Obóz przygotowawczy do zawodów międzynarodowych
Zwardoń, 22.05.1994 — 5.06.1994.

Pierwsze Zawody Indywidualne:

1. Dane są liczby naturalne k, n takie, że $1 < k \leqslant n$. Liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ spełniają warunek $x_1 + \ldots + x_k = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$. Wykazać, że $x_1^{n-1} + \ldots + x_k^{n-1} \geqslant kn$. Dla jakich k, n oraz $x_1, x_2, \ldots, x_k$ zachodzi równość?

2. Punkty P, Q, R należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Proste AP, BQ, CR przecinają się w punkcie S. W czworokąt $PCQS$ wpisany jest okrąg o_1, a w czworokąt $PBRS$ wpisany jest okrąg o_2. Okrąg o_1 jest styczny do QS w punkcie E, okrąg o_2 jest styczny do RS w punkcie F. Wykazać, że $EQ = FR$.

3. W przestrzeni danych jest n różnych punktów ($n \geqslant 3$). Dla danej płaszczyzny p rozważamy liczbę $S(p)$ równą sumie odległości danych punktów od płaszczyzny p. Udowodnić, że:
(a) W zbiorze wszystkich liczb $S(p)$ istnieje liczba najmniejsza c.
(b) Jeżeli $S(p_0) = c$, to płaszczyzna p_0 przechodzi przez pewne trzy spośród danych punktów.

4. Czworościan $ABCD$ spełnia warunki: $AB = CD = 1$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CBA$. Czworościan ten przecięto płaszczyzną równoległą do AB i CD. Obliczyć maksymalny obwód przekroju.

5. Dany jest 101-elementowy zbiór A liczb całkowitych. Udowodnić, że suma elementów pewnego niepustego podzbioru A jest podzielna przez 101.

6. P, Q i R są wielomianami jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych. Wielomiany te są parami względnie pierwsze i spełniają tożsamość $P^4 + Q^4 = R^2$. Udowodnić, że P, Q i R są stałe.

Drugie Zawody Indywidualne:

1. W 5005-elementowym zbiorze X wyróżniono rodzinę jego podzbiorów właściwych w ten sposób, że każdy dwuelementowy podzbiór zbioru X zawiera się w dokładnie jednym z wyróżnionych zbiorów. Dowieść, że pewien wyróżniony zbiór ma nie więcej niż 71 elementów.

2. W przestrzeni dane są wektory $x_1, \ldots, x_{20}$ takie, że długość każdego z nich jest równa co najmniej 3. Wykazać, że dla przynajmniej 110 par (i, j), $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 20)$, wektor $x_i + x_j$ ma długość co najmniej 2.

3. Rozważamy następującą grę na kracie dwuwymiarowej (tj. na zbiorze punktów o obu współrzędnych całkowitych). W pozycji początkowej każdemu punktowi (m, n) kraty przyporządkowana jest liczba całkowita nieujemna $a(m, n)$. Następnie wykonujemy dowolną liczbę razy następującą operację. Wybieramy (o ile istnieje) dowolny punkt (m, n) dla którego $a(m, n) \geqslant 4$, liczbę $a(m, n)$ zmniejszamy o 4, a każdą z liczb $a(m+1, n)$, $a(m-1, n)$, $a(m, n+1)$, $a(m, n-1)$ powiększamy o 1. Otrzymaną w ten sposób pozycję nazwiemy końcową, jeżeli dla wszystkich punktów (m, n) mamy $a(m, n) < 4$. Udowodnić, że dla każdej pozycji początkowej istnieje co najwyżej jedna pozycja końcowa.

4. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ spełniające warunki:
(i) dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi $a_i \in \{-1, 1\}$ oraz
(ii) $f(x)$ ma n pierwiastków rzeczywistych.

5. Dla każdego $n \geqslant 3$, wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ takie, że $f(x_1) + \ldots + f(x_n) = 1$ dla wszystkich układów $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ spełniających $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Rozważmy takie punkty S należące do wnętrza $ABCD$, że $\sphericalangle BSC = \sphericalangle BAS + \sphericalangle SDC$. Wykazać, że wszystkie takie punkty S leżą na pewnym okręgu lub pewnej prostej.

Trzecie Zawody Indywidualne:

1. Pewien wielościan wypukły ma dwie ściany stukątne. Z każdego wierzchołka tego wielościanu wychodzą przynajmniej cztery krawędzie.
(a) Wykazać, że wielościan ten ma przynajmniej 200 ścian trójkątnych.
(b) Wykazać, że jeśli wielościan spełniający warunki zadania ma dokładnie 200 ścian trójkątnych, to wszystkie jego pozostałe ściany są czworokątami.

2. Niech $n \geqslant 2$ oraz $b_0 \in [2, 2n-1]$ będą liczbami całkowitymi. Definiujemy rekurencyjnie ciąg b_n

$$b_{i+1} = \begin{cases} 2b_i - 1 & \text{gdy } b_i \leqslant n \\ 2b_i - 2n & \text{gdy } b_i > n. \end{cases}$$

Niech $p = p(b_0, n)$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią taką, że $b_p = b_0$.
(a) Dla każdego $k \geqslant 1$ znaleźć $p(2, 2^k)$ oraz $p(2, 2^k + 1)$.
(b) Udowodnić, że $p(b_0, n) \,|\, p(2, n)$.

3. S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, T jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta, stycznego do boku AC, P jest środkiem odcinka ST. Wykazać, że na czworokącie $ABCP$ można opisać okrąg.

4. Dla jakich liczb naturalnych m liczba $m^4 + 4^m$ jest liczbą pierwszą?

5. Niech $\mathbb{R}^+$ będzie zbiorem liczb rzeczywistych nieujemnych. Dla ustalonych liczb dodatnich a i b znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spełniające warunek
$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x \qquad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}^+.$$

6. Udowodnić, że każdą łamaną o długości 1 można pokryć półkolem o średnicy 1.

Dziesięć łatwych zadań niegeometrycznych:

1. Niech $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Podzbiór $P \subset X$ nazywa się *wolny*, jeśli dla dowolnych $x, y, z \in P$, $x + y \neq z$. Ile najwięcej elementów może mieć podzbiór wolny?

2. Niech S_n będzie sumą największych nieparzystych dzielników liczb $1, 2, 3, \ldots, 2^n$. Wykazać, że $3S_n = 4^n + 2$.

3. W każdym wierzchołku 25-kąta umieszczamy dowolnie liczbę 0 lub 1, a na każdym boku liczbę równą modułowi różnicy liczb umieszczonych na jego końcach. Jakie są możliwe wartości sumy liczb na bokach? Jakie są możliwe wartości sumy wszystkich 50 liczb?

4. Znaleźć minimum wyrażenia $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n}$ dla liczb $a_i \geqslant 0$ spełniających równość $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.

5. Przestrzeń malujemy trzema kolorami: czerwonym, zielonym i niebieskim. Przez C, (Z), (N) oznaczmy zbiór długości odcinków o obu końcach czerwonych, (zielonych), (niebieskich). Wykazać, że co najmniej jeden ze zbiorów C, Z, N jest równy $\mathbb{R}^+$.

6. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich k, m, n równanie $2^m - 1 = k^n$.

7. Na płaszczyźnie danych jest 100 prostych, wśród których 10 jest parami równoległych, a 91 parami nierównoległych. Łączna liczba punktów przecięcia tych prostych jest równa 4903. Na ile sposobów te proste rozdzielają płaszczyznę?

8. Niech N będzie liczbą ciągów, których każdy wyraz jest równy 1 lub 3, a suma wyrazów jest równa 1994. Wyznaczyć resztę z dzielenia N przez 3.

9. Dowieść, że wśród 35 osób zawsze znajdą się 4 takie, z których każde dwie się znają, lub 5 takich, z których każde dwie się nie znają.

10. Dowieść, że dla każdego $n > 100$ mamy $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} \left|\sqrt[i]{i} - \sqrt[j]{j}\right|^{i+j} < 2^{-n^{10}}$.

Dziesięć łatwych zadań geometrycznych:

1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P, Q, R, S są odpowiednio środkami łuków AB, BC, CD, DA. Wykazać, że $PR \perp QS$.

2. Wszystkie ściany dwóch równoległościanów są przystającymi rombami. Czy te równoległościany muszą być przystające?

3. Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu o promieniu 1 i środku S. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie P, $PS = t$. Obliczyć stosunek długości podstaw tego trapezu.

4. Czy istnieją dwa ostrosłupy o wspólnej podstawie czworokątnej, każdy o równych wysokościach ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka ostrosłupa, o różnych spodkach wysokości?

5. Prosta k przechodzi przez środek S okręgu o. Znaleźć zbiór wszystkich takich punktów P, dla których istnieje taki punkt $A \in k$, że prosta PA jest styczna do o i $PA = AS$.

6. Dany jest ostrosłup czworokątny o wypukłej podstawie. Wykazać, że istnieje taka płaszczyzna przecinająca krawędzie boczne tego ostrosłupa, że przekrojem jest równoległobok.

7. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta nierównoramiennego ABC, S jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$. Prosta MS przecina wysokość poprowadzoną z A w punkcie E. Wykazać, że długość odcinka AE jest równa promieniowi okręgu wpisanego w $\triangle ABC$.

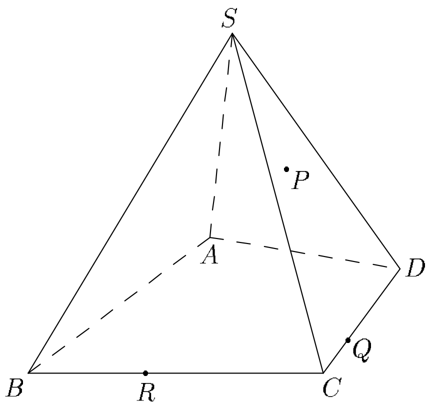
8. Wielościan wypukły ma w wierzchołków. Obliczyć sumę kątów płaskich wszystkich jego ścian.

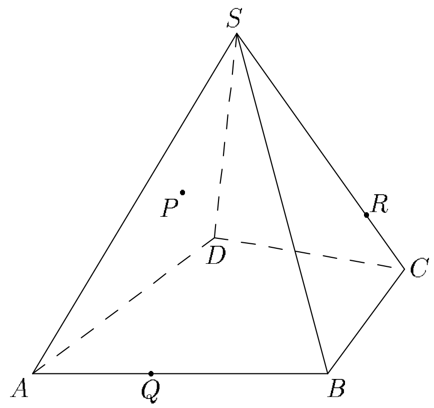
9. Punkt H nie należy do prostej k. Wykazać, że okręgi opisane na takich trójkątach ABC, że $A \in k$, $B \in k$ i punkt H jest ich ortocentrum, przechodzą przez stały punkt.

10. O dwóch wielokątach mówimy, że są tego samego rodzaju, jeśli mają tę samą liczbę boków. Niech r będzie liczbą rodzajów ścian pewnego wielościanu wypukłego, a s liczbą jego ścian. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $s - r$.

11. Skonstruować bok kwadratu, mając dane odległości pewnego jego punktu wewnętrznego od trzech jego kolejnych wierzchołków.

12. Punkt P należy do ściany SAD ostrosłupa $ABCDS$. Narysować przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną PQR.





Pierwsze Zawody Drużynowe:

1. Ciągi liczb rzeczywistych a_n i b_n są dane wzorami rekurencyjnymi:

$$a_{n+1} = a_n - b_n \quad \text{oraz} \quad b_{n+1} = 2b_n \qquad \text{gdy } a_n \geqslant b_n$$
$$a_{n+1} = 2a_n \quad \text{oraz} \quad b_{n+1} = b_n - a_n \qquad \text{gdy } a_n < b_n$$

Znaleźć wszystkie pary (a_1, b_1) liczb rzeczywistych dodatnich takie, że $a_k = 0$ dla pewnego k.

2. Okręgi o, o_1 i o_2 są parami styczne zewnętrznie. Oznaczamy punkty styczności o i o_1 przez A, o i o_2 przez B. Znaleźć zbiór wszystkich środków jednokładności przekształcających o_1 na o_2 przy ustalonym okręgu o i punktach A i B oraz zmiennych okręgach o_1 i o_2.

3. Wyznaczyć jak największą liczbę M o następującej własności. Dowolny wielokąt wypukły o 1994 wierzchołkach, z których każdy jest punktem kratowym (tzn. ma obie współrzędne całkowite) zawiera w swym wnętrzu co najmniej M punktów kratowych.

Drugie Zawody Drużynowe:

1. Na okręgu o długości 1 ustalono łuk A o długości α, gdzie $0 < \alpha < 1$ i α jest liczbą niewymierną. Z ustalonego punktu okręgu odłożono łuki długości α, 2α, ..., $n\alpha$. Niech $k(n)$ oznacza liczbę końców tych łuków, które należą do A. Wykazać, że ciąg $n\alpha - k(n)$ jest ograniczony.

2. Proste AB i AC są styczne do okręgu o w punktach B i C. Na prostej AB wybieramy taki punkt D, aby B lażał na odcinku AD. Okrąg opisany na trójkącie ADC przecina okrąg o w punktach C i P. Punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą CD. Udowodnić, że $\sphericalangle DPQ = 2\sphericalangle ADC$.

3. Liczba d jest dzielnikiem liczby naturalnej k. Oznaczmy przez X_k zbiór ciągów k-elementowych $(x_1, \ldots, x_k)$ o wyrazach ze zbioru liczb całkowitych nieujemnych spełniających warunki:
(i) $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant k$,
(ii) liczba $x_1 + \ldots + x_k$ jest podzielna przez d.
Ponadto niech Y_k będzie zbiorem wszystkich tych ciągów $(x_1, \ldots, x_k)$ należących do X_k, dla których $x_k = k$. Obliczyć iloraz $|X_k|/|Y_k|$, gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A.