}{2}}}+\frac{b}{\sqrt{ca+\frac{1}{2}}}+\frac{c}{\sqrt{ab+\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{abc+\frac{1}{2}}}.$$

Wystarczy przeto udowodnić, że

$$a+b+c \leqslant 2\sqrt{2abc+1}.$$

Równoważnie:

$$\sum_{\text{cyc}}(a^2+2ab) \leqslant 8abc+4.$$

Zauważmy, że

$$8abc+4-\sum_{\text{cyc}}(a^2+2ab) = \prod_{\text{cyc}}(1-a)+\sum_{\text{cyc}}\left(a(1-b)(1-c)+(1-ab)(1-c)+a(1-a)\right)+3abc \geqslant 0,$$

ponieważ $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Dowód został zakończony.

Sposób 2. Wykorzystamy następujący fakt: Jeśli $f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, to dla $x \in [a,b]$ mamy $f(x) \leqslant \max\{f(a), f(b)\}$.

Zauważmy, że funkcja

$$f(a) = \frac{a}{\sqrt{bc+\frac{1}{2}}}+\frac{b}{\sqrt{ca+\frac{1}{2}}}+\frac{c}{\sqrt{ab+\frac{1}{2}}}$$

jest wypukła. Istotnie, jeśli przyjmiemy

$$g(x) = \frac{p}{\sqrt{qx+\frac{1}{2}}},$$

to

$$g''(x) = \frac{3\sqrt{2}pq^2}{(2xq+1)^{\frac{5}{2}}} > 0,$$

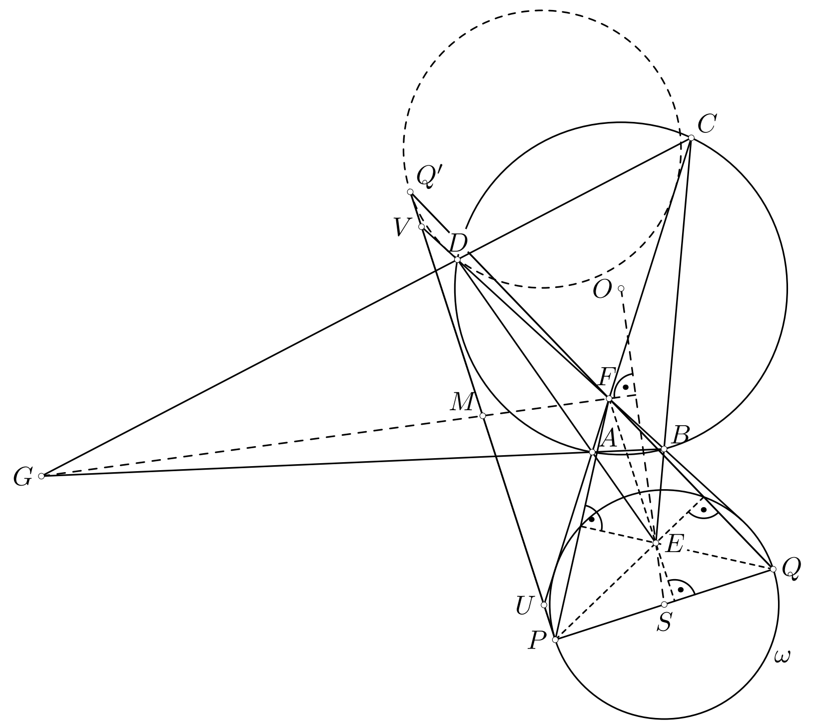
więc $g(x)$ jest funkcją wypukłą. To zaś oznacza, że drugi i trzeci składnik wyrażenia $f(a)$ jest funkcją wypukłą, zaś pierwszy funkcją liniową — ich suma jest więc funkcją wypukłą. Stosując przytoczony na początku fakt widzimy, że lewa strona nierówności osiąga największą wartość w jednym z przypadków $a=0$ lub $a=1$. Rozumując analogicznie dla b i c otrzymujemy, że maksymalna wartość lewej strony danej nierówności jest osiągana, gdy każda z liczb a, b, c będzie równa 0 lub 1. Ze względu na symetrię wystarczy rozważyć trójki $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$. Pozostaje zauważyć, że największą wartość $2\sqrt{2}$ otrzymamy dla trójki $(1,1,0)$.

27. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Proste AD i BC przecinają się w punkcie E, a proste AC i BD przecinają się w punkcie F. Okrąg ω jest styczny do prostych AC i BD. Odcinek PQ jest średnicą okręgu ω. Udowodnić, że jeśli punkt F jest ortocentrum trójkąta EPQ, to środek okręgu ω leży na prostej OE.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wszystkie bieguny i biegunowe rozważane będą względem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

Niech S będzie środkiem ω i niech proste AB i CD przecinają się w punkcie G. Powszechnie wiadomo, że FG jest biegunową punktu E, więc $FG \perp OE$. Wystarczy udowodnić, że $SE \perp FG$.



Niech p będzie prostą styczną do ω w punkcie P. Oznaczmy przez U, V, Q' punkty przecięcia prostych FA, FB, FQ z prostą p. Zauważmy, że jednokładność o środku F i skali $-\frac{FQ'}{FQ}$ przekształca okrąg ω na okrąg dopisany do boku FV trójkąta FUV, a ponadto okrąg ω jest dopisany do boku FU tego trójkąta. Odcinki UQ' i VP są równe połowie obwodu trójkąta FUV. W szczególności środek odcinka UV pokrywa się ze środkiem odcinka PQ'. Oznaczmy go przez M.

Zauważmy, że boki trójkąta PEQ są prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta $Q'FP$. W szczególności trójkąty te są podobne, a środkowa ES trójkąta PEQ jest prostopadła do środkowej FM trójkąta $Q'FP$. Do wykazania tezy pozostaje współliniowość punktów F, G, M.

Pęk prostych FV, FU, FM, FE jest harmoniczny, bo M jest środkiem odcinka UV i $FE \parallel UV$. Z drugiej strony, pęk prostych FV, FU, FG, FE jest harmoniczny, bo FE jest biegunową punktu G. Stąd proste FM i FG się pokrywają, co kończy dowód.

28. W pewnym kraju jest n miast oraz pewna liczba dwukierunkowych dróg, z których każda łączy pewne dwa miasta. Fifonż zauważył, że dla dowolnego podziału kraju na dwie części, liczba dróg pomiędzy dwiema częściami jest równa co najwyżej kn (gdzie k jest ustaloną dodatnią liczbą całkowitą). Udowodnić, że istnieje zbiór złożony z przynajmniej $\frac{n}{4k}$ miast, z których żadne dwa nie są połączone drogą.

Rozwiązanie:

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem przedstawionym w treści zadania, tj. wierzchołkami grafu G są miasta (zbiór V), a krawędzie (zbiór E) odpowiadają drogom między miastami. Przez *zbiór niezależny* będziemy rozumieli taki podzbiór wierzchołków grafu, z których żadne dwa nie są połączone krawędzią.

Niech I_1 będzie dowolnym *maksymalnym* zbiorem niezależnym w grafie G, tj. takim zbiorem niezależnym, że dla dowolnego wierzchołka $v \in V \setminus I_1$ zbiór $I_1 \cup \{v\}$ nie jest niezależny. Następnie konstruujemy ciąg podzbiorów $I_2, I_3, \ldots, I_{2k}$, gdzie I_k ($k \geqslant 2$) jest dowolnym maksymalnym zbiorem niezależnym w grafie $G \setminus \bigcup_{j<k} I_j$.

Przypuśćmy nie wprost, że w grafie G nie ma zbioru niezależnego wielkości co najmniej $\frac{n}{4k}$. W szczególności oznacza to, że $|I_j| < \frac{n}{4k}$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$. Oznaczmy $A := \bigcup_{j=1}^{2k} I_j$ oraz $B := V \setminus A$. Pokażemy, że podział wierzchołków grafu G na zbiory (A, B) nie spełnia warunku z zadania. Zbiory I_j są z definicji parami rozłączne, więc

$$|A| < 2k \cdot \frac{n}{4k} = \frac{n}{2}.$$

Stąd $|B| > \frac{n}{2}$. Rozważmy wierzchołek $b \in B$. Z definicji zbiorów niezależnych I_j zbiory $I_1 \cup \{b\}$, $I_2 \cup \{b\}$, $\ldots$, $I_{2k} \cup \{b\}$ nie są niezależne, czyli dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$ istnieje w G krawędź postaci (b, a_j), gdzie $a_j \in I_j$. Stąd wierzchołek b jest połączony z co najmniej $2k$ wierzchołkami ze zbioru A. Zatem liczba krawędzi o jednym końcu w A, a drugim w B jest równa przynajmniej

$$|B| \cdot 2k > nk.$$

Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga. Przedstawimy dowód istnienia zbioru niezależnego wielkości $\frac{n}{4k+1}$, opierający się na dwóch znanych faktach. Zastępując dowolny z nich przez inny fakt, dający lepsze lub gorsze odpowiednie oszacowanie, uzyskalibyśmy inne oszacowanie na rozmiar zbioru niezależnego.

Lemat 1. *W grafie G o m krawędziach istnieje podział wierzchołków na dwa rozłączne zbiory A i B, w którym krawędzi pomiędzy tymi zbiorami jest co najmniej $\frac{m}{2}$.*

Dowód. Przyporządkowujemy każdy wierzchołek z grafu G do zbioru A z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ do zbioru B. Dla dowolnej krawędzi e, niech X_e będzie zmienną losową przyjmującą wartość 1, jeśli końce e po takim przyporządkowaniu wierzchołków znajdą się w różnych zbiorach i 0 w przeciwnym przypadku. Niech $X = \sum_{e \in E} X_e$. Z liniowości wartości oczekiwanej otrzymujemy

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{e \in E} X_e = \sum_{e \in E} \mathbb{E}X_e = \sum_{e \in E} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = \frac{m}{2}.$$

W takim razie, ponieważ między wylosowanymi zbiorami A i B jest *średnio* $\frac{m}{2}$ krawędzi, to muszą istnieć zbiory A i B, pomiędzy którymi jest co najmniej tyle krawędzi. $\square$

Lemat 2. *W grafie G o n wierzchołkach i m krawędziach istnieje zbiór niezależny wielkości co najmniej $\frac{n}{d+1}$, gdzie $d = \frac{2m}{n}$ jest średnim stopniem w grafie G.*

Dowód. Przedstawimy procedurę konstruującą pewien zbiór niezależny I. Wylosujmy permutację wierzchołków $v_1, \ldots, v_n$, a następnie dla $i = 1, \ldots, n$ dodajemy v_i do zbioru I wtedy i tylko wtedy, gdy w I nie ma już żadnego sąsiada v_i. Zauważmy, że dla każdego wierzchołka v o stopniu d_v, prawdopodobieństwo, że w tej procedurze zostanie wybrany do zbioru I jest równe prawdopodobieństwu, że w losowej permutacji wystąpi przed wszystkimi swoimi sąsiadami, a to jest równe $\frac{1}{d_v+1}$. Wtedy analogicznie jak w dowodzie poprzedniego lematu, istnieje zbiór niezależny wielkości co najmniej

$$\mathbb{E}|I| = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{v \in V}(d_v + 1)} = \frac{n}{\frac{2m}{n} + 1} = \frac{n}{d + 1},$$

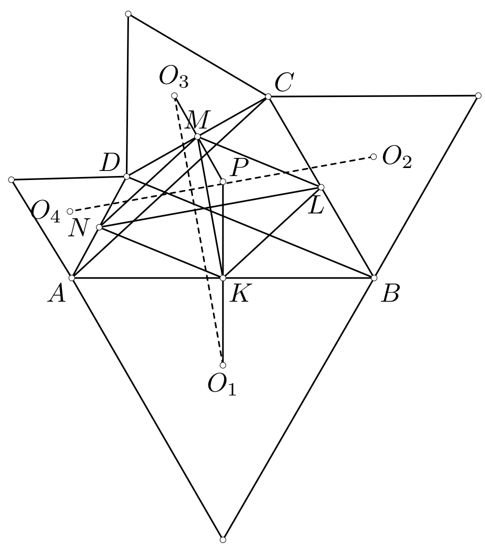
gdzie oszacowanie wynika z nierówności między średnią arytmetyczną a średnią harmoniczną. $\square$

Niech G będzie grafem z zadania. Niech n będzie liczbą jego wierzchołków, a m — liczbą krawędzi. Z lematu 1 otrzymujemy, że $\frac{m}{2} \leqslant kn$, skąd $d := \frac{2m}{n} \leqslant 4k$. Z lematu 2 wynika, że w G istnieje zbiór niezależny wielkości co najmniej $\frac{n}{4k+1}$, co kończy dowód.

29. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równe. Na bokach AB, BC, CD, DA budujemy (na zewnątrz) cztery trójkąty równoboczne o środkach odpowiednio O_1, O_2, O_3, O_4. Wykazać, że proste O_1O_3 i O_2O_4 są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Niech K, L, M, N będą środkami odpowiednio boków AB, BC, CD, DA. Odcinki KL i MN są liniami środkowymi w trójkątach ABC i ACD, więc $KL = MN = \frac{1}{2}AC$. Odcinki LM i KN są liniami środkowymi w trójkątach BCD i ABD, więc $ML = NK = \frac{1}{2}BD$. Z równości $AC = BD$ wynika więc, że czworokąt $KLMN$ jest rombem, a zatem jego przekątne KM i LN są prostopadłe. Wystarczy wykazać, że $O_1O_3 \parallel KM$ i $O_2O_4 \parallel LN$. Udowodnimy tylko pierwszą z powyższych równoległości; dowód drugiej jest w pełni analogiczny.



Sposób 1. Jest to oczywiste, gdy $AB \parallel CD$. W przeciwnym przypadku niech P będzie punktem przecięcia symetralnych AB i CD. Wtedy obrót o środku P przeprowadzający odcinek AC na odcinek BD przeprowadza trójkąt APC na trójkąt BPD, w związku z tym te trójkąty są przystające i jednakowo zorientowane. To oznacza, że trójkąty ABP i CDP są podobne. W takim razie

$$\frac{O_1K}{PK} = \frac{AK\sqrt{3}/3}{PK} = \frac{CM\sqrt{3}/3}{PM} = \frac{O_3M}{PM},$$

czyli $O_1O_3 \parallel KM$.

Sposób 2. Rozważmy naszą konfigurację na płaszczyźnie zespolonej. Niech $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ będzie pierwiastkiem trzeciego stopnia z 1. Wtedy

$$O_1 = \frac{1}{3}\left(A + B + (A - \omega(B - A))\right)$$

i analogicznie

$$O_3 = \frac{1}{3}\left(C + D + (C - \omega(D - C))\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned} 3(O_1 - O_3) &= (A + B) - (C + D) + (A - \omega(B - A) - C + \omega(D - C))) \\ &= 2(K - M) + ((A - C)(1 + \omega) + \omega(B - D)). \end{aligned}$$

Równoległość $O_1O_3 \parallel KM$ jest równoważna temu, że liczba $\frac{O_1-O_3}{K-M}$ jest rzeczywista. Wystarczy udowodnić, że

$$\frac{(A-C)(1+\omega)-\omega(B-D)}{K-M} \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ $|A-C| = |B-D|$, więc istnieje taka liczba zespolona z o module 1, że $A-C = z(B-D)$. Równoważnie mamy dowieść, że

$$\begin{aligned}\frac{(A-C)(1+\omega)-\omega(B-D)}{K-M} &= \frac{(B-D)(z+z\omega-\omega)}{\frac{1}{2}(1+z)(B-D)}\\ &= 2\frac{z+z\omega-\omega}{1+z} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Wystarczy sprawdzić, że sprzężenie powyższej liczby zespolonej jest równe jej samej. Ponieważ $\overline{z} = 1/z$ oraz $\overline{\omega} = \omega^2 = -1-\omega$, więc

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z+z\omega-\omega}{1+z}\right)} &= \frac{\overline{z}+\overline{z\omega}-\overline{\omega}}{1+\overline{z}}\\ &= \frac{1/z+(-1-\omega)/z+1+\omega}{1+1/z}\\ &= \frac{1+(-1-\omega)+(1+\omega)z}{z+1}\\ &= \frac{z+z\omega-\omega}{1+z},\end{aligned}$$

co kończy dowód.

30. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Janusz i Grażyna grają w grę. Najpierw Janusz wybiera $n+1$ podzbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ zbioru $\{0, 1, \ldots, 2^n-1\}$ o liczności 2^{n-1} każdy, po czym Grażyna wybiera $n+1$ liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Następnie Janusz wybiera liczbę całkowitą J. Jeśli Grażyna jest w stanie wskazać takie $1 \leqslant i \leqslant n+1$, że $(J-a_i) \bmod 2^n \in A_i$, to wygrywa, a w przeciwnym razie przegrywa. Udowodnić, że Grażyna może wygrać niezależnie od wyborów Janusza.

Rozwiązanie:

Wszystkie działania w rozwiązaniu wykonujemy modulo 2^n. Niech $U = \{0, 1, \ldots, 2^n-1\}$ będzie zbiorem wszystkich reszt modulo 2^n. Dla podzbioru $X \subseteq U$ oraz liczby $y \in U$ definiujemy zbiór $X+y$ jako $\{(x+y) \bmod 2^n \mid x \in X\}$. W zadaniu chcemy wykazać, że istnieją takie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in U$, że zbiory

$$A_1+a_1, A_2+a_2, \ldots, A_{n+1}+a_{n+1}$$

pokrywają cały zbiór reszt U.

Zaczniemy od udowodnienia pomocniczego faktu.

Lemat. *Niech $A, S \subseteq U$ będą podzbiorami wszystkich reszt modulo 2^n, przy czym $|A| = 2^{n-1}$. Wówczas istnieje takie $a \in U$, że $|(A+a) \cap S| \geqslant |S|/2$.*

Dowód. Rozważmy wszystkie możliwe przesunięcia $a \in U$ i obliczmy wartość wyrażenia

$$T := \sum_{a \in U} |(A+a) \cap S|$$

Zauważmy, że dowolny element $x \in S$ zostanie policzony w wyrażeniu $|(A+a) \cap S|$ dla dokładnie $|A| = 2^{n-1}$ różnych wartości a. Wynika to z tego, że dla każdego elementu $b \in A$ istnieje unikalne $r_b \in U$ takie, że $b + r_b \equiv x \pmod{2^n}$ oraz dla wszystkich $b \in A$ odpowiadające im r_b są parami różne. Zatem

$$T = |S| \cdot 2^{n-1}.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta istnieje $a \in U$, dla którego

$$|(A+a) \cap S| \geqslant \frac{T}{|U|} = \frac{|S| \cdot 2^{n-1}}{2^n} = \frac{|S|}{2},$$

co należało dowieść. $\square$

Wróćmy do naszego zadania. Przez rekursję zdefiniujemy ciąg reszt $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in U$ spełniający dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots, n+1$ warunek

$$\left| U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (A_i + a_i) \right| \leqslant 2^{n-k}.$$

Powyższy warunek dla $k = n+1$ daje tezę zadania.

