Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 2 - 16 czerwca 2002

Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 2 - 16 czerwca 2002

Agroturystyka „Zgoda”, Zwardoń 45
34-373 ZWARDOŃ
tel. 0-33-8646-328

Kadra:
Jerzy Bednarczuk
Rafał Łochowski
Adam Osękowski - kierownik naukowy
Waldemar Pompe
Jarosław Wróblewski

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 2 - 16 czerwca 2002 r. w Zwardoniu, w pensjonacie „Zgoda”. Uczestniczyło w nim 20 uczniów, zakwalifikowanych na podstawie wyników finału LIII Olimpiady Matematycznej.

Kadrę obozu stanowili i niniejszy zeszyt przygotowali: Jerzy Bednarczuk, Rafał Łochowski, Adam Osękowski, Waldemar Pompe i Jarosław Wróblewski.

W dniach 3-6, 8, 10, 11, 13, 14 czerwca uczestnicy obozu rozwiązywali zadania indywidualnie, każdego dnia 3 zadania. Zawody indywidualne odbywały się przed południem. Popołudnia były na ogół poświęcone omawianiu zadań. W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać w sumie 162 punkty. Najlepszy osiągnięty wynik to 138 punktów, a cztery osoby uzyskały po ponad 100 punków. Punkty uzyskane za poszczególne zadania z zawodów indywidualnych przedstawia tabela na następnej stronie.

Dnia 12 czerwca odbyły się zawody drużynowe, a 7 i 15 czerwca rozegrane zostały „mecze matematyczn” (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Po zakończeniu obozu do pensjonatu „Zgoda” przyjechali uczestnicy II Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych. Zawody odbyły się w dniach 16 - 19 czerwca.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu oraz szkice ich rozwiązań, przygotowane przez kadrę obozu, a także zadania z II Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami, przygotowanymi przez Marcina E. Kuczmę.

Zestawienie wyników ocen z zawodów indywidualnych [1]

numer zadania	liczba ocen 6 pt.	liczba ocen 5 pt.	liczba ocen 2 pt.	liczba ocen 0 pt. lub -
1.	12	1	1	6
2.	15	–	–	5
3.	15	–	2	3
4.	15	–	–	5
5.	9	–	1	10
6.	6	–	2	12
7.	11	–	–	9
8.	13	3	–	4
9.	6	1	–	13
10.	12	1	4	3
11.	3	2	–	15
12.	12	–	1	7
13.	10	5	3	2
14.	–	1	–	19
15.	9	–	2	9
16.	5	–	1	14
17.	2	1	–	17
18.	4	–	1	15
19.	2	1	–	17
20.	13	3	1	3
21.	2	–	–	18
22.	–	–	1	19
23.	14	1	1	4
24.	3	–	4	13
25.	5	–	1	14
26.	1	–	1	18
27.	4	–	–	16

[1] Każda praca była oceniana w skali 0, 2, 5, 6 pt.

Treści zadań z zawodów indywidualnych

1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, które można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych dodatnich.

2. Dany jest wielokąt wypukły w oraz okrąg o. Wszystkie boki wielokąta w są równej długości, a okrąg o dzieli każdy bok na 3 odcinki. Malujemy wszystkie otrzymane odcinki kolejno na czerwono, zielono i biało, zaczynając od wierzchołka wielokąta i poruszając się po jego obwodzie w ustalonym kierunku. Wykazać, że suma długości odcinków czerwonych jest równa sumie długości odcinków białych.

3. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ y^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \\ z^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

4. We Fredlandii postawiono 2002 pomniki ku czci króla Frederyka Drugiego. Między każdymi dwoma pomnikami istnieje dokładnie jedno połączenie pasażerskie PKP, PKS, LOT, Radio-TAXI, Ryksza-Express lub Żeglugi Śródlądowej.

Dowieść, że istnieją takie trzy pomniki, między którymi połączenia pasażerskie obsługuje ten sam przewoźnik.

5. Sfera s jest styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA czworościanu $ABCD$. Udowodnić, że punkty styczności sfery s z wymienionymi krawędziami leżą na jednej płaszczyźnie.

6. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{a^3}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^3}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^3}{c+a}} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

7. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P, zaś proste AD i BC przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że $PQ^2 = PA \cdot PB + QB \cdot QC$.

8. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają zależności

$$x+y+z=9, \quad x^2+y^2+z^2=33.$$

Udowodnić, że $16 \leqslant xyz \leqslant 20$.

9. Ciąg (a_n) jest określony następująco:

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=15,\ a_n=15a_{n-2}-4a_{n-3} \text{ dla } n \geqslant 4.$$

Dowieść, że jeśli liczba a_n jest pierwsza, to liczba n też jest pierwsza.

10. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f:[0,1]\to[0,1]$, że

$$f(2x-f(x))=x \quad \text{dla wszystkich } x\in[0,1].$$

11. Losujemy podzbiory zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ w następujący sposób: najpierw losujemy liczbę $m\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, a następnie m-elementowy podzbiór zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Niech $P(n,k,l)$ będzie prawdopodobieństwem tego, że wylosowany podzbiór zawiera liczby $k+1$, $k+2$, …, $k+l$ pod warunkiem, że zawiera on liczby 1, 2, …, k. Wyznaczyć wszystkie takie trójki (n,k,l), że $P(n,k,l)=\frac{1}{2}$.

12. Punkt P leży wewnątrz pewnego czworościanu. Przez każde dwa wierzchołki tego czworościanu prowadzimy płaszczyznę równoległą do prostej łączącej punkt P ze środkiem przeciwległej krawędzi. Wykazać, że istnieje punkt wspólny otrzymanych 6 płaszczyzn.

13. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $n^{n^3}-n^n$ nie jest podzielna przez 5.

14. Środkowe trójkąta rozcinają go na 6 mniejszych trójkątów. Udowodnić, że środki okręgów opisanych na tych 6 trójkątach leżą na jednym okręgu.

15. Na nieskończonej szachownicy znajduje się skończona liczba pionków, przy czym na jednym polu może znajdować się więcej niż jeden pionek.

Możemy wykonywać następujące ruchy (zob. rysunek): jeżeli na polu P szachownicy znajdują się co najmniej 3 pionki oraz na jednym z pól R_i $(i=1,2,3,4)$ znajduje się co najmniej jeden pionek, to 3 pionki z pola P przenosimy na pole Q_i, a jeden pionek z pola R_i przesuwamy na pole S_i.

$\mathbf{R_1}$		$\mathbf{R_2}$		$\mathbf{R_3}$	
	$\mathbf{Q_1}$	$\mathbf{Q_2}$	$\mathbf{Q_3}$		
	$\mathbf{S_4}$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{Q_4}$	$\mathbf{R_4}$	
	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_1}$		

Dowieść, że można wykonać tylko skończenie wiele ruchów.

16. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1,x_2,\ldots,x_n$ nierówność

$$9\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant n(n-1)+8\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$$

pociąga za sobą nierówność

$$8\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^3 < n^2+9\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{i=1}^{n} x_i^4.$$

17. Dwa okręgi dopisane do trójkąta ABC są styczne do odcinków AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Dowieść, że następujące punkty: środek ciężkości trójkąta ABC, punkt przecięcia odcinków BE i CD oraz środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leżą na jednej prostej.

18. Dana jest liczba naturalna $k \geqslant 2$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorami

$$a_1 = k, \qquad a_n = k^n - \sum_{\substack{d<n \\ d\mid n}} a_d \quad \text{dla } n \geqslant 2\,.$$

Dowieść, że dla dowolnego n liczba a_n jest podzielna przez n.

19. Dowieść, że równanie

$$x^{1998}+y^{2000}+z^{2004}=t^{1996}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich.

20. Udowodnić, że jeżeli w czworościanie wysokości przecinają się w jednym punkcie, to punkt ich przecięcia, środek ciężkości czworościanu oraz środek sfery opisanej na tym czworościanie, leżą na jednej prostej.

21. Wewnątrz kuli o promieniu 7 wybrano 1001 punktów. Dowieść, że w pewnej powłoce kulistej (bez brzegu) o promieniu wewnętrznym 2 i promieniu zewnętrznym 3 leży co najmniej 20 spośród tych punktów.

22. Okrąg ω o środku O przechodzi przez wierzchołek A trójkąta ABC i przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Dowieść, że jeżeli styczne do okręgu ω w punktach D i E przecinają się na prostej BC, to kąt BOC jest ostry.

23. Dowieść, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p, liczba

$$1^{3p}+2^{3p}+3^{3p}+\ldots+(p-1)^{3p}$$

jest podzielna przez p^3.

24. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 8$ oraz liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum x_i^{80} x_j^{77} x_k^{60} x_\ell^{55} x_m^{40} x_p^{33} x_q^{22} x_r^{11} \leqslant \sum x_i^{88} x_j^{70} x_k^{66} x_\ell^{50} x_m^{44} x_p^{30} x_q^{20} x_r^{10},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie układy parami różnych liczb $i,j,k,\ell,m,p,q,r \in \{1,2,3,\ldots,n\}$.

25. Niech $D(x)$ oznacza odległość liczby rzeczywistej x od najbliższej liczby całkowitej. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita dodatnia $N \leqslant n^4$, że

$$D(N\sqrt{p}) < \frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad p = 2,3,5,7.$$

26. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których układ równań

$$x_i x_j + y_i y_j = z_{j-i+1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$$

spełniających nierówność $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

27. Punkt P leży wewnątrz n-kąta foremnego $A_1A_2\ldots A_n$. Punkty M_1, $M_2,\ldots,M_n$ są odpowiednio środkami odcinków $A_1A_2, A_2A_3,\ldots,A_nA_1$. Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^{n} PM_i \geqslant \cos\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \sum_{i=1}^{n} PA_i .$$

Treści zadań z zawodów drużynowych

1. Niech $j(i)$ oznacza liczbę jedynek w zapisie trójkowym liczby i oraz niech $a_i = (-2)^{j(i)}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n, k takich, że $k \leqslant 2n-1$, zachodzi równość

$$\sum_{i=0}^{3^n-1} a_i i^k = 0.$$

2. Środkowe ścian bocznych SAB, SBC, SCA ostrosłupa $SABC$ poprowadzone z wierzchołka S tworzą równe kąty z krawędziami, do których zostały poprowadzone. Wykazać, że $SA = SB = SC$.

3. Liczby całkowite a, b, c, x, y, z spełniają równanie

$$a^6 + b^6 + c^6 = x^6 + y^6 + z^6 .$$

Dowieść, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2$ jest podzielna przez 180.

Treści zadań z pierwszego meczu matematycznego

1. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczba $n^{n^7} - n^n$ jest podzielna przez 43.

2. U cioci Reni na imieninach uczestnicy imprezy grają w następującą grę: wpłacają do puli po 1 zł, po czym każdy wykonuje rzut kostką. Pula zostaje w równych częściach podzielona między osoby, które uzyskały największą liczbę oczek. Ciocia Renia używa specjalnie przygotowanej kostki, na której nigdy nie wypada 5 oczek, a pozostałe liczby oczek wypadają z prawdopodobieństwem $\frac{1}{5}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba osób, że wartość oczekiwana wygranej cioci Reni jest dodatnia.

3. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta różna od AB przecina okrąg o_1 w punktach C i D, okrąg o_2 w punktach E i F, zaś prostą AB w punkcie P leżącym poza odcinkiem AB. Udowodnić, że prosta łącząca środki okręgów opisanych na trójkątach ACE i BDF przechodzi przez punkt P.

4. Wielomian $P(x)$ stopnia n o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Udowodnić, że wielomian

$$\binom{n}{n}P(x)+\binom{n+1}{n}P'(x)+\binom{n+2}{n}P''(x)+\ldots+\binom{2n}{n}P^{(n)}(x)$$

także przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie.

