Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 4 - 18 czerwca 2000

Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 4 - 18 czerwca 2000

Dom wczasowy „Zgoda”, Zwardoń 45
34-737 ZWARDOŃ
tel. 0-33-8646-328

Kadra:

Jerzy Bednarczuk
Rafał Łochowski
Waldemar Pompe
Jarosław Wróblewski

oraz (od 14.06.2000)
Tomasz Elsner
Joanna Jaszuńska
Jakub Wojtaszczyk

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`http://www.impan.gov.pl/~olimp/`

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych [1]

numer zadania	liczba ocen 7-10 pt.	liczba ocen 5-6 pt.	liczba ocen 0-4 pt.	liczba pustych prac
1.	15	–	4	1
2.	11	4	3	2
3.	18	–	–	2
4.	15	1	3	1
5.	1	–	5	14
6.	1	–	–	19
7.	12	–	6	2
8.	7	–	–	13
9.	7	–	5	8
10.	9	1	5	5
11.	19	–	–	1
12.	16	–	2	2
13.	13	–	3	4
14.	14	–	–	6
15.	3	–	7	10
16.	13	1	5	1
17.	7	1	4	8
18.	6	–	2	12
19.	4	2	7	7
20.	14	1	3	2
21.	2	–	1	17
22.	11	–	4	5
23.	8	2	2	8
24.	–	–	–	20
25.	6	–	11	3
26.	4	–	1	15
27.	18	–	–	2

[1] Każda praca była oceniana w skali 0-10 pt.

Treści zadań z zawodów indywidualnych

1. Na każdym polu nieskończonej szachownicy napisano liczbę całkowitą, przy czym każda napisana liczba występuje na tej szachownicy tylko raz. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a istnieją takie dwa sąsiednie pola szachownicy, że różnica liczb napisanych na tych polach jest większa niż a.

2. Niech t_n będzie największą liczbą całkowitą taką, że $n!$ dzieli się przez 3^{t_n} oraz niech c_n będzie największą liczbą całkowitą taką, że $n!$ dzieli się przez 4^{c_n}. Dowieść, że dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność $t_n > c_n$ oraz dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność $t_n < c_n$.

3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzą następujące równości kątów: $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle CAD$ oraz $\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle BAC$. Dowieść, że $CB + CD = CA$.

4. Wszystkie liczby ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,2000\}$ połączono w pary

$$(a_1,b_1), \quad (a_2,b_2), \quad \ldots, \quad (a_{1000},b_{1000})$$

w taki sposób, że każda z liczb $|a_i - b_i|$ jest równa 1 lub 6. Wyznaczyć wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 10 liczby

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_{1000} - b_{1000}|.$$

5. Dane są liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o sumie równej 1. Dowieść, że

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n - a_k}{1 - a_k}\right).$$

6. Okrąg o środku O i promieniu R jest opisany na trójkącie ABC. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC. Okrąg styczny do boku BC oraz do przedłużeń pozostałych boków tego trójkąta ma promień R. Dowieść, że punkty O, I, D są współliniowe.

7. Rozstrzygnąć, czy dowolną liczbę można podnieść do potęgi $2^{16}-1$ wykonując:
(a) mniej niż 100 mnożeń;
(b) mniej niż 30 mnożeń;
(c) mniej niż 20 mnożeń;
(d) mniej niż 10 mnożeń.

8. Okrąg o jest styczny do prostych AB i AC odpowiednio w punktach B i C. Punkt P leży na okręgu o oraz na zewnątrz trójkąta ABC. Punkt M jest środkiem odcinka BC. Dowieść, że $\sphericalangle BPA = \sphericalangle MPC$.

9. Dana jest liczba rzeczywista dodatnia a. Ciąg (x_n) jest zdefiniowany następująco:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = ax_n - x_{n-1} \qquad \text{dla} \ \ n = 1,2,3,\ldots \ .$$

Wyznaczyć wszystkie wartości a, dla których ciąg (x_n) jest okresowy.

10. Niech $S = \{1,2,3,\ldots,2000\}$. Wyznaczyć największą liczbę naturalną k, dla której prawdziwe jest następujące zdanie:
Dla dowolnej funkcji $f{:}S \to S$ takiej, że $f(x) \neq x$ dla $x \in S$, istnieje taki k-elementowy zbiór $A \subset S$, że $f(x) \notin A$ dla $x \in A$.

11. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzi: $AD < BC$ oraz $CD < AB$. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i BC, przy czym $BK = CD$ oraz $BL = AD$. Odcinki KL i BD przecinają się w punkcie M. Dowieść, że $KM = ML$.

12. Wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$A_p = \left[\frac{10^p}{p}\right]$$

jest podzielna przez 10.

13. Danych jest $2n$ różnych liczb rzeczywistych $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$ oraz szachownica $n \times n$. W pole leżące w i-tym wierszu i j-tej kolumnie wpisujemy liczbę $a_i + b_j$. Niech c_i będzie iloczynem liczb stojących w i-tym wierszu, zaś d_j iloczynem liczb stojących w j-tej kolumnie. Dowieść, że jeżeli $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$, to $d_1 = d_2 = \ldots = d_n$.

14. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność

$$x^4 + y^4 + (x^2+1)(y^2+1) \geqslant x^3(1+y) + y^3(1+x) + x + y.$$

15. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Punkt P leży na okręgu o_1, na zewnątrz okręgu o_2. Proste PA i PB przecinają po raz drugi okrąg o_2 odpowiednio w punktach K i L. Wyznaczyć zbiór środków okręgów opisanych na trójkątach PKL, przy ustalonych okręgach o_1 i o_2 oraz zmieniającym położenie punkcie P.

16. Fredek gra w samotnika. Plansza do gry ma kształt n-kąta foremnego. Na każdym wierzchołku tego n-kąta stoi kieliszek, niektóre kieliszki są napełnione. Jedno posunięcie polega na tym, że Fredek wypija zawartość dowolnie wybranego kieliszka oraz zawartość tych sąsiednich kieliszków, które były napełnione i jednocześnie napełnia te sąsiednie kieliszki, które były puste. Jeśli po pewnym posunięciu wszystkie kieliszki są puste, to Fredek idzie się napić. Dla jakich n, startując od jednego napełnionego kieliszka, Fredek ma szansę na to, że pójdzie się napić?

17. Dana jest liczba dodatnia c. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające tożsamość $f(x)=f(x^2+c)$.

18. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n oraz liczby rzeczywiste $x_1,x_2,\ldots,x_n \geqslant -1$, dla których

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{3}.$$

19. Dla danej liczby $\alpha\in(0,2)$ rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja ciągła $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, że $f(x+1)>f(x)$ dla $x\in[0,1]$, lecz $f(x+\alpha)<f(x)$ dla $x\in[0,2-\alpha]$.

20. Dla danej liczby naturalnej $n\geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy istnieje ostrosłup o podstawie będącej n-kątem wypukłym i wszystkich ścianach bocznych będących trójkątami prostokątnymi.

21. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba rzeczywista $\alpha\in(2,2\frac{1}{2})$, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $[\alpha^n]+n$ jest nieparzysta.

22. Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$. Niech A będzie zbiorem wszystkich punktów, których obie współrzędne należą do zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$. Wybieramy losowo dwa różne punkty ze zbioru A. Jakie jest prawdopodobieństwo, że są one przeciwległymi wierzchołkami kwadratu o wszystkich wierzchołkach w zbiorze A?

23. Na płaszczyźnie dane są dwa zgodnie zorientowane kwadraty $A_1B_1C_1D_1$ oraz $A_2B_2C_2D_2$, przy czym $A_1\neq A_2$ oraz $C_1\neq C_2$. Udowodnić, że proste A_1A_2 i C_1C_2 są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $B_1B_2=D_1D_2$.

24. Dane są takie liczby całkowite dodatnie p, k i q, że $p>k$ oraz p jest dzielnikiem pierwszym liczby q^2+k. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, m i n, że $a < 2\sqrt{k}$ oraz

$$pa = m^2 + kn^2\,.$$

25. Na planszy $n \times n$ panuje epidemia. Na początku chorych jest k pól – ognisk epidemii. Jeżeli pole sąsiaduje bokiem z co najmniej dwoma polami chorymi, to zostaje zarażone. Znaleźć najmniejsze k, dla którego istnieje k ognisk epidemii powodujących zarażenie całej planszy.

26. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n+i}{i} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i}^2.$$

27. Punkt P leży we wnętrzu trójkąta równobocznego ABC. Punkty D, E i F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA i AB. Udowodnić, że suma pól trójkątów PAF, PBD i PCE nie zależy od wyboru punktu P.