Jako a_1 można wziąć dowolną resztę, na przykład 0. Niech $k > 1$ i załóżmy, że zdefiniowaliśmy już reszty $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Oznaczmy

$$S := U \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (A_i + a_i).$$

Wiemy, że $|S| \leqslant 2^{n-(k-1)}$. Z lematu zastosowanego dla zbiorów A_k i S możemy dobrać takie a_k, że $|(A_k + a_k) \cap S| \geqslant |S|/2$. Wówczas

$$\left| U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (A_i + a_i) \right| = |S| - |(A_k + a_k) \cap S| \leqslant |S| - \frac{|S|}{2} = \frac{|S|}{2} \leqslant 2^{n-k},$$

co kończy rekursywną definicję reszt $a_1, \ldots, a_{n+1}$ i zarazem rozwiązanie zadania.

Uwaga. Dowód lematu można wyrazić także w języku rachunku prawdopodobieństwa. Wylosujmy element $a \in U$ z rozkładem jednostajnym, tzn. prawdopodobieństwo wylosowania każdej reszty jest jednakowe i równe $\frac{1}{2^n}$. Dla każdego $s \in S$ rozważamy zmienną losową X_s zdefiniowaną następująco: $X_s = 1$, gdy $s \in A + a$ oraz $X_s = 0$ w przeciwnym przypadku. Wówczas $\mathbb{E}X_s = 1/2$. Z liniowości wartości oczekiwanej dostajemy

$$\mathbb{E}|(A+a) \cap S| = \mathbb{E}\left(\sum_{s \in S} X_s \right) = \sum_{s \in S} \mathbb{E}X_s = \frac{|S|}{2}.$$

Zatem istnieje takie $a_0 \in U$, że

$$|(A + a_0) \cap S| \geqslant \mathbb{E}|(A+a) \cap S| \geqslant \frac{|S|}{2}.$$

31. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których liczby

$$1^3 + 1,\ 2^3 + 2,\ \ldots,\ n^3 + n$$

dają parami różne reszty z dzielenia przez n.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że tylko liczby postaci $n = 3^k$ dla k całkowitego spełniają warunki zadania. Na początku rozważmy przypadek, gdy $n = 3^k$ dla pewnego k całkowitego. Przypuśćmy, że istnieją różne liczby $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ spełniające $a^3 + a \equiv b^3 + b \pmod{n}$. Wówczas $n = 3^k$ jest dzielnikiem liczby

$$(a^3 + a) - (b^3 + b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1). \tag{1}$$

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b liczba $a^2 + ab + b^2 + 1$ nie jest podzielna przez 3. Stąd $n = 3^k$ dzieli $a - b$, co jest sprzeczne z założeniem, że a, b są różnymi resztami modulo n.

Pozostaje wykazać, że gdy n nie jest potęgą trójki, to warunki zadania nie są spełnione. Zauważmy, że jeśli teza zadania nie jest prawdziwa dla $n = m$, to nie jest prawdziwa także dla dowolnego $n = dm$ gdzie d jest dodatnią liczbą całkowitą. Stąd wystarczy udowodnić, że teza zadania nie jest spełniona dla $n = p$, gdzie p jest liczbą pierwszą różną od 3.

Bezpośrednio sprawdzamy, że $n = 2$ nie spełnia warunków zadania. Załóżmy teraz, że $n = p > 5$ jest liczbą pierwszą. Wykorzystamy poniższy znany fakt z teorii liczb.

Fakt. *Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Wtedy -1 jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Załóżmy, że $n = p$ jest liczbą pierwszą postaci $4k + 1$ dla k całkowitego. Wtedy na mocy powyższego faktu istnieje takie $a \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, że $a^2 \equiv -1 \pmod p$. Wówczas $a^3 + a \equiv 0 \equiv 0^3 + 0 \pmod p$, co jest sprzeczne z warunkami zadania.

Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $n = p$ jest liczbą pierwszą postaci $4k + 3$. Wykażemy, że wtedy istnieją różne liczby $a, b \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, dla których $a^2 + ab + b^2 + 1$ jest podzielne przez p, co na mocy tożsamości (1) implikuje, że $a^3 + a$ i $b^3 + b$ dają takie same reszty modulo p. Istnienie takich $a \neq b$ jest równoważne następującym przystawaniom modulo p (dla przejrzystości zapisu oznaczymy przez c odwrotność b modulo p oraz $x = ac \neq 1$):

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 &\equiv -1, \\ a^2c^2 + ac + 1 &\equiv -c^2, \\ x^2 + x + 1 &\equiv -c^2, \\ 4x^2 + 4x + 4 &\equiv -4c^2, \\ (2x+1)^2 + 3 &\equiv -(2c)^2. \end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

Ponieważ p jest postaci $4k + 3$, to -1 nie jest resztą kwadratową modulo p. Ponadto, iloczyn niezerowej reszty kwadratowej i niereszty kwadratowej jest nieresztą kwadratową. Stąd dla każdego niezerowego d, liczba $-d^2$ jest nieresztą kwadratową. Ponadto reszt i niereszt kwadratowych jest tyle samo oraz dla każdego x co najwyżej jedna z liczb $x, p - x$ jest resztą kwadratową. Stąd w każdej parze $x, p - x$ dokładnie jedna z tych liczb jest nieresztą kwadratową, więc każda niereszta jest postaci $-d^2$ dla pewnego niezerowego d.

Wykażemy, że istnieje niereszta kwadratowa o 3 większa od pewnej reszty kwadratowej, a następnie na ich podstawie znajdziemy różne liczby a, b spełniające żądaną kongruencję. Rozważmy liczby

$$3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ 3 \cdot 3, \ldots, 3 \cdot (p-1).$$

Dają one wszystkie niezerowe reszty modulo p. Niech $m > 3$ będzie najmniejszą taką liczbą, że $3m \bmod p$ jest nieresztą kwadratową. Taka liczba istnieje, bo niereszt kwadratowych jest $\frac{p-1}{2} \geqslant 3$, a $3 \cdot 3$ jest resztą kwadratową. Wówczas $3(m-1) \bmod p$ jest resztą kwadratową. Wtedy $u^2 + 3 \equiv 3m \equiv -v^2 \pmod p$ dla pewnych niezerowych reszt u, v. Możemy dodatkowo założyć, że $u \neq 3$, gdyż w razie potrzeby można zastąpić u resztą $\tilde{u} = p - 3 \neq 3$. Dobierając x i c tak, by $2x + 1 \bmod p = u$ i $2c \bmod p = v$ zapewniamy sobie, że spełniona jest kongruencja ($\heartsuit$), a skoro $u \neq 3$, to $x \neq \frac{3-1}{2} = 1$. Wtedy $b = c^{-1} \bmod p$ i $a = xb \bmod p$ spełniają kongruencję $a^2 + ab + b^2 \equiv -1 \pmod p$ i $a \neq b$, co było do okazania.

32. Dane są dwie liczby całkowite $b > a > 0$. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita n oraz wielomian postaci

$$\pm 1 \pm x \pm x^2 \pm \ldots \pm x^n$$

podzielny przez wielomian $1 + x^a + x^b$.

Rozwiązanie:

Wszystkie poniżej rozważane wielomiany mają współczynniki całkowite i są to wielomiany jednej zmiennej x.

Niech dla wielomianu W zapis $\overline{W}$ oznacza redukcję W modulo 2, czyli każdy współczynnik w W zamieniamy na 0, jeśli jest parzysty i na 1, jeśli jest nieparzysty. Przykładowo, jeśli

$$A(x) = -2x^4 + x^3 + 3x^2 + 7x$$

to wtedy

$$\overline{A}(x) = x^3 + x^2 + x$$

Dla dowolnych wielomianów A, B zachodzą własności

$$\overline{A + B} = \overline{\overline{A} + B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{\overline{A} \cdot B}$$

Oznaczmy $F(x) = 1 + x^a + x^b$. Wielomian ten jest unormowany, więc dla dowolnego wielomianu A reszta z dzielenia A przez F, którą będziemy oznaczać przez $A \bmod F$, ma współczynniki całkowite.

Stwierdzenie 1. *Dla dowolnego wielomianu A zachodzi równość*

$$\overline{A \bmod F} = \overline{\overline{A} \bmod F}$$

Dowód. Istotnie, wystarczy sprawdzić, że wielomian

$$(A \bmod F) - (\overline{A} \bmod F) = (A - \overline{A}) \bmod F$$

ma wszystkie współczynniki parzyste. Wiadomo jednak, że wielomian $A - \overline{A}$ ma wszystkie współczynniki parzyste, więc można napisać $A - \overline{A} = 2B$ dla pewnego B. Stąd wynika już, że

$$(A - \overline{A}) \bmod F = (2B) \bmod F = 2(B \bmod F)$$

ma wszystkie współczynniki parzyste. □

Stwierdzenie 2. *Dla dowolnych wielomianów A, B, jeśli $\overline{A \bmod F} = 0$ to wtedy także $\overline{AB \bmod F} = 0$.*

Dowód. Istotnie, mamy równości

$$\overline{AB \bmod F} = \overline{((A \bmod F) \cdot B) \bmod F} = \overline{\overline{(A \bmod F) \cdot B} \bmod F} =$$

$$= \overline{\overline{\overline{A \bmod F} \cdot B} \bmod F} = \overline{\overline{0 \cdot B} \bmod F} = \overline{0 \bmod F} = 0.$$

□

Stwierdzenie 3. *Dla dowolnego wielomianu A, jeśli $\overline{Ax \bmod F} = 0$, to także $\overline{A \bmod F} = 0$.*

Dowód. Oznaczmy $G(x) = -x^{a-1} - x^{b-1}$. Wtedy $1 = F + xG$. Wiemy stąd, że dla dowolnego wielomianu A zachodzi

$$\overline{A \bmod F} = \overline{A(1 - F) \bmod F} = \overline{AxG \bmod F} = 0,$$

przy czym ostatnia równość wynika ze stwierdzenia 2 dla wielomianów Ax i G. □

Stwierdzenie 4. *Dla dowolnego wielomianu A, jeśli $\overline{A(x-1) \bmod F} = 0$, to także $\overline{A \bmod F} = 0$.*

Dowód. Ponieważ $F \bmod (x-1) = 3$ to istnieje taki wielomian H, że $3 = (x-1)H + F$. Ponieważ $\overline{3} = 1$ to mamy:

$$\overline{A \bmod F} = \overline{3(A \bmod F)} = \overline{3A \bmod F} = \overline{A(3-F) \bmod F} = \overline{A(x-1)H \bmod F} = 0,$$

przy czym ostatnia równość wynika ze stwierdzenia 2 dla wielomianów $A(x-1)$ i H. □

Stwierdzenie 5. *Istnieje taka liczba całkowita $n \geqslant b$, że wszystkie współczynniki wielomianu, będącego resztą z dzielenia przez $1 + x^a + x^b$ wielomianu $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, są parzyste.*

Dowód. Rozważmy dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ ciąg wielomianów postaci

$$\overline{x^k \bmod F}.$$

Wiemy, że każdy wielomian w tym ciągu ma stopień najwyżej $b - 1 = \deg F - 1$ oraz wszystkie współczynniki ze zbioru $\{0, 1\}$. Wszystkich możliwych wielomianów w tym ciągu jest zatem 2^b. W związku z tym istnieją takie m, k spełniające $m - b > k \geqslant 0$, że

$$\overline{x^m \bmod F} = \overline{x^k \bmod F}$$

Stąd otrzymujemy, że

$$0 = \overline{x^m \bmod F} - \overline{x^k \bmod F}$$

$$0 = \overline{0} = \overline{\overline{x^m \bmod F} - \overline{x^k \bmod F}} = \overline{(x^m \bmod F) - (x^k \bmod F)} = \overline{(x^m - x^k) \bmod F}$$

Weźmy $n = m - k - 1$. Oczywiście $n \geqslant b$ z wyboru m, k. Ponieważ

$$x^m - x^k = (1 + x + \ldots + x^n)(x-1)x^k$$

to korzystając ze stwierdzeń 3 i 4 wiemy, że

$$\overline{(1 + x + \ldots x^n) \bmod F} = 0$$

□

Weźmy $n \geqslant b$ ze stwierdzenia 5. Zdefiniujemy wielomiany

$$W_0(x), W_1(x), \ldots, W_{n-b}(x).$$

w następujący sposób. Niech

$$W_0(x) = 1 + x^a + x^b.$$

Dla $1 \leqslant k \leqslant n - b$, niech c_k będzie współczynnikiem przy x^k w $W_{k-1}(x)$. Jeśli $c_k \neq 0$, to przyjmujemy

$$W_k(x) = W_{k-1}(x).$$

Jeśli $c_k = 0$, to niech c_{k+a} będzie współczynnikiem przy x^{k+a} w $W_{k-1}(x)$. Jeśli $c_{k+a} = 0$, to przyjmujemy

$$W_k(x) = W_{k-1}(x) + x^k(1 + x^a + x^b).$$

Jeśli zaś $c_{k+a} \neq 0$, to przyjmujemy

$$W_k(x) = W_{k-1}(x) - c_{k+a}x^k(1 + x^a + x^b).$$

Ciąg wielomianów $W_k(x)$ ma kilka istotnych własności, które są spełnione na mocy definicji ciągu $W_k(x)$ i indukcji.

- $1 + x^a + x^b \mid W_k(x)$.
- $\deg W_k(x) \leqslant k + b$.
- Wszystkie współczynniki wielomianu $W_k(x)$ stojące przy potęgach $x^0, x^1, \ldots, x^k$ są niezerowe.
- Wszystkie współczynniki wielomianu $W_k(x)$ należą do zbioru $\{-1, 0, 1\}$.

Pozostaje teraz udowodnić, że wielomian $W_{n-b}(x)$ jest postaci $\pm 1 \pm x \pm \ldots \pm x^n$, czyli że

$$\overline{W_{n-b}} = \overline{1 + x + \ldots + x^n}.$$

Zauważmy, że skoro $F \mid W_{n-b}$ to

$$\overline{W_{n-b} \bmod F} = 0 = \overline{(1 + x + \ldots + x^n) \bmod F}.$$

Stąd wynika, że

$$0 = \overline{(W_{n-b} - (1 + x + \ldots + x^n)) \bmod F} = \overline{\overline{W_{n-b} - (1 + x + \ldots + x^n)} \bmod F}.$$

Z własności wielomianu W_{n-b} wiemy, że wszystkie współczynniki przy x^0, x^1, x^2, …, x^{n-b} wielomianu $W_{n-b} - (1 + x + \ldots + x^n)$ są parzyste, czyli

$$\overline{W_{n-b} - (1 + x + \ldots + x^n)} = x^{n-b+1} S.$$

gdzie S jest wielomianem o współczynnikach ze zbioru $\{0, 1\}$ stopnia najwyżej $b - 1$. Ponieważ zachodzi $\overline{x^{n-b+1} S \bmod F} = 0$ to ze stwierdzenia 3 otrzymujemy, że $\overline{S \bmod F} = 0$. Ponieważ $\deg S \leqslant b - 1 < \deg F$ to $S \bmod F = S$ i stąd mamy $\overline{S} = 0$. To z kolei oznacza, że:

$$\overline{W_{n-b}} = \overline{\overline{x^{n-b+1} S} + (1 + x + \ldots + x^n)} = \overline{1 + x + \ldots + x^n}$$

Co kończy dowód.

Uwaga. Część rozumowania można formalnie uprościć, rozważając wielomiany o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}_2$. Stwierdzenie 5 oznacza, że istnieje n, dla którego wielomian $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ jest podzielny przez $1 + x^a + x^b$ w $\mathbb{Z}_2[x]$ (zbiorze wielomianów o współczynnikach $\mathbb{Z}_2$). W dalszej części dowodu widzimy, że wielomian $W_{n-b} - (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$ w $\mathbb{Z}_2[x]$:

- jest stopnia co najwyżej n,
- jest podzielny przez $1 + x^a + x^b$,
- jest postaci $x^{n-b+1} P(x)$, gdzie $\deg P < b$.

Ponieważ x oraz $1 + x^a + x^b$ są względnie pierwsze, to musi być $1 + x^a + x^b \mid P(x)$. Jednak $\deg P(x) < b$, skąd $P(x)$ jest wielomianem zerowym i w konsekwencji $W_{n-b} - (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$ również.

Zawody drużynowe

1. Rozstrzygnąć, czy dla każdego ciągu liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że spełniona jest nierówność

$$n \cdot \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) > 1.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że odpowiedź jest pozytywna. Najpierw jednak udowodnimy następujący lemat.

Lemat. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *jest rozbieżny do nieskończoności.*

Dowód. Zauważmy, że zastępując każdy składnik sumy $\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n}$ przez jej najmniejszy składnik otrzymujemy szacowanie

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \geqslant 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

W takim razie

$$\sum_{n=1}^{2^\ell} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} > \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{2} = \ell \cdot \frac{1}{2}.$$

Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest zatem rozbieżny do nieskończoności. □

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że ciąg liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots$ jest taki, że nierówność z zadania jest spełniona tylko dla skończenie wielu indeksów n. Wówczas istnieje takie M, że dla każdego $n \geqslant M$ zachodzi nierówność

$$n \cdot \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) \leqslant 1.$$

Przekształćmy równoważnie tę nierówność:

$$\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \leqslant \frac{1}{n}$$
$$\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{n+1}{n}$$
$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{a_n}{n}$$

Po zsumowaniu powyższej nierówności dla $n = M, M+1, \ldots, M+k-1$ otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{M+i} + \frac{a_{M+k}}{M+k} \leqslant \frac{a_M}{M}$$

Z lematu wynika, że dla dostatecznie dużej liczby całkowitej k lewa strona powyższej nierówności jest większa od prawej — sprzeczność. Dowód nie wprost jest zakończony.

2. Udowodnić, że istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b > 0$ takich, że $a + b$ jest liczbą całkowitą, zachodzi

$$\{a^2\} + \{b^2\} + \frac{C}{(a+b)^2} \leqslant 2,$$

gdzie $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ oznacza część ułamkową liczby x.