5. Udowodnić, że sześcianu o krawędzi 2003 nie można podzielić na sześciany, z których każdy ma krawędź 2, 3 lub 5.

6. Dany jest sześciokąt wypukły o polu 1. Udowodnić, że pewna przekątna tego sześciokąta odcina od niego trójkąt o polu nie większym niż 1/6.

7. Udowodnić, że z każdego 666-elementowego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać taki monotoniczny podciąg $a_1, a_2, \ldots, a_6$, że ciąg $\sin a_1, \sin a_2, \ldots, \sin a_6$ też jest monotoniczny.

8. Zbiór $\{1,2,3,\ldots,666\}$ podzielono na trzy rozłączne zbiory. Dowieść, że istnieją takie liczby n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 (niekoniecznie różne) należące do jednego z tych zbiorów, że

$$n_{i+3} = n_i + n_{i+1} \quad \text{dla } i = 1,2,3.$$

9. Przez środek każdej krawędzi czworościanu prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do przeciwległej krawędzi. Wykazać, że istnieje punkt wspólny otrzymanych 6 płaszczyzn.

10. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna n oraz liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n, że zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{49} x_{i+1}^{51}}{x_i^{100} + x_{i+1}^{100}} > \frac{n}{2}\,,$$

gdzie $x_{n+1} = x_1$.

11. Udowodnić, że proste zawierające wysokości czworościanu przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi tego czworościanu są równe.

Treści zadań z drugiego meczu matematycznego

1. Ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach całkowitych nieujemnych spełniają następujące warunki:

(i) ciąg (a_n) jest niemalejący;

(ii) dla dowolnego n zachodzi $b_n = a_n + 2n$;

(iii) dowolna liczba całkowita nieujemna nie będąca wyrazem ciągu (b_n) występuje w ciągu (a_n) dokładnie dwa razy;

(iv) dowolna liczba całkowita nieujemna będąca wyrazem ciągu (b_n) występuje w ciągu (a_n) dokładnie trzy razy.

Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że

$$|b_n - m| = n\,.$$

2. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba
$$565^n + 2^{n+18}$$
jest złożona.

3. Wewnątrz wielościanu wypukłego o objętości 1111 znajduje się 3000 punktów. Udowodnić, że w wielościanie tym da się umieścić pewien wielościan wypukły o objętości 1, który w swoim wnętrzu nie zawiera żadnego z danych punktów.

4. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich n, że liczba $\binom{3n}{n}$ daje resztę 5 przy dzieleniu przez 7.

5. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą C taką, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ zachodzi nierówność
$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_7x_2} + \frac{x_2^2}{x_2^2+x_1x_3} + \frac{x_3^2}{x_3^2+x_2x_4} + \frac{x_4^2}{x_4^2+x_3x_5} + \\ + \frac{x_5^2}{x_5^2+x_4x_6} + \frac{x_6^2}{x_6^2+x_5x_7} + \frac{x_7^2}{x_7^2+x_6x_1} \leqslant C\,.$$

6. Dany jest ostrosłup czworokątny $PABCD$, którego podstawą jest równoległobok $ABCD$. Dowieść, że jeżeli istnieje sfera styczna do krawędzi PA, PB, PC, PD, to $PA+PC=PB+PD$.

7. Wielościan wypukły w ma $3n$ krawędzi i $n+2$ ściany ($n \geqslant 2$). Ponadto na każdej ścianie tego wielościanu można opisać okrąg. Wykazać, że na wielościanie w można opisać sferę.

8. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych x, y rzeczywistych zachodzi równość
$$y^2 f(x) + f(xy^2) = 2yf(xy).$$

9. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 10^5$ istnieje taka liczba całkowita dodatnia $m < n$, że liczba $m \cdot n$ nie ma cyfry 5 w zapisie dziesiętnym.

10. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą następujące równości: $AB=BC=CD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P, przy czym
$$\frac{AP}{BD}=\frac{DP}{AC}.$$
Udowodnić, że $AD \parallel BC$ lub $AB \perp CD$.

11. Podać przykład zbioru Z o następujących własnościach:

(i) elementy zbioru Z są funkcjami ciągłymi z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$;

(ii) dowolna funkcja f ze zbioru Z spełnia równanie
$$f^3(x)+f^2(x+y)f(x-2y)+f^2(x-y)f(x+2y)=$$
$$=f(x-2y)f(x)f(x+2y)+2f(x-y)f(x)f(x+y)$$
dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y;

(iii) drużyna przeciwna nie zna żadnej funkcji ciągłej spoza zbioru Z spełniającej powyższą równość.

Uwaga: W rozwiązaniu zadania 11 wystarczy precyzyjnie podać zbiór Z, dowód warunku (ii) nie jest wymagany.

Treści zadań z II Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych

1. Dane są różne liczby rzeczywiste a, b oraz dodatnie liczby całkowite k, m, przy czym $k+m=n\geqslant 3$, $k\leqslant 2m$, $m\leqslant 2k$. Rozważamy ciągi $(x_1,\ldots,x_n)$ o następujących własnościach:

k wyrazów x_i jest równych a; w szczególności $x_1=a$;
m wyrazów x_i jest równych b; w szczególności $x_n=b$;
żadne trzy kolejne wyrazy nie są równe.

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy
$$x_nx_1x_2+x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n+x_{n-1}x_nx_1.$$

2. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $a\leqslant b\leqslant c$, i polu S. Wyznaczyć największą liczbę u oraz najmniejszą liczbę v takie, że dla każdego punktu P wewnątrz trójkąta ABC zachodzi nierówność

$$u\leqslant PD+PE+PF\leqslant v,$$

gdzie D, E, F są punktami przecięcia półprostych AP, BP, CP z przeciwległymi bokami trójkąta.

(Szukane wartości u, v należy wyrazić przez dane liczby a, b, c, S.)

3. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $S=\{1,2,\ldots,n\}$. Ile jest funkcji $f\colon S\to S$ spełniających równanie $x+f^4(x)=n+1$ dla wszystkich $x\in S$?

Uwaga. Symbol f^4 oznacza czwartą iteratę: $f^4(x)=f(f(f(f(x))))$.

4. Dana jest liczba naturalna $n>1$ oraz liczba pierwsza p taka, że $p-1$ dzieli się przez n, zaś n^3-1 dzieli się przez p. Dowieść, że $4p-3$ jest kwadratem liczby całkowitej.

5. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a punkty P oraz Q leżą odpowiednio na bokach AC oraz BC i spełniają warunki

$$\frac{AP}{PQ}=\frac{BC}{AB} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{BQ}{PQ}=\frac{AC}{AB}.$$

Dowieść, że punkty O, P, Q i C leżą na jednym okręgu.

6. Niech $n\geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną parzystą. Rozważamy wielomiany postaci

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+1$$

o współczynnikach rzeczywistych, mające co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość sumy $a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2$.

Szkice rozwiązań zadań z zawodów indywidualnych

1. Przypuśćmy, że liczba całkowita n spełnia równanie

$$n = a + (a+1) + \ldots + (a+k),$$

gdzie liczby a, k są całkowite dodatnie. Równoważnie,

$$2n = (k+1)(2a+k),$$

czyli po rozłożeniu $2n = 2^s l$, gdzie s jest liczbą całkowitą dodatnią, a l liczbą całkowitą nieparzystą, otrzymujemy

$$2^s l = (k+1)(2a+k).$$

Dokładnie jeden z czynników występujących po prawej stronie jest liczbą nieparzystą nie mniejszą od 3; stąd natychmiast otrzymujemy, iż $l \geqslant 3$, czyli n nie może być potegą 2.

Przypuśćmy więc, że $l \geqslant 3$. Rozważymy dwa przypadki:

1° $2^s > l$. Wówczas kładziemy

$$k+1 = l, \quad 2a+k = 2^s.$$

Otrzymujemy

$$k = l-1, \quad a = \frac{1}{2}(2^s - l + 1)$$

i, jak łatwo sprawdzić, liczby a i k są całkowite i dodatnie.

2° $2^s < l$. Wówczas kładziemy

$$k+1 = 2^s, \quad 2a+k = l.$$

Otrzymujemy

$$k = 2^s - 1, \quad a = \frac{1}{2}(l - 2^s + 1)$$

i liczby a i k są całkowite i dodatnie.

Zatem liczbami, które dają się przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych dodatnich, są wszystkie liczby całkowite dodatnie nie będące potęgami liczby 2.

2. Niech $A_1A_2\dots A_n$ będzie danym wielokątem, zaś O środkiem danego okręgu. Niech B_i będzie rzutem prostokątnym punktu O na bok A_iA_{i+1} (przyjmujemy $A_{n+1}=A_1$). Punkty $B_1,B_2,\dots,B_n$ są zatem środkami zielonych odcinków. Oznaczmy: $a_i=A_iB_i$ oraz $b_i=B_iA_{i+1}$. Należy wykazać, że

$$(1) \qquad a_1+a_2+\dots+a_n=b_1+b_2+\dots+b_n.$$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-b_i^2)=0,$$

a po uwzględnieniu założenia $a_1+b_1=a_2+b_2=\dots=a_n+b_n$ otrzymujemy zależność (1).

Uwaga: Zadanie to jest uogólnieniem zadania 6 z 1 etapu LIII Olimpiady Matematycznej.

3. Dodając stronami równania wyjściowego układu otrzymujemy równość

$$(1) \qquad (x-3)^3+(y-3)^3+(z-3)^3=0.$$

Określmy $F(t)=9t^2-27t+27$. Układ przyjmuje postać

$$\begin{cases} x^3=F(y)\\ y^3=F(z)\\ z^3=F(x). \end{cases}$$

Jak łatwo sprawdzić, $\min F>0$ oraz $F(t)<27$ dla $t\in(0,3]$, $F(t)>27$ dla $t>3$. Z pierwszego związku wnioskujemy, iż x, y, $z>0$. Z pozostałych dwóch otrzymujemy następujące implikację: jeśli jedna z liczb x,y,z jest większa (mniejsza) od 3, to pozostałe także są większe (mniejsze) od 3. Wobec tego, na mocy równości (1), $x=y=z=3$. Łatwo sprawdzić, że ta trójka stanowi rozwiązanie układu. Jest więc to jedyne rozwiązanie.

4. Wybierzmy jeden pomnik P i rozważmy połączenia z pozostałymi 2001 pomnikami. Pewne 334 połączenia obsługuje ten sam przewoźnik X. Nazwijmy odpowiednie pomniki przez Q_1, Q_2, ..., Q_{334}. Jeśli połączenie między pewnymi pomnikami Q_i, Q_j, $i\neq j$, obsługuje przewoźnik X, to otrzymujemy tezę. Przypuśćmy zatem, że wszystkie połączenia między pomnikami Q_i, Q_j, dla $i,j=1,2,\dots,334$, $i\neq j$ obsługują pozostali przewoźnicy.

Rozważmy połączenia między pomnikiem Q_{334} a pomnikami Q_i, dla $i=1,2,\dots,333$. Pewne 67 połączeń (bez straty ogólności możemy przyjąć, że są to połączenia z Q_1, Q_2, …, Q_{67} obsługuje ten sam przewoźnik Y. Jeśli połączenie między pewnymi pomnikami Q_i, Q_j, $i,j=1,2,\ldots,67$, $i \neq j$ obsługuje przewoźnik Y, to otrzymujemy tezę zadania. Przypuśćmy więc, że wszystkie połączenia między pomnikami Q_i, Q_j, $i,j=1,2,\ldots, 67$, $i \neq j$ obsługują pozostali czterej przewoźnicy.

Rozważmy połączenia między pomnikiem Q_{67} a pomnikami Q_i, dla $i=1,2,\ldots, 66$. Pewne 17 połączeń (bez straty ogólności możemy przyjąć, że są to połączenia z Q_1, Q_2, …, Q_{17} obsługuje ten sam przewoźnik Z. Jeśli połączenie między pewnymi pomnikami Q_i, Q_j, $i,j=1,2,\ldots,17$, $i \neq j$ obsługuje przewoźnik Z, to otrzymujemy tezę zadania. Przypuśćmy więc, że wszystkie połączenia między pomnikami Q_i, Q_j, $i,j=1,2,\ldots, 17$, $i \neq j$ obsługują pozostali trzej przewoźnicy.