Treści zadań z zawodów drużynowych

1. Rozstrzygnąć, czy układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = y_1 + y_2 + \ldots + y_8 \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_8^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_8^2 \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_8^3 = y_1^3 + y_2^3 + \ldots + y_8^3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^7 + x_2^7 + \ldots + x_8^7 = y_1^7 + y_2^7 + \ldots + y_8^7 \end{cases}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w różnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_8$, $y_1, y_2, \ldots, y_8$.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie ε o następującej własności:

Istnieje nieskończenie wiele trójek (a,b,c) liczb całkowitych dodatnich spełniających nierówności

$$(\sqrt{c} - \varepsilon)^2 \leqslant a < b < c$$

oraz

$$[a,b,c] \leqslant c\sqrt{c}\,.$$

Uwaga: Symbol $[x,y,z]$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność liczb x, y, z.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieją dwa wielomiany ósmego stopnia różniące się o stałą niezerową, z których każdy ma osiem różnych pierwiastków całkowitych.

Wskazówka: Wykorzystać tożsamość

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^5-1)(x^7-1)(x^8-1)(x^{11}-1)(x^{13}-1)=$$
$$=x^{50}-x^{49}-x^{48}+x^{46}+x^{41}-x^{39}-x^{30}+x^{27}+$$
$$+x^{23}-x^{20}-x^{11}+x^9+x^4-x^2-x+1.$$

4. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o jest styczny do odcinków AB i AC odpowiednio w punktach D i E, różnych od B i C. Ten sam okrąg przecina bok BC w punktach K i L. Odcinki AL i DE przecinają się w punkcie P, przekątne czworokąta $BCED$ przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że punkty P, Q, K są współliniowe.

5. Na płaszczyźnie dane są punkty $A_1,A_2,\ldots,A_{10001}$, z których żadne trzy nie są współliniowe. Dowieść, że można wybrać z nich takie punkty $A_{n_1},A_{n_2},\ldots,A_{n_{11}}$, gdzie $1\leqslant n_1<n_2<\ldots<n_{11}\leqslant 10001$, że kąty $\sphericalangle A_{n_i}A_{n_j}A_{n_k}$ są rozwarte dla $1\leqslant i<j<k\leqslant 11$.

6. Dany jest zbiór 2^n-elementowy A ($n\geqslant 2$). Wyznaczyć największą liczbę naturalną k, dla której istnieją takie 2^{n-1}-elementowe podzbiory $B_1,B_2,\ldots,B_k$ zbioru A, że dla dowolnych liczb $1\leqslant i<j\leqslant k$ zbiór $B_i\cap B_j$ ma dokładnie 2^{n-2} elementów.

7. Niech A będzie zbiorem tych liczb rzeczywistych z przedziału $(0,1)$, których zapis dziesiętny nie zawiera po przecinku innych cyfr niż 1 lub 7. Niech B będzie zbiorem tych liczb rzeczywistych, których nie da się zapisać w postaci skończonej sumy liczb ze zbioru A. Znaleźć $\sup B$.

8. Czworokąt wypukły $ABCD$ ($AC\neq BD$) jest wpisany w okrąg o środku O. Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, przy czym

$$\sphericalangle PAB+\sphericalangle PCB=\sphericalangle PBC+\sphericalangle PDC=90^\circ.$$

Dowieść, że punkty O, P i E są współliniowe.

9. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej n. Czy istnieje takie naturalne $n>1$, dla którego równanie

$$a^b=b^{na}$$

spełnia co najmniej $d(n)+2000$ par liczb naturalnych (a,b) ?

10. Udowodnić, że dla każdego $x \in (0,1)$ oraz dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi nierówność

$$(1-(1-x)^m)^n + (1-x^n)^m \geqslant 1.$$

11. Niech A oznacza zbiór liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi. Rozstrzygnąć, czy jeżeli funkcja $f: A\times A \to R$ spełnia równość

$$f(a+r,b)+f(a,b+r) = f(a,b)+f(a+r,b+r) \qquad \text{dla } a,b,r \in A,$$

to również spełnia równość

$$f(a+r,b)+f(a,b+s) = f(a,b)+f(a+r,b+s) \qquad \text{dla } a,b,r,s \in A.$$

12. Prostokąt $ABCD$ dzielimy na $n-1$ kolumn odcinkami równoległymi do AB, gdzie n jest parzyste. Następnie pewne z otrzymanych kolumn dzielimy na prostokąty odcinkami równoległymi do BC, tak by żadne dwa z tych odcinków nie leżały na jednej prostej i tak, aby prostokąt $ABCD$ został podzielony na $\binom{n+1}{2}-1$ prostokątów. W każdy prostokąt pierwszej kolumny wpisujemy liczbę 1, a w każdy prostokąt następnej kolumny wpisujemy sumę liczb z sąsiadujących z nim prostokątów z poprzedniej kolumny. Jaka jest największa możliwa suma liczb w ostatniej kolumnie?

Treści zadań z Meczu Matematycznego

1. Liczbę naturalną n nazwiemy *marnotrawną*, jeżeli z kartki w kratkę o rozmiarach $n\times n$ nie da się wyciąć (tnąc po kratkach) $[n^2/77]$ prostokątów o wymiarach 7×11. Rozstrzygnąć, czy liczb marnotrawnych jest skończenie wiele.

2. Niech A oznacza liczbę ciągów liczb naturalnych $(a_1,a_2,\ldots,a_{10})$ spełniających równanie

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{10}} = 1.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba A jest parzysta.

3. Dana jest szachownica $n\times n$ pomalowana w zwykły sposób. Jeden ruch polega na zmianie kolorów wszystkich pól w wybranym wierszu lub w wybranej kolumnie na przeciwne. Jaką najmniejszą niezerową liczbę pól białych można otrzymać wykonując powyższe ruchy?

4. Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych zdefiniowaną wzorami:

$$f(0)=1, \qquad f(m)=(2^1-1)(2^2-1)\cdots(2^m-1) \quad \text{dla} \quad m\geqslant 1.$$

Niech ponadto

$$c(n,k)=\frac{f(n)}{f(k)f(n-k)} \qquad \text{dla} \quad n\geqslant k\geqslant 0.$$

Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby naturalne $0<k<l<n$, że liczby $c(n,k)$ i $c(n,l)$ są względnie pierwsze.

Uwaga: Liczby $c(n,k)$ pojawiły się w zadaniu 8. z zawodów stopnia pierwszego LI Olimpiady Matematycznej.

5. Funkcja $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale $[0,1]$ oraz różniczkowalna na przedziale $(0,1)$. Ponadto dla dowolnych liczb $x,y\in(0,1)$ zachodzi nierówność $xf'(y)+yf'(x)\leqslant 1$. Dowieść, że $f(1)-f(0)\leqslant \pi/4$.

6. Rozstrzygnąć, czy można wybrać 75 punktów $P_1,P_2,\ldots,P_{75}$ wewnątrz koła o promieniu 300 w taki sposób, aby $P_iP_j\geqslant i+j$ dla wszystkich $1\leqslant i<j\leqslant 75$.

7. W trójkącie ABC zachodzi równość $AB=AC$. Punkt D jest środkiem boku BC, punkt E jest środkiem odcinka AD. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BE. Dowieść, że $\sphericalangle AFC=90^\circ$.

8. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x,y)$ o współczynnikach rzeczywistych, które dla dowolnych x i y spełniają nierówność

$$\Big(W(x,y)\Big)^2\leqslant x^2y^4+x^4y^2+1-3x^2y^2\,.$$

9. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna $n>1$ o następującej własności:

Dowolna liczba n-cyfrowa zapisana trzy razy z rzędu tworzy liczbę $(3n)$-cyfrową podzielną przez n^2.

10. W czworościanie $ABCD$ wysokości ścian ABD, BCD i CAD opuszczone z wierzchołka D są równe i wynoszą h. Ponadto $BC=a$, $CA=b$ i $AB=c$. Obliczyć objętość czworościanu $ABCD$.

11. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty DAB, ABC, BCD i CDA są wierzchołkami prostokąta.

Szkice rozwiązań zadań z zawodów indywidualnych

1. Na każdym polu nieskończonej szachownicy napisano liczbę całkowitą, przy czym każda napisana liczba występuje na tej szachownicy tylko raz. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a istnieją takie dwa sąsiednie pola szachownicy, że różnica liczb napisanych na tych polach jest większa niż a.

Rozwiązanie:

Dla szachownicy $n \times n$, różnica pomiędzy największą a najmniejszą napisaną liczbą jest większa lub równa n^2-1. Zatem liczby stojące na pewnych dwóch sąsiednich polach różnią się o co najmniej $(n^2-1)/(2n-2)=(n+1)/2$.

2. Niech t_n będzie największą liczbą całkowitą taką, że $n!$ dzieli się przez 3^{t_n} oraz niech c_n będzie największą liczbą całkowitą taką, że $n!$ dzieli się przez 4^{c_n}. Dowieść, że dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność $t_n > c_n$ oraz dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność $t_n < c_n$.

Rozwiązanie:

Czynnik 2 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $n!$ z wykładnikiem d_n równym $n-s_2(n)$, gdzie $s_k(n)$ jest sumą cyfr liczby n w układzie pozycyjnym przy podstawie k. Wobec tego $c_n=[d_n/2]$. Czynnik 3 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $n!$ z wykładnikiem $t_n=n-s_3(n)/2$.