Rozwiązanie:

Można bez straty ogólności założyć, że $b \geqslant a$. Rozważmy dodatnie liczby rzeczywiste $b \geqslant a$ o całkowitej sumie N. Oznaczmy $\varepsilon_1 = a - \sqrt{\lfloor a^2 \rfloor}$, $\varepsilon_2 = \sqrt{\lfloor b^2 \rfloor + 1} - b$ oraz $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Wówczas

$$\lfloor a^2 \rfloor + 1 > a^2 \geqslant (a-\varepsilon)^2 \geqslant (a-\varepsilon_1)^2 = \lfloor a^2 \rfloor$$

$$\lfloor b^2 \rfloor + 1 = (b+\varepsilon_2)^2 \geqslant (b+\varepsilon)^2 \geqslant b^2 \geqslant \lfloor b^2 \rfloor$$

Oznaczmy $a' = a - \varepsilon$ oraz $b' = b + \varepsilon$. Wiemy, że jedna z liczb $(a')^2, (b')^2$ jest całkowita i z przedziału $[0, N^2]$. Ponadto z rozpisanych wcześniej nierówności wynika, że

$$\{(a')^2\} = (a')^2 - \lfloor a^2 \rfloor = (a')^2 - a^2 + \{a^2\}$$

$$\{(b')^2\} = (b')^2 - (\lfloor b^2 \rfloor + 1) = (b')^2 - b^2 + \{b^2\} - 1$$

Mamy zatem

$$\{(a')^2\} + \{(b')^2\} + 1 \geqslant \{a^2\} + \{b^2\} + (a')^2 - a^2 + (b')^2 - b^2 = \{a^2\} + \{b^2\} + 2\varepsilon(b-a) + 2\varepsilon^2 \geqslant \{a^2\} + \{b^2\}$$

Skoro $\{a^2\} + \{b^2\} \leqslant \{(a')^2\} + \{(b')^2\} + 1$ to wystarczy udowodnić nierówność

$$\{(a')^2\} + \{(b')^2\} \leqslant 1 - \frac{C}{N^2}$$

dla pewnej stałej $C > 0$ niezależnej od N. Jak wcześniej wykazaliśmy, jedna z liczb $(a')^2$, $(b')^2$ jest całkowita. Oznaczmy ją przez x, wtedy druga z liczb jest równa $(N - \sqrt{x})^2$. Należy dowieść, że dla pewnej stałej $C > 0$ niezależnej od N i dowolnej liczby całkowitej $x \in [0, N^2]$ zachodzi nierówność

$$\{(N - \sqrt{x})^2\} \leqslant 1 - \frac{C}{N^2}.$$

Wykażemy, że stała $C = \frac{1}{4}$ spełnia warunki zadania. Lewa strona nierówności wynosi

$$\{N^2 - 2N\sqrt{x} + x\} = \{-2N\sqrt{x}\} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \\ 1 - \{2N\sqrt{x}\} & \text{gdy } \sqrt{x} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$\{2N\sqrt{x}\} \geqslant \frac{1}{4N^2},$$

dla dowolnych liczb całkowitych x, N, przy czym $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$ i $x^2 < N$.

Niech $d = \lfloor 2N\sqrt{x} \rfloor$. Wtedy

$$\{2N\sqrt{x}\} = 2N\sqrt{x} - d = \frac{4N^2x - d^2}{2N\sqrt{x} + d} \geqslant \frac{4N^2x - d^2}{4N^2} \geqslant \frac{1}{4N^2},$$

gdyż $2N\sqrt{x} + d \leqslant 4N^2$ i $4N^2x - d^2$ jest dodatnią liczbą całkowitą.

Uwaga. W ostatnim szacowaniu zamiast $4N^2x - d^2 \geqslant 1$ możemy zauważyć, że w tym wypadku nawet $4N^2x - d^2 \geqslant 3$, bo $d^2 \equiv 0$ lub $1 \pmod 4$. To daje stałą $C = \frac{3}{4}$, i można wykazać, że jest ona optymalna.

3. Danych jest 101 kart, na których są napisane kolejne liczby naturalne od 0 do 100. Wykonujemy następującą operację: tasujemy karty, następnie zdejmujemy je po kolei z talii i po zdjęciu każdej karty z wyjątkiem ostatniej piszemy na tablicy średnią arytmetyczną dotychczas zdjętych kart. Powtarzamy tę operację 100 razy, za każdym razem licząc do średniej tylko karty zdjęte po ostatnim tasowaniu. W ten sposób napisaliśmy na tablicy 10000 liczb. Udowodnić, że pewne dwie z nich są równe.

Rozwiązanie:

Załóżmy nie wprost, że zapisane liczby są parami różne. Przyjmijmy, że liczby zapisane jako pierwsze po każdym tasowaniu zapisane są kolorem czerwonym, liczby zapisane jako drugie po każdym tasowaniu są zapisane kolorem zielonym, a liczby zapisane jako ostatnie (setne) po każdym tasowaniu kolorem są zapisane kolorem niebieskim.

Zauważmy, że jeśli nieodkryta karta po wyłożeniu stu kart zawiera liczbę x, to ostatnia liczba napisana na tablicy równa się

$$\frac{1}{100}\cdot(0+1+2+\ldots+100-x)=\frac{1}{100}\cdot(5050-x).$$

Ponieważ założyliśmy, że liczby zapisane na tablicy są parami różne, więc wśród liczb zapisanych na niebiesko wystąpią co najmniej dwie z następujących liczb:

$$\frac{1}{100}\cdot(5050-100)=\frac{99}{2},\quad \frac{1}{100}\cdot(5050-50)=50,\quad \frac{1}{100}\cdot(5050-0)=\frac{101}{2}.$$

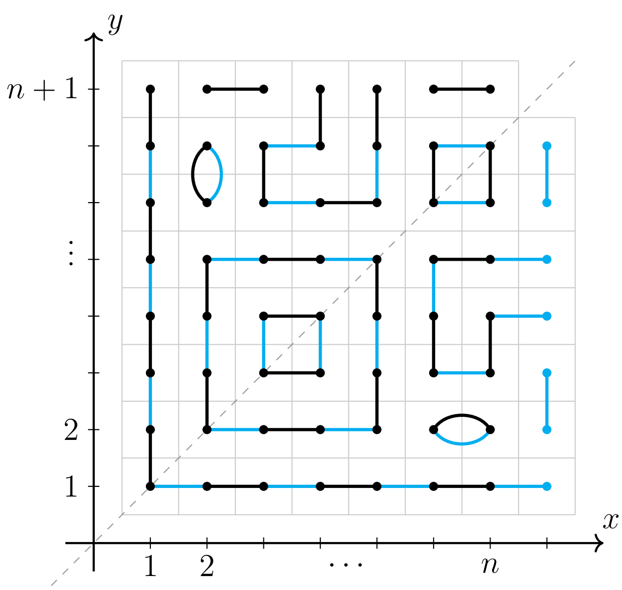
Zauważmy, że liczby zapisane na czerwono mogą przyjąć jedynie wartości ze zbioru $\{0,1,\ldots,100\}$, a liczby napisane na zielono — wartości ze zbioru $\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots,\frac{199}{2}\}$. Wynika stąd, że liczby zapisane na czerwono i zielono mogą przyjąć 201 możliwych wartości, a skoro tych liczb jest 200, to wśród liczb zapisanych tymi kolorami występują któreś dwie spośród $\frac{99}{2}$, 50, $\frac{101}{2}$.

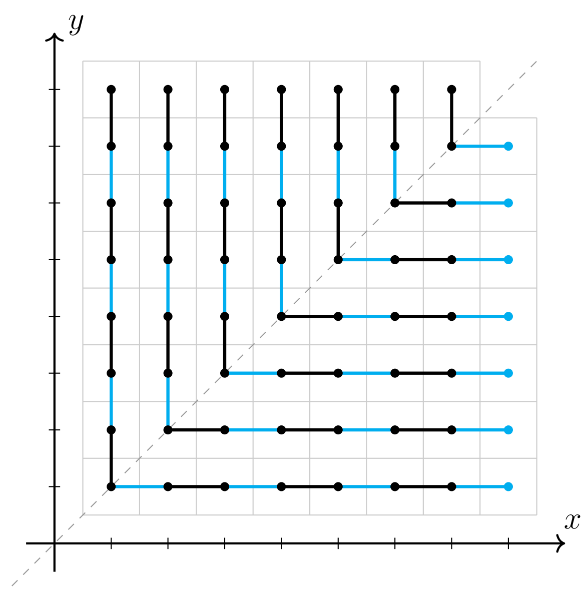
Zatem któraś z liczb $\frac{99}{2}, 50, \frac{101}{2}$ została zapisana zarówno na niebiesko jak i na czerwono lub na zielono, co daje sprzeczność kończącą dowód.

4. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 1$ liczba pokryć dominami prostokąta $n\times(n+1)$ jest nieparzysta.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenie $[n]:=\{1,2,\ldots,n\}$. Podzielmy prostokąt na jednostkowe pola i wprowadźmy układ współrzędnych w taki sposób, aby środki pól rozważanego prostokąta tworzyły zbiór $[n]\times[n+1]$. Rozważmy dowolne pokrycie dominami $\mathcal{T}$, w którym dla wygody każdą kostkę domina będziemy utożsamiać z odcinkiem łączącym środki sąsiadujących pól prostokąta. Niech $\mathcal{T}'$ będzie układem odcinków symetrycznym do $\mathcal{T}$ względem prostej $y=x$.





Rozważmy graf $G(\mathcal{T})$, którego wierzchołkami są wszystkie punkty (x,y) dla $x,y\in[n+1]$ z wyjątkiem $(n+1,n+1)$ oraz krawędziami są odcinki ze zbioru $\mathcal{T}\cup\mathcal{T}'$ (jeżeli pewien odcinek jest w obydwu zbiorach, traktujemy go jako cykl o długości 2). Zauważmy, że wszystkie wierzchołki $G(\mathcal{T})$ ze zbioru $[n] \times [n]$ mają stopień równy 2, a pozostałe $2n$ wierzchołków (ze zbioru $\{n+1\} \times [n] \cup [n] \times \{n+1\}$) mają stopień równy 1. To oznacza, że $G(\mathcal{T})$ jest sumą n ścieżek prostych oraz pewnej liczby cykli. Udowodnimy dwa lematy, z których wprost wyniknie teza zadania.

Lemat 1. *Istnieje dokładnie jedno pokrycie $\mathcal{T}$, dla którego w $G(\mathcal{T})$ nie ma ani jednego cyklu przechodzącego przez wierzchołek postaci (x, x) (gdzie $x \in [n]$).*

Dowód. Zauważmy, że każdy wierzchołek postaci (x, x) należy do innej z n ścieżek składających się na $G(\mathcal{T})$, gdyż prosta $y = x$ jest osią symetrii grafu $G(\mathcal{T})$. W szczególności każda ścieżka ma końce po przeciwnych stronach prostej $y = x$. Ponadto ścieżki się nie przecinają, więc kolejność ich występowania na prostych $x = n + 1$, $y = x$, $y = n + 1$ jest jednakowa. To oznacza, że każdy ze zbiorów

$$P_i = \{(x, y) \in [n+1] \times [n+1] \mid \min(x, y) = i\}$$

dla $i \in [n]$ indukuje ścieżkę w $G(\mathcal{T})$. Pozostaje zauważyć, że istnieje dokładnie jedno pokrycie $\mathcal{T}$ o tak określonym grafie $G(\mathcal{T})$ — mianowicie takie, w którym domina są ułożone wzdłuż ścieżek P_i w taki sposób, że pokrywają wszystkie pola ze zbioru $[n] \times \{n+1\}$. □

Lemat 2. *Liczba pokryć $\mathcal{T}$ o tej własności, że co najmniej jeden wierzchołek $G(\mathcal{T})$ postaci (x, x) (gdzie $x \in [n]$) należy do pewnego cyklu jest parzysta.*

Dowód. Dla każdego takiego pokrycia niech C będzie cyklem przechodzącym przez pole (x, x) dla najmniejszego z możliwych x. Niech $f(\mathcal{T})$ będzie pokryciem powstałym z $\mathcal{T}$ poprzez zmianę ułożenia kostek na cyklu C na kostki pochodzące z $\mathcal{T}'$. Oczywiście $f(\mathcal{T}) \neq \mathcal{T}$. Łatwo sprawdzić, że $f(f(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$, gdyż $G(\mathcal{T}) = G(f(\mathcal{T}))$, więc w obydwu grafach wybierzemy ten sam cykl C. To oznacza, że f jest bijekcją bez punktów stałych, co dowodzi tezy lematu. □

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym H jest ortocentrum, a D jest spodkiem wysokości opuszczonej na bok BC. Punkt P spełnia warunek $AP = HP$ oraz prosta AP jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Prosta PD przecina proste AB, AC odpowiednio w punktach X, Y. Udowodnić, że kąty $\sphericalangle YHX$ oraz $\sphericalangle BAC$ są równe lub dopełniają się do $180°$.

Rozwiązanie:

Sposób 1. Niech AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC po raz drugi w punkcie K. Niech M i N będą odpowiednio środkami AH i AK, a punkt O środkiem okręgu opisanego na ABC. Znanym faktem jest, iż K jest odbiciem H względem BC. Ponadto, trójkąty prostokątne PAM oraz AON są podobne. W takim razie

$$\frac{PM}{PA} = \frac{AN}{AO} = \frac{\frac{1}{2}(AH + HK)}{AO} = \frac{MH + HD}{AO} = \frac{MD}{AO},$$

więc trójkąty PMD i PAO są podobne. Stąd $\sphericalangle PDA = \sphericalangle PDM = \sphericalangle POA$ i punkty P, A, O, D leżą na jednym okręgu. Stąd

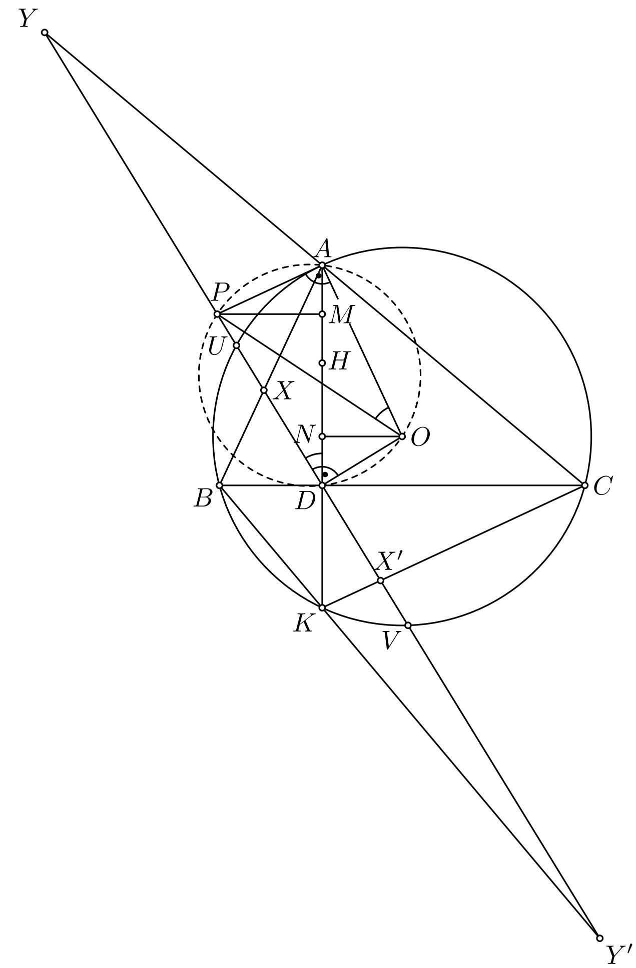
$$\sphericalangle PDO = \sphericalangle PAO = 90°.$$

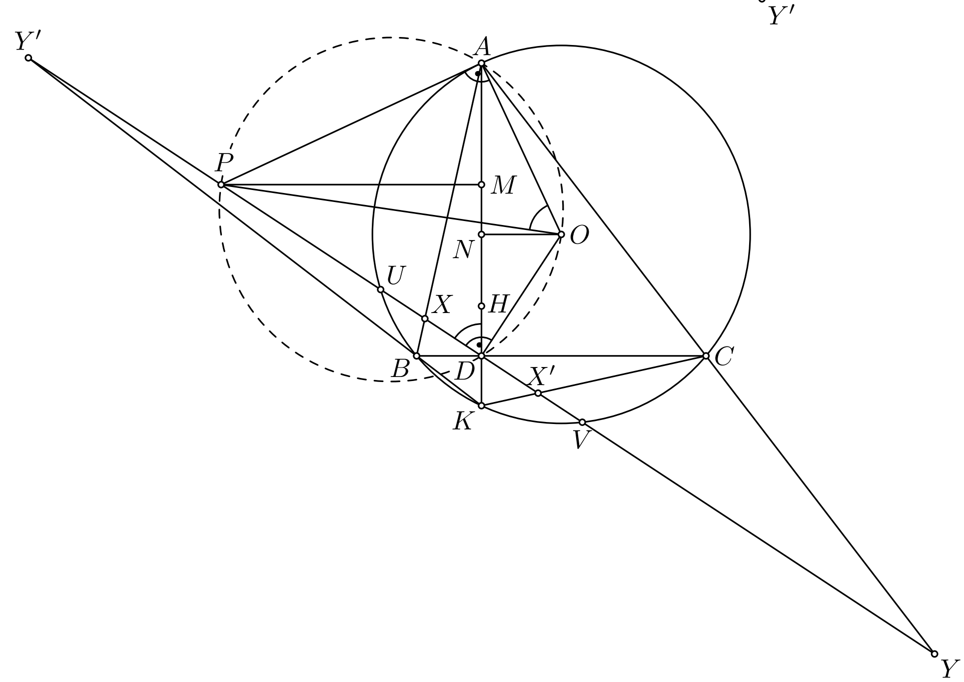
Niech prosta PD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach U i V. Skoro $OD \perp PD$, to $UD = VD$.

Niech prosta PD przecina proste CK i BK odpowiednio w punktach X' i Y'. Z twierdzenia o motylku wynika, że X' oraz Y' są symetryczne względem D do odpowiednio X oraz Y. Stąd

$$\sphericalangle YHX = \sphericalangle Y'KX'.$$

Ostatni kąt jest kątem między prostymi BK i CK, a więc jest równy $\sphericalangle BAC$ lub dopełnia się z nim do $180°$, co kończy dowód.

