Zawody Indywidualne

1. Z kartki papieru w kratkę o wymiarach 29×29 kratek wycięto 99 kwadratów 2×2. Wykazać, że można wyciąć jeszcze jeden taki kwadrat. Wszystkie cięcia przeprowadzane są wzdłuż linii wyznaczających kratki.

2. Dowieść, że istnieje taka liczba naturalna n, że równanie

$$s^5 + t^6 + u^7 + v^8 + w^9 + x^{10} + y^{11} = n$$

ma co najmniej 1998 rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich s, t, u, v, w, x i y.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC, $\angle BAC = 60^\circ$. Wysokości BD i CE tego trójkąta przecinają się w punkcie H. Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BHE przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

4. Czy istnieje taki ciąg liczb naturalnych, że dowolną liczbę naturalną można przedstawić na dokładnie jeden sposób jako różnicę pewnych dwóch wyrazów tego ciągu?

5. Na każdym z boków trójkąta równobocznego ABC o boku 1 zaznaczono $n-1$ punktów ($n \geq 2$) dzielących bok na n równych części. Wybieramy losowo po jednym zaznaczonym punkcie na każdym boku trójkąta ABC. Jaka jest wartość oczekiwana pola trójkąta o wierzchołkach w wybranych punktach?

6. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne n, że n-kąt foremny można rozciąć na skończoną liczbę
a) równoległoboków,
b) równoległoboków nie będących prostokątami.

11. W każdym polu kwadratowej tablicy 18×18 napisano jedną z liczb $1, 2, 3, \ldots, 70$. Wykazać, że istnieją 4 pola, których środki są wierzchołkami równoległoboku takie, że sumy liczb wpisanych na końcach jego przekątnych są równe.

12. Niech $f_0(x) = x^2$ oraz $f_1(x) = x + 1$. Dowolnemu ciągowi $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ złożonemu z zer i jedynek przypisano wartość $f_{\varepsilon_n} \circ f_{\varepsilon_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{\varepsilon_1}(2)$. Wykazać, że różnym ciągom tej samej długości przypisano różne wartości.

13. Na płaszczyźnie narysowano 3000 prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie mają wspólnego punktu. Wykazać, że wśród części, na które rozcinają one płaszczyznę, jest co najmniej 2000 trójkątów.

14. Niech P będzie takim niezerowym wielomianem o współczynnikach całkowitych, że $P(1) = P(2) = 0$. Wykazać, że pewien współczynnik wielomianu P jest niewiększy niż -2.

15. Niech (k_n) będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wykazać, że liczba

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n!}$$

jest niewymierna.

16. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o_1. Styczna do tego okręgu w punkcie A przecina prostą BC w punkcie D. Okrąg o_2 styczny do prostej BD w punkcie D przechodzi przez punkt A i przecina okrąg o_1 w różnych punktach A i E. Udowodnić, że

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB^3}{AC^3}\,.$$

21. Czy można pociąć szachownicę 8×8 wzdłuż pewnych trzynastu prostych nie przechodzących przez środek żadnego pola tak, żeby każdy powstały kawałek zawierał co najwyżej jeden środek pola?

22. Dwoje zawodników gra w grę polegającą na zastępowaniu gwiazdek w wyrażeniu $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \ldots + *x + 1$ przez liczby rzeczywiste. Gracze wykonują ruchy na przemian. Ruch polega na zastąpieniu wybranej przez gracza gwiazdki dowolnie wybraną przez niego liczbą. Jeżeli otrzymany na koniec wielomian nie będzie miał pierwiastków rzeczywistych wygra rozpoczynający, w przeciwnym przypadku wygrywa drugi gracz. Który z graczy wygra przy optymalnej grze?

23. Dany jest okrąg $o = o(S, r)$ oraz takie punkty A i B, że $AS > r$, $BS < r$. Niech P będzie dowolnym punktem okręgu o. Prosta AP przecina okrąg o w punktach P i C; prosta BC przecina okrąg o w punktach C i D, zaś prosta AD przecina okrąg o w punktach D i E. Dowieść, że przy ustalonym okręgu o oraz punktach A i B wszystkie proste EP, odpowiadające różnym położeniom punktu P na o, przecinają się w jednym punkcie.

24. Danych jest pięć punktów w przestrzeni. Wykazać, że pewne trzy spośród nich nie są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

25. Definiujemy rekurencyjnie ciąg liczb całkowitych nieujemnych $a_0, a_1, a_2, \ldots$ w następujący sposób: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz

$$a_{2n} = 3a_n, \qquad a_{2n+1} = 3a_n + 1 \qquad \text{dla} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

(a) Scharakteryzować wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których istnieje dokładnie jedna para (k, l) liczb całkowitych nieujemnych spełniająca warunki

$$k \geq l \qquad \text{oraz} \qquad a_k + a_l = n\,. \tag{♣♣}$$

(b) Dla każdego n, niech $f(n)$ będzie liczbą par (k, l) spełniających (♣♣). Znaleźć

$$\max_{n < 3^{1998}} f(n)\,.$$

26. Niech A będzie skończonym zbiorem punktów przestrzeni, nie leżących na jednej płaszczyźnie. Każdemu punktowi zbioru A przyporządkowano liczbę rzeczywistą. Dla dowolnej płaszczyzny wyznaczonej przez trzy niewspółliniowe punkty zbioru A, suma liczb przyporządkowanych wszystkim punktom zbioru A leżącym na tej płaszczyźnie jest równa 0. Czy stąd wynika, że każda spośród liczb przyporządkowanych punktom zbioru A jest równa 0?

27. W trójkącie ABC mamy $BC > CA > AB$. Punkt D leży na boku BC przy czym $BD = CA$. Punkt E jest takim punktem prostej BA, że $A \in \overline{EB}$ oraz $BE = CA$. Okrąg opisany na trójkącie EBD przecina bok AC w punkcie P. Prosta BP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Q. Udowodnić, że $AQ + CQ = BP$.

28. Wyznaczyć wszystkie ciągi $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ liczb rzeczywistych nieujemnych o minimalnej długości takie, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 25, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 33, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 49, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^4 = 81.$$

10 Łatwych Zadań Nietylkoniegeometrycznych

31. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że $ab = cd$. Wykazać, że liczba $a^{1998} + b^{1998} + c^{1998} + d^{1998}$ jest złożona.

32. Niech $x_i > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, oraz $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Dowieść, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{x_i^2}{x_i^2 - 3x_i + 3}} \ge n.$$

33. Dowieść, że liczba $\log_{1+2\sqrt{2}}(1 + 3\sqrt{2})$ jest niewymierna.

34. Dowieść, że płaszczyzny nie można pokolorować trzema kolorami w taki sposób, aby dowolne dwa punkty odległe o 1 były pomalowane różnymi kolorami.

35. Zmienne losowe X, Y, Z o wartościach rzeczywistych spełniają warunki

$$E(X) = E(Y) = E(Z) = E(X \cdot Y) = E(Y \cdot Z) = E(Z \cdot X) = 1,$$

gdzie $E(X)$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej X. Czy stąd wynika, że:
(a) $E(X \cdot Y \cdot Z) \ge 1$? (b) $E(X \cdot Y \cdot Z) \le 1$?