Niech n będzie potęgą trójki. Wtedy $s_3(n)=1$ oraz $s_2(n)>1$, skąd

$$t_n=\frac{n-1}{2}>\frac{n-s_2(n)}{2}\geqslant c_n.$$

Gdy n jest potęgą dwójki o nieparzystym wykładniku, to $s_2(n)=1$ oraz $s_3(n)\geqslant 3$ (cyfra jedności liczby n w układzie trójkowym jest równa 2), skąd

$$t_n=\frac{n-s_3(n)}{2}\leqslant\frac{n-3}{2}=c_n-1<c_n.$$

3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzą następujące równości kątów: $\sphericalangle ACB=2\sphericalangle CAD$ oraz $\sphericalangle ACD=2\sphericalangle BAC$. Dowieść, że $CB+CD=CA$.

Rozwiązanie:

Niech P i Q będą odpowiednio punktami przecięcia dwusiecznych kątów BCA i DCA z okręgiem opisanym na czworokącie $ABCD$. Wówczas trójkąt CPQ jest równoboczny, skąd $AQ+AP=AC$, a więc $BC+CD=AC$.

4. Wszystkie liczby ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,2000\}$ połączono w pary

$$(a_1,b_1),\quad (a_2,b_2),\quad \ldots,\quad (a_{1000},b_{1000})$$

w taki sposób, że każda z liczb $|a_i-b_i|$ jest równa 1 lub 6. Wyznaczyć wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 10 liczby

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_{1000}-b_{1000}|.$$

Rozwiązanie:

Niech k będzie liczbą „jedynek” wśród liczb $|a_i-b_i|$. Dana w treści zadania suma jest więc równa $k+6(1000-k)=6000-5k$. Liczba $a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_{1000}+b_{1000}$ jest parzysta, skąd wynika, że k jest liczbą parzystą (liczby $|a_i-b_i|$ oraz a_i+b_i dają taką samą resztę z dzielenia przez 2). Zatem dana suma jest podzielna przez 10.

5. Dane są liczby dodatnie $a_1,a_2,\ldots,a_n$ o sumie równej 1. Dowieść, że

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n-a_k}{1-a_k}\right).$$

Rozwiązanie:

Dla dowolnych liczb dodatnich $x_1,x_2,\ldots,x_\ell$ prawdziwa jest nierówność

$$(1)\qquad \left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_\ell}\right) \geqslant \left(1+\frac{\ell}{x_1+x_2+\ldots+x_\ell}\right)^{\ell}.$$

Nierówność (1) dowodzimy przy pomocy nierówności Jensena. Wynika ona również z silniejszej nierówności $(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_\ell) \geqslant (1+\sqrt[\ell]{b_1b_2\ldots b_\ell})^\ell$, którą otrzymuje się poprzez wymnożenie nawiasów i wykorzystanie nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną:

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant \ell} b_{i_1}b_{i_2}\ldots b_{i_k} \geqslant \binom{\ell}{k}(b_1b_2\ldots b_\ell)^{k/\ell}.$$

Aby udowodnić daną w treści zadania nierówność, stosujemy n razy nierówność (1) dla $(n-1)$-elementowych podzbiorów zbioru $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Mnożąc stronami n otrzymanych nierówności uzyskujemy tezę.

6. Okrąg o środku O i promieniu R jest opisany na trójkącie ABC. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC. Okrąg styczny do boku BC oraz do przedłużeń pozostałych boków tego trójkąta ma promień R. Dowieść, że punkty O, I, D są współliniowe.

Rozwiązanie:

Niech E będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta przy wierzchołku A z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech ponadto $J=DO\cap AE$. Należy wykazać, że $JE=BE$. Na mocy założenia

$$(1)\qquad \frac{AJ}{JE}=\frac{AD}{OE}=\frac{AD}{R}=\frac{AD}{r_a}=\frac{2S}{ar_a}=\frac{2r_a(p-a)}{ar_a}=\frac{b+c-a}{a},$$

gdzie S i p oznaczają odpowiednio pole i połowę obwodu trójkąta ABC, r_a – promień okręgu dopisanego do boku BC. Na mocy twierdzenia Ptolemeusza

$$(2)\qquad (AJ+JE)a=BE(b+c).$$

Z (1) i (2) wynika, że $JE=BE$.

7. Rozstrzygnąć, czy dowolną liczbę można podnieść do potęgi $2^{16}-1$ wykonując: (a) mniej niż 100 mnożeń; (b) mniej niż 30 mnożeń; (c) mniej niż 20 mnożeń; (d) mniej niż 10 mnożeń.

Rozwiązanie:

Wykonując mniej niż 10 (czyli maksymalnie 9) mnożeń można podnieść liczbę do potęgi co najwyżej 512. Odpowiedź na pytanie (d) jest więc negatywna.

Przy pomocy $n+1$ mnożeń można podnieść liczbę do potęgi 2^n+1, zatem do podniesienia liczby do potęgi $2^{16}-1=3\cdot5\cdot17\cdot257$ wystarczy $2+3+5+9=19$ mnożeń, skąd pozytywna odpowiedź na pytania (a), (b) i (c).

8. Okrąg o jest styczny do prostych AB i AC odpowiednio w punktach B i C. Punkt P leży na okręgu o oraz na zewnątrz trójkąta ABC. Punkt M jest środkiem odcinka BC. Dowieść, że $\sphericalangle BPA=\sphericalangle MPC$.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności można przyjąć, że punkt M leży wewnątrz trójkąta APC. Niech punkt Q będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie ABP z prostą AM. Wówczas $\sphericalangle BPC = \sphericalangle AQP$. Zatem $\sphericalangle BPA = \sphericalangle BQA = \sphericalangle AQC = \sphericalangle MPC$.

9. Dana jest liczba rzeczywista dodatnia a. Ciąg (x_n) jest zdefiniowany następująco:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = ax_n - x_{n-1} \qquad \text{dla } n = 1,2,3,\ldots .$$

Wyznaczyć wszystkie wartości a, dla których ciąg (x_n) jest okresowy.

Rozwiązanie:

Dla $a \geqslant 2$ ciąg (x_n) jest rosnący. Dla $a \in (0,2)$ przyjmujemy $a = 2\cos t$. Wówczas

$$x_n = \frac{\sin nt}{\sin t} \qquad \text{dla } n = 0,1,2,\ldots ,$$

co można udowodnić przez indukcję lub korzystając z ogólnej metody rozwiązywania rekurencji liniowych.

Warunki zadania spełniają więc liczby a postaci $2\cos\alpha\pi$, gdzie α jest liczbą wymierną z przedziału $(0, \frac{1}{2})$.

10. Niech $S = \{1,2,3,\ldots,2000\}$. Wyznaczyć największą liczbę naturalną k, dla której prawdziwe jest następujące zdanie:
Dla dowolnej funkcji $f\colon S \to S$ takiej, że $f(x) \neq x$ dla $x \in S$, istnieje taki k-elementowy zbiór $A \subset S$, że $f(x) \notin A$ dla $x \in A$.

Rozwiązanie:

Odp.: $k = 667$.

Dla danej funkcji f, niech A będzie największym zbiorem o własności: $A \cap f(A) = \emptyset$. Wówczas zbiór $C = S \setminus (A \cup f(A))$ ma również własność $C \cap f(C) = \emptyset$. Stąd uzyskujemy oszacowanie $k \geqslant [2000/3] + 1 = 667$.

Aby wykazać, że $k \leqslant 667$, rozpatrujemy jako f permutację zbioru S składającą się z 666 cykli 3-elementowych oraz jednego cyklu 2-elementowego. Wówczas dla każdego zbioru 668-elementowego A zachodzi $A \cap f(A) \neq \emptyset$.

11. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzi: $AD < BC$ oraz $CD < AB$. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i BC, przy czym $BK = CD$ oraz $BL = AD$. Odcinki KL i BD przecinają się w punkcie M. Dowieść, że $KM = ML$.

Rozwiązanie:

Trójkąt ADC uzupełniamy do równoległoboku $ADCP$. Wówczas trójkąty ADP i BLK są przystające. Ponadto $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ oraz $\sphericalangle PAC = \sphericalangle DBA$. Stąd wynika teza.

12. Wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$A_p = \left[\frac{10^p}{p}\right]$$

jest podzielna przez 10.

Rozwiązanie:

Na mocy małego twierdzenia Fermata istnieje takie a, że $10^{p-1} = pa + 1$. Wtedy

$$A_p = \left[\frac{10pa + 10}{p}\right] = 10a + \left[\frac{10}{p}\right] = 10a$$

dla $p > 10$. Ponadto $A_2 = 50$, $A_3 = 333$, $A_5 = 20000$ oraz $A_7 = 1428571$.

Warunki zadania spełniają wszystkie liczby pierwsze oprócz 3 i 7.