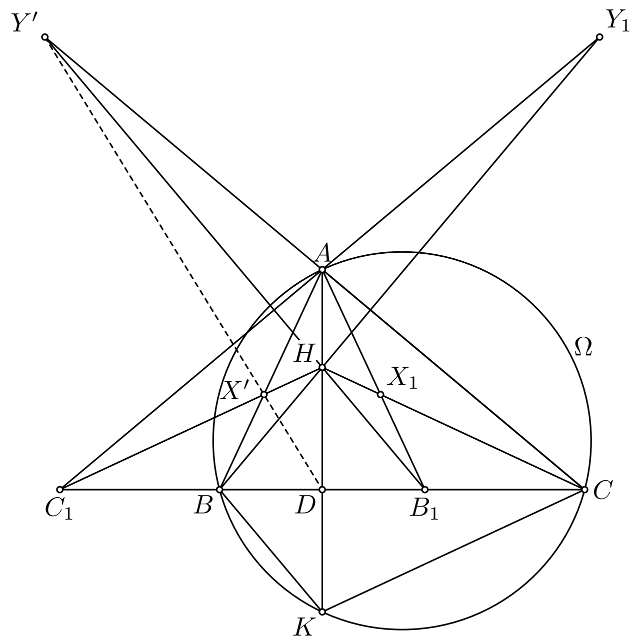




Sposób 2. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez Ω. Niech K będzie punktem symetrycznym do H względem BC. Powszechnie wiadomo, że K leży na Ω. Niech X' i Y' będą takimi punktami na odpowiednio prostych AB i AC, że $HX' \parallel CK$ i $HY' \parallel BK$. Najpierw wykażemy, że punkty X', D, Y' są współliniowe. W tym celu zauważmy, że jeden z punktów X', Y' leży na boku AB bądź AC, a drugi

na przedłużeniu drugiego boku. Wystarczy sprawdzić, że spełniona jest równość Menelaosa:

$$\frac{AX'}{X'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CY'}{Y'A} = 1. \tag{$\heartsuit$}$$



Niech X_1, Y_1, B_1 i C_1 będą punktami symetrycznymi do odpowiednio punktów X' Y', B i C względem prostej AD. Wtedy X_1 leży na CH, Y_1 leży na BH, a ponadto $B_1C = BC_1$, $AX' = AX_1$, $X'B = X_1B_1$, $AY' = AY_1$, $Y'C = Y_1C_1$. Z twierdzenia Menelaosa mamy

$$\frac{AX_1}{X_1B_1} \cdot \frac{B_1C}{CD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1$$

oraz

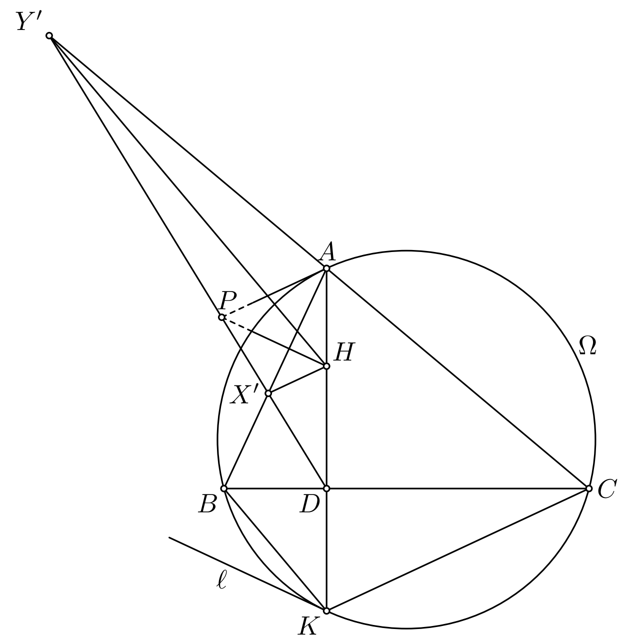
$$\frac{C_1Y_1}{Y_1A} \cdot \frac{AH}{HD} \cdot \frac{DB}{BC_1} = 1.$$

Po wymnożeniu tych dwóch równości stronami i skróceniu równych odcinków pojawiających się w liczniku i mianowniku otrzymujemy zależność ($\heartsuit$).

Teraz udowodnimy, że prosta $X'Y'$ przechodzi przez P, co doprowadzi do wniosku, że $X' = X$, $Y' = Y$ i do tezy. Oznaczmy punkty przecięcia prostych AP i HP z prostą $X'Y'$ odpowiednio przez P_1 i P_2. Niech jeszcze ℓ będzie prostą styczną do Ω w punkcie K. Wtedy $\ell \parallel HP$. Mamy następujący ciąg równości dwustosunków:

$$\begin{aligned}(P_1, D; X', Y') &= (AP_1, AD; AX', AY') = (A, K; B, C) = (KA, \ell; KB, KC) \\ &= (HA, HP; HY', HX') = (D, P_2; Y', X').\end{aligned}$$

Powyższe równości wzięły się kolejno z zastosowania następujących przekształceń rzutowych: rzutowanie prostej $X'Y'$ na pęk prostych w A, rzutowanie pęku prostych w A na okrąg Ω, rzutowanie okręgu Ω na pęk prostych w K, przesunięcie pęku prostych w K o wektor $\overrightarrow{KH}$ na pęk prostych w H, rzutowanie pęku prostych w H na prostą $X'Y'$. Ponieważ $(P_1, D; X', Y') = (D, P_2; Y', X') = (P_2, D; X', Y')$, więc punkty P_1 i P_2 się pokrywają. W konsekwencji proste AP i PH przecinają się w punkcie leżącym na $X'Y'$, a to oznacza, że P leży na $X'Y'$.



6. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz jego ortocentrum H. Punkt P leży wewnątrz trójkąta BHC, przy czym $\sphericalangle HPC = 3\sphericalangle HBC$ oraz $\sphericalangle HPB = 3\sphericalangle HCB$. Punkty X i Y są odbiciami punktu P odpowiednio względem prostych BH i CH. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AXY. Udowodnić, że $\sphericalangle BAS = \sphericalangle CAP$.

Rozwiązanie:

Niech proste AH, BH, CH przecinają boki trójkąta ABC odpowiednio w punktach D, E, F. Niech R będzie odbiciem środka okręgu opisanego na ABC względem BC. Udowodnimy, że

- punkty A, P, R są współliniowe,
- trójkąty ABC oraz AXY są podobne i zgodnie zorientowane.

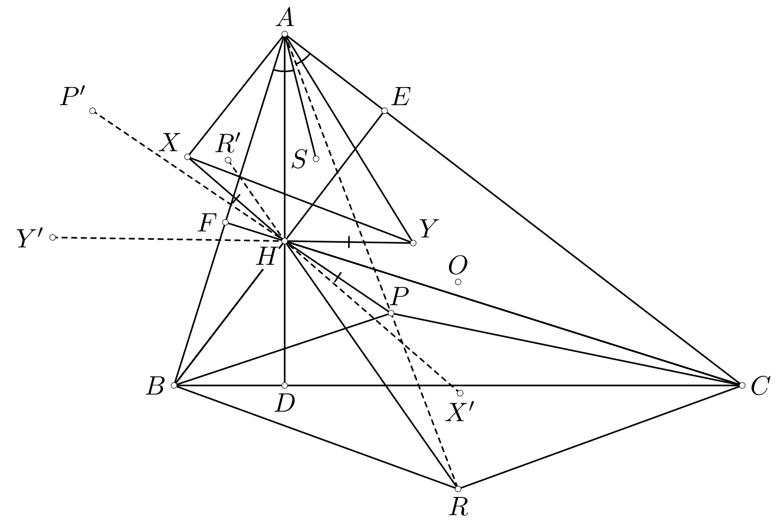
Zanim przejdziemy do dowodu powyższych faktów, użyjmy ich do dokończenia dowodu zadania. Ponieważ $XH = PH = YH$ oraz

$$\begin{aligned}\sphericalangle XHY &= 360^\circ - \sphericalangle XHB - \sphericalangle BHP - \sphericalangle PHC - \sphericalangle CHY = 360^\circ - 2\sphericalangle BHP - 2\sphericalangle PHC \\ &= 360^\circ - 2\sphericalangle BHC = \sphericalangle BRC,\end{aligned}$$

więc istnieje podobieństwo przenoszące $AXYHS$ na $ABCRO$. Wtedy

$$\sphericalangle BAS = \sphericalangle BAH + \sphericalangle HAS = \sphericalangle CAO + \sphericalangle OAR = \sphericalangle CAR,$$

co zakończy dowód.



Rozważmy przekształcenie będące złożeniem inwersji w H o promieniu $\sqrt{HA \cdot HD}$ z symetrią względem punktu H. Widzimy, że punkty A, B, C przechodzą odpowiednio na D, E, F. Niech w tym przekształceniu P przejdzie na punkt P', a punkt R na punkt R'. Wtedy

$$\sphericalangle EFP' = \sphericalangle HFP' - \sphericalangle HFE = \sphericalangle HPC - \sphericalangle HBC = 2\sphericalangle HBC = \sphericalangle DFE.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\sphericalangle FEP' = \sphericalangle HEP' - \sphericalangle HEF = \sphericalangle HPB - \sphericalangle HCB = 2\sphericalangle HCB = \sphericalangle DEF.$$

Stąd P' jest odbiciem D względem EF.

Ponieważ punkt R jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie HBC (bo odbicie H względem BC leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC), a w opisanym przekształceniu ten okrąg przechodzi na prostą EF, więc punkt R', jako obraz R, jest odbiciem H względem prostej EF.

Stąd wynika, że $HR'P'D$ jest trapezem równoramiennym. W szczególności jest to czworokąt wpisany w okrąg, zatem z własności inwersji wynika, że punkty A, P, R są współliniowe.

Niech X' oraz Y' będą obrazami odpowiednio X i Y w rozważanym przekształceniu. Wtedy X' oraz Y' są odbiciami punktu P' odpowiednio względem prostych BH i CH. Mamy

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle AXH - \sphericalangle YXH = \sphericalangle X'DH - \sphericalangle X'Y'H = \sphericalangle X'DE + \sphericalangle EDH - \sphericalangle X'Y'H.$$

Zauważmy, że

$$\sphericalangle X'Y'H = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \sphericalangle X'HY'\right) = \frac{1}{2}\left(2\sphericalangle EHF - 180^\circ\right) = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle EDH.$$

oraz

$$\sphericalangle X'DE = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \sphericalangle DEX'\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\sphericalangle DEH\right) = \sphericalangle ABC.$$

Stąd $\sphericalangle AXY = \sphericalangle ABC$. Analogicznie $\sphericalangle AYX = \sphericalangle ACB$, co kończy dowód.

7. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że największy dzielnik pierwszy liczby $n^4 + 1$ jest większy niż $2n$.

Rozwiązanie:

Weźmy taką liczbę pierwszą $p > 2$, że istnieje n, dla którego liczba $n^4 + 1$ jest podzielna przez p. Niech n_p będzie najmniejszym dodatnim n o tej własności. Wykażemy, że $2n_p < p$. Ponieważ podzielność n^4+1 przez p zależy tylko od reszty z dzielenia n przez p, mamy $n_p < p$. Jeśli $2n_p > p$, to $0 < p - n_p < n_p$ i $(p - n_p)^4 + 1 \equiv n_p^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, co przeczy wyborowi n_p. Zatem istotnie $2n_p < p$.

Zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych będących dzielnikami liczb postaci $n^4 + 1$. Istotnie, gdyby $p_1, \ldots, p_k$ były wszystkimi takimi liczbami pierwszymi, to liczba $(p_1 \ldots p_k)^4 + 1$ nie miałaby dzielników pierwszych, sprzeczność. Teraz pozostaje zauważyć, że gdyby istniało ograniczenie M na wszystkie liczby postaci n_p, to dla dostatecznie dużych p otrzymalibyśmy sprzeczność: $0 < n_p^4 + 1 \leqslant M^4 + 1 < p$ i $p \mid n_p^4 + 1$. Stąd wynika, że liczb n_p jest nieskończenie wiele.

8. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Mówimy, że liczba m jest n-bezkwadratowa jeśli nie istnieje $2n+1$ różnych liczb pierwszych p_i takich, że $p_i^2 \mid m$. Weźmy dwie względnie pierwsze dodatnie liczby całkowite a, b. Udowodnić, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite x, y że liczba $ax^n + by^n$ jest n-bezkwadratowa.

Rozwiązanie:

Będziemy rozważać x należące do pewnego ciągu arytmetycznego $x_k = Ak + B$ przy ustalonym y. Udowodnimy, że jeśli liczba pierwsza p jest względnie pierwsza z $A \cdot a \cdot n \cdot b \cdot y$, to dla dowolnego i, spośród liczb

$$ax_i^n + by^n, ax_{i+1}^n + by^n, \ldots, ax_{i+p^2-1}^n + by^n$$

najwyżej n z nich jest podzielne przez p^2.

Wynika to z trzech faktów.

Po pierwsze, skoro p^2 jest względnie pierwsze z A, to wśród liczb

$$x_i = Ai + B, x_{i+1} = A(i+1) + B, \ldots, x_{i+p^2-1} = A(i + p^2 - 1) + B$$

każda reszta z dzielenia modulo p^2 występuje dokładnie raz.

Po drugie, istnieje co najwyżej n takich $0 \leqslant x < p$, które spełniają przystawanie

$$x^n \equiv -a^{-1} b y^n \pmod{p}.$$

Po trzecie, skoro $p \nmid n$ oraz $p \nmid x$ (bo $p \nmid a, b, y$) to dla l niepodzielnych przez p mamy

$$(x + lp)^n \equiv x^n + nlpx^{n-1} \not\equiv x^n \pmod{p^2}.$$

Z faktu drugiego i trzeciego wynika, że istnieje co najwyżej n takich $0 \leqslant x < p^2$, które spełniają przystawanie

$$x^n \equiv -a^{-1} b y^n \pmod{p^2}.$$

Dlatego spośród $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p^2-1}$ co najwyżej n spełnia podzielność

$$ax^n + by^n \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Zatem jeśli mamy liczbę pierwszą p względnie pierwszą z $A \cdot a \cdot n \cdot b \cdot y$ oraz pewną dużą liczbę całkowitą dodatnią N to wśród liczb

$$ax_1^n + by^n, ax_2^n + by^n, \ldots, ax_N^n + by^n$$

co najwyżej $n(N/p^2 + 1)$ jest podzielne przez p^2.

Załóżmy na chwilę, że udało nam się tak dobrać liczby A, B, y, że żadna liczba pierwsza mniejsza od $\max(a, b, 10n+2)$ lub dzieląca A lub y nie może podzielić $ax_k^n + by^n$ dla żadnego $k \geqslant 1$. Wtedy dla ustalonego N liczba wyrazów ciągu $ax_1^n + by^n, \ldots, ax_N^n + by^n$ podzielnych przez kwadrat jakiejś liczby pierwszej $\leqslant \sqrt{N}$ wynosi najwyżej

$$\sum_{10n+2 \leqslant p \leqslant \sqrt{N}} n\left(\frac{N}{p^2} + 1\right) \leqslant n\sqrt{N} + nN \cdot \sum_{k=10n+2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Ponieważ
$$\sum_{k=10n+2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=10n+2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{10n}$$
to liczba wyrazów ciągu podzielnych przez jakikolwiek kwadrat liczby pierwszej p^2, gdzie $p \leqslant \sqrt{N}$, wynosi najwyżej
$$\frac{1}{10}N + n\sqrt{N},$$
co jest mniejsze od N, jeśli tylko $N > \frac{100}{81}n^2$. Dla takich N znajdziemy takie $1 \leqslant j \leqslant N$, że $ax_j^n + by^n$ nie dzieli się przez p^2 dla żadnej liczby pierwszej mniejszej równej $\sqrt{N}$. Jeśli ta liczba nie jest n-bezkwadratowa, to ma $2n+1$ dzielników pierwszych p spełniających $p^2 > N$. Stąd wynika, że ta liczba wynosi przynajmniej N^{2n+1} co dla odpowiednio dużych N jest większe od $ax_N^n + by^n$. To oznacza, że dla odpowiednio dużych N znaleziona liczba jest n-bezkwadratowa.

Pozostaje wskazać odpowiednie A, B, y. Ustalmy zatem, że A jest podzielne przez wszystkie liczby pierwsze mniejsze równe $C = \max(a, b, 10n+2)$. Niech teraz $p \leqslant C$. Jeśli $p \mid a$, to ustalmy
$$B \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{oraz} \quad y \equiv 0 \pmod{p}.$$
W przeciwnym razie ustalmy
$$B \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{oraz} \quad y \equiv 1 \pmod{p}.$$
Dzięki temu wiadomo, że $ax_k^n + by^n$ nie dzieli się przez żadne $p \leqslant C$. Ustalmy teraz (na mocy Chińskiego Twierdzenia o Resztach) y spełniający wszystkie żądane przystawania. Załóżmy dodatkowo, że $y \mid A$ i ustalmy A. Chcemy, żeby dla dowolnej liczby pierwszej $p > C$ dzielącej A, nie mogła ona podzielić
$$ax_k^n + by^n \equiv aB^n + by^n \pmod{p}.$$

Jak już wiemy z wcześniejszych rozważań, skoro $p > C \geqslant a$ to istnieje najwyżej n reszt r takich, że $ar^n + by^n \equiv 0 \pmod{p}$. Skoro zaś $p > C > n$ to zawsze istnieje taka reszta r, że $p \nmid ar^n + by^n$. Zażądajmy wtedy $B \equiv r \pmod{p}$ dla dowolnego $p > C$ takiego, że $p \mid A$. Wiemy teraz, że dla dowolnego x_k liczba $ax_k^n + by^n$ nie ma dzielników pierwszych $\leqslant C$ lub dzielących A lub y (wszystkie dzielniki y dzielą A), co kończy dowód.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Ciągi $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ zdefiniowane są wzorami

$$a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n},\ b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n},$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że $a_{2023!} < 5$.

Rozwiązanie:

Przekształćmy daną równość:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n} \\ a_{n+1} + 1 &= \frac{1 + a_n + a_n b_n + b_n}{b_n} \\ a_{n+1} + 1 &= \frac{(1 + a_n)(1 + b_n)}{b_n} \\ \frac{1}{a_{n+1} + 1} &= \frac{b_n}{(1 + a_n)(1 + b_n)}. \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{1}{b_{n+1} + 1} = \frac{a_n}{(1 + a_n)(1 + b_n)}.$$

W takim razie

$$\frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{b_{n+1} + 1} = \frac{b_n - a_n}{(1 + a_n)(1 + b_n)} = \frac{1 + b_n}{(1 + a_n)(1 + b_n)} - \frac{1 + a_n}{(1 + a_n)(1 + b_n)} = \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{b_n + 1}.$$

Zatem wartość wyrażenia $\frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{b_n + 1}$ nie zależy od n i jest równa

$$\frac{1}{a_1 + 1} - \frac{1}{b_1 + 1} = \frac{1}{1 + 1} - \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Zatem

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{a_{2023!} + 1} - \frac{1}{b_{2023!} + 1} < \frac{1}{a_{2023!} + 1} \implies a_{2023!} < 5.$$

2. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$ oraz liczby rzeczywiste dodatnie a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n spełniające równania $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ oraz $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$, przy czym liczby b_1, b_2, $\ldots$, b_n są parami różne. Udowodnić nierówność

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (1 - a_j)\, b_j \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b_j} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $b_1 < \ldots < b_n$. Rozważmy następujący wielomian

$$f(x) = (x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_j}{x - b_j}.$$

Jest on oczywiście stopnia $n-1$. Wykażemy, że ma on $n-1$ pierwiastków dodatnich. Ponieważ $f(b_i) = a_j \prod_{j\neq i}(b_j - b_i)$, to mamy $f(b_n) > 0$, $f(b_{n-1}) < 0$, ..., ogólnie $f(b_i)(-1)^{n-i} > 0$. Zatem f zmienia znak na każdym przedziale (b_i, b_{i+1}) dla $i = 1, \ldots, n-1$, więc f ma pierwiastek x_i na każdym takim przedziale.