36. Każda z przekątnych AD, BE, CF sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ dzieli ten sześciokąt na dwa czworokąty o równych polach. Dowieść, że przekątne te przecinają się w jednym punkcie.

37. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Na bokach AB, BC, CD budujemy trójkąty równoboczne ABE, BCF, CDG, leżące na zewnątrz tego czworokąta. Dowieść, że środki odcinków EF, FG i AD są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

38. Pewien język składa się ze słów długości niewiększej niż m zbudowanych z n liter, przy czym żadne słowo nie jest początkiem innego. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{n^k} \le 1,$$

gdzie a_k oznacza liczbę słów długości k.

39. Czy istnieje taki czworościan, którego każda ściana jest trójkątem rozwartokątnym?

40. Czy istnieje taki czworościan, którego każda krawędź jest ramieniem kąta rozwartego pewnej ściany tego czworościanu?

41. Dowieść, że pewne dwa spośród dowolnych czterech punktów prostokąta 3×4 są odległe o co najwyżej $25/8$.

Zawody Drużynowe

51. Czy równanie $x^x y^y = z^z$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y, z większych od 1?

52. Dowieść, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby $(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^{1998^{1998}}$ setna cyfra po przecinku jest taka sama jak dwusetna.

53. Każdy z trójkątów t_1, t_2, t_3 zawiera w swoim wnętrzu punkt P. Wykazać, że można wybrać punkty A, B, C będące odpowiednio wierzchołkami trójkątów t_1, t_2, t_3 tak, by P był punktem wewnętrznym trójkąta ABC.

61. Rozstrzygnąć, czy równanie $x^3+y^3+1 = z^{1998}$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

62. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych x, y rzeczywistych zachodzi równość
$$y^2 f(x) + f(xy^2) = 2yf(xy).$$

63. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykazać, że jeśli istnieje okrąg o środku należącym do odcinka AD, styczny do pozostałych boków tego czworokąta, to
$$AB + CD = AD\ .$$

71. Niech f i g będą takimi ciągłymi funkcjami określonymi na przedziale $[0,1]$ o wartościach w $[0,1]$, że $f \circ g = g \circ f$. Wykazać, że istnieje takie $x \in [0,1]$, że $f(x) = g(x)$.

72. W obozie przygotowawczym do Międzynarodowej Olimpiady Pielęgniarsko-Matematycznej uczestniczy n chłopców i n dziewcząt. Niektórzy chłopcy zdążyli już poznać imiona niektórych dziewcząt. Wiadomo, że dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dowolna k-elementowa grupa chłopców połączywszy swoją wiedzę potrafi podać imiona co najmniej k dziewcząt. Dowieść, że można tak połączyć chłopców z dziewczętami w pary podczas zabawy tanecznej w lokalu „U Pyzdry”, aby każdy chłopiec tańczył z dziewczyną, której imię już poznał.

73. Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC, punkt P należy do tego łuku BC okręgu o, do którego nie należy A. Punkty S_1 oraz S_2 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty PAB i PAC. Dowieść, że przy ustalonych punktach A, B, C i zmieniającym się punkcie P, okręgi opisane na trójkątach PS_1S_2 mają punkt wspólny.

74. Danych jest $n \geq 4$ punktów przestrzeni, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Gracze A i B rysują na przemian po jednym odcinku łączącym pewne dwa spośród tych punktów. Wygrywa ten, po ruchu którego każde dwa spośród danych punktów są połączone pewną łamaną. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Szkice rozwiązań

1. Na kartce zaznaczamy 100 kwadratów 2×2 jak na rysunku.

Wycięcie kwadratu 2×2 może popsuć tylko jeden z zaznaczonych kwadratów. Po wycięciu 99 kwadratów pozostanie więc nienaruszony co najmniej 1 zaznaczony kwadrat.

2. Pierwszy odruch jest następujący: wydaje się, że liczbę 1998 można zastąpić inną, dowolnie dużą. Ponieważ liczba rozwiązań nierówności

$$s^5 + t^6 + u^7 + v^8 + w^9 + x^{10} + y^{11} \leq N$$

jest rzędu N^c, gdzie

$$c = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \; ,$$

więc wystarczy sprawdzić, że $c > 1$. Tymczasem $c < 1$ i ta metoda prowadzi do nikąd. Biorąc natomiast $n = 1^{27720} + 2^{27720} + 3^{27720} + 4^{27720} + 5^{27720} + 6^{27720} + 7^{27720}$ otrzymujemy 5040 rozwiązań równania, a mianowicie:

$$s = p_1^{5544}, \quad t = p_2^{4620}, \quad u = p_3^{3960}, \quad v = p_4^{3465}, \quad w = p_5^{3080}, \quad x = p_6^{2770}, \quad y = p_7^{2520},$$

gdzie $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7)$ przebiega wszystkie permutacje liczb $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

3. Niech F będzie drugim punktem przecięcia prostej CH z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Wówczas trójkąt BHF jest równoboczny i dwusieczna kąta BHE jest symetralną odcinka FB, który jest cięciwą okręgu opisanego na trójkącie ABC.

4. Tak. Warunki zadania spełnia ciąg 10, 11, 100, 102, 1000, 1003,... określony rekurencyjnie wzorami

$$a_{2n+1} = 10^{R_n}, \quad a_{2n+2} = 10^{R_n} + R_n,$$

gdzie R_n jest najmniejszą liczbą naturalną, której nie można przedstawić jako różnicy dwóch liczb spośród a_1, a_2, a_3,..., a_{2n}.

5. Oznaczmy punkty zaznaczone na boku AB odpowiednio B_1, B_2,..., B_{n-1} licząc od A do B oraz na boku AC odpowiednio C_1, C_2,..., C_{n-1} licząc od A do C. Wartość oczekiwana pola trójkąta $AB_?C_?$ wynosi

$$\frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{ij\sqrt{3}}{4n^2} = \frac{\sqrt{3}}{16} \; ,$$

czyli $\frac{1}{4}$ pola trójkąta ABC. Podobnie jest z polami trójkątów $A_?BC_?$ i $A_?B_?C$. Zatem wartość oczekiwana pola trójkąta $A_?B_?C_?$ wynosi $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

6. Jeżeli wielokąt wypukły w, który ma dwa równoległe boki a oraz b został podzielony na równoległoboki, to istnieje taki ciąg $R_{a,b}$ równoległoboków tego podziału, że jeden z boków pierwszego równoległoboku jest zawarty w a, jeden z boków ostatniego jest zawarty w b, a część wspólna każdych dwóch kolejnych równoległoboków tego ciągu jest odcinkiem równoległym do a i b.

Jeżeli w ma także drugą parę boków równoległych c i d, to istnieje ciąg $R_{c,d}$ równoległoboków o własnościach analogicznych do $R_{a,b}$, przy czym istnieje równoległobok należący do obydwu tych ciągów. Jeżeli na dodatek a i c są prostopadłe, to równoległobok ten jest prostokątem.

Jeżeli wielokąt wypukły w ma bok a, do którego nie ma boku równoległego, to wielokąta w nie podzielić na równoległoboki, ponieważ zaczynając podział od a, nie ma gdzie skończyć.