13. Danych jest $2n$ różnych liczb rzeczywistych $a_1,a_2,\dots,a_n$, $b_1,b_2,\dots,b_n$ oraz szachownica $n\times n$. W pole leżące w i-tym wierszu i j-tej kolumnie wpisujemy liczbę a_i+b_j. Niech c_i będzie iloczynem liczb stojących w i-tym wierszu, zaś d_j iloczynem liczb stojących w j-tej kolumnie. Dowieść, że jeżeli $c_1=c_2=\ldots=c_n$, to $d_1=d_2=\ldots=d_n$.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy wielomian

$$w(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-(x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_n).$$

Liczby $w(a_i)=-c_i$ są równe, co oznacza, że w jest wielomianem stałym. Zatem wszystkie liczby $d_j=(-1)^n w(-b_j)$ są równe.

14. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność

$$x^4+y^4+(x^2+1)(y^2+1)\geqslant x^3(1+y)+y^3(1+x)+x+y.$$

Rozwiązanie:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $a^4+a^2b^2\geqslant 2a^3b$.

Napiszmy powyższą nierówność dla par (a,b) równych (x,y), (y,x), (y,z), (z,y), (x,z), (z,x) i dodajmy stronami otrzymanych sześć nierówności. Po podstawieniu $z=1$, otrzymamy daną nierówność.

15. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Punkt P leży na okręgu o_1, na zewnątrz okręgu o_2. Proste PA i PB przecinają po raz drugi okrąg o_2 odpowiednio w punktach K i L. Wyznaczyć zbiór środków okręgów opisanych na trójkątach PKL, przy ustalonych okręgach o_1 i o_2 oraz zmieniającym położenie punkcie P.

Rozwiązanie:

Niech v będzie wektorem łączącym środki okręgów o_1 i o_2 (środek okręgu o_1 jest początkiem tego wektora). Oznaczmy przez C i Q odpowiednio obrazy punktów B i P przy translacji o wektor v. Wówczas $QL=CB=QP$. Analogicznie: $QK=QP$. Zatem Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AKL. Szukanym zbiorem jest więc obraz łuku okręgu o_1 leżącego na zewnątrz okręgu o_2, w translacji o wektor v.

16. Fredek gra w samotnika. Plansza do gry ma kształt n-kąta foremnego. Na każdym wierzchołku tego n-kąta stoi kieliszek, niektóre kieliszki są napełnione. Jedno posunięcie polega na tym, że Fredek wypija zawartość dowolnie wybranego kieliszka oraz zawartość tych sąsiednich kieliszków, które były napełnione i jednocześnie napełnia te sąsiednie kieliszki, które były puste. Jeśli po pewnym posunięciu wszystkie kieliszki są puste, to Fredek idzie się napić. Dla jakich n, startując od jednego napełnionego kieliszka, Fredek ma szansę na to, że pójdzie się napić?

Rozwiązanie:

Odp.: Dla n niepodzielnych przez 3.

Dla dowolnego n, Fredek jest w stanie doprowadzić do sytuacji, w której tylko jeden kieliszek jest pusty. Zatem dla liczb n niepodzielnych przez 3, Fredek może opróżnić wszystkie kieliszki.

Dla n podzielnych przez 3, Fredek zasłonił co trzeci kieliszek przed swoją żoną w taki sposób, że nie zasłonił jedynego kieliszka pełnego. Zatem po każdym posunięciu Fredka, jego żona widzi nieparzystą liczbę pełnych kieliszków.

17. Dana jest liczba dodatnia c. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające tożsamość $f(x)=f(x^2+c)$.

Rozwiązanie:

Dla $c \leqslant \frac{1}{4}$, równanie $x^2+c-x=0$ ma pierwiastki a i b, takie, że $0<a\leqslant b$. Dla $t\in(a,\infty)$ definiujemy rekurencyjnie ciąg (x_n) wzorem

$$x_0=t, \qquad x_{n+1}=\sqrt{x_n-c}.$$

Ciąg ten jest zbieżny do b, co dowodzi, że funkcja f jest stała na przedziale (a,∞). Analogicznie, dla $t\in[0,a]$ definiując ciąg

$$x_0=t, \qquad x_{n+1}=x_n^2+c,$$

który jest zbieżny do a dowodzimy, że funkcja f jest stała na przedziale $[0,a]$. Zatem dla $c\leqslant\frac{1}{4}$ jedynymi funkcjami spełniającymi warunki zadania są funkcje stałe (f jest funkcją parzystą).

Niech $c>\frac{1}{4}$. Definiujemy ciąg $x_0=0$, $x_{n+1}=x_n^2+c$, który jest rosnący i rozbieżny. Definiujemy dowolnie funkcję ciągłą f na przedziale $[x_0,x_1]$ taką, że $f(x_0)=f(x_1)$. Dalej rozszerzamy funkcję f na całą prostą korzystając ze wzoru $f(x)=f(x^2+c)$.

18. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n oraz liczby rzeczywiste $x_1,x_2,\ldots,x_n\geqslant-1$, dla których

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3=0 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{n}{3}.$$

Rozwiązanie:

Niech $f(x)=(x+1)(x-\frac{1}{2})^2$. Wówczas $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)=0$, co oznacza, że $x_i\in\{-1,\frac{1}{2}\}$. Stąd liczba n musi być postaci $9k$ oraz k spośród liczb $x_1,x_2,\ldots,x_n$ jest równych -1, a pozostałe $8k$ liczb jest równych $\frac{1}{2}$.

19. Dla danej liczby $\alpha\in(0,2)$ rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja ciągła $f\colon[0,2]\to\mathbb{R}$, że $f(x+1)>f(x)$ dla $x\in[0,1]$, lecz $f(x+\alpha)<f(x)$ dla $x\in[0,2-\alpha]$.

Rozwiązanie:

Gdy $\alpha\leqslant1$, taka funkcja f nie istnieje. Jako funkcja ciągła na przedziale domkniętym osiągałaby maksimum w pewnym punkcie x_0, jednak wówczas $f(x_0+1)>f(x_0)$, gdy $x_0\leqslant1$ lub $f(x_0-\alpha)>f(x_0)$, gdy $x_0>1$.

Gdy $\alpha=1+1/n$, to dla $x\in[0,1-1/n]$ mamy $f(x+1/n)<f(x+1+1/n)<f(x)$, skąd $f(1)<f(0)$ wbrew założeniu, więc i w tym przypadku żądana funkcja f nie istnieje.

Dla pozostałych α podamy konstrukcję funkcji f.

Niech $\beta=\alpha-1$, $k=[1/\beta]$, $\gamma=1-k\beta$. Zdefiniujmy f jako funkcję przedziałami liniową:

$$f(i\beta)=-2i \qquad \text{oraz} \qquad f(i\beta+\gamma)=-2i+2k+1 \quad \text{dla} \quad i=0,1,2,\ldots,k.$$

Niech ponadto $f(x+1)=f(x)+1$. Wówczas

$$f(1+i\beta)=-2i+1=f((i-1)\beta+\alpha)<f((i-1)\beta)=-2i+2 \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,k$$

oraz

$$f(1+i\beta+\gamma)=-2i+2k+2=f((i-1)\beta+\gamma+\alpha)<f((i-1)\beta+\gamma)=-2i+2k+3$$

dla $i=1,2,\ldots,k$. Stąd $f(x+\alpha)=f(x)-1$ dla $x\in[0,2-\alpha]$.

20. Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy istnieje ostrosłup o podstawie będącej n-kątem wypukłym i wszystkich ścianach bocznych będących trójkątami prostokątnymi.

Rozwiązanie:

Taki ostrosłup istnieje dla dowolnego $n \geqslant 3$.

Niech $AA_1A_2\ldots A_{n-1}$ będzie takim wielokątem wypukłym, że $\sphericalangle AA_iA_{i+1} = 90°$ dla $i = 1,2,\ldots,n-2$. Niech O będzie takim punktem w przestrzeni, że OA jest prostopadłe do płaszczyzny n-kąta $AA_1A_2\ldots A_{n-1}$. Wówczas $\sphericalangle OA_iA_{i+1} = 90°$ dla $i = 1,2,\ldots,n-2$ oraz $\sphericalangle OAA_1 = OAA_{n-1} = 90°$.

21. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba rzeczywista $\alpha \in (2, 2\frac{1}{2})$, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $[\alpha^n] + n$ jest nieparzysta.

Rozwiązanie:

Taka liczba istnieje: $\alpha = \sqrt{2} + 1$.

22. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Niech A będzie zbiorem wszystkich punktów, których obie współrzędne należą do zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$. Wybieramy losowo dwa różne punkty ze zbioru A. Jakie jest prawdopodobieństwo, że są one przeciwległymi wierzchołkami kwadratu o wszystkich wierzchołkach w zbiorze A?

Rozwiązanie:

Policzmy kwadraty o wierzchołkach w zbiorze A. Spośród kwadratów o bokach równoległych do osi układu współrzędnych mamy n^2 kwadratów o boku 1, $(n-1)^2$ kwadratów o boku 2, ..., 1 kwadrat o boku n. Każdemu takiemu kwadratowi o boku k odpowiada k kwadratów wpisanych w niego (łącznie z nim samym). Zatem wszystkich kwadratów jest

$$n^2 \cdot 1 + (n-1)^2 \cdot 2 + (n-2)^2 \cdot 3 + \ldots + 1^2 \cdot n\,,$$

co, jak można wykazać indukcyjnie, jest równe

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}\,.$$

Każdemu kwadratowi odpowiadają dwie pary wierzchołków przeciwległych, takich par jest więc $n^2(n^2-1)/6$. Wobec tego, że liczba par punktów ze zbioru A wynosi $n^2(n^2-1)/2$, szukane prawdopodobieństwo wynosi $1/3$.

23. Na płaszczyźnie dane są dwa zgodnie zorientowane kwadraty $A_1B_1C_1D_1$ oraz $A_2B_2C_2D_2$, przy czym $A_1 \neq A_2$ oraz $C_1 \neq C_2$. Udowodnić, że proste A_1A_2 i C_1C_2 są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $B_1B_2 = D_1D_2$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy: $S = A_1C_1 \cap A_2C_2$. Wówczas $C_1C_2 \parallel A_1A_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty SD_1B_1 i SD_2D_2 są podobne. To z kolei jest równoważne stwierdzeniu, że trójkąty SD_1D_2 i SB_1B_2 są przystające, co daje tezę zadania.

Przypadek, gdy $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ należy rozpatrzyć osobno.

24. Dane są takie liczby całkowite dodatnie p, k i q, że $p>k$ oraz p jest dzielnikiem pierwszym liczby q^2+k. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, m i n, że $a<2\sqrt{k}$ oraz

$$pa=m^2+kn^2\,.$$

Rozwiązanie:

Niech $b=[\sqrt{p}/\sqrt[4]{k}]$. Wśród $b+1$ liczb $0,q,2q,\ldots,bq$ rozważanych *modulo* p znajdą się dwie różniące się (modulo p) o nie więcej niż $p/(b+1)$.

Rozważając ich różnicę uzyskujemy takie liczby m i n, że

$$1\leqslant n\leqslant b\leqslant \frac{\sqrt{p}}{\sqrt[4]{k}},\qquad nq\equiv \pm m \pmod p,\qquad 1\leqslant m\leqslant \frac{p}{b+1}<\sqrt{p}\sqrt[4]{k}.$$

Wtedy

$$m^2+kn^2\equiv (nq)^2+kn^2\equiv 0 \pmod p \qquad \text{oraz} \qquad m^2+kn^2<p\sqrt{k}+p\sqrt{k}=2p\sqrt{k}\,.$$

25. Na planszy $n\times n$ panuje epidemia. Na początku chorych jest k pól – ognisk epidemii. Jeżeli pole sąsiaduje bokiem z co najmniej dwoma polami chorymi, to zostaje zarażone. Znaleźć najmniejsze k, dla którego istnieje k ognisk epidemii powodujących zarażenie całej planszy.

Rozwiązanie:

Jeżeli na każdym polu przekątnej znajduje się ognisko epidemii, to zostaje zarażona cała plansza. Zatem $k\leqslant n$. Zliczamy obwód zarażonego obszaru. Na początku wynosi on nie więcej niż $4k$. Zarażenie pola nie zwiększa obwodu zarażonego obszaru. Aby nastąpiło zarażenie całej planszy, musi być $k\geqslant n$.

26. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}=\sum_{i=0}^{n}2^i\binom{n}{i}^2.$$

Rozwiązanie:

Dana jest grupa n kobiet i n mężczyzn. Na ile sposobów możemy wybrać n osób i niektórym spośród wybranych kobiet wręczyć kwiaty?

I metoda:

Ustalmy $i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$. Na $\binom{n}{n-i}=\binom{n}{i}$ sposobów wybieramy $n-i$ kobiet, którym wręczamy kwiaty, a z pozostałych $n+i$ osób na $\binom{n+i}{i}$ sposobów wybieramy i osób. Sumując po i otrzymujemy lewą stronę nierówności.

II metoda:

Ustalamy $i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$. Wybieramy i kobiet oraz $n-i$ mężczyzn na $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ sposobów. Kwiaty można wręczyć i kobietom na 2^i sposobów, co razem daje prawą stronę nierówności.

27. Punkt P leży we wnętrzu trójkąta równobocznego ABC. Punkty D, E i F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA i AB. Udowodnić, że suma pól trójkątów PAF, PBD i PCE nie zależy od wyboru punktu P.

Rozwiązanie:

Przez punkt P prowadzimy proste równoległe do boków trójkąta ABC. Dzielą one trójkąt ABC na trójkąty równoboczne i równoległoboki. „Połowy” owych trójkątów i równoległoboków dają w sumie trójkąty PAF, PBD i PCE.

Szkice rozwiązań zadań z zawodów drużynowych

1. Rozstrzygnąć, czy układ równań

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_8=y_1+y_2+\ldots+y_8\\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_8^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_8^2\\ x_1^3+x_2^3+\ldots+x_8^3=y_1^3+y_2^3+\ldots+y_8^3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1^7+x_2^7+\ldots+x_8^7=y_1^7+y_2^7+\ldots+y_8^7 \end{cases}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w różnych liczbach całkowitych $x_1,x_2,\ldots,x_8$, $y_1,y_2,\ldots,y_8$.

Rozwiązanie:

Niech $W(x)$ będzie wielomianem ze wskazówki do zadania 3:

$$W(x)=\sum_{i=1}^{8}x^{x_i}-\sum_{i=1}^{8}x^{y_i}\,.$$

Niech D będzie operatorem działającym według wzoru $D(f(x))=xf'(x)$. Po k-krotnym zastosowaniu operatora D do wielomianu W otrzymamy

(1) $$W_k(x)=\sum_{i=1}^{8}x_i^k x^{x_i}-\sum_{i=1}^{8}y_i^k x^{y_i}\,.$$

Ponieważ liczba 1 jest ośmiokrotnym pierwiastkiem wielomianu W, więc jest też ona pierwiastkiem wielomianu W_k dla $k=1,2,\ldots,7$.

Wstawiając $x=1$ do wzoru (1) otrzymujemy układ równości dany w zadaniu.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie ε o następującej własności:

Istnieje nieskończenie wiele trójek (a,b,c) liczb całkowitych dodatnich spełniających nierówności

(1) $$(\sqrt{c}-\varepsilon)^2\leqslant a<b<c$$

oraz

(2) $$[a,b,c]\leqslant c\sqrt{c}\,.$$

Uwaga: Symbol $[x,y,z]$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność liczb x, y, z.

Rozwiązanie:

Niech $\varepsilon=1$. Wówczas nierówność (1) przyjmuje postać

$$(\sqrt{c}-1)^2\leqslant a<b<c\,.$$

Załóżmy, że liczby a, b, c spełniają podane warunki, przy czym $c\geqslant 100$. Wtedy

$$\frac{81c}{100}\leqslant a<b<c\,.$$

Niech d oznacza największy wspólny dzielnik liczb a, b, c. Niech ponadto $x=(b/d,c/d)$, $y=(a/d,c/d)$, $z=(a/d,b/d)$, $A=a/(yzd)$, $B=b/(xzd)$, $C=c/(xyd)$. Wówczas

$$a=Ayzd,\qquad b=Bxzd,\qquad c=Cxyd.$$

Mamy więc

$$c-b=(Cy-Bz)xd=(Cy-Bz)(b,c)=\frac{(Cy-Bz)bc}{[b,c]}=\frac{(Cy-Bz)bc}{[a,b,c]/A}=$$

$$=\frac{A(Cy-Bz)bc}{[a,b,c]}>\frac{A(Cy-Bz)c^2 81/100}{c\sqrt{c}}=A(Cy-Bz)\frac{81\sqrt{c}}{100}\,.$$

Podobnie

$$b-a=(Bx-Ay)zd=(Bx-Ay)(a,b)=\frac{(Bx-Ay)ab}{[a,b]}=\frac{(Bx-Ay)ab}{[a,b,c]/C}=$$

$$=\frac{C(Bx-Ay)ab}{[a,b,c]C}>\frac{C(Bx-Ay)c^2 6561/10000}{c\sqrt{c}}=C(Bx-Ay)\frac{6561\sqrt{c}}{10000}\,.$$

Zatem

$$c-a>\frac{8100A(Cy-Bz)+6561C(Bx-Ay)}{10000}\sqrt{c}\geqslant\frac{21222}{10000}\sqrt{c}>2\sqrt{c}\,,$$

o ile obydwie liczby $A(Cy-Bz)$ i $C(Bx-Ay)$ nie są jednocześnie jedynkami. Jednak z założenia $c-a\leqslant 2\sqrt{c}-1<2\sqrt{c}$, skąd otrzymujemy kolejno

$$A=C=1,\qquad y=Bz+1,\qquad Bx=y+1\,.$$

Tak więc liczby Bz, y, Bx są kolejnymi liczbami całkowitymi, co daje $B\leqslant 2$.

Jeżeli $B=1$, to

$$a=y(y-1)d,\qquad b=(y-1)(y+1)d,\qquad c=y(y+1)d\,,$$

jednak wówczas

$$2\sqrt{c}-1\geqslant c-a=2yd=(2(y+1/2)-1)d=(2\sqrt{y(y+1)+1/4}-1)d>$$

$$>(2\sqrt{y(y+1)}-1)d=2\sqrt{c}\sqrt{d}-d\,,$$

skąd $2\sqrt{c}\sqrt{d}-d<2\sqrt{c}-1$. Zatem $d>1$ oraz

$$2\sqrt{c}(\sqrt{d}-1)<d-1,$$

$$2\sqrt{c}<\sqrt{d}+1<2\sqrt{d}\,,$$

co nie jest możliwe, bo $d\leqslant c$.

Jeżeli $B=2$, to $x=z+1$ i $y=2z+1$, skąd

$$a=(2z+1)zd,\qquad b=2(z+1)zd,\qquad c=(z+1)(2z+1)d\,,$$

co daje $[a,b,c]=2zc\leqslant c\sqrt{c}$, skąd $2z\leqslant\sqrt{c}$ i $4z^2\leqslant d(2z^2+3z+1)$, co przy $d=1$ daje $z=1$ oraz $c=6$. Wobec nierówności $c\geqslant 100$ mamy więc $d\geqslant 2$. Stąd

$$2\sqrt{c}-1\geqslant c-a=(2z+1)d=d(2z+3/2-1/2)=$$

$$=d(\sqrt{4z^2+6z+9/4}-1/2)>d(\sqrt{2c/d}-1/2)\,,$$

czyli $\sqrt{c}\sqrt{2d}-d/2<2\sqrt{c}-1$. Zatem $d>1$ oraz

$$\sqrt{2}\sqrt{c}(\sqrt{d}-\sqrt{2})<\frac{d-2}{2},$$

$$\sqrt{2}\sqrt{c}<\frac{\sqrt{d}+\sqrt{2}}{2}<\sqrt{d}\,,$$

co nie jest możliwe, bo $d\leqslant c$.

Nie istnieją więc liczby a, b, c, ε spełniające warunki (1), (2) dla $\varepsilon\leqslant 1$ oraz $c\geqslant 100$.

Pozostaje zauważyć, że dla liczb $a=(n-1)n$, $b=(n-1)(n+1)$, $c=n(n+1)$ mamy

$$[a,b,c]=(n-1)n(n+1)=(n-1)c<c\sqrt{c}$$

oraz

$$\varepsilon=\sqrt{c}-\sqrt{a}=\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}=\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}\to 1$$

przy n dążącym do ∞.

Zatem warunek podany w zadaniu spełniają wszystkie liczby $\varepsilon>1$.

Uwaga

Dla $\varepsilon=1$ istnieją trzy trójki liczb (a,b,c) spełniających podane nierówności: (1,2,4), (3,4,6), (5,6,10).

3. Rozstrzygnąć, czy istnieją dwa wielomiany ósmego stopnia różniące się o stałą niezerową, z których każdy ma osiem różnych pierwiastków całkowitych.

Wskazówka: Wykorzystać tożsamość

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^5-1)(x^7-1)(x^8-1)(x^{11}-1)(x^{13}-1)= \\ = x^{50}-x^{49}-x^{48}+x^{46}+x^{41}-x^{39}-x^{30}+x^{27}+ \\ +x^{23}-x^{20}-x^{11}+x^9+x^4-x^2-x+1.\end{aligned}$$

Rozwiązanie:

Niech $x_1,x_2,\ldots,x_8$, $y_1,y_2,\ldots,y_8$ będzie rozwiązaniem układu równań z zadania 1. Wówczas wielomiany

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_8) \quad \text{oraz} \quad Q(x)=(x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_8)$$

różnią się o stałą, gdyż w sposób analogiczny do dowodu zasadniczego twierdzenia o wielomianach symetrycznych można wykazać, że

$$I_k(z_1,z_2,\ldots,z_n)=W_k(P_1(z_1,\ldots,z_n),P_2(z_1,\ldots,z_n),\ldots,P_k(z_1,\ldots,z_n)),$$

gdzie $I_k(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ jest sumą wszystkich iloczynów k spośród zmiennych $z_1,z_2,\ldots,z_n$, $P_i(z_1,z_2,\ldots,z_n)=z_1^i+z_2^i+\ldots+z_n^i$, a W_k jest pewnym wielomianem k zmiennych.

4. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o jest styczny do odcinków AB i AC odpowiednio w punktach D i E, różnych od B i C. Ten sam okrąg przecina bok BC w punktach K i L. Odcinki AL i DE przecinają się w punkcie P, przekątne czworokąta $BCED$ przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że punkty P, Q, K są współliniowe.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $X=DE\cap BC$. Niech $(T,W;U,V)=\dfrac{TU}{WU}:\dfrac{TV}{WV}$. Wystarczy udowodnić, że $(D,E;X,P)=(C,B;X,K)$. Prawdziwe są następujące równości: $(D,E;X,P)=(B,C;X,L)=1/(C,B;X,L)=(C,B;X,K)$. Ostatnia równość wynika z zależności

$$\left(\frac{CX}{BX}\right)^2\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{BK}{CK}=1, \quad \text{która jest równoważna} \quad \frac{CX}{BX}\cdot\frac{BD}{CE}=1.$$

To z kolei, na mocy twierdzenia Menelausa, jest prawdą.

5. Na płaszczyźnie dane są punkty $A_1,A_2,\ldots,A_{10001}$, z których żadne trzy nie są współliniowe. Dowieść, że można wybrać z nich takie punkty $A_{n_1},A_{n_2},\ldots,A_{n_{11}}$, gdzie $1\leqslant n_1<n_2<\ldots<n_{11}\leqslant 10001$, że kąty $\sphericalangle A_{n_i}A_{n_j}A_{n_k}$ są rozwarte dla $1\leqslant i<j<k\leqslant 11$.

Rozwiązanie:

Wybierzmy układ współrzędnych tak, aby odcięte danych punktów były różne i aby rzędne były różne.

Można wybrać (przy zachowaniu kolejności) 101 punktów, których rzędne tworzą ciąg monotoniczny, a spośród nich 11 punktów, których odcięte tworzą ciąg monotoniczny.

6. Dany jest zbiór 2^n-elementowy A $(n\geqslant 2)$. Wyznaczyć największą liczbę naturalną k, dla której istnieją takie 2^{n-1}-elementowe podzbiory $B_1,B_2,\ldots,B_k$ zbioru A, że dla dowolnych liczb $1\leqslant i<j\leqslant k$ zbiór $B_i\cap B_j$ ma dokładnie 2^{n-2} elementów.

Rozwiązanie:

Odp.: $k=2^n-1$.

Oznaczmy: $A_n=\{1,2,3,\ldots,2^n\}$. Mając dane podzbiory $B_1,B_2,\ldots,B_{2^n-1}$ zbioru A_n, zdefiniujemy $2^{n+1}-1$ podzbiorów zbioru A_{n+1}. W tym celu przyjmijmy:

$$C_j=B_j\cup(2^n+B_j),\quad D_j=B_j\cup((2^n+A_n)\setminus(2^n+B_j)),\quad \text{gdzie } 2^n+B_j=\{2^n+a: a\in B_j\}.$$

Wówczas $2^{n+1}-1$ zbiorów: $C_1,C_2,\ldots,C_{2^n-1}$, $D_1,D_2,\ldots,D_{2^n-1}$, $A_{n+1}\setminus A_n$ są podzbiorami zbioru A_{n+1} spełniającymi warunki zadania. Stąd $k\geqslant 2^n-1$.

Przypuśćmy, że istnieje 2^n podzbiorów zbioru A_n spełniających warunki zadania. Wprowadźmy następujące oznaczenie: $v_i=(\varepsilon_1^i,\varepsilon_2^i,\ldots,\varepsilon_{2^n}^i)$ $(i=1,2,3,\ldots,2^n)$, gdzie

$$\varepsilon_j^i=\begin{cases}1 & \text{jeśli } j\in B_i,\\ -1 & \text{jeśli } j\notin B_i.\end{cases}$$

Wówczas dla $i\neq j$, $v_i\cdot v_j=0$, gdzie $\alpha\cdot\beta$ oznacza iloczyn skalarny wektorów α i β. Zatem dowolny ciąg 2^n-elementowy ξ liczb rzeczywistych spełnia tożsamość

$$\xi=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+\ldots+x_{2^n}v_{2^n},$$

gdzie $x_i=(\xi\cdot v_i)/2^n$. W szczególności, przyjmując $\xi=(1,1,1,\ldots,1)$ otrzymujemy $x_i=0$, skąd sprzeczność.

7. Niech A będzie zbiorem tych liczb rzeczywistych z przedziału $(0,1)$, których zapis dziesiętny nie zawiera po przecinku innych cyfr niż 1 lub 7. Niech B będzie zbiorem tych liczb rzeczywistych, których nie da się zapisać w postaci skończonej sumy liczb ze zbioru A. Znaleźć $\sup B$.