Prostym rachunkiem sprawdzamy, że współczynnik wiodący f jest równy $\sum_{j=1}^n a_j = 1$, współczynnik przy x^{n-2} jest równy $-\sum_{i\neq j} a_i b_j = -\sum_{j=1}^n (1-a_j)b_j$, a wyraz wolny jest równy $(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^n a_j \prod_{i\neq j} b_i = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{b_j}$. Ze wzorów Viete'a wynika, że lewa strona dowodzonej nierówności jest średnią arytmetyczną liczb x_1, ..., x_{n-1}, a prawa strona jest ich średnią geometryczną. Nierówność między średnimi kończy dowód.

3. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y równość

$$f(xy + f(y))f(x) = x^2 f(y) + f(xy).$$

Rozwiązanie:

Niech $P(a, b)$ oznacza podstawienie $x = a$, $y = b$ do naszego głównego równania.

(A) Dla $P(0, y)$ dostajemy

$$f(f(y))f(0) = f(0).$$

Zatem $f(0) = 0$ lub $f(f(y)) = 1$ dla dowolnego y.

(B) Dla $P(x, 0)$ mamy

$$f(f(0))f(x) = x^2 f(0) + f(0).$$

Jeśli mielibyśmy $f(0) \neq 0$, to z (A) dostajemy $f(f(y)) = 1$ dla dowolnego y, w szczególności dla $y = 0$. Tak więc (B) przybiera postać $f(x) = x^2 f(0) + f(0)$. Jednak wtedy $1 = f(f(x)) = x^4 f(0)^2 + 2x^2 f(0)^2 + f(0)^2 + f(0)$, co daje sprzeczność. Tak więc

(C) $f(0) = 0$.

(D) Przypuśćmy, że $f(\alpha) = 0$ dla pewnego $\alpha \neq 0$. Rozważmy $P(x, \alpha)$:

$$f(\alpha x)f(x) = f(\alpha x).$$

Zatem $f(\alpha x) = 0$ lub $f(x) = 1$, i dla dowolnego x zachodzi któraś z tych dwóch możliwości.

(E) $P(\alpha, y)$:

$$\alpha^2 f(y) + f(\alpha y) = 0.$$

Stąd jeśli $f(\alpha y) = 0$, to $f(y) = 0$. Porównując z (D) mamy $f(y) = 0$ lub $f(y) = 1$ dla dowolnego y. Ale jeśli $f(y) = 1$, to $f(\alpha y) = -\alpha^2 < 0$, tak więc w tym przypadku dostajemy funkcję $f \equiv 0$. Sprawdzamy, że spełnia ona warunki zadania.

(F) Przejdźmy do przypadku, gdy f nie jest stale równa zero. Stąd (D) i (E) dają $f(x) = 0$ tylko dla $x = 0$. Rozważmy $y \neq 0$ i $P\left(-\frac{f(y)}{y}, 0\right)$:

$$0 = \frac{f(y)^3}{y^2} + f(-f(y)).$$

(G) Rozważmy $P\left(-\frac{y}{f(y)}, -f(y)\right)$ dla $y \neq 0$:

$$f(y + f(-f(y)))f\left(-\frac{y}{f(y)}\right) = \frac{y^2}{f(y)^2} f(-f(y)) + f(y).$$

Ale z (F) mamy $f(-f(y)) = -\frac{f(y)^3}{y^2}$, więc prawa strona jest równa zero. Z naszych wcześniejszych rozważań mamy $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, więc skoro $-\frac{y}{f(y)} \neq 0$, to $y + f(-f(y)) = 0$. Ponownie korzystając z (F), dostajemy $y - \frac{y^2}{f(y)^3} = 0$, czyli $y = f(y)$. Wiemy, że $f(0) = 0$, tak więc $f(x) = x$ dla dowolnego x. Bezpośrednio sprawdzamy, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

4. Dane są skończone zbiory $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ o następującej własności: dla dowolnego nieskończonego zbioru $X \subset \mathbb{N}$ istnieją i, j takie, że $|A_i \cap X| \geqslant 2$ i $|B_j \cap X| \geqslant 2$. Rozstrzygnąć, czy muszą istnieć k, ℓ takie, że $|A_k \cap B_\ell| \geqslant 2$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że odpowiedź na pytanie postawione w treści zadania jest twierdząca.

Rozważmy graf G o zbiorze wierzchołków $\mathbb{N}$, w którym wierzchołki x, y są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $x, y \in A_i$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$. Skorzystamy z twierdzenia Ramseya dla nieskończonych grafów. Jego dowód można znaleźć w broszurze z obozu naukowego OM w roku 2019, dostępnej na stronie OM.

Twierdzenie (Ramsey)**.** *W dowolnym grafie o nieskończonym zbiorze wierzchołków istnieje nieskończona klika lub nieskończona antyklika.*

Zauważmy, że graf G nie może zawierać nieskończonej antykliki. Jest tak dlatego, że z założeń zadania wynika, że w każdym nieskończonym zbiorze wierzchołków znajdziemy dwa, które są połączone krawędzią. W takim razie G zawiera nieskończoną klikę X. Z warunku danego w treści zadania wynika, że któryś ze zbiorów $B_1, B_2, \ldots$, powiedzmy B_ℓ, zawiera dwa elementy zbioru X, niech będą to x, y. Ponieważ X jest kliką w grafie G, wierzchołki x, y są połączone krawędzią, a to oznacza, że $x, y \in A_k$ dla pewnego k. W takim razie zbiory A_k i B_ℓ spełniają żądaną własność.

5. W pewnym państwie znajduje się n miast połączonych drogami. Każda droga łączy dwa miasta, zaś każde dwa miasta łączy co najwyżej jedna droga. Każda droga jest patrolowana przez pewną liczbę strażników. Z powodu inflacji wprowadzono następujące ograniczenia:

- na każdej drodze jest co najwyżej czterech strażników;
- jeśli każde dwa spośród miast A, B, C są połączone drogami, to na każdej z nich jest co najwyżej trzech strażników;
- jeśli każde dwa spośród miast A, B, C, D są połączone drogami, to na każdej z nich jest co najwyżej dwóch strażników.

Udowodnić, że wszystkie drogi są patrolowane łącznie przez co najwyżej n^2 strażników.

Rozwiązanie:

Będziemy dowodzić tezy indukcyjnie. Dla $n = 0, 1, 2$ jest ona oczywiście spełniona. Załóżmy $n \geqslant 3$.

Przypuśćmy, że pewna droga między miastami A i B jest patrolowana przez czterech strażników. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem pozostałych miast. Wówczas z założenia indukcyjnego, na drogach między miastami z $\mathcal{S}$ stoi co najwyżej $(n-2)^2$ strażników. Niech C będzie dowolnym miastem z $\mathcal{S}$. Wówczas z warunków zadania wiemy, że jest ono połączone z co najwyżej jednym spośród miast A, B. W takim razie na drogach pomiędzy C a $\{A, B\}$ jest co najwyżej czterech strażników. Sumując po wszystkich $C \in \mathcal{S}$ dostajemy, że między $\mathcal{S}$ a $\{A, B\}$ jest co najwyżej $4(n-2)$ strażników. W takim razie w całym państwie strażników jest co najwyżej

$$(n-2)^2 + 4(n-2) + 4 = n^2$$

strażników.

W przeciwnym wypadku każda droga ma co najwyżej trzech strażników. Przypuśćmy zatem, że na drodze między pewnymi A i B stoi dokładnie trzech strażników. Jeśli nie istnieje miasto C połączone z A i B jednocześnie, to na drodze między A i B moglibyśmy dodać strażnika, wracając do poprzedniego przypadku. Przypuśćmy więc, że takie miasto C istnieje, i niech ponownie $\mathcal{S}$ będzie zbiorem pozostałych miast. Podobnie jak wcześniej, wewnątrz miast $\mathcal{S}$ mamy nie więcej niż $(n-3)^2$ strażników z założenia indukcyjnego. Każde miasto $D \in \mathcal{S}$ jest połączone z co najwyżej dwoma spośród miast A, B, C, więc pomiędzy $\mathcal{S}$ a $\{A, B, C\}$ stoi co najwyżej $6(n-3)$ strażników. Wreszcie pomiędzy A, B i C mamy co najwyżej $3 \cdot 3 = 9$ strażników. Łącznie jest ich zatem nie więcej niż

$$(n-3)^2 + 6(n-3) + 9 = n^2.$$

Wreszcie, jeśli każda droga jest patrolowana przez co najwyżej dwóch strażników, to łącznie będzie ich nie więcej niż $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n \leqslant n^2$. To wyczerpuje wszystkie przypadki. Z zasady indukcji matematycznej teza zadania zachodzi.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Danych jest $2n$ niepustych podzbiorów $A_1, \ldots, A_{2n}$ zbioru $\big\{0, 1, 2, ..., 2n-1\big\}$, przy czym $|A_1| + \cdots + |A_{2n}| = \binom{2n+1}{2}$. Udowodnić, że można tak wybrać po jednej liczbie z każdego podzbioru, aby suma wybranych liczb była równa $\binom{2n}{2}$.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu użyjemy następującego lematu.

Lemat. *Danych jest m skończonych zbiorów $B_1, \ldots B_m$. Wtedy istnieje co najmniej*

$$|B_1| + \cdots + |B_m| - (m-1)$$

liczb, które można przedstawić w postaci $b_1 + \cdots + b_m$ dla pewnych $b_1 \in B_1, \ldots, b_m \in B_m$.

Dowód. Dowodzimy lematu indukcyjnie po m. Dla $m = 1$ teza jest oczywista.

Dla $m > 1$, niech T będzie zbiorem wszystkich liczb postaci $b_1 + \cdots + b_{m-1}$, gdzie $b_1 \in B_1, \ldots, b_{m-1} \in B_{m-1}$. Jeśli $t_1 < \cdots < t_{|T|}$ są wszystkimi, uporządkowanymi rosnąco elementami zbioru T, zaś $c_1 < \cdots < c_{|B_m|}$ są wszystkimi, uporządkowanymi rosnąco elementami zbioru B_m, to liczby

$$t_1 + c_1, t_2 + c_1, \ldots, t_{|T|} + c_1, t_{|T|} + c_2, \ldots, t_{|T|} + c_{|B_m|}$$

są różne i na mocy założenia indukcyjnego jest ich co najmniej

$$|T| + |B_m| - 1 \geqslant |B_1| + \cdots + |B_{m-1}| + (m-2) + |B_m| - 1 = |B_1| + \cdots + |B_{m-1}| + |B_m| - (m-1),$$

co kończy dowód lematu. □

Wracamy do rozwiązania zadania. Niech C będzie zbiorem liczb, które można przedstawić w postaci sumy liczb $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$, zaś niech D będzie zbiorem tych liczb, które można przedstawić w postaci sumy liczb $a_{n+1} \in A_{n+1}, \ldots, a_{2n} \in A_{2n}$. Z lematu wynika, że

$$|C| + |D| \geqslant |A_1| + \ldots + |A_{2n}| - 2n + 2 = \frac{1}{2}\left(2n(2n+1) - 4n + 4\right) = \frac{1}{2}\left(2n(2n-1) + 4\right) \geqslant \binom{2n}{2} + 2.$$

W takim razie zbiory C oraz $\big\{\binom{2n}{2} - d \colon d \in D\big\}$, zawarte w zbiorze $\big\{0, 1, \ldots, \binom{2n}{2}\big\}$, mają wspólny element. Czyli muszą istnieć takie $c \in C, d \in D$, które sumują się do $\binom{2n}{2}$, co kończy rozwiązanie zadania.

7. Wykazać, że istnieje taka liczba rzeczywista $c > 0$, że dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje nie więcej niż $cp^{\frac{2}{3}}$ takich dodatnich liczb całkowitych n, że $p \mid n! + 1$.

Rozwiązanie:

Ustalmy dodatnią liczbę całkowitą k i liczbę pierwszą p. Udowodnimy, że liczb n spełniających warunek z treści zadania jest co najwyżej

$$\binom{k+1}{2} + \left\lceil \frac{p}{k} \right\rceil.$$

Wtedy otrzymamy żądane oszacowanie podstawiając $k = \lfloor p^{1/3} \rfloor$.

Jeśli $p \mid n! + 1$, to musi zachodzić $n < p$. Podzielmy zbiór $\{1, 2, \dots, p-1\}$ na przedziały wielkości k, tj. dla $i = 1, \dots, \lceil \frac{p}{k} \rceil$ niech

$$A_i = \{(i-1)k + 1, (i-1)k + 2, \dots, ik\} \cap \{1, \dots, p-1\}.$$

Dla tych i, dla których istnieje $n \in A_i$ spełniające $p \mid n! + 1$, niech n_i będzie najmniejszą taką liczbą. Niech $N = \{n_i \colon i = 1, \dots, \lceil \frac{p}{k} \rceil\}$ oraz niech M będzie zbiorem tych n, dla których $p \mid n! + 1$, ale $n \notin M$. Oczywiście $|N| \leqslant \lceil \frac{p}{k} \rceil$, pozostaje udowodnić, że $|M| \leqslant \binom{k+1}{2}$.

W dalszej części rozwiązania skorzystamy z faktu, że wielomian stopnia t przyjmuje wartość podzielną przez p dla co najwyżej t elementów zbioru $\{1, \dots, p-1\}$. Zdefiniujmy wielomiany

$$f_m(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+m) - 1.$$

Zauważmy, że jeśli $m \in M \cap A_i$ spełnia $p \mid m! + 1$, to $f_{m-n_i}(n_i)$ jest podzielne przez p, przy czym $m - n_i \leqslant k$. To oznacza, że $|M|$ jest nie większa niż liczba takich par (t, n), przy czym $1 \leqslant t \leqslant k$ oraz $1 \leqslant n \leqslant p-1$, że $f_t(n)$ jest podzielne przez p. Dla ustalonego t odpowiednich n jest co najwyżej t, stąd

$$|M| \leqslant 1 + 2 \dots + k = \binom{k+1}{2},$$

co kończy dowód.

8. Niech S będzie niepustym zbiorem dodatnich liczb całkowitych o tej własności, że jeśli $a, b \in S$, to $ab + 1 \in S$. Udowodnić, że zbiór wszystkich liczb pierwszych, które nie dzielą żadnego elementu S, jest skończony.

Rozwiązanie:

Oczywiście zbiór S jest nieskończony. Dla dowolnej liczby pierwszej p niech S_p będzie zbiorem reszt z dzielenia elementów S przez p. Udowodnimy, że dla dowolnego p zbiór S_p jest jednoelementowy lub $0 \in S_p$. To implikuje tezę zadania: istotnie, jeśli $a, b \in S$ i $a \neq b$, to S_p może być jednoelementowy tylko gdy $p \mid a - b$, co zachodzi dla skończenie wielu liczb pierwszych p.

Pracujemy modulo p. Załóżmy, że 0 nie jest elementem S_p. Wybierzmy $a \in S_p$. Funkcja $f_a(x) = ax+1 \pmod p$, idąca z $\{0, 1, \dots, p-1\}$ w ten sam zbiór, jest bijekcją (gdyż $a \neq 0$). Z warunków zadania, musi ona mapować elementy zbioru S_p na elementy zbioru S_p. Z bijektywności dostajemy $x \in S_p \iff ax+1 \in S_p$. Tak więc dla dowolnego $b \in S_p$ mamy

$$x \in S_p \iff ax + 1 \in S_p \iff \frac{ax}{b} \in S_p,$$

gdyż $b\frac{ax}{b} + 1 = ax + 1$.

Niech $q = \frac{a}{b} \pmod p$. Jeśli S_p nie jest jednoelementowy, to możemy wybrać $a \neq b$, więc $q \neq 1$. Twierdzimy, że w tym przypadku suma elementów S_p jest równa zero. Niech d będzie najmniejszą liczbą naturalną dodatnią taką, że $q^d \equiv 1 \pmod p$. Wtedy S_p jest sumą mnogościową zbiorów postaci $\{x, xq, xq^2, \dots, xq^{d-1}\}$, które tworzą jego podział. Suma elementów w każdym takim zbiorze to

$$x(1 + q + \dots + q^{d-1}) = x\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod p,$$

więc faktycznie sumą elementów S_p również jest zero.

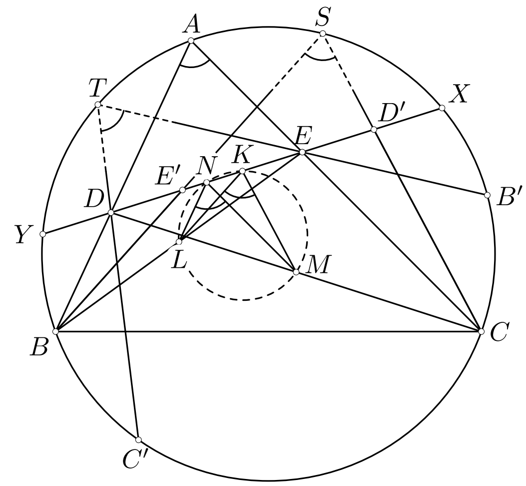
Jednocześnie, jeśli $s_1, \dots, s_k$ to elementy S_p, to wiemy, że $as_1 + 1, \dots, as_k + 1$ również jest listą elementów S_p z naszej wcześniejszej obserwacji o f_a. Suma tych liczb to $a(s_1 + \dots + s_k) + k$, co może być równe 0 modulo p tylko, jeśli $k = p$, w którym to przypadku oczywiście $0 \in S_p$.

To daje nam sprzeczność, w takim razie $0 \in S_p$ tak jak chcieliśmy.

9. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Punkty X, Y leżą na okręgu o, a cięciwa XY przecina boki AB i AC odpowiednio w D i E. Wykazać, że środki odcinków XY, BE, CD, DE leżą na okręgu.

Rozwiązanie:

Oznaczmy środki odcinków XY, BE, CD, DE przez odpowiednio K, L, M, N. Odcinki LN i MN są liniami środkowymi w trójkątach EBD i ECD, więc $LN \parallel AB$ i $MN \parallel AC$. Wobec tego $\sphericalangle LNM = \sphericalangle BAC$ i do zakończenia rozwiązania wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle LKM = \sphericalangle BAC$.



Niech D' i E' będą punktami symetrycznymi do D i E względem punktu K. Wówczas LK i MK są liniami środkowymi trójkątów $EE'B$ i $DD'C$, więc $LK \parallel E'B$ i $MK \parallel CD'$. Niech S będzie przecięciem prostych $E'B$ i CD'. Należy wykazać, że S leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, bowiem wtedy $\sphericalangle LKM = \sphericalangle BSC = \sphericalangle BAC$. Niech B', C' i T będą punktami symetrycznymi do odpowiednio B, C i S względem symetralnej odcinka XY. Ze względu na symetrię wystarczy wykazać, że T leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Zauważmy, że proste BB' i CC' są równoległe do prostej DE. W takim razie punkty D, E i „punkt przecięcia” prostych BB' i CC' są współliniowe. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pascala dla sześciokąta $TC'CABB'$ otrzymujemy, że punkty T, C', C, A, B, B' leżą na jednej stożkowej. Stożkową tą jest okrąg opisany na trójkącie ABC, gdyż leżą na nim punkty A, B, C, B', C'. To kończy dowód.