Rozważmy połączenia między pomnikiem Q_{17} a pomnikami Q_i, dla $i=1,2,\ldots, 16$. Pewne 6 połączeń (bez straty ogólności możemy przyjąć, że są to połączenia z Q_1, Q_2, …, Q_6 obsługuje ten sam przewoźnik V. Jeśli połączenie między pewnymi pomnikami Q_i, Q_j, $i,j=1,2,\ldots,6$, $i \neq j$ obsługuje przewoźnik V, to otrzymujemy tezę zadania. Przypuśćmy więc, że wszystkie połączenia między pomnikami Q_i, Q_j, $i,j=1,2,\ldots, 6$, $i \neq j$ obsługują pozostali dwaj przewoźnicy.

Rozważmy połączenia między pomnikiem Q_6 a pomnikami Q_i, dla $i=1,2,\ldots, 5$. Pewne 3 połączenia (bez straty ogólności możemy przyjąć, że są to połączenia z Q_1, Q_2, Q_3 obsługuje ten sam przewoźnik W. Jeśli połączenie między pewnymi pomnikami Q_i, Q_j, $i,j=1,2,3$, $i \neq j$ obsługuje przewoźnik W, to otrzymujemy tezę zadania. Przypuśćmy więc, że wszystkie połączenia między pomnikami Q_i, Q_j, $i,j=1,2,3$, $i \neq j$ obsługuje pozostały przewoźnik. To jednak oznacza tezę.

5. Oznaczmy przez K, L, M, N punkty styczności sfery s odpowiednio z krawędziami AB, BC, CD, DA. Wówczas

$$AN = AK, \quad BK = BL, \quad CL = CM, \quad DM = DN. \tag{1}$$

Jeśli jedna z prostych KN lub LM jest równoległa do krawędzi BD, to na mocy równości (1) oraz twierdzenia Talesa druga z tych prostych jest także równoległa do krawędzi BD. Punkty K, L, M, N leżą więc w tym przypadku na jednej płaszczyźnie.

Oznaczmy przez P, Q punkty przecięcia odpowiednio prostych KN i LM z prostą BD. Korzystając z twierdzenia Menelausa oraz równości (1) uzyskujemy

$$\frac{PB}{PD} = \frac{QB}{QD}.$$

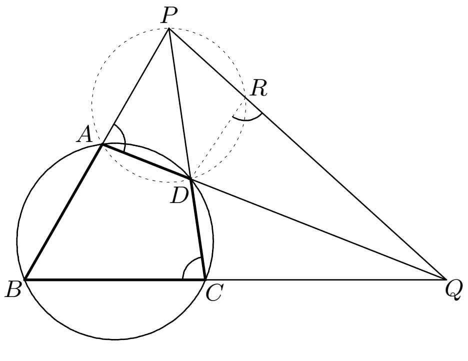
Ponieważ oba punkty P, Q leżą poza odcinkiem BD, więc $P = Q$. To dowodzi, że punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie.

6. Ze względu na jednorodność nierówności możemy bez straty ogólności przyjąć, że $a+b+c=1$. Przepiszmy daną nierówność w równoważnej postaci:

$$a\sqrt{\frac{1}{1+\frac{b}{a}}} + b\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c}{b}}} + c\sqrt{\frac{c}{1+\frac{a}{c}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Funkcja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $x > 0$, jest wypukła; istotnie, mamy $f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}} > 0$. Nierówność (2) to nierówność Jensena dla funkcji f w punktach $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{c}$ z wagami odpowiednio a, b, c.

7. Niech R będzie takim punktem odcinka PQ, że punkty A, D, R, P leżą na jednym okręgu (zob. rysunek).



Wówczas punkty D, C, Q, R także leżą na jednym okręgu. Stąd otrzymujemy
$$PA\cdot PB+QB\cdot QC=PD\cdot PC+QD\cdot QA=PR\cdot PQ+QR\cdot PQ=PQ^2.$$

8. Mamy
$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))=24.$$
Rozważmy wielomian $W(u)=(u-x)(u-y)(u-z)$. Na mocy wzorów Viete'a,
$$W(u)=u^3-9u^2+24u-A, \quad A=xyz.$$
Zadanie sprowadza się więc do oszacowania z góry i z dołu wyrazu wolnego A przy założeniu, że wielomian W ma trzy pierwiastki rzeczywiste.

Obliczmy pochodną wielomianu W:
$$W'(u)=3u^2-18u+24=3(u-2)(u-4).$$
Wielomian W ma więc maksimum dla $u=2$ i minimum dla $u=4$. Aby miał on 3 pierwiastki, muszą zachodzić nierówności $W(2)\geqslant 0$ i $W(4)\leqslant 0$, czyli $A\leqslant 20$ i $A\geqslant 16$, co było do udowodnienia.

9. Udowodnimy indukcyjnie, że ciąg (a_n) spełnia następującą zależność rekurencyjną drugiego stopnia:
$$a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}.$$
Dla $n=3$ jest to prawda; ponadto
$$a_{n+1}=15a_{n-1}-4a_{n-2}=4(4a_{n-1}-a_{n-2})-a_{n-1}=4a_n-a_{n-1}.$$
Teza zadania jest natychmiastowym wnioskiem z następującego lematu:

Lemat. Niech α, β będą pewnymi liczbami całkowitymi. Określmy ciąg liczb całkowitych (b_n), $n=1,2,\ldots$, rekurencyjnie:
$$b_0=0, \qquad b_{n+1}=\alpha b_n+\beta b_{n-1}.$$
Wówczas, jeśli $n|m$, to $a_n|a_m$.

Dowód lematu. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $b_1=1$. Mamy, dla pewnego całkowitego x,
$$\begin{aligned}
&b_0=0, b_n\equiv 0 && (\operatorname{mod} b_n),\\
&b_1=1, b_{n+1}\equiv x\equiv xb_1 && (\operatorname{mod} b_n),\\
&b_2=1, b_{n+2}\equiv xb_2 && (\operatorname{mod} b_n)
\end{aligned}$$
i ogólnie, przez indukcję,
$$b_k\equiv s(\operatorname{mod} b_n), b_{n+k}\equiv xb_k(\operatorname{mod} b_n),$$

co kończy dowód lematu.

Sposób 2. Pokażemy, że wśród wyrazów ciągu (a_n) nie ma liczb pierwszych. Widać, że wyrazy o indeksach parzystych są parzyste i większe od 2; wykażemy, że dla nieparzystych indeksów $n \geqslant 3$,

$$a_n = a_{\frac{n+1}{2}}^2 - a_{\frac{n-1}{2}}^2 = (a_{\frac{n+1}{2}} - a_{\frac{n-1}{2}})(a_{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}}),$$

co, wobec faktu iż $a_{\frac{n+1}{2}} - a_{\frac{n-1}{2}} \geqslant 3$, da tezę.

W poprzednim rozwiązaniu pokazaliśmy, że

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Uwzględniając początkowe wyrazy ciągu możemy wypisać wzór

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{6}[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n].$$

Pozostaje obliczyć:

$$a_{\frac{n+1}{2}}^2 - a_{\frac{n-1}{2}}^2 =$$

$$= \frac{1}{12}[(2+\sqrt{3})^{n+1} - 2 + (2-\sqrt{3})^{n+1}] - \frac{1}{12}[(2+\sqrt{3})^{n-1} - 2 + (2-\sqrt{3})^{n-1}] =$$

$$= \frac{1}{12}[(2+\sqrt{3})^{n-1}(6+4\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^{n-1}(6-4\sqrt{3})] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n].$$

10. Ustalmy dowolną liczbę $x \in [0,1]$. Określmy ciąg (x_i), $i = 1,2,\ldots$ następująco:

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = 2x_n - f(x_n).$$

Z warunków zadania wynika, że dla każdego n, $x_n \in [0,1]$. Mamy

$$x_{n+1} - f(x_{n+1}) = 2x_n - f(x_n) + f(2x_n - f(x_n)) = x_n - f(x_n) = \ldots$$
$$= f(x_0) - x_0 = f(x) - x,$$

zatem

$$x_{n+1} - x_n = x_n - f(x_n) = x - f(x),$$

a więc gdyby zachodził związek $x - f(x) \neq 0$, to ciąg (x_n) byłby nieograniczony, co jest niemożliwe.

11. Niech $P_{n,k}$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w wylosowanym podzbiorze znajdują się liczby $1,2,\ldots,k$. Pokażemy, że $P_{n,k} = \frac{1}{k+1}$. Wówczas prawdopodobieństwo, o którym mowa w zadaniu, będzie wynosić

$$\frac{P_{n,k+l}}{P_{n,k}} = \frac{k+1}{k+l+1},$$

a więc szukanymi trójkami będą takie trójki (n,k,l), że $k+1=l$, $n \geqslant k+l$.

Sposób 1. Niech $k \leqslant m \leqslant n$. Liczba m-elementowych podzbiorów zawierających liczby $1,2,\ldots,k$ wynosi $\binom{n-k}{m-k}$, a zatem

$$P_{n,k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k \leqslant m \leqslant n} \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} \sum_{k \leqslant m \leqslant n} \binom{m}{k}.$$

Bez trudu można sprawdzić indukcyjnie, że

$$\sum_{k \leqslant m \leqslant n} \binom{m}{k} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k},$$

a zatem istotnie prawodpodobieństwo $P_{n,k} = \frac{1}{k+1}$.

Sposób 2. Zauważmy, że losowanie podzbiorów można opisać w następujący sposób: Rozważamy zbiór $\{0,1,\ldots,n\}$, losujemy permutację tego zbioru, a jako wylosowany podzbiór bierzemy zbiór elementów stojących przed 0. Zatem $P_{n,k}$ równe jest prawdopodobieństwu tego, że w losowej permutacji zbioru $\{0,1,\ldots,n\}$ liczba 0 będzie występować po liczbach $1,2,\ldots,k$. A prawdopodobieństwo to wynosi $\frac{1}{k+1}$, gdyż jest ono (z symetrii) równe pradopodobieństwu tego, że liczba $m \in \{0,1,\ldots,k\}$ jest ostatnią z liczb $0,1,\ldots,k$, zaś liczba wszystkich możliwych wyborów liczby m wynosi $k+1$.

12. Oznaczmy przez M środek ciężkości czworościanu. Niech Q będzie punktem symetrycznym do punktu P względem punktu M. Wykażemy, że rozpatrywane płaszczyzny przechodzą przez punkt Q.

Niech A i B będą środkami dwóch przeciwległych krawędzi czworościanu. Punkt M jest środkiem odcinków AB i PQ, co oznacza, że punkty A, B, P, Q leżą na jednej płaszczyźnie i są wierzchołkami równoległoboku. Zatem płaszczyzna równoległa do odcinka AP i zawierająca krawędź, której środkiem jest punkt B, przechodzi przez punkt Q.

13. Odpowiedź: liczbami spełniającymi warunki zadania są liczby, które przy dzieleniu przez 20 dają resztę 2 lub 18.

Oczywiście, jeśli n dzieli się przez 5, to $n^{n^3}-n^n$ także. Przypuśćmy więc, że $5\not| n$.

Mamy

$$n^{n^3}-n^n=n^n(n^{n^3-n}-1)=n^n(n^{n(n-1)(n+1)}-1).$$

Jeśli $n\not\equiv 2(\bmod 4)$, to liczba $n(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 4 i z małego twierdzenia Fermata wynika, że liczba

$$n^{n(n-1)(n+1)}-1=(n^k)^4-1,\quad gdzie\quad k=\frac{n(n-1)(n+1)}{4},$$

jest podzielna przez 5. Zatem $n^{n^3}-n^n$ także.