Rozwiązanie:

Niech $a\in[1,7]$. Liczbę $(a-1)/6$ przedstawiamy w postaci sumy dziewięciu liczb z przedziału $[0,1]$, których zapis dziesiętny zawiera po przecinku jedynie cyfry 0 lub 1. Wtedy liczba a jest sumą dziewięciu liczb ze zbioru A. Zatem $\sup B\leqslant 1$.

Wykażemy, że $\sup B=1$. Niech liczba $x\in(\frac{8}{9},1)$ będzie sumą k liczb ze zbioru A. Wówczas $2\leqslant k\leqslant 8$. Wtedy liczba $(x-k\cdot(0{,}111\ldots))/6$ nie zawiera w zapisie dziesiętnym cyfry 9. Oznaczmy przez B_k zbiór tych $x\in(\frac{8}{9},1)$, dla których liczba $(x-k\cdot(0{,}111\ldots))/6$ zawiera po przecinku co najmniej jedną dziewiątke. Wówczas $B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_8\subset B$. Ponadto zbiory $B_1,B_2,\ldots,B_8$ są gęste i otwarte w $\mathbb{R}$, a więc zbiór $B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_8$ jest również gęsty i otwarty w $\mathbb{R}$. Zatem zbiór B jest gęsty w przedziale $(\frac{8}{9},1)$, co kończy rozwiązanie zadania.

8. Czworokąt wypukły $ABCD$ $(AC\neq BD)$ jest wpisany w okrąg o środku O. Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, przy czym

$$\sphericalangle PAB+\sphericalangle PCB=\sphericalangle PBC+\sphericalangle PDC=90^\circ.$$

Dowieść, że punkty O, P i E są współliniowe.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że punkt P leży wewnątrz kąta CED. Wówczas $\sphericalangle ODA+\sphericalangle ABD=90^\circ$. Zatem $\sphericalangle PDO=\sphericalangle PBD$. Prosta OD jest więc styczna do okręgu o_1 opisanego na trójkącie BDP. Analogicznie, prosta OC jest styczna do okręgu o_2 opisanego na trójkącie APC w punkcie C. Punkty P, O, E leżą więc na osi potęgowej okręgów o_1, o_2.

9. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej n. Czy istnieje takie naturalne $n>1$, dla którego równanie
$$a^b=b^{na}$$
spełnia co najmniej $d(n)+2000$ par liczb naturalnych (a,b) ?

Rozwiązanie:

Rozważamy przypadek gdy (a,b) jest rozwiązaniem równania i $a,b>1$. Istnieją takie liczby całkowite dodatnie k, l, s, że k i l są względnie pierwsze oraz $a=s^k$, $b=s^l$ i zachodzi równość
$$\frac{ln}{k}=s^{l-k}.$$
Oznaczmy $r=l-k$, przyjmijmy $r>0$. Liczba $\sqrt[r]{\frac{n(k+r)}{k}}$ jest naturalna. Każdą parę (k,r) taką, że k, r są naturalne, względnie pierwsze oraz liczba $\sqrt[r]{\frac{n(k+r)}{k}}$ jest naturalna nazwiemy n-dobrą. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między n-dobrymi parami i rozwiązaniami (a,b) rozważanego równania. Każda para postaci $(k,1)$ gdzie k - dodatni dzielnik n jest n-dobra. Daje to $d(n)$ rozwiązań. Ponadto jeśli $n=k(k+r)^{r-1}m^r$, gdzie m jest liczbą naturalną, to para (k,r) jest n-dobra. Niech $p_1,\dots,p_{2000}$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Oznaczmy $a_j=(1+r)^{r-1}$. Jeżeli istnieją takie naturalne m_j, że $n=a_jm_j^{p_j}$, dla $j=1,\dots,2000$ to wszystkie pary $(1,p_j)$ będą n-dobre. Taką liczbę n można znaleźć korzystając z faktu, że jeśli p i q są względnie pierwsze, to dla dowolnych naturalnych $a,b>0$ istnieje rozwiązanie równania $ax^p=by^q$ w dodatnich liczbach naturalnych x i y .

10. Udowodnić, że dla każdego $x\in(0,1)$ oraz dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi nierówność
$$(1-(1-x)^m)^n+(1-x^n)^m\geqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy tabelę o m wierszach i n kolumnach. Każde pole z prawdopodobieństwem x kolorujemy na czarno, a z prawdopodobieństwem $1-x$ na biało. $(1-(1-x)^m)^n$ to prawdopodobieństwo tego, że w każdej kolumnie jest czarne pole, a $(1-x^n)^m$ to prawdopodobieństwo tego, że w każdym wierszu jest białe pole. Zawsze zachodzi jedno z tych zdarzeń, więc suma ich prawdopodobieństw jest równa co najmniej 1.

11. Niech A oznacza zbiór liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi. Rozstrzygnąć, czy jeżeli funkcja $f:A\times A\to R$ spełnia równość
$$f(a+r,b)+f(a,b+r)=f(a,b)+f(a+r,b+r)\qquad \text{dla } a,b,r\in A,$$
to również spełnia równość
$$f(a+r,b)+f(a,b+s)=f(a,b)+f(a+r,b+s)\qquad \text{dla } a,b,r,s\in A.$$

Rozwiązanie:

Przykładem funkcji, dla której zachodzi pierwsza równość i nie zachodzi druga równość jest funkcja określona następująco:
$$f(a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2})=ad-bc\qquad \text{dla } a,b,c,d \text{ wymiernych.}$$

12. Prostokąt $ABCD$ dzielimy na $n-1$ kolumn odcinkami równoległymi do AB, gdzie n jest parzyste. Następnie pewne z otrzymanych kolumn dzielimy na prostokąty odcinkami równoległymi do BC, tak by żadne dwa z tych odcinków nie leżały na jednej prostej i tak, aby prostokąt $ABCD$ został podzielony na $\binom{n+1}{2}-1$ prostokątów. W każdy prostokąt pierwszej kolumny wpisujemy liczbę 1, a w każdy prostokąt następnej kolumny wpisujemy sumę liczb z sąsiadujących z nim prostokątów z poprzedniej kolumny. Jaka jest największa możliwa suma liczb w ostatniej kolumnie?

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeżeli k-ta kolumna nie jest podzielona, to przesunięcie dowolnego odcinka rozdzielającego dwa prostokąty w kolumnie $k-2$ na tę samą wysokość w kolumnie $k-1$ nie zmniejsza badanej sumy. Również przesunięcie dowolnego odcinka z przedostatniej kolumny do ostatniej nie zmniejsza badanej sumy. Wobec tego po przesunięciu wszystkich odcinków z kolumny $n-2$ do $n-1$, następnie z kolumny $n-4$ do $n-3$ itd., parzyste kolumny nie będą podzielone, a suma w ostatniej kolumnie nie zmniejszy się. Jeśli pozostałe kolumny bedą podzielone na $a_1,\dots,a_{n/2}$ prostokątów, to suma w ostatniej kolumnie będzie równa $a_1\cdot\ldots\cdot a_{n/2}$, co osiąga wartość maksymalną $n^{n/2}$, gdyż $a_1+\ldots+a_{n/2}=\binom{n+1}{2}-1-\frac{n-2}{2}$.

Szkice rozwiązań zadań z Meczu Matematycznego

1. Liczbę naturalną n nazwiemy *marnotrawną*, jeżeli z kartki w kratkę o rozmiarach $n\times n$ nie da się wyciąć (tnąc po kratkach) $\left[n^2/77\right]$ prostokątów o wymiarach 7×11. Rozstrzygnąć, czy liczb marnotrawnych jest skończenie wiele.

Rozwiązanie:

Liczby postaci $n=77k+49$ są marnotrawne. Numerując kratki cyklicznie w wierszach i kolumnach liczbami od 1 do 11 stwierdzamy, że wycinając z kartki paski 1×11 musimy zostawić co najmniej 25 pól. Tymczasem niemarnotrawne wycięcie prostokątów 7×11 wymaga pozostawienia tylko 14 pól.

2. Niech A oznacza liczbę ciągów liczb naturalnych $(a_1,a_2,\dots,a_{10})$ spełniających równanie

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{10}}=1.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba A jest parzysta.

Rozwiązanie:

Rozwiązania $(a_1,a_2,a_3,\dots,a_{10})$ oraz $(a_2,a_1,a_3,\dots,a_{10})$ łączymy w pary. Zatem bez straty ogólności możemy założyć, że $a_1=a_2$. Analogicznie $a_3=a_4$, $a_5=a_6$, $a_7=a_8$, $a_9=a_{10}$. Kontynuując to rozumownie dochodzimy do równania $(a_1-8)(a_9-2)=16$, które ma pięć rozwiązań w liczbach naturalnych. Zatem A jest liczbą nieparzystą.

3. Dana jest szachownica $n\times n$ pomalowana w zwykły sposób. Jeden ruch polega na zmianie kolorów wszystkich pól w wybranym wierszu lub w wybranej kolumnie na przeciwne. Jaką najmniejszą niezerową liczbę pól białych można otrzymać wykonując powyższe ruchy?