10. Dany jest trójkąt ABC. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ABC, J jest środkiem okręgu dopisanego stycznego do boku BC, a G środkiem ciężkości trójkąta BIC. Niech BI przecina AC w E, a CI przecina AB w F. Udowodnić, że $\sphericalangle BGC + \sphericalangle EJF = 180°$.

Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy przez J_C i J_B środki okręgów dopisanych do trójkąta ABC stycznych do boków odpowiednio AB i AC, przez L i M punkty przecięcia okręgu opisanego na trójkącie ABC z prostymi odpowiednio BI i CI, a przez S punkt przecięcia J_BM i J_CL.

Z twierdzenia o trójliściu wynika, że L i M są środkami okręgów opisanych na czworokątach odpowiednio $AICJ_B$ oraz $AIBJ_C$. W szczególności L i M są środkami średnic odpowiednich okręgów, czyli odpowiednio odcinków IJ_B i IJ_C. Stąd trójkąty LIM oraz J_BIJ_C są podobne oraz S jest środkiem ciężkości trójkąta J_BIJ_C. Ponadto trójkąty LIM oraz CIB są podobne, bo L, M, B, C leżą na jednym okręgu. Czyli z podobieństwa trójkątów J_BIJ_C oraz CIB otrzymujemy

$$\sphericalangle J_BSJ_C = \sphericalangle BGC. \tag{1}$$

Ze znanego twierdzenia o biegunowych otrzymujemy, że

$$EJ \perp LJ_C, \tag{2}$$

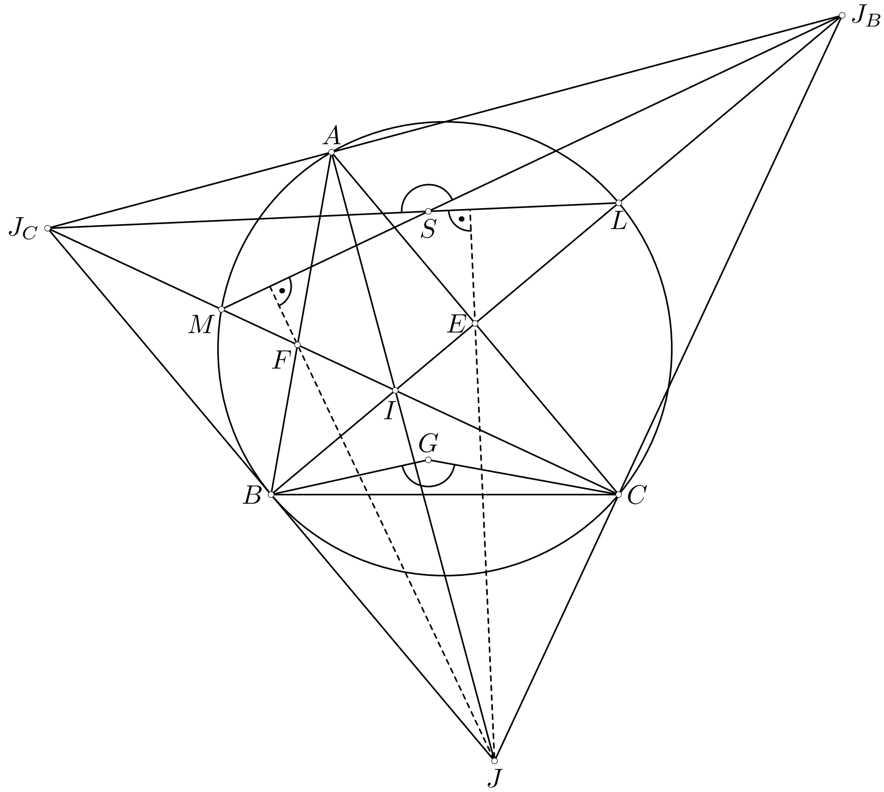
korzystając z tego, że punkty A, I, C, J_B leżą na okręgu o środku w L oraz

$$\{J\} = AI \cap CJ_B, \ \{J_C\} = CI \cap AJ_B, \ \{E\} = AC \cap IJ_B.$$

Analogicznie zachodzi

$$FJ \perp MJ_B. \tag{3}$$

Z połączenia (1), (2) oraz (3) bezpośrednio wynika teza.

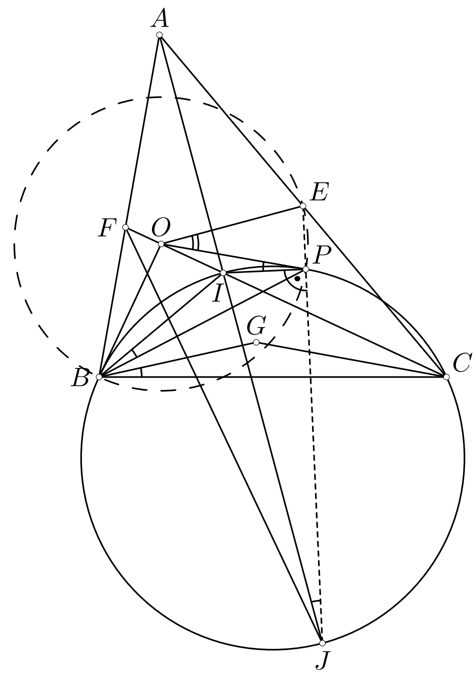


Sposób 2. Ponieważ $\sphericalangle BGC = 180° - \sphericalangle CBG + \sphericalangle BCG$, to wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle EJI = \sphericalangle CBG$ i $\sphericalangle IJF = \sphericalangle BCG$. Udowodnimy tylko pierwszą równość, druga będzie zachodzić analogicznie.

Niech P będzie takim punktem na okręgu opisanym na trójkącie BIC, że czworokąt $CBIP$ jest harmoniczny. Wówczas $\sphericalangle PBI = \sphericalangle CBG$. Wystarczy udowodnić, że punkty E, P, J są współliniowe, gdyż wtedy, ponieważ B, I, C, J leżą na okręgu, otrzymamy

$$\sphericalangle EJI = \sphericalangle PJI = \sphericalangle PBI = \sphericalangle CBG.$$

Do udowodnienia współliniowości tej trójki punktów wystarczy dowieść, że $\sphericalangle EPI = 90°$, gdyż IJ jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie BIC.



Czworokąt $CBIP$ jest harmoniczny, więc $PC/PI = BC/BI$. Z twierdzenia o dwusiecznej zachodzi $EC/EI = BC/BI$. Oznaczmy przez Q spodek dwusiecznej kąta CPI, wówczas też $QC/QI = PC/CI$. W takim razie punkty E, P, B, Q leżą na okręgu Apoloniusza dla pary punktów I oraz C. Oznaczmy przez O środek tego okręgu. Mamy

$$\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PQO - \sphericalangle QPC = \sphericalangle OPQ - \sphericalangle IPQ = \sphericalangle OPI,$$

więc

$$\sphericalangle OPI = \sphericalangle OCP = \sphericalangle ICP = \sphericalangle IBP = \sphericalangle EBP = \frac{1}{2}\sphericalangle POE = 90^\circ - \sphericalangle OPE,$$

co kończy dowód.

11. Dane są dwie rozłączne przystające elipsy $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ o środkach odpowiednio X i Y, przy czym duża oś $\mathcal{E}_1$ i mała oś $\mathcal{E}_2$ leżą na jednej prostej. Niech ℓ_1 i ℓ_2 będą wspólnymi stycznymi wewnętrznymi do tych elips i załóżmy, że $\ell_1 \perp \ell_2$. Niech ℓ_3 będzie jedną ze wspólnych stycznych zewnętrznych do $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$. Niech P będzie punktem przecięcia ℓ_1 i ℓ_2, Q punktem przecięcia ℓ_1 i ℓ_3, a R punktem przecięcia ℓ_2 i ℓ_3. Przy tym $XQ < XR$. Udowodnić, że trójkąty PXQ i PRY są podobne.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący lemat, który udowodnimy po zakończeniu rozwiązania.

Lemat. *Dana jest elipsa $\mathcal{E}$. Zbiorem punktów P o tej własności, że proste styczne do $\mathcal{E}$ poprowadzone z P są prostopadłe jest okrąg współśrodkowy z $\mathcal{E}$. Promieniem tego okręgu jest $\sqrt{a^2+b^2}$, gdzie a i b oznaczają małą i dużą półoś elipsy $\mathcal{E}$.*

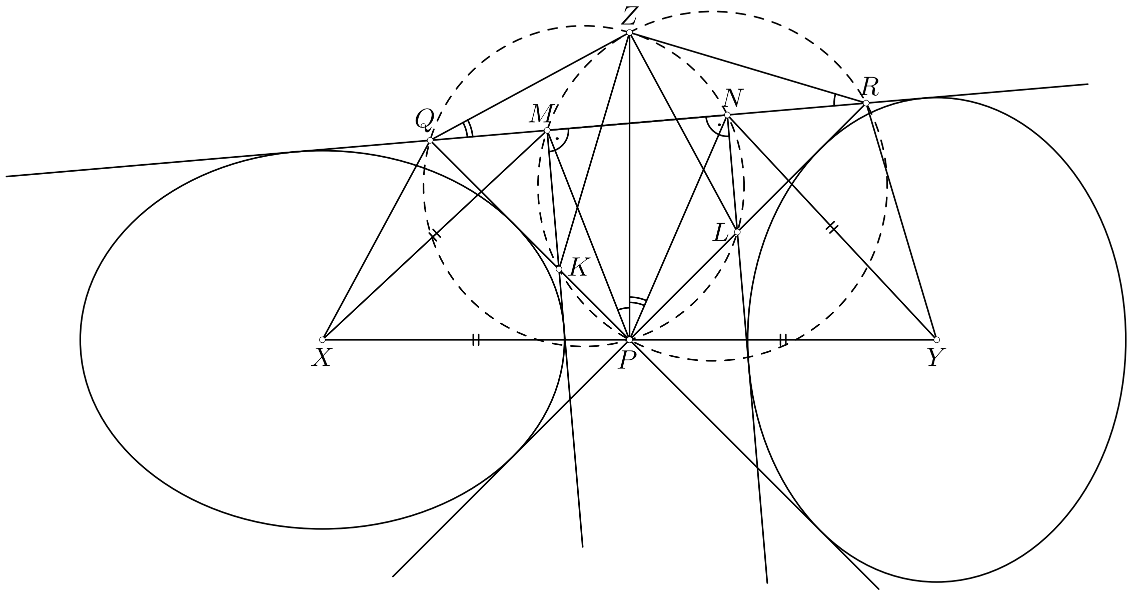
Z symetrii rysunku i przytoczonego lematu wynika, że P jest środkiem odcinka XY. Mamy $\sphericalangle QPX = \sphericalangle YPR = 45^\circ$. Do tezy wystarczy nam równość $\sphericalangle PXQ + \sphericalangle RYP = 135^\circ$, wtedy bowiem trójkąty PXQ i PRY będą podobne na mocy cechy podobieństwa kąt-kąt.

Niech Z będzie punktem symetrycznym do X względem PQ. Łatwo widzieć, że Z jest również symetryczny do Y względem PR. Mamy

$$\sphericalangle PXQ + \sphericalangle RYP = \sphericalangle QZP + \sphericalangle PZR = \sphericalangle QZR,$$

więc wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle QZR = 135^\circ$.

Niech K, L, M, N będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na odcinkach PQ, PR, QR, QR, że MK jest prostopadłą do QR styczną do $\mathcal{E}_1$, a NL — prostopadłą do QR styczną do $\mathcal{E}_2$. Zauważmy, że obrót o $90°$ wokół Z przekształca Y na X, $\mathcal{E}_2$ na $\mathcal{E}_1$, prostą PR na prostą PQ, prostą QR na prostą MK i prostą NL na prostą QR. Stąd wynika, że ten obrót przekształca L na Q, R na K i N na M. W szczególności trójkąty ZYX, ZLQ, ZRK i ZNM są prostokątne i równoramienne o kącie prostym przy wierzchołku Z.



Ponieważ styczne do $\mathcal{E}_1$ poprowadzone z punktu M są prostopadłe, więc $XM = XP$ na mocy lematu. Z podobnych powodów $YN = YP$. Rozważany wcześniej obrót przekształca N na M i Y na X, więc $NY \perp XM$. Stąd $\sphericalangle NYP + \sphericalangle PXM = 90°$. Korzystając z tego, że trójkąty PXM i NYP są równoramienne otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle NPM &= 180° - \sphericalangle MPX - \sphericalangle YPN = 180° - \frac{180° - \sphericalangle PXM}{2} - \frac{180° - \sphericalangle NYP}{2} \\ &= 90° - \frac{\sphericalangle PXM + \sphericalangle NYP}{2} = 45°.\end{aligned}$$

Zauważmy, że punkty Z, M, P leżą na okręgu o średnicy RK. Stąd $\sphericalangle ZRM = \sphericalangle ZPM$. Analogicznie, punkty Z, N, P leżą na okręgu o średnicy QL, więc $\sphericalangle NPZ = \sphericalangle NQZ$. W takim razie

$$\sphericalangle QZR = 180° - \sphericalangle ZRQ - \sphericalangle RQZ = 180° - \sphericalangle ZPM - \sphericalangle NPZ = 180° - \sphericalangle NPM = 135°,$$

co kończy dowód.

Przejdźmy do dowodu lematu sformułowanego na początku rozwiązania.

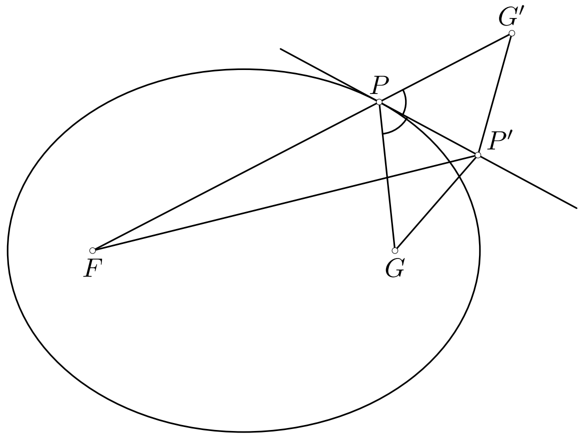
Dowód lematu. Niech F i G będą ogniskami elipsy $\mathcal{E}$, której mała półoś ma długość a, wielka półoś ma długość b, a M jest środkiem FG. Wtedy $\mathcal{E}$ jest zbiorem takich punktów P, że $PF + PG = 2b$.

Fakt 1. *Dla dowolnego punktu P na $\mathcal{E}$ prosta styczna do $\mathcal{E}$ w P jest dwusieczną kąta zewnętrznego FPG.*

Dowód faktu. Wybierzmy punkt P na $\mathcal{E}$ i niech ℓ będzie dwusieczną kąta zewnętrznego FPG. Niech G' będzie odbiciem G względem ℓ. Wtedy G' leży na FP. Mamy $2b = FP + PG = FP + PG' = FG'$. Każdy punkt P' na prostej ℓ różny od P spełnia warunek

$$FP' + P'G = FP' + P'G' > FG' = 2b,$$

więc nie leży na $\mathcal{E}$. Wniosek: prosta ℓ ma z elipsą $\mathcal{E}$ tylko jeden punkt wspólny, jest więc styczna do $\mathcal{E}$.

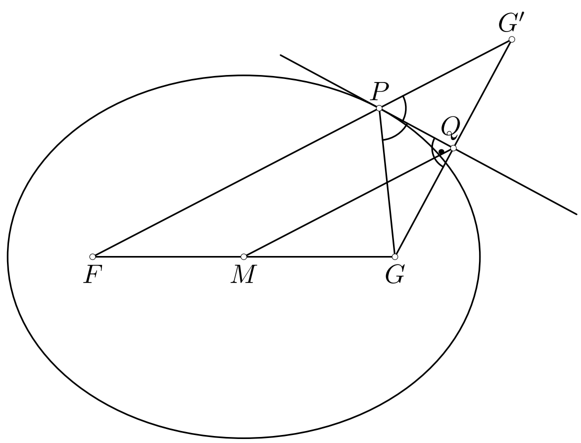


□

Fakt 2. *Niech ℓ będzie prostą styczną do $\mathcal{E}$, a Q — rzutem G na ℓ. Wówczas $MQ = b$.*

Dowód faktu. Niech P będzie punktem styczności ℓ z $\mathcal{E}$. Niech G' będzie punktem symetrycznym do G względem Q. Jest to równocześnie odbicie G względem ℓ. Z Faktu 1. wynika, że G' leży na FP. Z twierdzenia o linii środkowej w trójkącie FGG' mamy

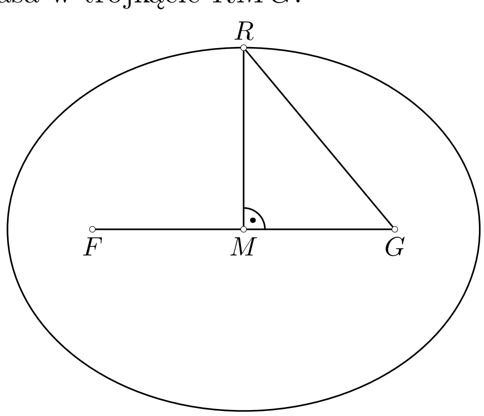
$$MQ = \frac{1}{2}FG' = \frac{1}{2}(FP + PG') = \frac{1}{2}(FP + PG) = b.$$



□

Fakt 3. $MG^2 = b^2 - a^2$.

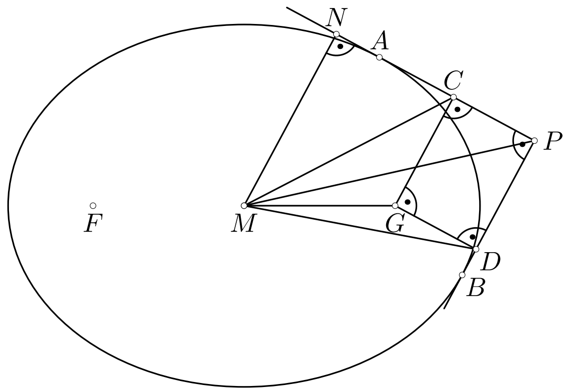
Dowód faktu. Niech R będzie punktem leżącym na $\mathcal{E}$ i symetralnej odcinka FG. Wtedy $RG = b$, więc teza wynika z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie RMG.



