Obóz przygotowawczy do zawodów międzynarodowych
Zwardoń, 2.06.1997 — 15.06.1997.

Pierwsze Zawody Indywidualne:

1. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Dowieść, że można znaleźć takie liczby naturalne $m, k_1, k_2, \ldots, k_m$, że:

$$n < m \leqslant 2n, \qquad 1 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_m \leqslant 2n \qquad \text{oraz} \qquad n \mid a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \ldots + a_{k_m}.$$

2. W pewnej klasie zadano to samo pytanie nauczycielowi i uczniom. Prawdopodobieństwo, że nauczyciel odpowie prawidłowo wynosi p. Uczeń odpowie prawidłowo z prawdopodobieństwem d, gdy jest dziewczynką i z prawdopodobieństwem $1-d$, gdy jest chłopcem. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń odpowie tak samo jak nauczyciel wynosi $\frac{1}{2}$. Jaka jest proporcja liczby chłopców do liczby dziewczynek w tej klasie?

3. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P, wysokości trójkątów PAB i PCD, poprowadzone z punktu P są równe oraz wysokości trójkątów PBC i PDA poprowadzone z punktu P są równe. Wykazać, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

4. Niech $n \geqslant 3$ będzie taką liczbą naturalną, że równanie

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_1 x_2 \ldots x_n \tag{$\spadesuit$}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dowieść, że wówczas równanie ($\spadesuit$) ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

5. Dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 2$ nierówność

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 x_n^2 + x_n^2 x_1^2 \leqslant x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + \ldots + x_{n-1} x_n^3 + x_n x_1^3 \tag{$\clubsuit$}$$

zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$? Dla jakich n dowolne liczby rzeczywiste dodatnie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ posiadają permutację $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniającą nierówność ($\clubsuit$)?

6. Udowodnić, że w dowolnym sześciokącie wypukłym o polu 1 istnieje przekątna odcinająca trójkąt o polu nie większym niż $\frac{1}{6}$.

Drugie Zawody Indywidualne:

1. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o wartościach nieujemnych spełniające dla $x, y \in \mathbb{R}$ następujące równości:

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= f(x+y) + f(x-y) \\ f(x+3) + 5f(x+1) &= 5f(x+2) + f(x). \end{aligned}$$

2. Znaleźć wielomian $W(x)$ o następującej własności: dla dowolnego n liczba sposobów, na które można wypłacić n złotych [polskich (nowych)] przy pomocy monet o nominałach 1, 2 i 5 PLN, jest równa $[W(n)]$.

Uwaga: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x.

3. Punkt P nie należy do sfery s, okrąg o jest w sferze s zawarty. Prowadzimy wszystkie proste przechodzące przez P i punkty na okręgu o. Wykazać, że drugie punkty przecięcia tych prostych ze sferą s leżą na okręgu.

4. Dane są liczby naturalne m i n takie, że $m \leqslant n$ oraz m jest dzielnikiem pewnej potęgi liczby n. Pokazać, że m^{m^m} jest dzielnikiem n^{n^n}.

5. Dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 2$ układ równań

$$\begin{cases} 4x_1^2 + 8x_2^2 = 33x_1x_2 \\ 4x_2^2 + 8x_3^2 = 33x_2x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 4x_{n-1}^2 + 8x_n^2 = 33x_{n-1}x_n \\ 4x_n^2 + 8x_1^2 = 33x_nx_1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

6. W wypukłym czworokącie $ABCD$ punkt K jest środkiem boku AB. Wiadomo, że $\sphericalangle CKD = 120^\circ$. Wykazać, że $AB + 2AD + 2BC \geqslant 2CD$.

Trzecie Zawody Indywidualne:

1. Niech $P \neq Q$ będą takimi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, że

$$P(Q(x)) = Q(P(x)).$$

Pokazać, że wielomian $P(x) - Q(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $P(P(x)) - Q(Q(x))$.

2. W przestrzeni danych jest 513 punktów, z których żadne cztery nie są współpłaszczyznowe. Każdy odcinek o końcach w tych punktach pomalowano na jeden z 9 kolorów. Dowieść, że istnieje łamana zamknięta złożona z nieparzystej liczby odcinków tego samego koloru.

3. Niech D będzie punktem leżącym na boku BC trójkąta ABC. Niech E i F będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD. Dowieść, że jeśli punkty B, C, E, F leżą na jednym okręgu, to

$$\frac{AD + BD}{AD + CD} = \frac{AB}{AC} .$$

4. Czy część wspólna zbioru punktów (x, y, z) przestrzeni spełniających równanie $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ oraz płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(0, 0, 0)$ może być (a) okręgiem, (b) elipsą nie będącą okręgiem?

5. Niech $n \geq 2$. Znaleźć największą wartość wyrażenia

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 ,$$

gdzie $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ przebiegają wszystkie liczby rzeczywiste nieujemne takie, że $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n = 1$. Wyznaczyć wszystkie układy liczb $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, dla których ta największa wartość jest osiągana.

6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, proste AB i CD przecinają się w punkcie P, proste AD i BC przecinają się w punkcie R. Wykazać, że punkt przecięcia dwusiecznych kątów ARB i BPC jest współliniowy ze środkami przekątnych czworokąta $ABCD$.

5 *Łatwych Zadań Probabilistycznych:*

1. W fiolce znajduje się d dużych tabletek i m małych. Duża tabletka zawiera dwa razy więcej leku niż mała. Każdego dnia pacjent wybiera losowo jedną tabletkę. Gdy trafi na dużą, przełamuje ją na pół i zjada połowę, zaś drugą połowę wkłada do fiolki. Przełamana tabletka traktowana jest przez pacjenta jako mała. Oczekiwana liczba małych tabletek w fiolce w momencie, kiedy pacjent wylosowal ostatnią dużą tabletkę, wynosi $W(d, m)$. Pokazać, że istnieją takie liczby rzeczywiste a_d, b_d niezależne od m, że $W(d, m) = ma_d + b_d$.

2. Gwiazda ma r ramion, zaś na j-tym ramieniu ma $n_j \geqslant 1$ punktów (jeden z nich jest końcowym punktem ramienia). Cząsteczka startuje z centrum gwiazdy, wybiera losowo (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{r}$) ramię, wykonuje jeden krok po ramieniu w kierunku końca i jeśli go nie osiągnie, porusza się po ramieniu losowo (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$) od- lub dośrodkowo. Jeśli osiągnie koniec ramienia, podróż cząsteczki się kończy, jeśli dotrze do centrum, wybiera losowo ramię i.t.d. Obliczyć prawdopodobieństwo, że cząsteczka dotrze do końca j-tego ramienia.

3. Potasowano n kartek z liczbami od 1 do n, a następnie utworzono z nich stosy według następującej reguły: pierwsza kartka jest początkiem pierwszego stosu; kolejna kartka należy do tego samego stosu dopóki liczba na niej napisana jest mniejsza od liczby na poprzedniej kartce. Jeżeli liczba z kolejnej kartki jest większa niż jej poprzedniczka, kartka rozpoczyna nowy stos. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby stosów.

4. Niech p będzie liczbą pierwszą nieparzystą. Wyznaczyć liczbę podzbiorów A zbioru $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ takich, że:

(i) A ma dokładnie p elementów,

(ii) suma wszystkich elementów zbioru A jest podzielna przez p.

5. W chwili $t = 0$ w wierzchołkach trójkąta stoją trzy osoby. Każda z nich stoi w innym wierzchołku. W kolejnych chwilach $t = 1, 2, \ldots$ jednocześnie każda z nich losowo (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$) przemieszcza się do jednego z dwóch sąsiednich wierzchołków. Jaka jest wartość oczekiwana czasu, jaki upłynie aż wszystkie trzy osoby spotkają się w jednym z wierzchołków trójkąta?

Tuzin Tuzinkowych Zadań Geometrycznych:

1. Wysokość trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o obwodach odpowiednio $2a$ i $2b$. Znaleźć obwód trójkąta ABC.

2. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B. Promienie tych okręgów są mniejsze od promienia okręgu o. Prosta k jest styczna do okręgów o_1 i o_2 w punktach odpowiednio D i C; okręgi te leżą po jednej stronie prostej k. Wykazać, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

3. Okręgi o_1 i o_2 leżą po jednej stronie prostej k i są styczne do niej w różnych punktach odpowiednio A i B. Okrąg o jest styczny zewnętrznie do tych okręgów i styczny do prostej k. Mając dane promienie okręgów o_1 i o_2 oraz długość odcinka AB, znaleźć promień okręgu o.

4. Czworościan ma trzy osie symetrii. Czy musi to być czworościan foremny?

5. Prowadzimy w czworościanie cztery proste łączące odpowiednio jego wierzchołki ze środkami okręgów wpisanych w przeciwległe ściany. Wykazać, że jeśli dwie spośród tych prostych przecinają się, to i dwie pozostałe przecinają się.

6. Prowadzimy w czworościanie wszystkie płaszczyzny wyznaczone odpowiednio przez końce jednej krawędzi i środek krawędzi do niej skośnej. Na ile części te płaszczyzny rozcinają czworościan?

7. Punkty P, Q, R są środkami odpowiednio boków BC, CA, AB trójkąta ABC, punkt S należy do wnętrza trójkąta PQR. Proste PS, QS, RS przecinają odcinki QR, RP, PQ odpowiednio w punktach K, L, M. Wykazać, że proste AK, BL, CM przecinają się w jednym punkcie.

8. Czy istnieje taki czworościan foremny, że współrzędne wszystkich jego wierzchołków są całkowite?

9. Na płaszczyźnie dany jest czworokąt wypukły oraz dwusieczne trzech jego kątów. Skonstruować dwusieczną czwartego kąta, używając jedynie linijki.

10. Na płaszczyźnie dany jest nierównoramienny trójkąt t oraz okrąg o, przechodzący przez dwa wierzchołki trójkąta t oraz przez środek okręgu wpisanego w t. Skonstruować środek okręgu wpisanego w trójkąt t, używając jedynie linijki (środek okręgu o nie jest dany).

11. Wykazać, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przekątne A_1A_5, A_3A_8 i A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie.

12. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok $ABCD$, S jest jego wierzchołkiem, punkt A spodkiem wysokości. Okręgi wpisane w ściany SBC i SDC są styczne. Wykazać, że podstawą tego ostrosłupa jest romb.

Zadania Domowe:

1. (a) Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi podzielność

$$(n!)^{n+1} \big| (n^2)!\ .$$

(b) Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których zachodzi podzielność

$$(n!)^{n+2} \big| (n^2)!\ .$$

(c) Znaleźć taką liczbę naturalną $n \geqslant 2$, że zachodzi podzielność

$$(n!)^{n+3} \big| (n^2)!\ .$$

2. Ciąg liczbowy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazwiemy subarytmetycznym, jeśli

$$2a_k \leqslant a_{k-1} + a_{k+1} \qquad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Ciąg nazwiemy superarytmetycznym, jeśli

$$2a_k \geqslant a_{k-1} + a_{k+1} \qquad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Ciąg nazwiemy wypukłym, jeśli jest sub- lub superarytmetyczny. Dowieść, że z każdego ciągu liczbowego 100 wyrazowego można wybrać podciąg wypukły pięciowyrazowy.

3. Spośród trójkątów o obwodzie 1 wybrać taki, dla którego suma $a\alpha + b\beta + c\gamma$ jest najmniejsza, gdzie a, b, c, są długościami boków trójkąta, a α, β, γ, są miarami przeciwległych im kątów, wyrażonymi w radianach.

4. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma tę własność, że dla dowolnego trójmianu kwadratowego P o współczynnikach naturalnych $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + x_{P(n)}) = 0$. Czy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$?

5. Pokazać, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniający warunki: $0 < x_1 < 1$ oraz $x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{n^2}$ dla $n \geqslant 1$ jest ograniczony.

6. W kole o promieniu 10 leżą 372 punkty. Pokazać, że w pewnym pierścieniu o promieniach 2 i 3 leży co najmniej 12 spośród nich.