Przypuśćmy zatem, że $n\equiv 2(\bmod 4)$. Wówczas liczba $n^3-n\equiv 2(\bmod 4)$ i na mocy małego twierdzenia Fermata liczba

$$n^{n^3-n}-n^2=n^2(n^{n^3-n-2}-1)$$

dzieli się przez 5. Mamy więc

$$n^n(n^{n^3-n}-1)\equiv n^n(n^2-1)(\bmod 5),$$

a liczba n^2-1 nie dzieli się przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy $n\equiv 2(\bmod 5)$ lub $n\equiv 3(\bmod 5)$. Po uwzględnieniu związku $n\equiv 2(\bmod 4)$ otrzymujemy, iż $n\equiv 2(\bmod 20)$ lub $n\equiv 18(\bmod 20)$.

14. W rozwiązaniu wykorzystamy następujący fakt:

W trójkącie ABC, punkt P (różny od B i C) leży na prostej BC. Niech O_1 i O_2 będą środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ABP i ACP. Wówczas trójkąty AO_1O_2 i ABC są podobne.

Dowód: $\sphericalangle AO_1O_2=\frac{1}{2}\sphericalangle AO_1P=\sphericalangle ABC$; $\sphericalangle AO_2O_1=\frac{1}{2}\sphericalangle AO_2P=\sphericalangle ACB$.

Niech ABC będzie danym trojkątem, zaś AD, BE, CF jego środkowymi przecinającymi się w punkcie G. Niech ponadto O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 będą środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach GFB, GBD, GDC, GCE, GEA, GAF.

Wykażemy najpierw, że punkty O_1, O_2, O_3, O_4 leżą na jednym okręgu.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCG. Należy wykazać, że $OO_1\cdot OO_2=OO_3\cdot OO_4$. Korzystając z wyżej udowodnionego faktu obliczamy

$$OO_1=\frac{3}{2}\cdot\frac{BO\cdot GC}{BC}\quad\text{oraz}\quad OO_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{GO\cdot BC}{GC}.$$

Stąd $OO_1 \cdot OO_2 = \frac{3}{4}GO^2$. Analogicznie dowodzimy, że $OO_3 \cdot OO_4 = \frac{3}{4}GO^2$, co oznacza, że punkty O_1, O_2, O_3, O_4 leżą na jednym okręgu.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie stwierdzamy, że czwórka punktów O_3, O_4, O_5, O_6, jak również czwórka punktów O_5, O_6, O_1, O_2, leży na jednym okręgu.

Oznaczmy przez o_A, o_B, o_C okręgi przechodzące odpowiednio przez czwórki punktów (O_1,O_2,O_3,O_4), (O_3,O_4,O_5,O_6), (O_5,O_6,O_1,O_2). Symetralne odcinków AG, BG, CG są odpowiednio osiami potęgowymi następujących par okręgów: (o_B,o_C), (o_C,o_A), (o_A,o_B). Symetralne te nie przecinają się w jednym punkcie, skąd wynika, że okręgi o_A, o_B, o_C pokrywają się.

15. Niech N będzie liczbą pionków. Umieśćmy środek układu współrzędnych w pewnym polu szachownicy i każdemu pionkowi P_i, $i = 1,2,\ldots,N$, przyporządkujmy jego współrzędne x_i, y_i. Łatwo można sprawdzić, że liczba

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 + y_i^2)$$

nie zmienia się po każdym ruchu. Oznacza to, że istnieje taka liczba rzeczywista M, że dla każdego $i = 1, 2,\ldots, N$ zachodzą nierówności $|x_i| < M$, $|y_i| < M$. Rozważmy teraz funkcję

$$S = \sum_{i=1}^{N}(x_i^3 + 2y_i^3).$$

Łatwo można sprawdzić, że wartości tej funkcji zmniejszają się po każdym ruchu. Ale x_i, y_i są ograniczone z dołu, a zatem funkcja S również. Wobec faktu, iż ta funkcja przyjmuje wyłącznie wartości całkowite, otrzymujemy, iż liczba ruchów nie może być nieskończona.

16. Oznaczmy pierwszą, zakładaną nierówność przez (*), a drugą nierówność przez (**). Mamy dla każdego i

$$x_i^4-8x_i^3+18x_i^2-8x_i+1=(x_i^2-4x_i+1)^2\geqslant 0,$$

przy czym mamy równość wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i=2\pm\sqrt{3}$. Pisząc powyższe nierówności dla $i=1,2,\ldots,n$ i sumując je stronami otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n x_i^4-8\sum_{i=1}^n x_i^3+18\sum_{i=1}^n x_i^2-8\sum_{i=1}^n x_i+n\geqslant 0. \tag{3}$$

Na mocy (*) lewa strona nie przekracza

$$\sum_{i=1}^n x_i^4-8\sum_{i=1}^n x_i^3+9\sum_{i=1}^n x_i^2+n^2;$$

otrzymujemy więc nierówność

$$\sum_{i=1}^n x_i^4-8\sum_{i=1}^n x_i^3+9\sum_{i=1}^n x_i^2+n^2\geqslant 0, \tag{4}$$

czyli nierówność (**), tyle że z nieostrą nierównością. Zadanie sprowadza się zatem do pytania, kiedy nierówność (*) uniemożliwia równość w (4).

Równość w nierówności (4) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy mamy równości w (*) i (3); w tej drugiej nierówności mamy równość dla $x_i=2\pm\sqrt{3}$. Wówczas, aby była równość w (*), musi być

$$9\sum_{i=1}^n(2\pm\sqrt{3})^2-8\sum_{i=1}^n(2\pm\sqrt{3})=n(n-1),$$

czyli, po podniesieniu do kwadratu nawiasu w pierwszej sumie, składniki niewymierne muszą się redukować do 0 i suma po lewej stronie wynosi

$$9n(2^2+3)-8n\cdot 2=63n-16n=47n,$$

a stąd $n=48$. Wobec tego jedyną liczbą, przy której implikacja może nie mieć miejsca, jest $n=48$. I rzeczywiście nie ma ona miejsca;
kładziemy $x_i=2+(-1)^i\sqrt{3}$, $i=1,2,\ldots,48$ i mamy równość w (*) i (**).

17. *Lemat:* Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC; punkt M jest środkiem boku BC. Wówczas $IM\parallel AD$.

Dowód: Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu D względem punktu M. Wówczas E jest punktem styczności okręgu o wpisanego w trójkąt

ABC z bokiem BC. Niech ponadto EF będzie średnicą okręgu o. Wtedy punkty A, F, D są współliniowe, skąd uzyskujemy tezę lematu.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Oznaczmy przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Niech punkty M i N będą odpowiednio środkami boków AB i AC. Przyjmijmy ponadto, że odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P. Wówczas na mocy lematu, $BP \parallel NI$, $PC \parallel IM$ oraz $CB \parallel MN$. Stąd wynika, że proste BN, CM oraz IP przecinają się w jednym punkcie będącym środkiem jednokładności trójkątów BCP i NIM. Stąd wynika bezpośrednio teza zadania.

18. Zauważmy, że a_n jest liczbą nieokresowych ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{1,2,\ldots,k\}$. Zauważmy, że takie ciągi możemy połączyć w parami rozłączne n-tki: łaczymy dwa ciągi, jeśli jeden z nich jest cyklicznym przesunięciem drugiego. Zatem $n|a_n$.

19. Mnożąc równość
$$2^6+2^4+1^{12}=3^4$$
przez $2^p\cdot 3^q$ otrzymujemy
$$2^{p+6}\cdot 3^q+2^{p+4}\cdot 3^q+2^p\cdot 3^q=2^p\cdot 3^{q+4}\,.$$
Szukamy takich liczb p, q, że
$$p+6\equiv 0(\mathrm{mod}\,1998)$$
$$p+4\equiv 0(\mathrm{mod}\,2000)$$
$$p\equiv 0(\mathrm{mod}\,2004)$$
$$p\equiv 0(\mathrm{mod}\,1996)$$
$$q\equiv 0(\mathrm{mod}\,1998)$$
$$q\equiv 0(\mathrm{mod}\,2000)$$
$$q\equiv 0(\mathrm{mod}\,2004)$$
$$q+4\equiv 0(\mathrm{mod}\,1996).$$
Wystarczy założyć, że $p=12n$, $q=12m$ oraz
$$2n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,333)$$
$$3n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,500)$$

$$n \equiv 0 (\bmod 167)$$

$$3n \equiv 0 (\bmod 499)$$

$$2m \equiv 0 (\bmod 333)$$

$$3m \equiv 0 (\bmod 500)$$

$$m \equiv 0 (\bmod 167)$$

$$3m + 1 \equiv 0 (\bmod 499)$$

czyli

$$n \equiv 166 (\bmod 333)$$

$$n \equiv 333 (\bmod 500)$$

$$n \equiv 0 (\bmod 167)$$

$$n \equiv 0 (\bmod 499)$$

$$m \equiv 0 (\bmod 333)$$

$$m \equiv 0 (\bmod 500)$$

$$m \equiv 0 (\bmod 167)$$

$$m \equiv 166 (\bmod 499).$$

Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika istnienie liczb m, n jak wyżej.

Bezpośrednie obliczenia pokazują, że warunki zadania spełniają liczby $n = 83416333$ i $m = 6895764000$, czyli $p = 1000995996$ i $q = 82749168000$.

20. Przez każdą krawędź rozpatrywanego czworościanu możemy poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do przeciwległej krawędzi. Punkt wspólny tych 6 płaszczyzn to punkt przecięcia wysokości czworościanu. Teza zadania wynika teraz bezpośrednio z zadania 9. z pierwszego meczu matematycznego oraz dowodu przeprowadzonego w jego rozwiązaniu.

21. Dla każdego z 1001 puktów rozważamy powłokę kulistą o środku w danym punkcie oraz promieniach 2 i 3. Objętość takiej powłoki jest równa $19 \cdot \frac{4\pi}{3}$, a powłoka jest zawarta w kuli o promieniu 10 współśrodkowej z daną kulą. Objętość tej kuli jest równa $V = 1000 \cdot \frac{4\pi}{3}$, a suma objętości powłok jest równa $19019\cdot\frac{4\pi}{3}>19V$. Zatem pewien punkt jest pokryty przez co najmniej 20 powłok.

Powłoka o środku w tym punkcie spełnia warunki zadania.

22. Z twierdzenia Pascala wynika, że odcinki BE i CD przecinają się w punkcie P leżącym na okręgu o. Oznaczając przez r promień okręgu o oraz wykorzystując zadanie 7. uzyskujemy

$$BO^2+CO^2=(BP\cdot BE+r^2)+(CP\cdot CD+r^2)=BC^2+2r^2>BC^2,$$

co dowodzi, że kąt BOC jest ostry.

Uwaga: Zadanie to jest uogólnieniem zadania 5 z 39. Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej.