□

Jesteśmy gotowi do dowodu lematu. Niech P będzie takim punktem, że proste styczne poprowadzone z P do $\mathcal{E}$ są prostopadłe. Oznaczmy ich punkty styczności przez A i B. Niech C i D będą rzutami G odpowiednio na PA i PB. Niech jeszcze N będzie rzutem M na PA. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy łatwo $PM^2 - CM^2 = PN^2 - CN^2 = DM^2 - GM^2$. W takim razie

$$PM^2 = CM^2 + DM^2 - GM^2 = b^2 + b^2 - (b^2 - a^2) = a^2 + b^2.$$



$\square$

Drugi Mecz Matematyczny

1. Orzec, czy istnieje zbiór S złożony z 2023 liczb rzeczywistych o następującej własności: dla dowolnych $a, b \in S$ (niekoniecznie różnych) istnieją takie różne $c, d \in S$, że $ab = c + d$.

Rozwiązanie:
Zbiór S zdefiniujemy jako zbiór postaci

$$S(y) := \{0\} \cup \{\varepsilon \cdot y^k \mid \varepsilon \in \{-1, 1\}, k \in \{0, 1, \ldots, 1011\}\}$$

dla pewnej liczby rzeczywistej y.

Niech $x \in (1, 2)$ będzie pierwiastkiem wielomianu $P(x) = x^{1012} - x - 1$ (taki pierwiastek istnieje z własności Darboux, ponieważ $P(1) < 0$ oraz $P(2) > 0$). Twierdzimy, że $S := S(x)$ spełnia warunki zadania. Weźmy $a, b \in S$. Jeśli $a = 0$ lub $b = 0$, to $a \cdot b = 0 = x + (-x)$. Przyjmijmy, że $a = \varepsilon_1 \cdot x^k$ oraz $b = \varepsilon_2 \cdot x^\ell$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, $k, \ell \in \{0, 1, \ldots, 1011\}$. Wtedy $a \cdot b = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot x^{k+\ell} = \varepsilon \cdot x^{k+\ell}$, gdzie $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Rozważmy 2 przypadki:

- $k + \ell \leqslant 1011$. Wtedy $a \cdot b = 0 + \varepsilon \cdot x^{k+\ell}$, gdzie $0, \varepsilon \cdot x^{k+\ell} \in S$.
- $1012 \leqslant k + \ell \leqslant 2022$. Wtedy

$$a \cdot b = \varepsilon \cdot x^{k+\ell} = \varepsilon \cdot x^{k+\ell-1012} \cdot x^{1012} = \varepsilon \cdot x^{k+\ell-1012} \cdot (x + 1) = \varepsilon \cdot x^{k+\ell-1011} + \varepsilon \cdot x^{k+\ell-1012},$$

  przy czym $k + \ell - 1011, k + \ell - 1012 \in \{0, 1, \ldots, 1011\}$, więc oba ostatnie składniki należą do zbioru S. To kończy dowód.

2. Dane są dodatnie liczby całkowite $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz funkcja $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ spełniająca dla dowolnych liczb całkowitych k oraz $\ell \neq 0$ równość

$$\sum_{i=1}^{n} f(k + a_i \ell) = 0.$$

Udowodnić, że funkcja $f(x)$ jest stale równa 0.

Rozwiązanie:
Załóżmy nie wprost, że dla pewnego b zachodzi $f(b) \neq 0$. Definiujemy funkcję f_0 wzorem $f_0(x) = f(x + b)$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{n} f_0(k + a_i \ell) = \sum_{i=1}^{n} f((k + b) + a_i \ell) = 0,$$

więc f_0 również spełnia warunek z treści zadania. W dalszej części rozwiązania skonstruujemy ciąg funkcji $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ spełniających warunek z treści zadania, a dodatkowo o takiej własności, że dla każdego n liczby

$$f_n(0), f_n(1), \ldots, f_n(n)$$

są niezerowe. Załóżmy, że dla pewnego $n \geqslant 0$ udało nam się skonstruować zadane f_n, pokażemy konstrukcję funkcji f_{n+1}.

Dla $x = 0, 1, \ldots, n, n + 1$, niech

$$m_i = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } f(x - n - 1 + b) = 0, \\ f_n(x)/f(x - n - 1 + b) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $C > \max_{0 \leqslant x \leqslant n+1} |m_i|$. Definiujemy

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + C \cdot f(x - n - 1 + b).$$

Wtedy dla $x = 0, 1, \ldots, n$, jeśli $f(x-n-1+b) = 0$, to $f_{n+1}(x) = f_n(x) \neq 0$, a jeśli $f(x-n-1+b) \neq 0$, to $|f_{n+1}(x)| \geqslant |C \cdot f(x-n-1+b)| - |f_n(x)| > 0$, więc również $f_{n+1}(x) \neq 0$. Ponadto $|f_{n+1}(n+1)| \geqslant |C \cdot f(b)| - |f_n(n+1)| > 0$, stąd także $f_{n+1}(x) \neq 0$. Pozostaje sprawdzić, że

$$\sum_{i=1}^{n} f_{n+1}(k + a_i\ell) = \sum_{i=1}^{n} f_n(k + a_i\ell) + f((k-n-1+b) + a_i\ell) = 0,$$

co kończy dowód poprawności konstrukcji.

Wykorzystamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie (Van der Waerden)**.** *Dla dowolnej liczby naturalnej M istnieje taka liczba naturalna N, że dla dowolnego kolorowania liczb naturalnych od 1 do N na dwa kolory, można wskazać ciąg arytmetyczny długości M liczb pokolorowanych tym samym kolorem.*

Niech $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ oraz niech N będzie liczbą z twierdzenia. Każdą liczbę x od 1 do N kolorujemy na biało, jeśli $f_N(x) > 0$, a na czerwono, jeśli $f_N(x) < 0$. Oczywiście nie może zajść $f_N(x) = 0$ z konstrukcji funkcji f_N. Wtedy na mocy twierdzenia dla pewnych k, ℓ ($\ell \neq 0$) mamy, że liczby

$$f_N(k + a_1\ell), \ldots, f_N(k + a_n\ell)$$

są tego samego znaku, więc nie mogą sumować się do zera. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

3. Dany jest skończony zbiór A oraz jego podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Załóżmy, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$ suma dowolnych k z nich zawiera co najmniej $k+1$ elementów. Udowodnić, że elementy zbioru A można pomalować na biało i czerwono w taki sposób, że każdy ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_m$ zawiera elementy obu kolorów.

Rozwiązanie:

Niech G będzie grafem dwudzielnym, którego wierzchołkami są zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_m$ oraz elementy zbioru A. Krawędziami grafu G są wszystkie takie pary (A_i, a), że $a \in A_i$. Warunki zadania mówią, że dla dowolnego niepustego zbioru indeksów $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ zbiór $\bigcup_{i \in I} A_i$ ma co najmniej $|I| + 1$ elementów, a to w szczególności oznacza, że dowolny zbiór wierzchołków pośród $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ma w grafie G łącznie co najmniej tyle sąsiadów, co liczba wybranych zbiorów (a nawet sąsiadów tych jest o co najmniej jeden więcej). Graf G spełnia zatem warunek Halla, więc z twierdzenia Halla wynika, że w G istnieje skojarzenie zawierające wierzchołki $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Ustalmy takie skojarzenie i powiedzmy, że jego krawędziami są $(A_1, a_1), \ldots, (A_m, a_m)$. Wówczas dla $i = 1, 2, \ldots, m$ mamy $a_i \in A_i$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_m$ są parami różnymi elementami zbioru A. Pomalujmy wszystkie elementy zbioru $A \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ na biało. Pozostałe elementy pomalujemy zgodnie z opisaną niżej procedurą.

Wybieramy dowolny indeks i taki, że element a_i nie został jeszcze pomalowany oraz A_i ma sąsiada, który już został pomalowany. Malujemy a_i na kolor inny od koloru pewnego sąsiada wierzchołka A_i. Następnie powtarzamy opisaną czynność tak długo jak to możliwe. Udowodnimy, że w ten sposób wszystkie elementy $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zostaną pomalowane. Załóżmy, że uzyskaliśmy sytuację, w której niemożliwe jest wykonanie powyższej operacji i jednocześnie nie wszystkie elementy $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zostały pomalowane. Bez utraty ogólności rozumowania możemy przyjąć, że $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nie zostały pomalowane, a $a_{k+1}, \ldots, a_m$ — tak. Z naszej procedury wynika, że żaden ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nie zawiera żadnego z elementów $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_m$ ani żadnego elementu ze zbioru $A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. W takim razie wszyscy sąsiedzi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są w zbiorze $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, a to przeczy założeniom zadania — zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ mają co najmniej $k+1$ sąsiadów.

Wobec tego opisana procedura malowania zakończy się w momencie, w którym wszystkie elementy zbioru A zostaną pomalowane. Zauważmy, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, m$ w momencie, w którym malowaliśmy element a_i zapewniliśmy sobie to, że zbiór A_i zawiera dwa elementy różnych kolorów. To kończy dowód.

4. Przy okrągłym stole siedzi $n \geqslant 3$ graczy. Na początku graczom rozdano $3n$ kart ponumerowanych liczbami od 1 do $3n$ w taki sposób, że każda osoba dostała pewne 3 karty. Co minutę każdy gracz przekazuje kartę o najmniejszym numerze (spośród trzymanych przez siebie kart) graczowi po swojej lewej, a kartę o największym numerze graczowi po prawej. Udowodnić, że niezależnie od początkowego rozdania kart każdy gracz będzie miał w ręce taki sam zestaw kart po $n-1$ minutach, co po $2n-1$ minutach.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że po $n-1$ minutach każdy z graczy będzie mieć dokładnie jedną kartę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oraz dokładnie jedną kartę ze zbioru $\{2n+1, 2n+2, \ldots, 3n\}$. Stąd natychmiast wynika teza zadania, gdyż począwszy od tego momentu karty $\{1, 2, \ldots, n\}$ będą w pewnej niezmiennej kolejności podawane w lewo, a karty $\{2n+1, 2n+2, \ldots, 3n\}$ – analogicznie w prawo.

Skupimy się teraz na kartach $\{1, 2, \ldots, n\}$ (dowód dla kart $\{2n+1, 2n+2, \ldots, 3n\}$ jest analogiczny) i będziemy nazywać te karty *małymi*. Niech $\mathcal{P}$ będzie procesem przekazywania kart opisanym w treści zadania. Zdefiniujmy inny proces $\mathcal{P}'$, w którym co minutę każdy z graczy:

- najmniejszą kartę zostawia w ręku,
- środkową kartę przekazuje o 1 w prawo,
- największą kartę przekazuje o 2 w prawo.

Zauważmy, że w każdym momencie 3-elementowe podzbiory kart w procesie $\mathcal{P}'$ pokrywają się z 3-elementowymi podzbiorami kart w procesie $\mathcal{P}$, a jedynie różnią się tym, którzy gracze dane podzbiory posiadają w ręku. Ponieważ chcemy pokazać, że po $n-1$ minutach w każdym 3-elementowym podzbiorze znajduje się dokładnie jedna mała karta, możemy tę własność równoważnie dowodzić dla procesu $\mathcal{P}'$.

Od teraz rozważamy ruch kart w procesie $\mathcal{P}'$. Zauważmy, że jeśli po i-tej minucie pewien gracz G posiada małą kartę, to po j-tej minucie (gdzie $j > i$) gracz G także posiada jakąś małą kartę (niekoniecznie tę samą). Istotnie, jeśli gracz G przekazuje małą kartę k do dalszych graczy, to oznacza, że na ręku musi posiadać także kartę $k' < k$, której nie przekazał, a wtedy k także musi być mała.

Jeśli na początku każdy gracz posiada małą kartę, nasza teza oczywiście jest spełniona. Niech teraz G_0 będzie graczem, który początkowo nie ma żadnej małej karty i przypuśćmy nie wprost, że po $n-1$ minutach również nie ma małej karty, co na mocy poprzedniej obserwacji jest równoważne temu, że w żadnej minucie od 1 do $n-1$ nie dostał on małej karty. Wówczas w każdym momencie od 0 do $n-1$ istnieje gracz, który posiada co najmniej dwie małe karty. Ponumerujmy kolejnych graczy na prawo od G_0 jako $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$ i niech $f : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{1, 2, \ldots, n-1\}$ będzie funkcją, która każdemu momentowi czasu przyporządkowuje najmniejsze takie $i \geqslant 1$, że gracz G_i ma co najmniej 2 małe karty. Z zasady szufladkowej Dirichleta istnieją dwa takie momenty $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant n-1$, że $f(t_1) = f(t_2)$. Z drugiej strony wykażemy teraz, że funkcja f jest ściśle rosnąca, a otrzymana sprzeczność zakończy rozwiązanie zadania. Rozważmy sytuację po m-minutach ($m \in \{0, 1, n-2\}$) i niech $j = f(m)$. Wtedy po $m+1$ minutach gracze $G_1, G_2, \ldots, G_j$ będą mieć po jednej małej karcie, ponieważ

- żaden z graczy $G_1, G_2, \ldots, G_j$ nie dostanie małej karty w $m+1$ minucie (gracze $G_1, G_2, \ldots, G_{j-1}$ nie przekazują dalej małej karty, a gdyby gracz G_1 dostał małą kartę od gracza G_{n-1}, to także G_0 dostałby małą kartę od gracza G_{n-1}, co jest sprzeczne z naszym założeniem);
- gracz G_j przekaże wszystkie swoje małe karty poza jedną do dalszych graczy.

Zatem $f(m+1) > j$, co kończy dowód.

5. Każde pole planszy o wymiarach 2023×2023 zostało pomalowane na jeden z dwóch kolorów w taki sposób, że pola każdego z kolorów tworzą ścieżkę (tj. dla każdego z kolorów graf, w którym wierzchołkami są pola tego koloru, a krawędzie między nimi występują wtedy i tylko wtedy gdy pola mają wspólny bok, jest ścieżką). Wykazać, że środkowe pole planszy jest jednym z końców jednej z dwóch jednokolorowych ścieżek na które podzielona została plansza.

Rozwiązanie:

Każdą z dwóch ścieżek, na które podzielona jest plansza nazwiemy *wężem*. Zauważmy, że jeśli trzy kolejne pola A, B, C pewnego węża tworzą *zakręt*, czyli są zawarte w pewnym kwadracie 2×2, to czwarte pole D tego kwadratu musi należeć do drugiego węża (w przeciwnym przypadku uzyskalibyśmy cykl o długości 4 w obrębie tego samego węża). Zdefiniujmy $f(B) = D$ — f jest więc funkcją, która środkowemu polu każdego zakrętu przyporządkowuje pole należące do drugiego węża.

Oznaczmy cztery narożne pola planszy przez A, B, C, D w taki sposób, aby AC oraz BD były jej przekątnymi. Zauważmy, że jeśli A nie jest końcem węża, to musi być środkowym polem pewnego zakrętu. Wówczas pole $f(A)$ jest końcem węża lub środkowym polem zakrętu, gdyż jeśli nie jest końcem, to musi mieć dokładnie dwa sąsiadujące pola w swoim kolorze, a pola przylegające bokiem do A mają inny kolor. Powtarzając analogiczne rozumowanie stwierdzamy, że dla pewnego $k \geqslant 0$ pole

$$g(A) := \underbrace{f(f(\ldots(f}_{k}(A))\ldots))$$

jest końcem węża. Analogicznie definiujemy $g(B)$, $g(C)$, $g(D)$. Każdemu z narożników planszy przypisaliśmy w ten sposób najbliższy spośród końców węży o środkach na dwusiecznej tego narożnika.

Zauważmy, że jeśli $g(A) = g(C)$, to każde pole sąsiadujące z tym polem należy do innego węża — uzyskujemy więc węża o długości 1, który nie może istnieć na żadnej planszy o boku większym od 2. Podobnie uzasadniamy, że $g(B) \neq g(D)$. Udowodnimy, że końce $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$, $g(D)$ nie mogą być parami różne — wyniknie stąd teza zadania, gdyż będzie to oznaczało, że zbiory $\{g(A), g(C)\}$, $\{g(B), g(D)\}$ mają niepuste przecięcie, czyli pewien koniec węża znajduje się jednocześnie na obu przekątnych planszy.

Przypuśćmy, że $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$, $g(D)$ są parami różne, czyli stanowią zbiór wszystkich czterech końców obu węży. Jeśli pokolorujemy pola planszy w tradycyjną szachownicę, to wszystkie pola na obu jej przekątnych, czyli w szczególności $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$, $g(D)$, będą miały ten sam kolor, gdyż 2023 jest liczbą nieparzystą. To zaś oznacza, że każdy z dwóch węży będzie składał się z nieparzystej liczby pól. To jednak nie jest możliwe, gdyż łączna liczba pól obu węży, równa liczbie wszystkich pól planszy, jest nieparzysta. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

6. Niech $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie niezerowym wielomianem o współczynnikach całkowitych stopnia mniejszego niż n. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że jeśli $W(0, 0, \ldots, 0)$ jest podzielne przez p, to istnieją takie liczby całkowite $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nie wszystkie podzielne przez p, że $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jest podzielne przez p.

Uwaga. Stopień niezerowego wielomianu n zmiennych to największa suma $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ spośród tych $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, dla których współczynnik przy jednomianie $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ jest niezerowy.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że liczba n-elementowych ciągów $(y_1, \ldots, y_n)$ reszt modulo p, dla których $W(y_1, \ldots, y_n)$ jest podzielne przez p, jest podzielna przez p. Wtedy teza wyniknie z tego, że $p \geqslant 2$ i jest co najmniej jeden taki ciąg z założenia w treści zadania.

Ponieważ liczba wszystkich n-elementowych ciągów reszt modulo p jest równa p^n, a więc podzielna przez p, to wystarczy udowodnić, że liczba n-elementowych ciągów $(y_1, \ldots, y_n)$ reszt modulo p, dla których $W(y_1, \ldots, y_n)$ jest niepodzielne przez p, jest podzielna przez p.

Rozważmy wielomian n zmiennych $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{p-1}$. Na mocy małego twierdzenia Fermata zachodzi

$$W(x_1, \ldots, x_n)^{p-1} \equiv_p \begin{cases} 1 & \text{jeśli } W(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0 \pmod{p} \\ 0 & \text{jeśli } W(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Stąd do rozwiązania zadania wystarczy udowodnić, że suma

$$\sum_{0\leqslant x_1,\ldots,x_n<p} W(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}$$

jest podzielna przez p.

Ustalmy pewne wykładniki $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Oczywiście

$$\sum_{0\leqslant x_1,\ldots,x_n<p} x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n} = \left(\sum_{x_1=0}^{p-1} x_1^{\alpha_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{x_n=0}^{p-1} x_n^{\alpha_n}\right).$$

Skorzystamy z następującego lematu.

Lemat.