Wielokąt środkowosymetryczny $A_1A_2A_3...A_{2k}$ można podzielić na równoległoboki stosując następującą procedurę. Przesuwamy łamaną $A_1A_2...A_k$ o wektor $\overrightarrow{A_1A_{2k}}$. Jej obraz odcina od wielokąta pasek, który łatwo można podzielić na równoległoboki. To co zostało, jest wielokątem środkowosymetrycznym o $2(n-1)$ bokach.

Zatem odpowiedź na pytanie a) brzmi *dla n parzystych*, a na b) *dla n parzystych niepodzielnych przez 4.*

11. Rozważmy wszystkie pary pól położonych środkowosymetrycznie względem środka tablicy:

Takich par jest 162. Suma liczb wpisanych w pola każdej pary jest liczbą naturalną pomiędzy 2 i 140, może więc przyjmować 139 różnych wartości. Znajdziemy więc takie dwie pary, że sumy liczb są dla obu par takie same. Środki czterech tak wybranych pól mogą być wierzchołkami równoległoboku lub, jak np. dla par I i J, mogą leżeć na jednej prostej. Wobec tego lepiej rozważyć pary pól, których środki wyznaczają wektor $[9,1]$:

Takich par jest 153. Różnica liczb wpisanych w pola każdej takiej pary jest jedną ze 139 liczb całkowitych od -69 do 69. Znajdziemy więc takie dwie pary, dla których różnice są takie same, a to już daje nam prawdziwy równoległobok spełniający warunki zadania.

12. Dla dowolnego ciągu zerojedynkowego $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ zachodzi nierówność

$$f_{\varepsilon_n}\circ f_{\varepsilon_{n-1}}\circ\ldots\circ f_{\varepsilon_1}(2)\geq n+2\ .$$

Pokażemy, jak znając n i $m=f_{\varepsilon_n}\circ f_{\varepsilon_{n-1}}\circ\ldots\circ f_{\varepsilon_1}(2)$, można odtworzyć ε_n.

Jeśli m nie jest kwadratem liczby naturalnej, to musi być $\varepsilon_n=1$.

Jeśli zaś $m=k^2$, to może być $\varepsilon_n=0$, ale tylko wtedy, gdy k jest duże, bo w tym przypadku $k=f_{\varepsilon_{n-1}}\circ\ldots\circ f_{\varepsilon_1}(2)\geq n+1$. Może też być $\varepsilon_n=1$, ale tylko wtedy, gdy k jest małe. Mamy bowiem w tym przypadku $\varepsilon_{n-1}=\varepsilon_{n-2}=...=\varepsilon_{n-2k+2}=1$, co oznacza, że $n-2k+2\geq 0$, skąd $k\leq\frac{n}{2}+1$.

13. Rozważmy dowolną z narysowanych prostych (nazwijmy ją k) oraz dowolną półpłaszczyznę wyznaczoną przez prostą k. Jeżeli w tej półpłaszczyźnie leży choćby jeden punkt przecięcia pozostałych prostych, rozważmy ten najbliższy prostej k. Prosta k i proste przechodzące przez ten najbliższy punkt wyznaczają trójkąt, który nie jest przecięty przez żadną z pozostałych prostych. Wśród 6000 półpłaszczyzn wyznaczonych przez nasze proste istnieją co najwyżej dwie takie, na których nie ma punktów przecięcia innych prostych. W ten sposób wskażemy co najmniej $2998\cdot 2+1+1$ trójkątów. Każdy z nich zostanie wskazany co najwyżej 3-krotnie. Tak więc wskażemy co najmniej $\frac{5998}{3}$ różnych trójkątów.

14. Załóżmy, że wielomian niezerowy
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \ ,$$
gdzie $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$ są liczbami całkowitymi większymi od -2, spełnia warunek $P(1) = P(2) = 0$. Załóżmy ponadto, że spośród wielomianów o powyższych własnościach wielomian P ma możliwie najmniejszy stopień. Wynika stąd, że $a_0 \neq 0$.

Niech
$$Q(x) = b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + ... + b_1 x + b_0$$
będzie takim wielomianem, że
$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2 - 3x + 2) \ .$$
Wtedy zachodzą następujące nierówności
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_n & = & b_{n-2} & & & & & \geq & -1 \\
a_{n-1} & = & b_{n-3} & - & 3b_{n-2} & & & \geq & -1 \\
a_{n-2} & = & b_{n-4} & - & 3b_{n-3} & + & 2b_{n-2} & \geq & -1 \\
a_{n-3} & = & b_{n-5} & - & 3b_{n-4} & + & 2b_{n-3} & \geq & -1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
a_2 & = & b_0 & - & 3b_1 & + & 2b_2 & \geq & -1 \\
a_1 & = & & - & 3b_0 & + & 2b_1 & \geq & -1 \\
a_0 & = & & & & & 2b_0 & \geq & -1
\end{array}\right. .$$

Skoro a_0 jest liczbą parzystą różną od 0, to musi być $a_0 \geq 2$, skąd $b_0 \geq 1$ i przedostatnia z wypisanych wyżej nierówności przyjmuje postać
$$2b_1 \geq -1 + 3b_0 = -1 + b_0 + 2b_0 \geq 2b_0 \ ;$$
zatem $b_1 \geq b_0$. Dalej mamy
$$2b_2 \geq -1 + 3b_1 - b_0 \geq -1 + 2b_1 \ ,$$
skąd $b_2 \geq b_1$. Podobnie dochodzimy do nierówności
$$b_{n-2} \geq b_{n-3} \geq b_{n-4} \geq ... \geq b_1 \geq b_0 \geq 1 \ .$$
Jednakże wtedy
$$b_{n-3} - 3b_{n-2} = (b_{n-3} - b_{n-2}) - 2b_{n-2} \leq -2 \ ,$$
co jest w sprzeczne z nierównością $b_{n-3} - 3b_{n-2} \geq -1$.

UWAGA: Liczby -2 w treści zadania nie można zastąpić przez -3, co pokazuje przykład $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

15. Załóżmy, że liczba S jest wymierna. Możemy wtedy przedstawić S w postaci ułamka $\frac{p}{k_m!}$. Wtedy liczba $\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{k_n!}$ jest postaci $\frac{q}{k_m!}$, natomiast
$$S = \frac{q}{k_m!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{k_n!} < \frac{q}{k_m!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-m}k_m!} = \frac{q+1}{k_m!} \ ,$$
skąd $q < p < q + 1$. Otrzymaliśmy więc sprzeczność, gdyż p i q są całkowite.

16. Załóżmy, że $C \in \overline{DB}$ (w drugim przypadku dowód przebiega analogicznie). Z twierdzenia Ptolemeusza dostajemy

$$AC \cdot EB = AB \cdot EC + AE \cdot BC,$$

czyli

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} + \frac{AE \cdot BC}{EC \cdot AC}\,.$$

Musimy więc udowodnić, że

$$\frac{AB}{AC} + \frac{AE \cdot BC}{EC \cdot AC} = \frac{AB^3}{AC^3}\,,$$

czyli, że

$$1 + \frac{AE \cdot BC}{EC \cdot AB} = \frac{AB^2}{AC^2}\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Z podobieństwa trójkątów ACD i BAD mamy

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\text{pole}\,(BAD)}{\text{pole}\,(ACD)} = 1 + \frac{BC}{CD}\,.$$

Równość ($\clubsuit$) przybiera więc postać

$$\frac{AE \cdot BC}{EC \cdot AB} = \frac{BC}{CD}\,,$$

a więc musimy udowodnić, że

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EC}{CD}\,.$$

To zaś wynika bezpośrednio z podobieństwa trójkątów ABE i CDE.

21. Rozważmy 28 odcinków łączących środki pól szachownicy jak na rysunku.

żadna z poprowadzonych prostych nie może przeciąć więcej niż dwa zaznaczone odcinki, zatem przy podziale szachownicy 13 prostymi musi pozostać odcinek nie przecięty żadną z tych prostych. To zaś oznacza, że jego końce znajdą się w tej samej części.

22. Drugi gracz może zapewnić sobie zwycięstwo. W pierwszych trzech swoich ruchach zamienia on, w miarę możliwości, gwiazdki przy parzystych potęgach x dowolnymi liczbami. W swoim ostatnim, czwartym ruchu ma do wyboru dwie gwiazdki, z których co najmniej jedna stoi przy nieparzystej potędze x.

Oznaczmy przez $P(x)$ wielomian dotychczas utworzony, pomijając te potęgi x, przy których nadal stoją gwiazdki. Zachodzi wtedy jeden z dwóch przypadków:

I. Jedna z gwiazdek stoi przy parzystej potędze x, druga przy nieparzystej. Wtedy gracz wybiera gwiazdkę przy potędze parzystej i zastępuje ją liczbą mniejszą od $-\max(P(-1), P(1))$. Powstały po tym ruchu wielomian ma ujemne wartości w punktach -1 i 1. Przeciwnik w ostatnim ruchu dodaje jednomian będący funkcją nieparzystą, tak więc otrzymany na końcu wielomian będzie miał wartość ujemną w co najmniej jednym z punktów -1 i 1. Tym samym wielomian będzie miał pierwiastki rzeczywiste i grę wygra gracz drugi.

II. Obie gwiazdki stoją przy nieparzystych potęgach x, powiedzmy x^m i x^n, gdzie $m > n$. Wówczas gracz zastępuje gwiazdkę przy x^m tak dużą liczbą dodatnią a_m, aby

$$|P(x)| < \frac{a_m|x|^m}{1000}$$

dla $x \in \{-2, 1\}$. Wykażemy, że przeciwnik nie może zastąpić ostatniej gwiazdki takim współczynnikiem a_n, aby

$$Q(x) = P(x) + a_m x^m + a_n x^n > 0$$

dla $x \in \{-2, 1\}$. Gdyby bowiem udało się dobrać takie a_n, to mielibyśmy kolejno:

$Q(1) > 0$, skąd $a_n > -a_m - P(1) > -1,0001 \cdot a_m$,

$Q(-2) > 0$, skąd $-2^n \cdot a_n > -0,999 \cdot 2^m \cdot a_m$.

Zatem

$$-1,001 \cdot a_m < a_n < -0,999 \cdot 2^{m-n} \cdot a_n \ .$$

Ponieważ a_m jest dodatnie, a $2^{m-n} \geq 4$, otrzymujemy sprzeczne nierówności

$$-1,001 a_m < a_n < -3,996 a_m \ ,$$

skąd wniosek, że a_n, które mogłoby zapewnić zwycięstwo pierwszego gracza, nie istnieje.

23. Niech F będzie punktem leżącym na prostej AB tak, aby $B \in \overline{AF}$ oraz spełniony był warunek $AB \cdot BF = BC \cdot BD$. Ponieważ wartość wyrażenia $BC \cdot BD$ nie zależy od wyboru punktu P, więc położenie punktu F też nie zależy od wyboru punktu P. Niech G będzie punktem przecięcia prostych AB i PE. Punkty A, D, F, C leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\angle GFC = \angle ADC = \angle EPC \,,$$

co oznacza, że punkty G, F, P, C leżą na jednym okręgu. Stąd $AG \cdot AF = AC \cdot AP$. Wartość wyrażenia $AC \cdot AP$ oraz położenie punktu F nie zależą od wyboru punktu P, a więc również położnie punktu G na półprostej $AB^{\rightarrow}$ nie zależy od wyboru punktu P. To oznacza, punkt G jest punktem wspólnym wszystkich prostych PE.

24. Zakładamy, że dane są punkty A, B, C, D, E, z których każde 3 są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

Jeżeli AB jest najdłuższym odcinkiem o końcach w danych punktach, to wszystkie 5 punktów musi leżeć na sferze s, której średnicą jest odcinek AB. Niech najdłuższym z pozostałych odcinków będzie AC lub CD.

Jeżeli jest to AC, to punkty A, C, D i E leżą na sferze s_1, której średnicą jest AC, zatem leżą one na okręgu o średnicy AC, gdyż ten okrąg jest częścią wspólną sfer s i s_1.

Jeżeli zaś jest to CD, to wszystkie 5 punktów leży na sferze s_2 o średnicy CD, skąd wnioskujemy, że $s = s_2$ i punkty A, B, C, D leżą na okręgu wielkim sfery s.

Tak, czy owak, znajdziemy 4 punkty, które leżą na okręgu. Nietrudno stwierdzić, że są one wierzchołkami prostokąta, powiedzmy $ABCD$. Punkt E musi leżeć poza płaszczyzną tego prostokąta. Gdyby rzut punktu E na płaszczyznę prostokąta $ABCD$ nie leżał na żadnym z jego boków, (poza prostokątem leżeć nie może), to 4 odcinki łączące punkt E z punktami A, B, C, D musiałyby być parami prostopadłe, co nie jest możliwe.

Niech więc punkt E leży na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny prostokąta $ABCD$ i przechodzącej przez punkty A i B. Gdyby rzut punktu E był jednym z wierzchołków prostokąta, powiedzmy A, to trójkąt EBD nie byłby prostokątny. Zatem rzut punktu E leży wewnątrz boku AB, skąd wynika, że następujące kąty są proste: $\angle AEB$, $\angle BED$, $\angle AEC$, $\angle DEC$.

Ponieważ $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}$, więc $\overrightarrow{EA}\circ\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}\circ\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}\circ\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}\circ\overrightarrow{EC}$, skąd $\overrightarrow{EC}\circ\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}\circ\overrightarrow{EC}$, co oznaczałoby, że odcinki EC i BC są prostopadłe.

25. Można wykazać indukcyjnie, że ciąg (a_n) może być opisany następująco: Zapisujemy liczbę n w układzie dwójkowym, a następnie interpretujemy ten zapis w układzie trójkowym, na przykład $13 = 1101_{(2)}$, więc $a_{13} = 1101_{(3)} = 37$. Tak więc w ciągu (a_n) wystąpią te, i tylko te liczby całkowite nieujemne, które zapisują się w układzie trójkowym przy pomocy samych zer i jedynek. Dodawanie dwóch takich liczb w układzie trójkowym odbywa się bez "przenoszenia", jeśli więc m-ta cyfra od końca rozwinięcia trójkowego liczby $a_k + a_l$ jest równa 0, to m-te cyfry od końca liczb a_k i a_l są równe 0. Podobnie, jeśli cyfra sumy jest równa 2, to odpowiadające jej cyfry składników są równe 1. Wreszcie, tam gdzie w sumie występuje cyfra 1, skąldniki muszą mieć cyfry 0 i 1.

Widzimy więc, że rozkładanie liczby n zapisanej w układzie trójkowym na sumę a_k+a_l polega na rozłożeniu każdej z cyfr liczby n na sumę dwóch liczb równych 0 lub 1. Taki rozkład jest jednoznaczny w przypadku cyfr 0 i 2, ale wszędzie tam, gdzie w rozwinięciu trójkowym liczby n napotkamy jedynkę mamy dwie możliwości: $0 + 1$ i $1 + 0$.

Tak więc możliwych rozkładów liczby n na sumę $a_k + a_l$ jest $2^{j(n)}$, gdzie $j(n)$ jest liczbą jedynek występującym w trójkowym zapisie liczby n. Po dołożeniu warunku $k \geq l$ liczba rozkładów zmniejsza się o połowę, za wyjątkiem przypadku $j(n) = 0$, gdyż wtedy $k = l$.

Ostatecznie

$$f(n) = \begin{cases} 2^{j(n)-1} & \text{gdy} \quad j(n) \geq 1 \\ 1 & \text{gdy} \quad j(n) = 0 \end{cases} .$$

Tak więc odpowiedź brzmi:

(a) dla takich n, które w zapisie trójkowym mają co najwyżej jedną cyfrę 1,

(b) 2^{1997} — dla $n = \frac{3^{1998}-1}{2}$.

26. Tak. Oznaczmy przez S sumę liczb przyporządkowanych punktom zbioru A. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $S \geq 0$. Niech s będzie sumą liczb przyporządkowanych punktom leżącym na pewnej ustalonej prostej ℓ, która przechodzi przez co najmniej dwa punkty zbioru A. Niech n będzie liczbą płaszczyzn zawierających prostą ℓ i co najmniej jeden punkt zbioru A nie należący do ℓ. Ponieważ suma liczb przyporządkowanych punktom leżącym w jednej płaszczyźnie jest równa 0, więc $S = -(n-1)s$. Zatem wszystkie sumy liczb przyporządkowanych punktom leżącym na jednej prostej są niedodatnie.

Ustalmy $X \in A$. Niech x będzie liczbą przyporządkowaną punktowi X. Niech m będzie liczbą prostych przechodzących przez punkt X zawierających co najmniej dwa punkty zbioru A. Niech $s_1, s_2, \ldots, s_m$ będą sumami liczb przyporządkowanych punktom leżącym na tych prostych. Wówczas

$$0 \geq \sum_{i=1}^{m} s_i = S + (m-1)x\,,$$

skąd $x \leq 0$. Zatem dowolnemu punktowi przyporządkowano liczbę niedodatnią. Stąd wynika, że każdemu punktowi przyporządkowano 0.

27. Niech R będzie takim punktem odcinka BP, że $BR = AQ$. Wystarczy dowieść, że $QC = PR$. Ponieważ $BR = AQ$, $BD = AC$ $\angle RBD = \angle CBQ = \angle CAQ$, więc trójkąty BDR i ACQ są przystające. Stąd $CQ = RD$ oraz $\angle RDB = \angle QCA$. Wystarczy więc udowodnić, że $PR = RD$. Ponieważ punkty E, B, D, P leżą na jednym okręgu, więc trójkąty BDR oraz ACQ są przystające oraz $BD = BE$. Mamy więc

$$\angle RDP = \angle EDR + \angle PDE = \angle EDR + \angle PBE = \angle EDR + \angle QBA =$$

$$= \angle EDR + \angle QCA = \angle EDR + \angle RDB = \angle EDB = \angle BED = \angle BPD = \angle RPD\,,$$

co kończy dowód.

28. Niech n będzie najmniejszą możliwą długością ciągu spełniającego warunki zadania. Stosując nierówność

$$0 \leq (x-1)^2(x-2)^2 = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$$

do liczb a_i i wykonując sumowanie po $1 \leq i \leq n$ otrzymujemy

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^4 - 6\sum_{i=1}^{n} a_i^3 + 13\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 12\sum_{i=1}^{n} a_i + 4\sum_{i=1}^{n} 1\ ,$$

skąd

$$0 \leq 81 - 6\cdot 49 + 13\cdot 33 - 12\cdot 25 + 4n = 4(n-21)\ .$$

Musi więc być $n \geq 21$, a przy tym dla $n = 21$ wszystkie a_i są równe 1 lub 2. Łatwo dopasować teraz $a_1 = a_2 = ... = a_{17} = 1$, $a_{18} = a_{19} = a_{20} = a_{21} = 2$.

31. Niech $r = \mathrm{NWD}(a,c)$. Oznaczając $s = \frac{a}{r}$ i $t = \frac{c}{r}$ otrzymujemy $a = rs$ i $c = rt$. Przy tym s i t są względnie pierwsze. Ponadto $t|b$, gdyż liczba $bs = \frac{ab}{r} = \frac{cd}{r} = td$ jest podzielna przez t. Oznaczając $u = \frac{b}{t}$ otrzymujemy $b = tu$ oraz $d = su$. Zatem liczba $a^{1998} + b^{1998} + c^{1998} + d^{1998} = (r^{1998} + u^{1998})(s^{1998} + t^{1998})$ jest złożona.

32. Dla $x > 0$ mamy $x^{\frac{x^2}{x^2-3x+3}} \geq x$.

Nic nie daje próba korzystania z nierówności Jensena, gdyż funkcja $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-3x+3}}$ nie tylko nie jest wypukła, ale nawet nie jest rosnąca dla $x \geq 1$, co pokazuje następująca tabela:

x	$\frac{x^2}{x^2-3x+3}$	$f(x)$
1	1	1
2	$4/1 = 4$	16
$2,9$	$3,1033$	$27,2251$
3	$9/3 = 3$	27
4	$16/7$	$23,7759$
5	$25/13$	$22,0888$
6	$36/21 = 12/7$	$21,5761$
7	$49/31$	$21,6671$
8	$64/43$	$22,0869$
9	$81/57 = 27/19$	$22,7002$
10	$100/73$	$23,4349$
20	$400/343$	$32,9030$
100	$10000/9703$	$115,1379$

33. Gdyby $(1+2\sqrt{2})^m = (1+3\sqrt{2})^n$, to byłoby także $(1-2\sqrt{2})^m = (1-3\sqrt{2})^n$, skąd po wymnożeniu stronami $(-7)^m = (-17)^n$.

34. Załóżmy, że takie pokolorowanie jest możliwe. Rozważmy 7 punktów: A_0 jest środkiem symetrii jednostkowego sześciokąta foremnego $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Wtedy A_0 jest pomalowany jednym kolorem, A_1, A_3, A_5 drugim, a A_2, A_4 i A_6 trzecim. Ze względu na dowolność położenia sześciokąta wnioskujemy, że dowolne punkty odległe o $\sqrt{3}$ są pomalowane tym samym kolorem, co oczywiście nie jest możliwe.

35. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ będzie przestrzenią złożoną z czterech zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych, a zmienne X, Y, Z przyjmują wartości według następującej tabeli:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
X	0	0	2	2
Y	0	2	2	0
Z	0	2	0	2

.

Zmienne X, Y, Z spełniają warunki

$$E(X) = E(Y) = E(Z) = E(X \cdot Y) = E(Y \cdot Z) = E(Z \cdot X) = 1,$$

ale $E(X \cdot Y \cdot Z) = 0$, więc nierówność podana w punkcie a) nie musi być spełniona.

Nierówność podana w punkcie b) też nie musi być spełniona, co pokazuje przykład X, Y, $2-Z$, gdyż wtedy $E(X \cdot Y \cdot (2-Z)) = 2$.

UWAGA: Podane wyżej zmienne X, Y, Z są parami niezależne, ale nie są niezależne.

36. Niech O oznacza punkt przecięcia przekątnych AD i CF. Ponieważ pola trójkątów AOF i CDO są równe, więc odcinki AC i DF są równoległe. Analogicznie stwierdzamy, że pary odcinków BF, CE oraz AE, BD są równoległe. Odcinki AD, BE, CF mają zatem punkt wspólny będący środkiem jednokładności trójkątów ACE i BDF.

37. Lemat: Na bokach PQ, QR równoległoboku $PQRS$ budujemy (po stronie zewnętrzej) trójkąty równoboczne PQX, QRY. Wówczas trójkąt XYZ jest równoboczny.

Dowód: Trójkąty PSX, YRS oraz YQX są przystające.

Niech K, L będą odpowiednio środkami odcinków EF, FG, zaś M, N, O, P odpowiednio środkami boków DA, AB, BC, CD. Punkt C' jest obrazem punktu C w symetrii względem punktu L. Na mocy lematu zastosowanego do równoległoboku $CFC'G$, punkty P, O, L są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Analogicznie punkty N, O, K są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Stosując jeszcze raz lemat do równoległoboku $MNOP$, otrzymujemy tezę.

38. Przeprowadzamy ciąg losowań. W każdym losowaniu losujemy po jednej literze. Losowanie przerywamy, gdy wszystkie wylosowane litery tworzą słowo występujące w języku, lub gdy po m losowaniach nie otrzymamy żadnego słowa. Jeśli s jest słowem długości $k \le m$, to losowanie zakończy się po utworzeniu s z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n^k}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowanie zakończy się utworzeniem słowa występującego w języku wynosi więc $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{a_k}{n^k}$. Suma ta nie może więc być większa od 1.

39. Taki czworościan istnieje. Rozważmy równoległobok $ABCD$, w którym kąt ABD jest rozwarty i „zegnijmy” go lekko wzdłuż krawędzi BD. Otrzymamy czworościan spełniający warunki zadania.

Inna konstrukcja: rozważmy trójkąt rozwartokątny ABC i punkt D w jego wnętrzu taki, że kąty ADB, BDC, CDA są rozwarte. Niech D' będzie takim punktem przestrzeni, którego rzutem na płaszczyzne ABC jest punkt D i wielkość DD' jest „mała”. Czworościan $ABCD'$ spełnia warunki zadania.

40. Taki czworościan nie istnieje. Najdłuższa jego krawędź nie jest ramieniem kąta rozwartego żadnej ściany.

41. Załóżmy, że w prostokącie umieszczono 4 punkty. Poprowadźmy dwie proste prostopadłe przechodzące przez punkt przecięcia przekątnych prostokąta tak, aby co najmniej jedna z nich przechodziła przez co najmniej jeden z 4 danych punktów.

Nietrudne rachunki pokazują, że każdy z 4 wielokątów, na które proste dzielą prostokąt, ma średnicę nie większą niż 25/8, skąd wynika, że w jednym z tych wielokątów znajdą się dwa z wybranych punktów (pamiętajmy, że jeden z punktów należy jednocześnie do 2 wielokątów).

51. Łatwo stwierdzamy, że musi być $x+y>z$, co odbiera nadzieje na znalezienie rozwiązania w potęgach dwójki. Liczymy więc na znalezienie rozwiązania postaci

$$\begin{cases} x = 2^{s+a} \cdot 3^{t-b} \\ y = 2^{s-c} \cdot 3^{t+d} \\ z = 2^s \cdot 3^t \end{cases} .$$

Wydaje się, że najłatwiej o istnienie rozwiązania przy małych dodatnich a, b, c, d.

Po uproszczeniach równanie $x^x y^y = z^z$ sprowadza się do układu równań

$$\begin{cases} (s+a)2^{a+c} + (s-c)3^{b+d} = 2^c \cdot 3^b s \\ \\ (t-b)2^{a+c} + (t+d)3^{b+d} = 2^c \cdot 3^b t \end{cases} ,$$

co daje

$$\begin{cases} s = \dfrac{a \cdot 2^{a+c} - c \cdot 3^{b+d}}{2^c \cdot 3^b - 2^{a+c} - 3^{d+b}} \\ t = \dfrac{-b \cdot 2^{a+c} + d \cdot 3^{b+d}}{2^c \cdot 3^b - 2^{a+c} - 3^{d+b}} \end{cases} .$$

Ponieważ s i t mają być całkowite, postarajmy się dobrać a, b, c i d tak, aby mianownik $2^c \cdot 3^b - 2^{a+c} - 3^{d+b}$ był równy ± 1 (inaczej będziemy musieli liczyć na cudowne uproszczenia). Szukając rozwiązań równania

$$2^c \cdot 3^b - 2^{a+c} - 3^{d+b} = \pm 1 ,$$

wiedzeni intuicją, znajdujemy $a=b=d=1$, $c=3$, co daje $s=11$ i $t=7$. Otrzymujemy więc rozwiązanie naszego równania

$$\begin{cases} x = 2^{12} \cdot 3^6 \\ y = 2^8 \cdot 3^8 \\ z = 2^{11} \cdot 3^7 \end{cases} .$$

52. Niech $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ będzie zespolonym pierwiastkiem sześciennym z jedności. Wtedy liczba

$$(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^{1998^{1998}} + (1 + \alpha\sqrt[3]{2} + \alpha^2\sqrt[3]{4})^{1998^{1998}} + (1 + \alpha^2\sqrt[3]{2} + \alpha\sqrt[3]{4})^{1998^{1998}}$$

jest całkowita. Przy tym

$$|1 + \alpha\sqrt[3]{2} + \alpha^2\sqrt[3]{4}| = |1 + \alpha^2\sqrt[3]{2} + \alpha\sqrt[3]{4}| = \left| \frac{2-1}{\alpha\sqrt[3]{2} - 1} \right| = \frac{1}{|\alpha\sqrt[3]{2} - 1|}.$$

Ponieważ mamy

$$|\alpha\sqrt[3]{2} - 1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2} + 1\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} > \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + 1 > \frac{3}{2},$$

więc

$$|1 + \alpha\sqrt[3]{2} + \alpha^2\sqrt[3]{4}| < \frac{2}{3}$$

oraz

$$2 \cdot \left|1 + \alpha\sqrt[3]{2} + \alpha^2\sqrt[3]{4}\right|^{1998^{1998}} < 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1998^{1998}} < 10^{-zylion}.$$

Zatem liczba $(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^{1998^{1998}}$ różni się od liczby całkowitej o mniej niż $10^{-zylion}$, skąd wynika, że ma ona po przecinku *zylion* zer lub *zylion* dziewiątek.