23. Podana suma jest równa

$$\sum_{i=1}^{(p-1)/2} i^{3p}+(p-i)^{3p}=$$

$$=\sum_{i=1}^{(p-1)/2} i^{3p}-i^{3p}+\binom{3p}{1}pi^{3p-1}-\binom{3p}{2}p^2i^{3p-2}+\ldots\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=1}^{(p-1)/2} 3p^2i^{3p-1}\equiv\sum_{i=1}^{(p-1)/2} 3p^2i^2=3p^2\cdot\frac{(p-1)(p+1)p}{24}\equiv 0 (\bmod p^3)\,.$$

24. Oznaczmy dla $a>b>c>d>e>f>g>h$

$$S(a,b,c,d,e,f,g,h)=\sum x_i^a x_j^b x_k^c x_\ell^d x_m^e x_p^f x_q^g x_r^h\,.$$

Skorzystamy z nierówności

$$x^Ay^B+x^By^A\leqslant x^Cy^D+x^Dy^C$$

dla $C>A>B>D$, $A+B=C+D$, którą dowodzimy tak:

$$x^Cy^D+x^Dy^C-x^Ay^B-x^By^A=$$

$$=x^Dy^D\left(x^{C-D}+y^{C-D}-x^{A-D}y^{B-D}-x^{B-D}y^{A-D}\right)=$$

$$=x^Dy^D\left(x^{A-D+B-D}+y^{A-D+B-D}-x^{A-D}y^{B-D}-x^{B-D}y^{A-D}\right)=$$

$$=x^Dy^D\left(x^{A-D}-y^{A-D}\right)\left(x^{B-D}-y^{B-D}\right)\geqslant 0\,.$$

Należy jeszcze poczynić następujące obserwacje:

$$S(80,77,60,55,40,33,22,11) \leqslant S(88,69,60,55,40,33,22,11) \leqslant$$
$$\leqslant S(88,70,59,55,40,33,22,11) \leqslant S(88,70,66,48,40,33,22,11) \leqslant$$
$$\leqslant S(88,70,66,50,38,33,22,11) \leqslant S(88,70,66,50,44,27,22,11) \leqslant$$
$$\leqslant S(88,70,66,50,44,30,19,11) \leqslant S(88,70,66,50,44,30,20,10)\,.$$

25. Podzielmy czterowymiarowy sześcian jednostkowy na n^4 czterowymiarowych sześcianików o krawędzi n^{-1}. W pewnym sześcianiku znajdą się dwie spośród n^4+1 czwórek

$$(\{0\sqrt{2}\},\{0\sqrt{3}\},\{0\sqrt{5}\},\{0\sqrt{7}\}),\ (\{1\sqrt{2}\},\{1\sqrt{3}\},\{1\sqrt{5}\},\{1\sqrt{7}\}),\ldots,$$
$$(\{n^4\sqrt{2}\},\{n^4\sqrt{3}\},\{n^4\sqrt{5}\},\{n^4\sqrt{7}\})$$

($\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x); przypuśćmy, że są to

$$(\{k\sqrt{2}\},\{k\sqrt{3}\},\{k\sqrt{5}\},\{k\sqrt{7}\}),\ (\{l\sqrt{2}\},\{l\sqrt{3}\},\{l\sqrt{5}\},\{l\sqrt{7}\}),$$

gdzie $k>l$. Liczba $N=k-l$ spełnia warunki zadania.

26. Jak łatwo zauważyć, wystarczy szukać rozwiązań wymiernych danego układu. Udowodnimy, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje rozwiązanie.

Najpierw pokażemy, że wystarczy ograniczyć się do $2n-1$ pierwszych równań, tj. tych dla $i=j$ oraz $i=j-1$. Równania te oznaczają, iż wektory $[x_1,y_1]$, $[x_2,y_2]$, …, $[x_n,y_n]$ mają tę samą długość $\sqrt{z_1}$ oraz każde dwa kolejne wektory $[x_i,y_i]$, $[x_{i+1},y_{i+1}]$ tworzą ten sam kąt (zorientowany). Stąd natychmiast widać, że pozostałe równania (tzn. te dla $i<j-1$) są spełnione (oznaczają one, iż kąty tworzone przez wektory $[x_i,y_i]$, $[x_j,y_j]$ zależą tylko od $j-i$).

Weźmy dowolną liczbę całkowitą dodatnią n i taki kąt $\alpha<\frac{\pi}{2n}$, że jego sinus i cosinus są wymierne (np. takie α, by $\sin\alpha=\frac{2m}{m^2+1}$ dla dostatecznie dużego m) i połóżmy $x_k=\sin k\alpha$, $y_k=\cos k\alpha$, $k=1,2,\ldots,n$. Jak łatwo zauważyć, liczby x_k, y_k są wymierne, wektory $[x_k,y_k]$ mają długość 1 i wektory $[x_k,y_k]$, $[x_{k+1},y_{k+1}]$ tworzą kąt α, którego cosinus jest wymierny.

27. Wykorzystując nierówność Ptolemeusza dla czworokąta $PM_{i-1}A_iM_i$ ($M_0=M_n$) uzyskujemy:

$$\frac{1}{2}PM_{i-1}+\frac{1}{2}PM_i \geqslant PA_i\cos\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Dodając stronami powyższe nierówności dostajemy tezę.

Szkice rozwiązań zadań z zawodów drużynowych

1. Określmy wielomian P wzorem

$$P(x)=[(x-1)(x^3-1)(x^9-1)\ldots(x^{3^{n-1}}-1)]^2.$$

Liczba 1 jest pierwiastkiem $2n$-krotnym wielomianu P. Ponadto

$$P(x)=(x^2-2x+1)(x^6-2x^3+1)(x^{18}-2x^9+1)\ldots(x^{2\cdot 3^{n-1}}-2x^{3^{n-1}}+1)$$

i widać, że po wymnożeniu współczynnik przy x^k będzie równy a_k. Mamy więc

$$P(x)=\sum_{i=0}^{3^n-1} a_i x^i.$$

Niech D będzie operatorem działającym według wzoru: $Df(x)=xf'(x)$. Operator ten ma tę własność, iż jeśli liczba 1 jest n-krotnym pierwiastkiem wielomianu f, to liczba 1 jest $(n-1)$-krotnym pierwiastkiem wielomianu Df. Zatem

$$\sum_{i=0}^{3^n-1} a_i = P(1)=0,$$

$$\sum_{i=0}^{3^n-1} ia_i = P'(1)=0,$$

$$\sum_{i=0}^{3^n-1} a_i i^2 = DP(1)=0$$

i ogólnie

$$\sum_{i=0}^{3^n-1} a_i i^k = D^{k-1}P(1)=0, \quad k=2,3,\ldots,2n-1.$$

2. Niech M_A, M_B, M_C będą środkami odpowiednio krawędzi BC, CA, AB oraz niech H_A, H_B, H_C będą rzutami prostokątnymi punktu S odpowiednio na proste BC, CA, AB. Przypuśćmy, że teza zadania nie jest spełniona. Możemy więc przyjąć, że $SA<SB<SC$. Stąd

$$SC^2-SB^2=2BC\cdot H_AM_A, \quad SB^2-SA^2=2AB\cdot H_CM_C$$

oraz $SC^2-SA^2=2CA\cdot H_BM_B$, a zatem

$$BC\cdot H_AM_A+AB\cdot H_CM_C=CA\cdot H_BM_B.$$

Ponieważ trójkąty SH_AM_A, SH_BM_B, SH_CM_C są podobne oraz $H_AM_A \neq 0$, $H_BM_B \neq 0$, $H_CM_C \neq 0$, więc ostatnia równość implikuje

$$BC \cdot SM_A + AB \cdot SM_C = CA \cdot SM_B . \tag{1}$$

Wykażemy tymczasem, że w dowolnym ostrosłupie trójkątnym $SABC$ spełniona jest nierówność

$$BC \cdot SM_A + AB \cdot SM_C > CA \cdot SM_B , \tag{2}$$

skąd bezpośrednio uzyskamy sprzeczność.

Korzystając z nierówności Ptolemeusza dla punktów S, M_A, M_B oraz M_C leżących w przestrzeni otrzymujemy

$$M_BM_C \cdot SM_A + M_AM_B \cdot SM_C > M_CM_A \cdot SM_B ,$$

skąd natychmiast wynika nierówność (2).

3. Oznaczmy dane w treści zadania równanie przez (*). Dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $n^6 - n^2$ jest podzielna przez 60, skąd otrzymujemy podzielność danej w zadaniu liczby przez 60.

Ponieważ dla dowolnej liczby całkowitej n liczba n^6 przy dzieleniu przez 9 daje resztę 0 lub 1, więc liczba liczb niepodzielnych przez 3 jest taka sama po obu stronach równania (*). Niech $R(n)$ oznacza resztę z dzielenia liczby n^6 przez 9. Wówczas

$$R(a) + R(b) + R(c) = R(x) + R(y) + R(z)$$

oraz wobec

$$n^6 + 2R(n) \equiv 3n^2 \pmod{27}$$

mamy

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \equiv 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \pmod{27} ,$$

czyli

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \pmod{9} .$$

Istnieje 371 rozwiązań pierwotnych (tzn. nietrywialnych i bez wspólnego dzielnika) równania (*) w liczbach mniejszych od 15000, z czego tylko dla 32 rozwiązań liczba

$$r = a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

jest różna od 0.

a	b	c	x	y	z	r	$r/180$
138	62	25	135	92	82	−9900	−55
330	55	1	311	268	159	−81900	−455
400	149	102	398	226	75	−22500	−125
410	192	113	368	340	303	−125100	−695
518	229	34	448	424	421	−235800	−1310
524	176	53	506	395	230	−156600	−870
537	400	317	534	419	281	9180	51
721	311	152	679	575	440	−345600	−1920
771	568	150	765	582	404	−147600	−820
865	282	196	770	769	402	−479700	−2665
957	545	133	927	665	647	−489600	−2720
960	725	141	918	831	239	−123300	−685
983	790	144	974	810	457	−202500	−1125
995	283	110	953	778	89	−439200	−2440
1055	752	492	1046	801	86	177480	986
2242	1590	67	2147	1700	1662	−2702700	−15015
2465	745	730	2386	1795	1373	−3636000	−20200
2578	461	166	2434	2099	698	−3931200	−21840
3029	1139	416	2948	2215	487	−3188880	−17716
4748	2962	2927	4696	3560	1009	4140180	23001
5098	3480	43	4565	4442	3708	−16218000	−90100
5279	1314	559	5171	3691	1014	−11484000	−63800
5492	953	706	5204	4432	487	−15392700	−85515
5756	3023	729	5717	3611	486	−3158100	−17545
7122	2329	1801	6563	5804	4821	−40610700	−225615
8199	1983	8	8178	4077	2179	−17093700	−94965
9187	2524	1683	8243	7974	5597	−69254100	−384745
10789	3881	3321	9771	9449	841	−42969600	−238720
10855	5174	3306	10758	6878	2713	−14870880	−82616
13891	11337	10690	13131	11983	11810	−19728000	−109600
14444	9085	4317	14415	9370	3065	4819500	26775
14943	7693	2826	14322	11747	6609	−96328800	−535160

Szkice rozwiązań zadań z pierwszego meczu matematycznego

1. Zauważmy najpierw, że liczba n^7-n jest podzielna przez 42 (można to łatwo sprawdzić analizując reszty z dzielenia przez 2, 3, 7). Zatem, dla pewnej liczby naturalnej k mamy

$$n^{n^7}-n^n=n^n(n^{n^7-n}-1)=n^n(n^{42k}-1)=n^n((n^k)^{42}-1)$$

i jeśli n jest podzielne przez 43, to pierwszy czynnik po prawej stronie powyższej równości dzieli się przez 43, a jeśli n nie dzieli się przez 43, to na mocy małego twierdzenia Fermata drugi czynnik dzieli się przez 43. Zatem iloczyn jest liczbą podzielną przez 43.

2. Ciocia Renia zgarnia $1/k$ puli po wyrzuceniu x oczek, z prawdopodobieństwem

$$\frac{1}{5}\cdot\binom{n-1}{k-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{x-1}{6}\right)^{n-k},$$

a więc przyczynek do wartości oczekiwanej wynosi

$$\frac{n}{k}\cdot\frac{1}{5}\cdot\binom{n-1}{k-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{x-1}{6}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{x-1}{6}\right)^{n-k},$$

co wysumowane po $k=1,2,3,\ldots,n$ daje

$$\frac{6}{5}\left(\left(\frac{x}{6}\right)^n-\left(\frac{x-1}{6}\right)^n\right).$$

Po wysumowaniu ostatnich równości dla $x=1,2,3,4,6$ otrzymujemy wzór na wartość oczekiwaną wygranej cioci Reni

$$W(n)=\frac{6}{5}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)-1,$$

gdzie n jest liczbą uczestników imienin (łącznie z ciocią Renią).

Ponieważ $W(n)\to\frac{1}{5}$ przy n dążącym do nieskończoności, więc $W(n)>0$ dla odpowiednio dużych n (dokładne obliczenia pokazują, że $W(n)>0$ dla $n\geqslant 10$).