Rozwiązanie:

Odp.: n.

Wykonując otrzymane w zadaniu ruchy łatwo otrzymać dokładnie n pól białych.

Przypuśćmy, że udało nam się otrzymać $n-1$ pól białych. Wtedy na szachownicy znajdzie się kwadrat 2×2 mający dokładnie jedno pole białe. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż po każdym ruchu, w każdym kwadracie 2×2 znajduje się parzysta liczba pól białych.

4. Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych zdefiniowaną wzorami:

$$f(0)=1, \qquad f(m)=(2^1-1)(2^2-1)\cdots(2^m-1) \quad \text{dla} \quad m\geqslant 1.$$

Niech ponadto

$$c(n,k)=\frac{f(n)}{f(k)f(n-k)} \qquad \text{dla} \quad n\geqslant k\geqslant 0.$$

Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby naturalne $0<k<l<n$, że liczby $c(n,k)$ i $c(n,l)$ są względnie pierwsze.

Uwaga: Liczby $c(n,k)$ pojawiły się w zadaniu 8. z zawodów stopnia pierwszego LI Olimpiady Matematycznej.

Rozwiązanie:

Takie liczby k i l nie istnieją.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $k+l<n$. Wówczas

$$c(n,k)c(n-k,l)=c(n,l)c(n-l,k).$$

Gdyby liczby $c(n,k)$ i $c(n,l)$ były względnie pierwsze, liczba $c(n,k)$ musiałaby być dzielnikiem liczby $c(n-l,k)$. To jednak jest niemożliwe, gdyż $c(n,k)>c(n-l,k)$.

5. Funkcja $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale $[0,1]$ oraz różniczkowalna na przedziale $(0,1)$. Ponadto dla dowolnych liczb $x,y\in(0,1)$ zachodzi nierówność $xf'(y)+yf'(x)\leqslant 1$. Dowieść, że $f(1)-f(0)\leqslant\pi/4$.

Rozwiązanie:

Niech $g(t)=f(\sin t)-f(\cos t)$ dla $t\in[0,\pi/2]$. Wówczas $g'(t)\leqslant 1$ dla dowolnego $t\in(0,\frac{\pi}{2})$. Zatem dla pewnego $\xi\in(0,\pi/2)$,

$$2(f(1)-f(0))=\frac{g(\pi/2)-g(0)}{\pi/2}=g'(\xi)\leqslant 1.$$

6. Rozstrzygnąć, czy można wybrać 75 punktów $P_1,P_2,\ldots,P_{75}$ wewnątrz koła o promieniu 300 w taki sposób, aby $P_iP_j\geqslant i+j$ dla wszystkich $1\leqslant i<j\leqslant 75$.

Rozwiązanie:

Nie można. Niech K_i będzie kołem o środku P_i i promieniu i. Gdyby istniały punkty $P_1,P_2,\ldots,P_{75}$ spełniające warunki zadania, koła $K_1,K_2,\ldots,K_{75}$ byłyby rozłączne i zawarte w kole o promieniu 375. To jednak jest niemożliwe, gdyż pole koła o promieniu 375 jest mniejsze niż suma pól kół $K_1,K_2,\ldots,K_{75}$.

7. W trójkącie ABC zachodzi równość $AB=AC$. Punkt D jest środkiem boku BC, punkt E jest środkiem odcinka AD. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BE. Dowieść, że $\sphericalangle AFC=90^\circ$.

Rozwiązanie:

Trójkąt ADC uzupełniamy do prostokąta $ADCP$. Wówczas punkty B, E, P są współliniowe. Zatem punkty D, C, P, A, F leżą na jednym okręgu. Stąd teza.

8. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x,y)$ o współczynnikach rzeczywistych, które dla dowolnych x i y spełniają nierówność

$$\Big(W(x,y)\Big)^2 \leqslant x^2y^4 + x^4y^2 + 1 - 3x^2y^2 \,.$$

Rozwiązanie:

Wielomian zerowy spełnia daną nierówność na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną.

Każdy wielomian spełniający warunki zadania musi:

- mieć stopień co najwyżej 3,
- przy podstawieniu $x=0$ lub $y=0$ dawać wielomian stały jednej zmiennej.

Zatem $W(x,y)=a+bxy+cx^2y+dxy^2$. Ponieważ $W(x,y)$ zeruje się w punktach $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ i $(-1,-1)$, więc $a=b=c=d=0$.

9. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna $n>1$ o następującej własności:

Dowolna liczba n-cyfrowa zapisana trzy razy z rzędu tworzy liczbę $(3n)$-cyfrową podzielną przez n^2.

Rozwiązanie:

Taką liczbą jest 37.

Własność podana w zadaniu wynika z podzielności $37^2 \,|\, 10^{74}+10^{37}+1$. Podzielność ta wynika z podzielności $37^2 \,|\, 10^{111}-1$, którą uzyskujemy przez podniesienie $1000=27\cdot 37+1$ do potęgi 37.

10. W czworościanie $ABCD$ wysokości ścian ABD, BCD i CAD opuszczone z wierzchołka D są równe i wynoszą h. Ponadto $BC=a$, $CA=b$ i $AB=c$. Obliczyć objętość czworościanu $ABCD$.

Rozwiązanie:

Spodek wysokości czworościanu $ABCD$ opuszczonej z wierzchołka D pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC lub ze środkiem jednego z okręgów dopisanych do trójkąta ABC. Stąd otrzymujemy cztery możliwe wyniki:

$$\tfrac{1}{3}S\sqrt{h^2-r^2}, \qquad \tfrac{1}{3}S\sqrt{h^2-r_a^2}, \qquad \tfrac{1}{3}S\sqrt{h^2-r_b^2}, \qquad \tfrac{1}{3}S\sqrt{h^2-r_c^2},$$

gdzie $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $r=S/p$, $r_a=S/(p-a)$, $r_b=S/(p-b)$, $r_c=S/(p-c)$.

11. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty DAB, ABC, BCD i CDA są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie:

Niech I_A, I_B, I_C będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty DAB, ABC, BCD. Proste DI_A i CI_B przecinają się w punkcie M będącym środkiem łuku AB okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Ponadto $MA=MI_A=MI_B=MB$. Zatem punkty A, I_A, B, I_B leżą na wspólnym okręgu. Podobnie, punkty B, I_B, C, I_C leżą na jednym okręgu. Stąd $\sphericalangle I_AI_BI_C=360^\circ-\sphericalangle BI_BI_C-\sphericalangle BI_BI_A=\sphericalangle BCI_C+\sphericalangle BAI_A=90^\circ$.

Regulamin Meczu Matematycznego

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy.

3. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

4. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania rozwiązania jednego z zadań. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą.

5. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie.

6. Jeżeli drużyna wywołana przyjmuje zadanie, Kapitan tej drużyny wyznacza członka swojej drużyny do zreferowania rozwiązania przy tablicy. Rozwiązanie to jest oceniane przez Jury.

7. Podczas referowania rozwiązania nie jest dopuszczalne komunikowanie się osoby referującej ze swoją drużyną, jak również drużyna przeciwna nie może w tym czasie przerywać referującemu zadając pytania, komentując fragmenty rozwiązania, itp. Osoba referująca może korzystać z notatek.

8. Kapitan drużyny prezentującej rozwiązanie może przerwać referowanie i wezwać osobę referującą na konsultację. Jeżeli osobą referującą jest Kapitan, wyznacza on swojego zastępcę uprawnionego do wezwania go na konsultację. Osoba referująca może także zażądać konsultacji. W czasie referowania jednego zadania dopuszcza się dwie konsultacje trwające łącznie nie dłużej niż 3 minuty.

9. Kapitan może zmienić osobę referującą dowolną liczbę razy. Każda zmiana powoduje odjęcie 1 punktu, o ile zadanie zostanie uznane za rozwiązane.

10. Czas na zreferowanie rozwiązania wynosi 15 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieje na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że zakończył referowanie, drużyna przeciwna zgłasza zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie **referujący** odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli Jury uznaje rozwiązanie za poprawne, punktuje je od 5 do 10 punktów. Jury może przyznać drużynie wywołującej te punkty, które zostały odjęte drużynie rozwiązującej, jeżeli usterki rozwiązania zostały przez tę drużynę zauważone.

13. Jeżeli Jury nie uznaje rozwiązania za poprawne, żadna z drużyn nie otrzymuje punktów, chyba, że drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy dyskwalifikujące rozwiązanie. Wtedy ma ona prawo do przedstawienia własnego rozwiązania na zasadach i przy punktacji określonych w pozycjach **6–12**.

14. Jeżeli drużyna wywołana nie przyjmie zadania, rozwiązuje je drużyna wywołująca zgodnie z zasadami określonymi w p. **6–12**. Jeśli jednak nie przedstawi ona poprawnego rozwiązania, otrzyma −10 (minus 10) punktów.

15. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

Spis treści

wydanie trzecie, bardziej poprawione