53. Trójkąt ABC spełniający warunki zadania nie zawsze istnieje. Weźmy bowiem ośmiokąt foremny $A_1A_2...A_8$ o środku symetrii P. Wtedy dla $t_1 = A_1A_4A_7$, $t_2 = A_2A_5A_8$ oraz $t_3 = A_3A_6A_1$ trójkąta ABC o żądanych własnościach skonstruować się nie da.

W zadaniu zabrakło założenia, że wierzchołki trójkątów t_1, t_2, t_3 tworzą wraz z punktem P zbiór 10 punktów, z których żadne 3 nie są współliniowe.

Wówczas rozwiązanie wygląda następująco:

Niech o będzie okręgiem o środku w punkcie P, natomiast
$A_1 = A_{10}$, $A_2 = A_{11}$,..., $A_8 = A_{17}$, A_9 rzutami środkowymi, względem punktu P, wierzchołków trójkątów t_1, t_2, t_3 na okrąg o, ponumerowanymi cyklicznie według ich położenia na okręgu o.

Lemat: Dla dowolnego $1 \le i \le 9$ punkt P nie leży we wnętrzu czworokąta $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$.

Dowód: Wnętrze czworokąta $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ jest rozłączne z tym z trójkątów t_1, t_2, t_3, którego wierzchołki nie rzutują się na A_{i+1}, ani na A_{i+2}.

Istnieje takie i, że A_i i A_{i+4} są rzutami wierzchołków różnych trójkątów, powiedzmy t_1 i t_2.

Jeżeli P leży wewnątrz pięciokąta $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}$, to jeden z punktów A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, powiedzmy A_k, musi być rzutem wierzchołka trójkąta t_3, bo w przeciwnym przypadku t_3 byłby rozłączny z wnętrzem pięciokąta $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}$. Wtedy jako wierzchołki trójkąta ABC możemy wybrać wierzchołki trójkątów t_1, t_2, t_3, których rzutami są odpowiednio A_i, A_{i+4} i A_k.

Załóżmy teraz, że P leży w sześciokącie $A_{i+4}A_{i+5}A_{i+6}A_{i+7}A_{i+8}A_i$.

Jeżeli jeden z punktów A_{i+6}, A_{i+7}, powiedzmy A_l, jest rzutem wierzchołka trójkąta t_3, to jako wierzchołki trójkąta ABC możemy wybrać wierzchołki trójkątów t_1, t_2, t_3, których rzutami są odpowiednio A_i, A_{i+4} i A_l.

W sytuacji, gdy $A_j = A_{i+5}$ (lub A_{i+8}) jest rzutem wierzchołka trójkąta t_3, to albo jako wierzchołki trójkąta ABC możemy wybrać wierzchołki trójkątów t_1, t_2, t_3, których rzutami są odpowiednio A_i, A_{i+4} i A_j albo punkt P leży w pięciokącie $A_{i+5}A_{i+6}A_{i+7}A_{i+8}A_i$, a taką sytuację rozpatrzyliśmy na samym początku.

61. Tak, np.

$$\begin{cases} x = 3^{666} - 3^{167} \\ y = 3^{500} - 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

lub ogólniej

$$\begin{cases} x = 3^{1332n+666} - 3^{333n+167} \\ y = 3^{999n+500} - 1 \\ z = 3^{2n+1} \end{cases} .$$

62. Kładąc $y = 0$ stwierdzamy, że $f(0) = 0$. Biorąc $y_1 = -y_2 \neq 0$ stwierdzamy, że f jest nieparzysta. Warunki zadania spełniają funkcje

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx\log_2|x| & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad (\heartsuit)$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Podstawa logarytmu nie ma większego znaczenia, bo jej zmiana objawiłaby się tylko przeskalowaniem parametru b.

Jeżeli f jest funkcją spełniającą warunki zadania, to spełnia je także funkcja

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) - f(1)x - \left(\frac{f(2)}{2} - f(1)\right) x\log_2|x| & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Spełniony jest przy tym warunek $f_1(1) = f_1(2) = 0$.

Jeżeli $x, y > 0$ oraz $f_1(x) = f_1(y) = 0$, to także $f(\sqrt{xy}) = 0$ oraz $f\left(\frac{x^2}{y}\right) = 0$. Stąd oraz z ciągłości i z nieparzystości f_1 otrzymujemy $f_1(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zatem f dana jest wzorem $(\heartsuit)$ z $a = f(1)$ i $b = \frac{f(2)}{2} - f(1)$.

63. Oznaczmy przez O środek okręgu o stycznego do boków AB, BC, CD. Niech ℓ będzie dwusieczną kąta wyznaczonego przez proste AB i CD przecinającą odcinek AD. Zauważmy, że o leży na tej dwusiecznej. Jeśli proste AB i CD są równoległe, to za ℓ przyjmijmy prostą równoległą do AB i CD oraz przechodzącą przez punkt O. Punkty B' i C' są obrazami punktów B i C w symetrii względem prostej ℓ. Wtedy, ponieważ punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu, więc $AD \parallel B'C'$ oraz odcinek $B'C'$ jest styczny do okręgu o. Ponadto

$$AB + CD = AC' + DB'. \qquad (\diamondsuit)$$

Mamy więc $\angle OB'D = \angle OB'C' = \angle B'OD$. Zatem $OD = DB'$. Analogicznie: $OA = AC'$. Te dwie równości w połączeniu z $(\diamondsuit)$ dają tezę.

71. Przypuśćmy, że teza zadania nie jest prawdziwa. Wówczas bez straty ogólności możemy przyjąć, że $f(x) > g(x)$ dla $x \in [0, 1]$. Oznaczmy przez A zbiór punktów stałych funkcji g; ponieważ g jest ciągła, to A jest niepusty. Ponadto jeśli $x_0 \in A$, to

$$f(x_0) = g(f(x_0)),$$

skąd $f(x_0) \in A$. Niech $\alpha = \sup A$. Funkcja g jest ciągła, więc $\alpha \in A$. Zatem $f(\alpha) \in A$, czyli $f(\alpha) \leq \alpha$. Z drugiej strony $f(\alpha) > g(\alpha) = \alpha$, sprzeczność.

72. Dla $n = 1$ teza zadania jest oczywista. Krok indukcyjny wygląda następująco. Jeżeli dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ dowolna k-elementowa grupa chłopców połączywszy swoją wiedzę potrafi podać imiona co najmniej $k + 1$ dziewcząt, to jednemu z chłopców przydzielamy dowolną dziewczynę, której imię zna, a pozostałych $n - 1$ chłopców i $n - 1$ dziewcząt spełnia założenia zadania dla $n - 1$.