3. Przyjmijmy, że punkty C, D, E, F leżą po tej samej stronie prostej AB. Dowód w pozostałym przypadku jest analogiczny.

Rozpatrzmy inwersję i o środku w punkcie P przeprowadzającą punkt A na punkt B. Wówczas $i(C)=D$ oraz $i(E)=F$. Zatem inwersja i przeprowadza okrąg opisany na trójkącie ACE na okrąg opisany na trójkącie BDF. Stąd prosta łącząca środki okręgów opisanych na trójkątach ACE i BDF przechodzi przez punkt P.

Uwaga: Założenie, że punkt P leży poza odcinkiem AB można pominąć.

4. Założenie dotyczące stopnia wielomianu P jest nieistotne; wykażemy, że jeżeli dowolny wielomian P o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie, to dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n wielomian

$$\binom{n}{n}P+\binom{n+1}{n}P'+\binom{n+2}{n}P''+\ldots$$

przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie.

Zastosujemy indukcję względem n.

Niech $n=0$. Wielomian P jest parzystego stopnia i ma dodatni współczynnik przy najwyższej potędze x (w przeciwnym razie przyjmowałby wartości ujemne), zatem wielomian $Q=P+P'+P''+\ldots+P^{(n)}$ także ma te własności. Aby udowodnić, że przyjmuje on wyłącznie wartości dodatnie, wystarczy wykazać, że wszystkie jego minima są dodatnie.

Przypuśćmy więc, że wielomian Q ma minimum w punkcie x. Wówczas $Q'(x)=0$, zatem $Q(x)=P(x)+Q'(x)=P(x)>0$. Kończy to dowód przypadku $n=0$.

Dowód kroku indukcyjnego jest dość podobny; wielomian

$$R=\binom{n}{n}P+\binom{n+1}{n}P'+\binom{n+2}{n}P''+\ldots$$

jest parzystego stopnia, więc wystarczy wykazać, że wszystkie jego minima są dodatnie. Przypuśćmy, że R ma minimum w punkcie x. Zatem $R'(x)=0$, czyli

$$\binom{n}{n}P'(x)+\binom{n+1}{n}P''(x)+\binom{n+2}{n}P'''(x)+\ldots=0.$$

Wobec tego

$$R(x)=\binom{n}{n}P(x)+\binom{n+1}{n}P'(x)+\binom{n+2}{n}P''(x)+\ldots=$$

$$= \binom{n}{n} P(x) + \binom{n+1}{n} P'(x) + \binom{n+2}{n} P''(x) + \ldots - R'(x) =$$

$$= \binom{n-1}{n-1} P(x) + \left(\binom{n+1}{n} - \binom{n}{n} \right) P'(x) +$$

$$+ \left(\binom{n+2}{n} - \binom{n+1}{n} \right) P''(x) + \ldots =$$

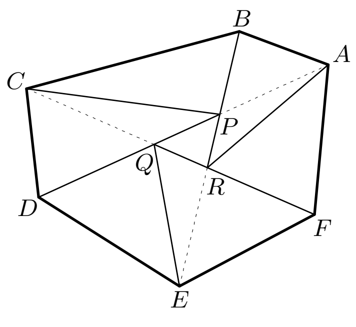
$$= \binom{n-1}{n-1} P(x) + \binom{n}{n-1} P'(x) + \binom{n+1}{n-1} P''(x) + \ldots$$

i z założenia indukcyjnego wynika, że $R(x) > 0$. Kończy to dowód.

5. Dzielimy sześcian o krawędzi 2003, zaczynając od pewnego jego wierzchołka, na prostopadłościany o wymiarach $1 \times 1{,}5 \times 2{,}5$ (niektóre z nich zmieszczą się tylko częściowo) i malujemy je „w szachownicę”. Wykażemy, że suma objętości czarnych prostopadłościanów jest różna od sumy objętości białych prostopadłościanów. Dzielimy sześcian na następujące kawałki: prostopadłościany o wymiarach $2002 \times 2003 \times 2003$, $1 \times 2001 \times 2003$, $1 \times 1 \times 2000$ i $1 \times 1 \times 3$. W pierwszych trzech prostopadłościanach objętości białych i czarnych prostopadłościanów są równe (bo 2002, 2001, 2000 są parzystymi wielokrotnościami odpowiednio 1; 1,5; 2,5), w ostatnim zaś nie.

Przypuśćmy teraz, że możliwy jest podział na sześciany, z których każdy ma krawędź 2, 3 lub 5. W każdym takim sześcianie objętość białych i czarnych prostopadłościanów jest równa. To jednak daje sprzeczność.

6. Podzielmy dany sześciokąt wypukły $ABCDEF$ na trójkąty, tak jak na poniższym rysunku (punkty P, Q, R są wyznaczone przez główne przekątne sześciokąta).



Pole jednego z sześciu trójkątów: ABR, BCP, CDP, DEQ, EFQ, FAR nie przekracza $1/6$ — przypuśćmy, że jest to trójkąt ABR. Wówczas pole jednego z trójkątów ABF lub ABC jest nie większe niż $1/6$.

7. Udowodnimy najpierw następujący

Lemat. Z każdego (n^2+1)-elementowego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać monotoniczny podciąg o długości $n+1$.

Dowód lematu: Przypuśćmy, że teza lematu nie jest prawdziwa. Z każdym elementem a_k, $k=1,2,\ldots,n^2+1$, danego ciągu wiążemy parę liczb $(p(k),q(k))$, gdzie $p(k)$ (odpowiednio $q(k)$) oznacza długość najdłuższego niemalejącego (odpowiednio nierosnącego) podciągu, którego ostatnim wyrazem jest a_k. Otrzymujemy w ten sposób n^2+1 par liczb całkowitych dodatnich nie przekraczających n (zgodnie z założeniem nie wprost). Ponieważ wszystkich takich różnych możliwych par jest n^2, więc istnieją takie dwa elementy a_k,a_l, $k<l$, danego ciągu, że $p(k)=p(l)$, $q(k)=q(l)$. To jednak jest niemożliwe; niech np. $a_k \leqslant a_l$ (przypadek przeciwny rozważa się analogicznie); bierzemy najdłuższy niemalejący ciąg o ostatnim wyrazie a_k i dodajemy do tego ciągu na końcu wyraz a_l; stąd $p(l) \geqslant p(k)+1$ i sprzeczność.

Z lematu natychmiast wynika teza zadania: ponieważ $666>25^2+1$, więc z danego ciągu możemy wybrać monotoniczny 26-elementowy podciąg $n_1,n_2,\ldots,n_{26}$. Następnie, ponieważ $26=5^2+1$, więc z ciągu $(\sin n_i)_{1\leqslant i\leqslant 26}$ można wybrać 6-elementowy podciąg monotoniczny $\sin n_{i_1},\sin n_{i_2},\ldots,\sin n_{i_6}$. Ciąg $n_{i_1},n_{i_2},\ldots,n_{i_6}$ jest szukanym podciągiem.

8. Niech $R(a,b,c)$ oznacza liczbę, dla której umiemy rozwiązać następujące zadanie:

$R(a,b,c)$ punktów połączono każdy z każdym odcinkiem koloru ananasowego, buraczkowego lub czosnkowego. Wówczs znajdzie się a punktów połączonych każdy z każdym odcinkiem koloru ananasowego lub b punktów połączonych każdy z każdym odcinkiem koloru buraczkowego lub c punktów połączonych każdy z każdym odcinkiem koloru czosnkowego.

Łatwo udowodnić następujące zależności:

$$R(2,2,2)=2$$

$$R(a,2,2)=a$$

$$R(a,b,2)=R(a-1,b,2)+R(a,b-1,2)$$

$$R(a,b,c)=R(a-1,b,c)+R(a,b-1,c)+R(a,b,c-1)-1$$

$$R(3,3,2)=6$$

$$R(4,3,2)=10$$

$$R(4,4,2)=20$$

$$R(3,3,3)=17$$

$$R(4,3,3)=36$$

$$R(4,4,3)=91$$

$$R(4,4,4)=272.$$

Niech teraz zbiór $\{1,2,3,\ldots,666\}$ będzie podzielony na zbiory A, B i C. Bierzemy 667 punktów ponumerowanych liczbami od 0 do 666 i łaczymy je odcinkami tak, aby dwa punkty były połączone kolorem zależnym od przynależności różnicy ich numerów do A, B lub C.

Znajdą się więc 4 punkty, o numerach $k_1<k_2<k_3<k_4$ połączone tym samym kolorem. Bierzemy $n_i=k_{i+1}-k_i$ dla $i=1,2,3$ i otrzymujemy tezę.

9. Oznaczmy przez M środek ciężkości czworościanu, zaś przez P środek sfery opisanej na nim. Niech ponadto Q będzie punktem symetrycznym do punktu P względem punktu M. Wykażemy, że rozpatrywane płaszczyzny przechodzą przez punkt Q.

Niech A i B będą środkami dwóch przeciwległych krawędzi czworościanu. Podobnie jak w zadaniu 12. z zawodów indywidualnych wnioskujemy, że odcinki PB i AQ są równoległe. Stąd wynika, że prosta AQ jest prostopadła do krawędzi zawierającej punkt B. Zatem płaszczyzna przechodząca przez punkt A i prostopadła do krawędzi, której środkiem jest punkt B, przechodzi przez punkt Q.

Uwaga: Punkt Q jest *jedynym* punktem leżącym na rozpatrywanych sześciu płaszczyznach.

10. Odpowiedź: Takie liczby istnieją.

Określmy funkcję F wzorem

$$F(x)=\frac{x^{51}}{1+x^{100}}.$$

Mamy $F(1)=\frac{1}{2}$, $F'(1)\geqslant 0$. Wynika stąd, że istnieje taka liczba $\alpha>1$, że $F(\alpha)>\frac{1}{2}$. Przekształćmy lewą stronę nierówności danej w zadaniu:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{49}x_{i+1}^{51}}{x_i^{100}+x_{i+1}^{100}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^{51}}{1+\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^{100}}=\sum_{i=1}^{n}F\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right).$$

Połóżmy $x_i=\alpha^i$, $i=1,\ 2,\ldots,\ n$. Wówczas powyższa suma jest równa $(n-1)F(\alpha)+F(\alpha^{-n+1})$, a nierówność przybiera postać

$$\frac{n}{2}(2F(\alpha)\frac{n-1}{n}-1)+F(\alpha^{-n+1})>0.$$

Ponieważ $2F(\alpha)>1$, a $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$, więc dla dostatecznie dużych n nierówność będzie prawdziwa.

11. Niech $ABCD$ będzie danym czworościanem, zaś K, L, M, N środkami odpowiednio krawędzi AB, BC, CD, DA. Aby rozwiązać zadanie, wykażemy, że wysokości poprowadzone z wierzchołków A i C leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy $KM=LN$. Wynika to bezpośrednio z następujących dwóch stwierdzeń:

1. Wysokości poprowadzone z wierzchołków A i C leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy $AC\perp BD$;

2. $AC\perp BD$ wtedy i tylko wtedy, gdy $KM=LN$.

Dowód zdania 1.

($\Rightarrow$) Oznaczmy przez π płaszczyznę zawierającą wysokości poprowadzone z wierzchołków A i C. Obie te wysokości są prostopadłe do krawędzi BD, a więc $\pi\perp BD$. Stąd $AC\perp BD$.

($\Leftarrow$) Istnieje płaszczyzna π przechodząca przez punkty A, C i prostopadła do prostej BD. Oznaczmy przez K punkt wspólny płaszczyzny π i prostej BD. Niech AH i CG będą wysokościami w trójkącie ACK. Wówczas $AH\perp CK$ oraz $AH\perp BD$. Zatem AH jest wysokością czworościanu $ABCD$. Analogicznie dowodzimy, że CG jest wysokością w tym czworościanie. Pozostaje zauważyć, że obie te wysokości leżą w jednej płaszczyźnie.

Dowód zdania 2.

Punkty K, L, M, N leżą w jednej płaszczyźnie oraz są wierzchołkami równoległoboku. Zatem

$$AC\perp BD \quad\Leftrightarrow\quad \text{czworokąt } KLMN \text{ jest prostokątem} \quad\Leftrightarrow\quad KM=LN.$$

Uwaga: W dowodzie zdania 1 korzystaliśmy kilkakrotnie z następującego znanego twierdzenia: dana prosta jest prostopadła do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona prostopadła do pewnych dwóch nierównoległych prostych zawartych w π.

Szkice rozwiązań zadań z drugiego meczu matematycznego

1. Lemat 1: Jeżeli α i β są dodatnimi liczbami niewymiernymi spełniającymi warunek

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=N\,,$$

gdzie N jest liczbą całkowitą dodatnią, to każda liczba całkowita dodatnia występuje w ciągach

$$A_n=[\alpha n],\quad B_n=[\beta n]$$

łącznie N razy, a liczba 0 występuje łącznie $N-1$ razy.

Dowód lematu 1:

Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas liczba wyrazów ciągu (A_n) mniejszych od k jest równa $\left[\frac{k}{\alpha}\right]$ i podobnie dla ciągu (B_n). Zatem w obu ciągach wyrazów mniejszych od k jest

$$\left[\frac{k}{\alpha}\right]+\left[\frac{k}{\beta}\right]=kN-1\,,$$

co kończy dowód lematu.

Lemat 2: Jeżeli α i β są dodatnimi liczbami niewymiernymi spełniającymi warunek

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=N\,,$$

gdzie N jest liczbą całkowitą dodatnią, to każda liczba całkowita nieujemna ma w ciągu

$$A_n=[\alpha n]$$

o N wystąpień więcej niż w ciągu

$$B_n=[\beta n]\,.$$

Dowód lematu 2:

Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas liczba wyrazów ciągu (A_n) mniejszych od k jest równa $\left[\frac{k}{\alpha}\right]$ i podobnie dla ciągu (B_n). Zatem w ciągu (A_n) wyrazów mniejszych od k jest o

$$\left[\frac{k}{\alpha}\right]-\left[\frac{k}{\beta}\right]=kN$$

więcej niż w ciągu (B_n), co kończy dowód lematu.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Ciągi (a_n) i (b_n) są wyznaczone jednoznacznie przez warunki zadania. Z uwagi na równości

$$(\sqrt{2}-1)+2=(\sqrt{2}+1) \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=2$$

warunki te są spełnione przez ciągi określone wzorami

$$A_n=\Big[(\sqrt{2}-1)n\Big], \qquad B_n=\Big[(\sqrt{2}+1)n\Big].$$

Wobec równości

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+2}=1$$

każda liczba całkowita dodatnia jest wyrazem jednego z ciągów

$$c_n=\Big[\sqrt{2}n\Big]=b_n-n, \qquad d_n=\Big[(\sqrt{2}+2)n\Big]=b_n+n,$$

co kończy rozwiązanie.

2. Dla n nieparzystych mamy

$$565^n+2^{n+18}\equiv 1^n+2^n\cdot 2^{18}\equiv 0(\operatorname{mod} 3).$$

Dla $n=4k+2$ mamy

$$565^n+2^{n+18}=565^2\cdot\Big(565^4\Big)^k+2^2\cdot 16^k\cdot 2^{18}\equiv$$
$$\equiv(-4)\cdot 16^k+4\cdot 16^k\cdot 1\equiv 0(\operatorname{mod} 73).$$

Dla $n=4k$ mamy

$$565^n+2^{n+18}=$$
$$=\Big(565^{2k}+2\cdot 565^k\cdot 2^{k+4}+2^{2k+9}\Big)\cdot\Big(565^{2k}-2\cdot 565^k\cdot 2^{k+4}+2^{2k+9}\Big).$$

3. Wykażemy, że jeżeli w wielościanie wypukłym o objętości 2^n znajduje się $3(2^n-1)$ punktów, to w wielościanie tym da się umieścić pewien wielościan wypukły o objętości 1, który w swoim wnętrzu nie zawiera żadnego z danych punktów. Tezę zadania uzyskamy kładąc $n=10$.

Zauważmy najpierw, że przez dowolne dwa punkty P i Q leżące wewnątrz wielościanu wypukłego można poprowadzić płaszczyznę dzielącą go na dwa wielościany o równych objętościach (najpierw prowadzimy przez punkty P i Q dowolną płaszczyznę, po czym obracamy ją wokół osi PQ do momentu, aż uzyskamy dwa wielościany o równych objętościach).

Spośród danych $3(2^n-1)$ punktów wybieramy dwa, po czym prowadzimy przez nie płaszczyznę dzielącą dany wielościan na dwa wielościany o objętości 2^{n-1}. Wewnątrz jednego z tych wielościanów znajduje się co najwyżej $3(2^{n-1}-1)$ punktów. Postępowanie to kontynuujemy uzyskując po n krokach wielościan wypukły o objętości 1, zawarty w wyjściowym, którego wnętrze nie zawiera żadnego spośród danych punktów.

4. Warunki zadania spełniają między innymi liczby, w których zapisie w układzie siódemkowym występują tylko cyfry 0,1,2, przy czym liczba wystąpień cyfry 1 daje przy dzieleniu przez 6 resztę 5. Najmniejszą taką liczbą jest $11111_{(7)} = 2801$. Można także wziąć $n = 2\cdot 7^k + 4$, $k \geqslant 2$.

5. Udowodnimy, że warunki zadania są spełnione przez liczbę $C = 6$.

Wybierzmy najmniejszą z liczb $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_3}$, $\frac{x_3}{x_4}$, $\frac{x_4}{x_5}$, $\frac{x_5}{x_6}$, $\frac{x_6}{x_7}$, $\frac{x_7}{x_1}$; dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to $\frac{x_3}{x_4}$. Mamy wtedy

$$\frac{x_3}{x_4} \leqslant \frac{x_1}{x_2},$$

czyli

$$x_2x_3 \leqslant x_1x_4\,,$$

skąd otrzymujemy kolejno

$$x_2^2x_3 \leqslant x_1x_2x_4\,,$$

$$x_2^2x_3 + x_1x_3^2 \leqslant x_1x_3^2 + x_1x_2x_4\,,$$

$$x_3\left(x_2^2 + x_1x_3\right) \leqslant x_1\left(x_3^2 + x_2x_4\right),$$

$$\frac{x_3^2}{x_3^2 + x_2x_4} \leqslant \frac{x_1x_3}{x_2^2 + x_1x_3}\,.$$

Ponieważ każdy składnik danej w zadaniu sumy jest mniejszy od 1, więc suma ta jest mniejsza od

$$5 + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_1x_3} + \frac{x_3^2}{x_3^2 + x_2x_4} \leqslant 5 + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_1x_3} + \frac{x_1x_3}{x_2^2 + x_1x_3} = 6\,.$$

Z drugiej strony, kładąc $x_1 = x_7 = 1$, $x_2 = x_6 = q$, $x_3 + x_5 = q^3$, $x_3 = q^6$ otrzymujemy

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_7x_2} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_1x_3} + \frac{x_3^2}{x_3^2 + x_2x_4} + \frac{x_4^2}{x_4^2 + x_3x_5} + \frac{x_5^2}{x_5^2 + x_4x_6} +$$

$$+\frac{x_6^2}{x_6^2+x_5x_7}+\frac{x_7^2}{x_7^2+x_6x_1}=6\cdot\frac{1}{1+q}+\frac{q^6}{q^6+1}\,,$$

co dąży do 6 przy q dążącym do 0. Zatem liczby 6 nie można zastąpić mniejszą.

6. Oznaczmy przez O środek sfery stycznej do krawędzi PA, PB, PC, PD. Niech ponadto Q będzie takim punktem przestrzeni, że czworokąt $BAPQ$ jest równoległobokiem. Wówczas $CDPQ$ jest również równoległobokiem.

Rozpatrzmy płaszczyznę π prostopadłą do prostej OP i przecinającą odcinki PA, PB, PC, PD, odpowiednio w punktach K, L, M, N oraz przecinającą proste QB, QC odpowiednio w punktach X, Y. Przypuśćmy ponadto, że płaszczyzna π przecina prostą PQ w punkcie R (gdy $PQ\parallel\pi$, poniższe rozumowanie jest analogiczne). Wówczas $PK=PL=PM=PN$. Stąd oraz z faktu, że czworokąty $BAPQ$ i $CDPQ$ są równoległobokami otrzymujemy $BL=BX$ oraz $CM=CY$.

Jednokładność o środku R przeprowadzająca punkt P na punkt Q przekształca punkty K i N odpowiednio na X i Y. Stąd $QX=QY$. Zatem

$$QB+PC=PB+QC, \quad \text{czyli} \quad PA+PC=PB+PD.$$

7. Ze wzoru Eulera wynika, że wielościan w ma $2n$ wierzchołków. Każdy wielościan wypukły o $2n$ wierzchołkach ma co najmniej $3n$ krawędzi, przy czym ma ich dokładnie $3n$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym jego wierzchołku spotykają się dokładnie trzy krawędzie.

Dla dowolnego wierzchołka P wielościanu w, oznaczmy przez s_P sferę przechodzącą przez punkt P i końce wszystkich (trzech) krawędzi wychodzących z punktu P. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że wszystkie sfery s_P pokrywają się. W tym celu wystarczy wykazać, że $s_P=s_Q$ dla dowolnej krawędzi PQ.

Okręgi opisane na ścianach o wspólnej krawędzi PQ są zawarte zarówno w sferze s_P jak i w sferze s_Q. Ponieważ okręgi te są różne, więc $s_P=s_Q$.

8. Kładąc $y=0$ stwierdzamy, że $f(0)=0$. Biorąc $y_1=-y_2\neq 0$ stwierdzamy, że funkcja f jest nieparzysta. Warunki zadania spełniają funkcje

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx\log_2|x| & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}, \qquad (\heartsuit)$$

gdzie $a,b\in\mathbb{R}$. Podstawa logarytmu nie ma większego znaczenia, bo jej zmiana objawiłaby się tylko przeskalowaniem parametru b.

Jeżeli f jest funkcją spełniającą warunki zadania, to spełnia je także funkcja

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x)-f(1)x-\left(\frac{f(2)}{2}-f(1)\right)x\log_2|x| & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}.$$

Spełniony jest przy tym warunek $f_1(1)=f_1(2)=0$.

Jeżeli $x,y>0$ oraz $f_1(x)=f_1(y)=0$, to także $f(\sqrt{xy})=0$ oraz $f\left(\frac{x^2}{y}\right)=0$. Stąd oraz z ciągłości i z nieparzystości f_1 otrzymujemy $f_1(x)=0$ dla $x\in\mathbb{R}$.

Zatem funkcja f dana jest wzorem $(\heartsuit)$ z $a=f(1)$ i $b=\frac{f(2)}{2}-f(1)$.

9. Niech $10^k\leqslant n<10^{k+1}$. Rozważmy zbiór wszystkich liczb $2k$-cyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr $0,1,2,3$, przy czym dopuszczamy zera początkowe. Liczb takich jest

$$4^{2k}=16^k=16^5\cdot 16^{k-5}\geqslant 2^{20}\cdot 10^{k-5}>10^{k+1}>n\,,$$

znajdą się więc wśród nich dwie dające przy dzieleniu przez n taką samą resztę. Ich różnica jest wielokrotnością liczby n, spełniającą warunki zadania.

10. Niech E będzie punktem przecięcia symetralnych odcinków AC i BD. Wówczas trójkąty ACE i BDE są równoramienne i podobne, gdyż

$$\sphericalangle ACE=\sphericalangle DBE.$$

Stąd oraz z danej w treści zadania proporcji wynika, że

$$AP\cdot AE=DP\cdot DE,$$

co z kolei oznacza, że trójkąty APE i DPE mają równe pola. Zatem punkty A i D są symetryczne względem prostej EP lub czworokąt $APDE$ jest równoległobokiem. Pierwszy przypadek implikuje, że $AD\parallel BC$ (prosta EP jest prostopadła zarówno do prostej AD jaki i do BC); zaś drugi pociąga za sobą

$AB \perp CD$. Istotnie: jeśli przez Q oznaczymy punkt przecięcia prostych AB i CD, to

$$\sphericalangle BQC = 180^\circ - 2(\sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB) = 180^\circ - 2\sphericalangle APC = 90^\circ.$$

11. Na przykład:

$$Z = \{f: \quad f(x) = a \cdot b^x \cdot \sin(cx+d), \quad b > 0\},$$
$$Z = \{f: \quad f(x) = a \cdot b^x + c \cdot d^x, \quad b,d > 0\},$$
$$Z = \{f: \quad f(x) = (ax+b) \cdot c^x, \quad c > 0\}.$$

Szkice rozwiązań zadań z II Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych

1. Jeśli x, y, z są trzema kolejnymi wyrazami w ciągu $(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_1)$, to albo $(x,y,z) = (a,a,b)$ albo $(x,y,z) = (a,b,b)$, z dokładnością do permutacji. W każdym przypadku $xyz = ab(x+y+z-a-b)$. Zatem

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_i x_{i+1} = ab\Big(3\sum_{i=1}^{n} x_i - n(a+b)\Big) = ((2k-m)a + (2m-k)b)ab$$

jest jedyną możliwą wartością rozważanej sumy.

2. Weźmy dowolny punkt $P \in \triangle ABC$ i wyznaczone przez niego punkty D, E,F. Oznaczmy pola trójkątów PBC, PCA, PAB przez S_a, S_b, S_c. Mamy wówczas $2S_a \leqslant a{\cdot}PD \leqslant c{\cdot}PD$, $\quad 2S_b \leqslant b{\cdot}PE \leqslant c{\cdot}PE$, $\quad 2S_c \leqslant c{\cdot}PF$. Stąd wynika, że $PD + PE + PF \geqslant (2S_a + 2S_b + 2S_c)/c = 2S/c = h_c$, gdzie h_c oznacza wysokość poprowadzoną z wierzchołka C.

Gdy P jest punktem położonym na tej wysokości, blisko wierzchołka C, wartość sumy $PD+PE+PF$ może być dowolnie bliska długości h_c. Zatem $u = h_c = 2S/c$ jest szukanym kresem dolnym.

Każdy z odcinków AD, BE, CF ma długość mniejszą niż c. Wobec tego $S_a/S = PD/AD \geqslant PD/AB$, czyli $PD \leqslant c(S_a/S)$. Analogicznie $PE \leqslant c(S_b/S)$ oraz $PF \leqslant c(S_c/S)$. Dodając te trzy nierówności mamy $PD+PE+PF \leqslant c$.

Umieszczając punkt P blisko A, tak, by kąt PAB był bliski zeru, możemy dostać wartość $PD+PE+PF$ dowolnie bliską c. Zatem $v = c$ jest szukanym kresem górnym.

3. Dla $x \in S$ przyjmijmy oznaczenie $n+1-x=x^*$; odwzorowanie $x \mapsto x^*$ jest inwolucją, tzn. $x^{**}=x$. Jeśli funkcja $f\colon S \to S$ spełnia warunek $f^4(x)=x^*$, to $f^8(x)=x$, skąd wniosek, że f jest bijekcją, czyli permutacją. Zbiór S rozpada się na cykle o długościach będących dzielnikami liczby 8. Jeśli x_0 należy do cyklu długości 4, 2 lub 1, to $x_0=f^4(x_0)=x_0^*$, skąd $x_0=(n+1)/2$ (co może mieć miejsce tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą); wtedy każdy element tego cyklu musi być równy x_0. Tak więc S jest sumą pewnej liczby rozłącznych cykli długości 8 oraz, być może, jednego punktu stałego x_0. Zatem $n=8m$ lub $n=8m+1$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $n=8m$. Przyjmijmy $A=\{1,\ldots,4m\}$, $B=\{4m+1,\ldots,8m\}$. Weźmy dowolną orbitę długości 8. Niech C będzie zbiorem jej elementów. Wówczas $A\cap C$ jest zbiorem czteroelementowym, a zbiór $B\cap C$ jest jego obrazem w odwzorowaniu $x \mapsto x^*$. Ale także i na odwrót: dla każdej czwórki liczb $1 \leqslant a<b<c<d \leqslant 4m$ można tak uporządkować zbiór $C=\{a,b,c,d,d^*,c^*,b^*,a^*\}$, aby otrzymać orbitę funkcji f. Na ile sposobów?

Wartość $w=f(a)$ może być dowolnym elementem zbioru C z wyjątkiem a oraz a^* (6 możliwości); następnie $z=f(w)$ może być dowolnym elementem oprócz a,a^*,w,w^* (4 możliwości); wreszcie $f(z)$ może być dowolnym elementem oprócz a,a^*,w,w^*,z,z^* (2 możliwości); pozostała część orbity jest już wyznaczona jednoznacznie. Razem daje to $6\cdot 4\cdot 2=48$ możliwości.

Każda z rozważanych funkcji f powstaje w wyniku rozbicia $4m$-elementowego zbioru A w dowolny sposób na m czwórek (co może być zrobione na $\dfrac{(4m)!}{(4!)^m m!}$ sposobów), a następnie ustawienie każdej czwórki, wraz z jej *-obrazem, tak, by powstała ośmioelementowa orbita (48^m sposobów). To daje łączny wynik $\dfrac{2^m(4m)!}{m!}$.

W przypadku, gdy $n=8m+1$, musi pojawić się punkt stały $x_0=(n+1)/2$; a w zbiorze $S\setminus\{x_0\}$ działanie funkcji f jest analogiczne, jak poprzednio w zbiorze $\{1,2,\ldots,8m\}$. Wynik ten sam, co w poprzednim przypadku.

Gdy $n \not\equiv 0,1 \pmod 8$, wówczas nie ma takiej funkcji f.

4. W myśl podanych założeń, p jest dzielnikiem iloczynu $(n-1)(n^2+n+1)$, a przy tym $p-1 \geqslant n$; zatem $n^2+n+1=mp$. Ze związków $mp\equiv 1 \pmod n$ oraz $p\equiv 1 \pmod n$ wynika, że $m\equiv 1 \pmod n$. Tak więc $m=kn+1$ oraz $p=\ell n+1$ ($k\geqslant 0$, $\ell \geqslant 1$); otrzymujemy równość $n^2+n+1=(kn+1)(\ell n+1)$. Wobec tego $n(1-k\ell)=k+\ell-1\geqslant 0$. Stąd $k=0$, $m=1$, $p=n^2+n+1$, i ostatecznie $4p-3=(2n+1)^2$.

5. Przyjmijmy $\sphericalangle A=\alpha$, $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle C=\gamma$, i niech np. $\alpha\geqslant\beta$. Zbudujmy trójkąt QPD podobny do ABC (po zewnętrznej stronie czworokąta $ABQP$) tak, by $PD/PQ=BC/AB$ oraz $QD/PQ=AC/AB$. Wówczas $PD=PA$ oraz $QD=QB$, na mocy warunków zadania.

Skoro $AP/BQ=BC/AC\geqslant 1$, czyli $AP\geqslant BQ$, zatem boki i kąty trójkąta CPQ spełniają nierówności $CP\leqslant CQ$, $\sphericalangle CQP\leqslant\dfrac{180^\circ-\gamma}{2}\leqslant\alpha=\sphericalangle DQP$, $\sphericalangle CPQ\geqslant\dfrac{180^\circ-\gamma}{2}\geqslant\beta=\sphericalangle DPQ$. Z tych nierówności wynika, że punkt D leży wewnątrz kąta wypukłego BCZ, gdzie Z jest dowolnym punktem półprostej AC poza odcinkiem AC.

Przyjmijmy, że trójkąt ADP ma kąty $\varphi,\varphi,180^\circ-2\varphi$, a trójkąt BDQ ma kąty $\psi,\psi,180^\circ-2\psi$. Czworokąt $APDB$ ma kąty α, $180^\circ-2\varphi$, $\gamma+\psi$, $\psi+\beta$, których suma powinna wynosić 360°. Zatem $\varphi=\psi$, i w konsekwencji $\sphericalangle ADB=\gamma$. Stąd wynika, że trójkąty ABC i ABD mają wspólny okrąg opisany. To znaczy, że proste OP i OQ są symetralnymi odcinków AD i BD, i wobec tego $\sphericalangle POQ=180^\circ-\sphericalangle ADB=180^\circ-\sphericalangle PDQ$, co kończy dowód.

6. Niech u będzie rzeczywistym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$. Zachodzi nierówność Cauchy'ego–Schwarza:

$$(u^n+1)^2=\Big(\sum_{i=1}^{n-1}a_iu^i\Big)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}u^{2i}.$$

Przyjmując oznaczenia $n=2m$ oraz $u^2=w$ mamy

$$\sum_{i=1}^{n-1}u^{2i}=\sum_{i=1}^{2m-1}w^i=w^m+(w^m+1)\sum_{i=1}^{m-1}w^i.$$

Ze związków $(w^i-1)(w^{m-i}-1)\geqslant 0$ dostajemy $w^i+w^{m-i}\leqslant w^m+1$. Te $m-1$ nierówności (dla $i=1,\ldots,m-1$) dodajemy stronami i otrzymujemy

$$2\sum_{i=1}^{m-1}w^i\leqslant(m-1)(w^m+1).$$

Ponadto mamy $w^m\leqslant\dfrac{(w^m+1)^2}{4}$. Tak więc

$$\sum_{i=1}^{n-1}u^{2i}\leqslant\frac{(w^m+1)^2}{4}+(w^m+1)\cdot\frac{m-1}{2}(w^m+1)=\frac{n-1}{4}(u^n+1)^2.$$

Łącząc tę nierówność z nierównością uzyskaną na początku otrzymujemy oszacowanie

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \geqslant \frac{4}{n-1}.$$

Jest to szukany kres dolny, bowiem wszystkie napisane nierówności stają się równościami dla $u=1$ oraz $a_1=\ldots=a_{n-1}=-\dfrac{2}{n-1}$.

Regulamin Meczu Matematycznego

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy.

3. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

4. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania rozwiązania jednego z zadań. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą.

5. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie.

6. Jeżeli drużyna wywołana przyjmuje zadanie, Kapitan drużyny wywołującej wyznacza zawodnika drużyny wywołanej do zreferowania rozwiązania przy tablicy. Rozwiązanie to jest oceniane przez Jury.

7. Zawodnik może być wyznaczony powtórnie jedynie wtedy, gdy wszyscy zawodnicy z jego drużyny byli już wyznaczeni do referowania.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny wywołanej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. N-ta zmiana powoduje odjęcie N punktów, bez względu na to, czy zadanie zostanie uznane za rozwiązane. Kapitan prosi wówczas drużynę przeciwną o wyznaczenie nowego referującego.

10. Czas na zreferowanie rozwiązania wynosi 15 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieje na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że zakończył referowanie, drużyna przeciwna zgłasza zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie **referujący** odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli Jury uznaje rozwiązanie za poprawne, punktuje je od 5 do 10 punktów. Jury może przyznać drużynie wywołującej te punkty, które zostały odjęte drużynie rozwiązującej, jeżeli usterki rozwiązania zostały przez tę drużynę zauważone.

13. Jeżeli Jury nie uznaje rozwiązania za poprawne, żadna z drużyn nie otrzymuje punktów, chyba, że drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie. Wtedy ma ona prawo do przedstawienia własnego rozwiązania na zasadach i przy punktacji określonych w pozycjach **6–12**.

14. Jeżeli drużyna wywołana nie przyjmie zadania, rozwiązuje je drużyna wywołująca zgodnie z zasadami określonymi w p. **6–12**. Jeśli jednak nie przedstawi ona poprawnego rozwiązania, otrzyma -10 (minus 10) punktów.

15. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

Spis treści

wydanie drugie, nieco poprawione