Pierwsze Zawody Drużynowe:

1. Dowieść, że liczba
$$\prod_{n=8}^{64}\left(\binom{3n+31}{n}\binom{4n-19}{n+5}-\binom{3n+31}{n+5}\binom{3n+1}{n}\right)$$
jest sześcianem liczby całkowitej.

Uwaga: $\prod_{n=k}^{l} a_n = a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_l$.

2. Niech P będzie wielomianem dwóch zmiennych trzeciego stopnia takim, że $P(x,y)=0$ dla siedmiu różnych punktów (x,y) pewnego okręgu. Pokazać, że wówczas $P(x,y)=0$ dla każdego punktu (x,y) tego okręgu.

3. Dowieść, że istnieje taka liczba naturalna n, że $n!$ w zapisie dziesiętnym rozpoczyna się cyframi 1997.

4. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb naturalnych spełnia warunek: $4a_n^2 + a_{n+1}^2 = 1 + 4a_n a_{n+1}$. Dowieść, że nie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami pierwszymi.

5. Niech $A = \{[\alpha n] : n \in \mathbf{N}\}$ oraz $B = \{[\alpha^2 n] : n \in \mathbf{N}\}$, gdzie $\alpha = 1+\sqrt{3}$. Dowieść, że zbiór $A \cup B$ nie zawiera żadnej trójki kolejnych liczb naturalnych.

6. Dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 2$ prawdziwe jest następujące twierdzenie: wśród dowolnych n^2 osób, z których każda ma co najmniej jednego znajomego, znajduje się $n+1$ osób mających tę samą liczbę znajomych lub wspólnego znajomego.

Uwaga: Jeśli osoba A zna B, to B zna A. Nikt nie jest swoim znajomym.

7. Chomik Leonid ma pod ziemią 4 spiżarnie położone w wierzchołkach czworościanu foremnego o boku 1 metr. Czy Leonid może połączyć te spiżarnie siecią tuneli o łącznej długości mniejszej niż $\sqrt{6}$ metrów?

8. Boki AB, BC, CD, DA czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu o środku P są do niego styczne odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wykazać, że:
$$\frac{LN}{KM} = \frac{PB \cdot PC + PA \cdot PD}{PA \cdot PB + PC \cdot PD}.$$

9. Dany jest taki pięciokąt wypukły $ABCDE$, że istnieje punkt F leżący na boku AB, spełniający warunki: $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE$ oraz $\sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC$. Wykazać, że zachodzi równość: $\sphericalangle BCD + \sphericalangle DEA = 180^\circ$.

10. Punkt H jest ortocentrum nieprostokątnego trójkąta ABC. Prosta l, przechodząca przez H, przecina proste AB i AC odpowiednio w punktach D i E, nie będących wierzchołkami trójkąta ABC. Niech P będzie dowolnym takim punktem, że $AP \perp l$. Wykazać, że $[PBD]:[PCE] = DH:HE$, gdzie $[ABC]$ oznacza pole trójkąta ABC.

Drugie Zawody Drużynowe:

1. Niech s_n będzie sumą cyfr liczby n. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną k taką, że
$$\sum_n n^k(-1)^{s_n} \neq 0 \ ,$$
gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby naturalne $n \leqslant 10^{1997}-1$, które w zapisie dziesiętnym nie mają ani cyfry 2, ani 7.

Uwaga: 0 nie jest liczbą naturalną.

2. Dane są liczby naturalne $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1000}$ takie, że $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1000} = 1997$. Niech P_k będzie liczbą permutacji $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{1000}$ zbioru $\{1,2,3,\ldots,1000\}$ takich, że
$$k \in \{\ a_{n_1}\ ,\ a_{n_1}+a_{n_2}\ ,\ a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}+\ldots+a_{n_{1000}}\ \}.$$
Dowieść, że $P_{999} = P_{1000}$.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Niech D, E, F będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu P na proste BC, CA, AB. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF, zaś r jego promieniem. Dowieść, że:
$$\text{pole}\,(ABC) \geqslant 3r\sqrt{3r^2 - 3(OP)^2}\ .$$