Jeśli zaś znajdzie się takie $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, że pewna k-elementowa grupa chłopców połączywszy swoją wiedzę potrafi podać imiona dokładnie k dziewcząt, to grupa ta spełnia założenia zadania jak również grupa pozostałych $n-k$ chłopców i pozostałych $n-k$ dziewcząt spełnia założenia zadania. Można więc dokonać połączeń wewnątrz tych grup.

73. Lemat 1. Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC; punkt P jest środkiem łuku BC. Wówczas $PI = PB = PC$.

Lemat 2. Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkty D, E są odpowiednio środkami łuków CA oraz AB, F jest środkiem łuku CB. Prosta FI przecina okrąg o w punktach F i Q. Wówczas trójkąty EBQ oraz DIQ są podobne.

Dowód: Oczywiście $\angle BEQ = \angle BDQ = \angle IDQ$. Niech $\alpha = $ łuk $AE = $ łuk EB, $\beta = $ łuk $CD = $ łuk DA. Wtedy łuk $EB = (\alpha+\beta)-\beta = $ łuk $CF -$ łuk $CD = $ łuk DF, skąd $\angle EQB = \angle FQD = \angle IQD$.

Przyjmijmy oznaczenia takie jak w lemacie 2. Wykażemy, że punkty I_1, I_2, P, Q leżą na jednym okręgu, a więc Q będzie szukanym punktem wspólnym rozważanych okręgów. Mamy $\angle I_2DQ = \angle PDQ = \angle PEQ = \angle I_1EQ$. Ponadto (na mocy lematów 1 i 2)

$$\frac{EI_1}{EQ} = \frac{EB}{EQ} = \frac{DI}{DQ} = \frac{DI_2}{DQ}.$$

Zatem trójkąty EI_1Q i DI_2Q są podobne, skąd $\angle I_1QE = \angle DQI_2$. Zatem

$$\angle I_1QI_2 = \angle EQD = \angle EPD = \angle I_1PI_2,$$

co oznacza, że punkty I_1, I_2, P, Q leżą na jednym okręgu.

74. Nazwijmy graczem A gracza rozpoczynającego grę (oznaczanego też jako G_1) w przypadku, gdy liczba $\binom{n-3}{2}$ jest parzysta, tzn. gdy n dzieli się przez 4 z resztą 3 lub bez reszty. Gdy zaś n dzieli się przez 4 z resztą 1 lub 2 i liczba $\binom{n-3}{2}$ jest nieparzysta, graczem A nazwiemy drugiego gracza (oznaczanego też jako G_2). Pokażemy, ze przy takim nazwaniu graczy, grę wygra gracz A.

Powiemy, ze pozycja w grze jest typu $[a_1, a_2, ..., a_k]$, jeśli narysowany do danego momentu graf składa się z k składowych spójnych mających odpowiednio a_1, a_2, ...,a_k wierzchołków. Ruch w grze polega więc na podaniu przeciwnikowi pozycji tego samego typu jak otrzymana od niego, lub pozycji o liczbie składowych zmniejszonej o jeden, gdzie dwie skąldowe o a_i i a_j wierzchołkach zamienione są jedną składową mającą a_i+a_j wierzchołków.

Powiemy, że pozycja typu $[a_1, a_2, ..., a_k]$ wymusza akcję na graczu G, jeśli w sytuacji, gdy obydwaj gracze zdecydują się wykonywać ruchy nie zmieniające typu pozycji, to właśnie gracz G będzie w końcu zmuszony połączyć różne składowe grafu, gdyż ostatni ruch polegający na rysowaniu odcinków w ramach poszczególnych składowych zostanie wykonany przez jego przeciwnika. Zaznaczymy to wówczas pisząc $[a_1, a_2, ..., a_k] \Rightarrow G$. Zauważmy, że $[a_1, a_2, ..., a_k] \Rightarrow G_1$ wtedy i tylko wtedy gdy liczba

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{a_i}{2}$$

jest parzysta, w przeciwnym zaś razie $[a_1, a_2, ..., a_k] \Rightarrow G_2$.

Zauważmy, że jeśli w grze dojdzie do pozycji $[a_1, a_2, a_3] \Rightarrow G$, to gracz G przegra, gdyż zmuszony będzie połączyć dwie z trzech składowych grafu, na co jego przeciwnik odpowie połączeniem ich z trzecią składową i wygra.

W przypadku $n = 4$ gracz $A = G_1$ rozpoczyna grę podając po pierwszym ruchu pozycję typu $[2, 1, 1] \Rightarrow B = G_2$ i wygrywa.

W przypadku $n = 5$ gracz $A = G_2$ otrzymuje w pierwszym ruchu od przeciwnika pozycję typu $[2, 1, 1, 1]$ i podaje w odpowiedzi $[2, 2, 1] \Rightarrow B = G_1$ zapewniając sobie zwycięstwo.

Niech teraz $n \geq 6$ będzie parzyste. Wówczas liczby $\binom{n-3}{2}$ i $\binom{n-2}{2}$ są różnej parzystości. Strategia gracza A jest wówczas następująca: Podawać przeciwnikowi pozycję typu $[a, 1, 1, ..., 1]$, to znaczy pozycję, w której graf ma jedną dużą składową spójną i pojedyncze punkty. Modyfikacji ulega gra w końcówce, kiedy to riposty gracza A są następujące:

A otrzymał pozycję typu	podaje graczowi B pozycję typu
$[n-5, 1, 1, 1, 1, 1]$	$[n-4, 1, 1, 1, 1]$
$[n-5, 2, 1, 1, 1]$	$[n-3, 1, 1, 1]$
$[n-4, 1, 1, 1, 1]$	$[n-3, 1, 1, 1]$
$[n-4, 2, 1, 1]$	$[n-3, 2, 1]$
$[n-3, 1, 1, 1]$	$[n-3, 2, 1]$
$[n-3, 2, 1]$	$[n-3, 2, 1] \Rightarrow B$
$[n-2, 1, 1]$	$[n-2, 1, 1] \Rightarrow B$

Niech teraz $n \geq 7$ będzie nieparzyste. Wówczas liczby $\binom{n-4}{2}$ i $\binom{n-5}{2}$ są tej samej parzystości. Są one zarazem innej parzystości niż $\binom{n-3}{2}$. Strategia gracza A jest taka jak poprzednio, a końcówka wygląda następująco:

A otrzymał pozycję typu	podaje graczowi B pozycję typu
$[n-5, 1, 1, 1, 1, 1]$	$[n-4, 1, 1, 1, 1]$
$[n-5, 2, 1, 1, 1]$	$[n-5, 2, 2, 1]$
$[n-5, 3, 2]$	$[n-5, 3, 2] \Rightarrow B$
$[n-5, 4, 1]$	$[n-5, 4, 1] \Rightarrow B$
$[n-4, 1, 1, 1, 1]$	$[n-4, 1, 1, 1, 1] \Rightarrow B$
$[n-4, 2, 1, 1]$	$[n-3, 2, 1]$
$[n-4, 2, 2]$	$[n-4, 2, 2] \Rightarrow B$
$[n-3, 1, 1, 1]$	$[n-3, 2, 1]$
$[n-3, 2, 1]$	$[n-3, 2, 1] \Rightarrow B$