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^{\alpha} \equiv_p \begin{cases} p-1 & \alpha>0,\ p-1\mid\alpha \\ 0 & \textit{w przeciwnym razie.}\end{cases}$$

Dowód. Dla $\alpha=0$ suma po lewej stronie jest równa p. Jeśli α jest dodatnią wielokrotnością $p-1$, to z małego twierdzenia Fermata powyższa suma daje resztę $p-1$ modulo p. Dla pozostałych α możemy skorzystać z istnienia generatora g modulo p, czyli takiej reszty modulo p, że zbiór reszt z dzielenia $\{g^0,g^1,\ldots,g^{p-2}\}$ to $\{1,2,\ldots,p-1\}$. Wtedy

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^{\alpha} = \sum_{x=1}^{p-1} x^{\alpha} \equiv \sum_{s=0}^{p-2} g^{s\alpha} \pmod p.$$

Ponieważ w tym wypadku $g^{\alpha}-1\not\equiv 0 \pmod p$, to możemy skorzystać ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$\sum_{s=0}^{p-2} g^{s\alpha} \equiv \left(g^{\alpha(p-1)}-1\right)\left(g^{\alpha}-1\right)^{-1} \equiv (1-1)\left(g^{\alpha}-1\right)^{-1} \equiv 0 \pmod p.$$

□

Z lematu wynika, że jeśli pewien z wykładników $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ nie jest dodatnią wielokrotnością $p-1$ to wtedy

$$\sum_{0\leqslant x_1,\ldots,x_n<p} x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n} \equiv 0 \pmod p.$$

Zauważmy ponadto, że wielomian $W(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}$ nie może zawierać jednomianów postaci $cx_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, gdzie każdy wykładnik α_i jest dodatnią wielokrotnością $p-1$. Istotnie, stopień takiego jednomianu to przynajmniej $n(p-1)$, a stopień wielomianu $W(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}$ jest mniejszy od $n(p-1)$. Zatem

$$\sum_{0\leqslant x_1,\ldots,x_n<p} W(x_1,\ldots,x_n)^{p-1} \equiv 0 \pmod p,$$

co kończy dowód.

7. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony zbiór S liczb pierwszych, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej m istnieje dodatnia liczba całkowita n i $p\in S$, dla których $p^m\mid n!$, ale $p^{m+1}\nmid n!$.

Rozwiązanie:

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej x, niech $v_p(x)$ oznacza taką nieujemną liczbę całkowitą m, że $p^m\mid x$ oraz $p^{m+1}\nmid x$. Zdefiniujmy dla każdej liczby pierwszej zbiór $B(p)$ możliwych wykładników p-adycznych $n!$, czyli

$$B(p)=\{v_p(n!)\colon n\geqslant 0\}.$$

Wystarczy udowodnić, że dla dowolnego skończonego zbioru liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_k$, zbiór $B(p_1) \cup B(p_2) \cup \ldots \cup B(p_k)$ nie zawiera wszystkich liczb dodatnich całkowitych. W tym celu udowodnimy następujący lemat.

Lemat. *Niech $L \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą, p zaś liczbą pierwszą. Wtedy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej x, istnieje taka liczba całkowita dodatnia y, że*

$$x \leqslant y \leqslant y + L - 1 \leqslant x + L(p^L + 1) - 1 \quad \textit{oraz} \quad B(p) \cap [y, y + L - 1] = \emptyset.$$

Innymi słowy w każdym przedziale długości $L(p^L + 1)$ znajdziemy przedział długości L rozłączny z $B(p)$.

Dowód. Zauważmy, że
$$\{v_p(n!)\colon n \geqslant 0\} = \{v_p((pn)!)\colon n \geqslant 0\}.$$
Dodatkowo, $v_p((pn)!)$ jest rosnącą funkcją n, dlatego każdemu elementowi $b \in B(p)$ odpowiada jednoznacznie pewna liczba n spełniająca $v_p((pn)!) = b$. Niech $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ będą wszystkimi elementami zbioru $B(p) \cap [x, x + L(p^L + 1) - 1]$. Niech ciąg n_i spełnia $b_i = v_p((pn_i)!)$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Wtedy $n_1, n_2, \ldots, n_k$ są kolejnymi liczbami całkowitymi.

Załóżmy nie wprost, że w każdym podprzedziale liczb całkowitych przedziału $[x, x + L(p^L + 1) - 1]$ liczności L znajduje się jakiś element b_i. Ponieważ przedział $[x, \ldots, x + L(p^L + 1) - 1]$ można podzielić na $p^L + 1$ rozłącznych przedziałów, z których każdy zawiera L liczb całkowitych, to $k \geqslant p^L + 1$. To z kolei oznacza, że jedna z liczb $n_2, n_3, \ldots, n_k$ jest podzielna przez p^L, ponieważ jest to przynajmniej p^L kolejnych liczb całkowitych. Niech będzie to n_j. Wtedy $n_j > n_{j-1}$ oraz

$$b_j - b_{j-1} = v_p((pn_j)!) - v_p((pn_{j-1})! \geqslant v_p(pn_j) \geqslant L + 1.$$

To oznacza jednak, że wystarczy wziąć $y = b_{j-1} + 1$, gdyż

$$x \leqslant b_{j-1} < b_{j-1} + 1 \leqslant b_{j-1} + L < b_j \leqslant x + L(p^L + 1) - 1,$$

a pomiędzy b_{j-1} i b_j nie ma żadnych elementów zbioru $B(p)$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Udowodnimy teraz indukcyjnie (ze względu na k), że dla dowolnego skończonego zbioru liczb pierwszych $\{p_1, \ldots, p_k\}$ istnieje taka liczba M, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej x zachodzi

$$\{x, x + 1, \ldots, x + M - 1\} \not\subseteq B(p_1) \cup B(p_2) \cup \ldots \cup B(p_k).$$

Stąd bezpośrednio wyniknie teza zadania. Dla $k = 1$ teza wynika wprost z lematu zastosowanego dla $L = 1$. Dalej zakładamy $k \geqslant 2$. Z założenia indukcyjnego istnieje taka liczba M', że dla dowolnego x' zachodzi
$$\{x', x' + 1, \ldots, x' + M' - 1\} \not\subseteq B(p_1) \cup B(p_2) \cup \ldots \cup B(p_{k-1}).$$
Zastosujmy lemat dla $L = M'$ i $p = p_k$. Niech $M = M'(p_k^{M'} + 1)$. Wiemy, że dla dowolnego x istnieje takie y, że $x \leqslant y \leqslant y + M' - 1 \leqslant x + M - 1$ oraz zbiór $\{y, y + 1, \ldots, y + M' - 1\}$ jest rozłączny z $B(p_k)$. Korzystając teraz z założenia indukcyjnego dla $x' = y$ uzyskujemy, że

$$\{y, y + 1, \ldots, y + M' - 1\} \not\subseteq B(p_1) \cup B(p_2) \cup \ldots \cup B(p_{k-1}) \cup B(p_k).$$

W szczególności zbiór $\{x, x+1, \ldots, x+M'-1\}$ nie zawiera się w $B(p_1) \cup B(p_2) \cup \ldots \cup B(p_k)$ dla dowolnego $x > 0$. To kończy dowód kroku indukcyjnego i rozwiązanie zadania.

8. Wykazać, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p licznik liczby

$$\left(1 + p\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1}\right)^2 - 1 + p^2 \sum_{k=1}^{p-1} k^{-2}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego dzieli się przez p^4.

Rozwiązanie:

Niech k^{-1} oznacza odwrotność k modulo p^4 dla k względnie pierwszych z p. Przyjmujemy również $k^{-s} = (k^{-1})^s$ Teza zadania jest równoważna temu, że

$$\left(1 + p\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1}\right)^2 \equiv 1 - p^2\sum_{k=1}^{p-1} k^{-2} \pmod{p^4}.$$

Branie odwrotności modulo p jest permutacją niezerowych reszt modulo p i stąd

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k = \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Stąd też uzyskujemy, że

$$p\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Dzięki temu możemy napisać, że

$$\left(1 + p\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1}\right)^2 \equiv 1 + 2p\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} \pmod{p^4}.$$

Zauważmy, że

$$(p-k)^{-1} \equiv -k^{-1}(1 + pk^{-1} + p^2k^{-2} + p^3k^{-3}) \pmod{p^4}.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} -(p-k)k^{-1}(1 + pk^{-1} + p^2k^{-2} + p^3k^{-3}) &\equiv (1 - pk^{-1})(1 + pk^{-1} + p^2k^{-2} + p^3k^{-3}) \\ &\equiv 1 - p^4k^{-4} \\ &\equiv 1 \pmod{p^4}. \end{aligned}$$

Ponieważ przyporządkowanie $k \mapsto p - k$ jest permutacją zbioru $\{1, \ldots, p-1\}$, więc

$$2p\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} \equiv p\sum_{k=1}^{p-1} \left(k^{-1} + (p-k)^{-1}\right) \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \left(-p^2k^{-2} - p^3k^{-3}\right) \pmod{p^4}.$$

Ponieważ branie odwrotności modulo p jest permutacją reszt modulo p, więc

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{-3} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^3 = \frac{p^2(p-1)^2}{4} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Stąd ostatecznie uzyskujemy, że

$$\left(1 + p\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1}\right)^2 \equiv 1 - \sum_{k=1}^{p-1} p^2k^{-2} + p^3k^{-3} \equiv 1 - \sum_{k=1}^{p-1} p^2k^{-2} \pmod{p^4},$$

co kończy dowód.

9. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty P i Q, które są swoimi obrazami inwersyjnymi względem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech punkt X będzie punktem przecięcia prostej BC z prostą łączącą punkt P z obrazem symetrycznym punktu Q względem BC. Analogicznie dla prostych CA oraz AB definiujemy odpowiednio punkty Y oraz Z. Wykazać, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Rozumowanie przeprowadzimy dla konfiguracji na rysunku (w pozostałych przypadkach dowód jest podobny, lecz pewne szczegóły mogą się nieznacznie zmienić). Niech S będzie punktem przecięcia prostej zawierającej punkty O, P i Q z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Rozpoczniemy od udowodnienia, że

$$\measuredangle QBN = \measuredangle QCM.$$

Ponieważ punkty P i Q są swoimi obrazami inwersyjnymi, to

$$OB^2 = OP \cdot OQ.$$

Wynika stąd, że trójkąty BOP i QOB są podobne, co pociąga za sobą równość $\measuredangle OBP = \measuredangle OQB$. Z zależności $OB = OS$ mamy dodatkowo $\measuredangle OBS = \measuredangle OSB$. W takim razie

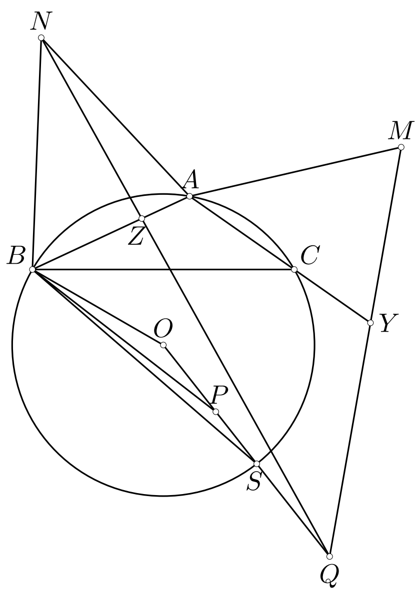
$$\measuredangle PBS = \measuredangle OBS - \measuredangle OBP = \measuredangle OSB - \measuredangle OQB = 180^\circ - \measuredangle OSQ - \measuredangle SQB = \measuredangle SBQ.$$

Skoro punkt N jest obrazem symetrycznym punktu P względem prostej AB, to $\measuredangle PBA = \measuredangle NBA$. Zatem

$$\measuredangle QBN = \measuredangle PBQ + \measuredangle PBN = 2(\measuredangle PBS + \measuredangle PBA) = 2\measuredangle SBA.$$

Podobnie dowodzimy, że $\measuredangle QCM = 2\measuredangle SCY$. Łącząc te dwie równości z zależnością $\measuredangle SBA = \measuredangle SCY$ otrzymujemy ostatecznie

$$\measuredangle QBN = \measuredangle QCM.$$



Powyższa zależność pozwala napisać, że

$$\frac{[QBN]}{[QCM]} = \frac{BQ \cdot BN}{CQ \cdot CM} = \frac{BQ \cdot BP}{CQ \cdot CP}.$$

W podobny sposób udowodnimy, że

$$\frac{[QCL]}{[QAN]} = \frac{CQ \cdot CP}{AQ \cdot AP} \quad \text{oraz} \quad \frac{[QAM]}{[QBL]} = \frac{AQ \cdot AP}{BQ \cdot BP}.$$

Wykorzystując powyższe związki stwierdzamy, że

$$\frac{AY}{CY} \cdot \frac{CX}{BX} \cdot \frac{BZ}{AZ} = \frac{[QAM]}{[QCM]} \cdot \frac{[QCL]}{[QBL]} \cdot \frac{[QBN]}{[QAN]} = \frac{[QAM]}{[QBL]} \cdot \frac{[QCL]}{[QAN]} \cdot \frac{[QBN]}{[QCM]} =$$

$$= \frac{AQ \cdot AP}{BQ \cdot BP} \cdot \frac{CQ \cdot CP}{AQ \cdot AP} \cdot \frac{BQ \cdot BP}{CQ \cdot CP} = 1,$$

co na mocy twierdzenia Menelausa oznacza, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

10. Sfera wpisana w ostrosłup $ABCDS$ o podstawie równoległoboku $ABCD$ jest styczna do podstawy w punkcie P, a odcinek SQ jest wysokością ostrosłupa. Wykazać, że jeśli $P \neq Q$, to prosta PQ przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych równoległoboku.

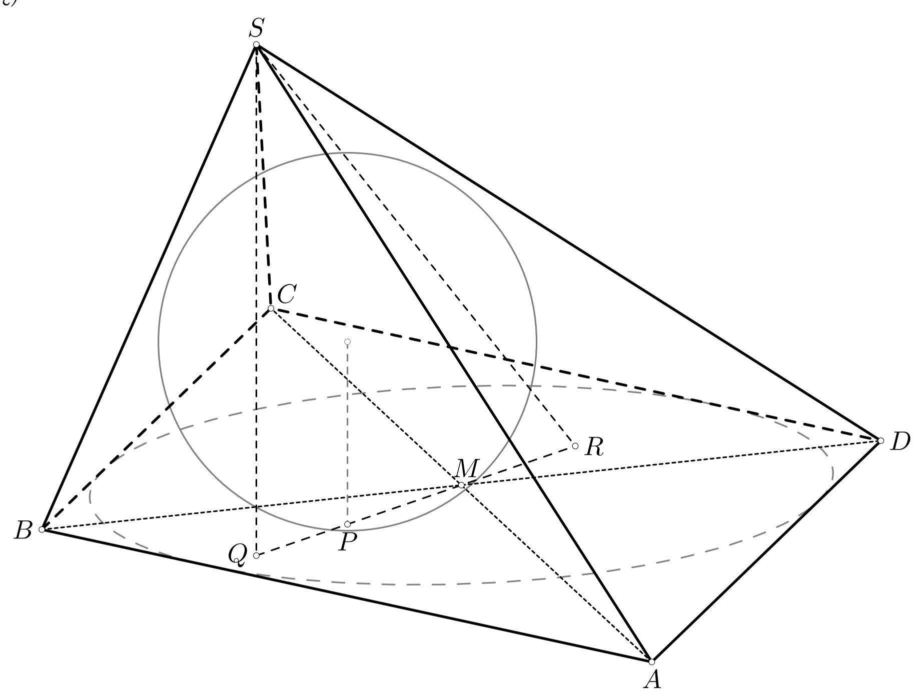
Rozwiązanie:

Oznaczmy sferę wpisaną w ostrosłup $ABCDS$ przez s. Niech π będzie płaszczyzną podstawy ostrosłupa $ABCDS$, a ς — płaszczyzną styczną do sfery s równoległą do π i różną od niej. Jednokładność o środku S, która przeprowadza ς na π przeprowadza s na sferę wpisaną w kąt czworościenny przy wierzchołku S, styczną do π, leżącą na zewnątrz ostrosłupa $ABCDS$. Oznaczmy tę sferę przez s'. Niech R będzie punktem styczności s' z płaszczyzną π.

Uzasadnimy najpierw, że punkty P i R są ogniskami elipsy wpisanej w równoległobok $ABCD$ (jest to fakt znany jako sfery Dandelina). Rozważmy stożek o środku S styczny do s i s'. Rozważmy dowolną tworzącą tego stożka. Niech będzie ona styczna do s w punkcie X, do s' w punkcie Y, i niech przecina ona płaszczyznę π w punkcie Z. Wówczas z twierdzenia o odcinkach stycznych wnosimy, że

$$ZP + ZR = ZX + ZY = XY.$$

Długość odcinka XY nie zależy od wyboru tworzącej, więc punkty przecięcia tworzących stożka z płaszczyzną π leżą na elipsie o ogniskach P i R i owa elipsa jest częścią wspólną stożka z podstawą. Ponieważ rozważany stożek jest styczny do płaszczyzn wyznaczonych przez ściany boczne ostrosłupa, więc elipsa będzie styczna do boków podstawy (które są częściami wspólnymi płaszczyzn wyznaczonych przez ściany boczne z podstawą).



Symetria względem środka M elipsy przeprowadza punkt P na R, prostą AB na CD, a BC na AD. W związku z tym w tej symetrii równoległobok przechodzi na siebie, zatem punkt przecięcia jego przekątnych także przechodzi na siebie, a to oznacza, że pokrywa się z punktem M. To oznacza, że prosta PR przechodzi przez punkt M. Punkty S, P, R, Q oraz prosta łącząca punkt S i środki obu sfer leżą na jednej płaszczyźnie (prostopadłej do π i zawierającej oś rozważanego wcześniej stożka), a przecięciem tej płaszczyzny z płaszczyzną π jest właśnie prosta przechodząca przez punkty P, R, Q — innymi słowy punkt Q leży na prostej PR, skąd dostajemy tezę, gdyż wcześniej udowodniliśmy, że M leży na PR.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Jeśli zawodnik zostaje wybrany do referowania po raz n-ty, przystępuje do referowania z prawdopodobieństwem $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-n+m}$, gdzie m oznacza minimum liczby zakończonych referowań spośród wszystkich zawodników drużyny referującej. W przeciwnym wypadku Kapitan drużyny referującej wyznacza osobę do referowania zgodnie z punktem **7**.
9. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
10. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7–9**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
11. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.
12. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
13. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**. W tym przypadku, jeżeli przedstawione rozwiązanie nie zostanie uznane przez Jury za poprawne, drużyna otrzymuje -10 punktów i opuszcza się punkt 14.

14. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

15. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
16. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

17. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań lub gdy różnica pomiędzy wynikami obu drużyn jest większa niż 40 punktów. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
18. Po 3 godzinach meczu czas na referowanie zadania zostaje skrócony do 5 minut, a wszystkie punkty ujemne liczą się dwukrotnie.
19. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
20. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści