Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 1–15 czerwca 2003

(wydanie trzecie, uzupełnione o CPS Zawody Mat.)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 1–15 czerwca 2003

Dom wczasowy „Zgoda”, Zwardoń 45A
34-373 ZWARDOŃ
tel. 0-33-8646-328

Kadra:

Jerzy Bednarczuk
Lev Kourliandtchik
Adam Osękowski
Waldemar Pompe
Paweł Walter
Jarosław Wróblewski

Olimpiada Matematyczna w internecie:

`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 1 – 15 czerwca 2003 r. w Zwardoniu, w pensjonacie „Zgoda”. Kadrę obozu stanowili: Jerzy Bednarczuk, Lev Kourliandtchik, Adam Osękowski, Waldemar Pompe, Paweł Walter i Jarosław Wróblewski.

W dniach 2 – 5, 7, 9, 11, 13, 14 czerwca uczestnicy obozu rozwiązywali zadania indywidualnie, dnia 10 czerwca odbyły się zawody drużynowe, a 6 i 12 czerwca rozegrane zostały „mecze matematyczne” (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 162 punkty. Trzy najlepsze wyniki to: 142 punkty, 114 punktów i 104 punkty. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie.

Dla uczestników obozu zorganizowane zostały dwie wycieczki: 8 czerwca piesza wycieczka na Wielką Raczę, a 10 czerwca wycieczka pociągiem do Cadcy na Słowacji.

Bezpośrednio po obozie, czyli w dniach 15 – 18 czerwca 2003 r., w Żylinie na Słowacji, odbyły się III Czesko–Polsko–Słowackie Zawody Matematyczne. Gospodarzem zawodów był Vojtech Balint z Uniwersytetu w Żylinie.

W Zawodach Czesko–Polsko–Słowackich uczestniczyli uczniowie, którzy weszli w skład delegacji tych krajów na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną. Przewodniczącym delegacji polskiej był Rafał Łochowski, zastępcą przewodniczącego była Paulina Domagalska.

W ciągu dwóch dni każdy z zawodników rozwiązywał po 3 zadania, mając na to po 4,5 godziny.

Po południu 17 czerwca zorganizowana została wycieczka w Małą Fatrę.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu, szkice ich rozwiązań, dodatek przygotowany przez kadrę obozu oraz zadania z III Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami opracowanymi przez Rafała Łochowskiego.

Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych Olimpiady Matematycznej znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

Zadanie	liczba prac na 6 punktów	liczba prac na 5 punktów	liczba prac na 2 punkty	liczba prac na 0 punktów
1.	7	0	0	13
2.	9	0	0	11
3.	7	0	1	12
4.	10	1	2	7
5.	18	0	0	2
6.	14	1	0	5
7.	3	0	0	17
8.	3	0	0	17
9.	7	0	0	13
10.	6	0	0	14
11.	6	1	0	13
12.	9	1	0	10
13.	2	0	0	18
14.	15	0	1	4
15.	3	0	0	17
16.	9	8	0	3
17.	17	0	0	3
18.	0	1	0	19
19.	4	2	0	14
20.	7	0	0	13
21.	4	1	0	15
22.	18	0	0	2
23.	9	0	0	11
24.	4	7	0	9
25.	8	2	0	10
26.	5	0	5	10
27.	1	1	0	18

Uwaga: Każda praca była oceniana w skali 0, 2, 5, 6 punktów.

Treści zadań

Zawody indywidualne:

1. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje n różnych liczb naturalnych takich, że suma każdych dwóch spośród tych liczb jest podzielna przez ich różnicę.

2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{a^3}{b+c}}+\sqrt{\frac{b^3}{c+d}}+\sqrt{\frac{c^3}{d+a}}+\sqrt{\frac{d^3}{a+b}} \geqslant \frac{a+b+c+d}{\sqrt{2}}.$$

3. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Niech I i J będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD. Okrąg opisany na trójkącie IJD przecina prostą AB po raz drugi w punkcie S. Wykazać, że

$$BC+AS=AC+BS.$$

4. Rozstrzygnąć, dla jakich wartości k można wybrać k liczb z ciągu $1,2,3,\ldots,50$ w taki sposób, aby różnica każdych dwóch wybranych liczb była różna od 4, od 5 oraz od 9.

5. Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $a^5+b^5=a^3+b^3$. Wykazać, że

$$a^2+b^2 \leqslant 1+ab.$$

6. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie takie trójkąty prostokątne ACK i BCL, że

$$\sphericalangle AKC=\sphericalangle BLC=90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CAK=\sphericalangle CBL.$$

Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wykazać, że $MK=ML$.

7. Na tablicy napisana jest trójka liczb. Ruch polega na wybraniu jednej z nich i zastąpieniu jej sumą tej liczby i różnicy dwóch pozostałych liczb pomnożonej przez dowolną liczbę wymierną. Rozstrzygnąć, czy startując od trójki liczb 0, 1, $\sqrt{2}$, przy pomocy takich ruchów można otrzymać trójkę (nieuporządkowaną) liczb 0, $\sqrt{2}$, 2.

8. Niech $n \geqslant 3$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)\cdot\ldots\cdot(a_n+a_1+a_2)}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdot\ldots\cdot(a_n+a_1)} > (\sqrt{2})^n.$$

9. Punkty D i E leżą na boku AB trójkąta ABC. Proste przechodzące przez punkty D, E i równoległe odpowiednio do prostych BC, AC przecinają boki AC, BC odpowiednio w punktach F, G. Prosta FG przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q. Wykazać, że punkty D, E, P, Q leżą na jednym okręgu.

10. Liczby rzeczywiste $x_1,x_2,\ldots,x_n$ są nieujemne i nie większe od 1. Udowodnić, że

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_n-x_1)^2}{8n}.$$

11. Niech $a_1,a_2,\ldots,a_{11}$ oraz $b_1,b_2,\ldots,b_{11}$ będą permutacjami zbioru $\{1,\ldots,11\}$. Wykazać, że wśród liczb $a_1b_1,a_2b_2,\ldots,a_{11}b_{11}$ są dwie liczby dające tę samą resztę z dzielenia przez 11.

12. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Punkty I i J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD. Punkty K i L są odpowiednio środkami okręgów dopisanych do trójkątów ACD i BCD, stycznych odpowiednio do odcinków AD i BD. Dowieść, że proste IJ, AB i KL są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

13. Ze zbioru $\{1,2,\ldots,2003\}$ wybrano $2k$ liczb i utworzono z nich k rozłącznych par w taki sposób, że sumy liczb występujących w każdej parze są różne i nie przekraczają 2003. Rozstrzygnąć, dla jakiej największej wartości k jest to możliwe.

14. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{4\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n}}}} < 2.$$

15. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC. Punkt K jest symetryczny do punktu F względem prostej DE. Dowieść, że punkt K leży na dwusiecznej kąta BAC.

16. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu xyz dla trójek liczb rzeczywistych x, y, z spełniających warunki:

$$xy+yz+zx=1 \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=0.$$

17. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^3}{c^2}+\frac{b^3}{a^2}+\frac{c^3}{b^2} \geqslant a+b+c.$$

18. Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej właśnie kolejności na okręgu. Część wspólna trójkątów ACE i BDF jest sześciokątem wypukłym. Dowieść, że główne przekątne tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

19. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=n \\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n=n \end{cases}$$

w liczbach zespolonych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

20. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c takich, że $a^2+b^2+c^2=1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

21. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, takie trójkąty prostokątne ACK i BCL, że

$$\sphericalangle AKC=\sphericalangle BLC=90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CAK=\sphericalangle CBL.$$

Odcinki BK i AL przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $CP \perp KL$.

22. Dowieść, że kwadratowej szachownicy o boku 43 z usuniętym środkowym polem nie można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×6.

23. Liczby p oraz $p+2$ są pierwsze. Dowieść, że istnieje ciąg kolejnych liczb całkowitych (więcej niż jednej), których iloczyn przy dzieleniu przez $p(p+2)$ daje resztę p^2+p-1.

24. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Jego przekątne przecinają się w punkcie P, a punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i AD. Proste k, l, m przechodzą odpowiednio przez punkty P, M, N i są prostopadłe odpowiednio do prostych AB, AC, BD. Dowieść, że jeśli proste k, l, m przecinają się w jednym punkcie, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

25. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażenia $5ab+3bc+4ca$ dla liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c spełniających równości

$$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ 5a^2+5c^2+6ac=80 \\ 5b^2+5c^2+8bc=125 \end{cases}$$

26. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór trójkątów równobocznych. Figura, która jest sumą tych trójkątów, ma pole 16. Dowieść, że spośród danych trójkątów można wybrać pewną liczbę trójkątów o rozłącznych wnętrzach i sumie pól nie mniejszej niż 1.

27. W Mistrzostwach Świata w Brydżu Sportowym z Dziadkiem bierze udział 211 zawodników. W każdym rozdaniu gra trzech zawodników. Dowieść, że można tak ustalić harmonogram rozgrywek MŚwBSzD, aby każdych dwóch zawodników spotkało się przy rozgrywce dokładnie raz.

Zawody drużynowe:

1. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości

$$AB=DE, \quad BC=EF \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABC=\sphericalangle DEF.$$

Wykazać, że środki przekątnych AD, BE i CF pokrywają się lub są wierzchołkami trójkąta podobnego do trójkąta ABC.

2. Liczba $n>2^{15}$ jest sumą sześcianów dwóch względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich, a także jest sumą piątych potęg dwóch względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich. Dowieść, że liczba n ma dzielnik pierwszy postaci $30k+1$.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających nierówność

$$x^3+y^3\leqslant 2xy$$

zachodzi nierówność $x^n+y^n\leqslant 2$.

Pierwszy Mecz Matematyczny:

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka naturalna potęga liczby 5, która w zapisie dziesiętnym ma na stu ostatnich miejscach co najmniej 30 kolejnych zer.

2. Liczba naturalna k ma następującą własność: jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez k, to i liczba zapisana wspak też jest podzielna przez k. Wykazać, że liczba k jest dzielnikiem liczby 99.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka 2003-cyfrowa liczba naturalna, różna od liczby napisanej wspak, która nie jest kwadratem liczby naturalnej i taka, że iloczyn tej liczby i liczby napisanej wspak jest kwadratem liczby naturalnej.

4. Okrąg o jest wpisany w trójkąt ABC. Okrąg przechodzący przez punkty B i C jest styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie D; okrąg przechodzący przez punkty C i A jest styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie E, zaś okrąg przechodzący przez punkty A i B jest styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie F. Wykazać, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna $n>1$ niepodzielna przez 10, której zapis dziesiętny jest początkowym fragmentem zapisu dziesiętnego liczby n^2.

6. Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają warunki:

$$0<a\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant c, \quad a\leqslant b\leqslant c,$$
$$x+y+z=a+b+c,$$
$$xyz=abc.$$

Wykazać, że $a=x$, $b=y$, $c=z$.

7. Liczby a, b, c, d, e są całkowite, przy czym liczby $a+b+c+d+e$ oraz $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ są podzielne przez liczbę nieparzystą n. Wykazać, że liczba

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$$

jest podzielna przez n.

8. Dany jest czworokąt wpisany w okrąg. Przekątna tego czworokąta dzieli go na dwa trójkąty. Wykazać, że suma promieni okręgów wpisanych w te trójkąty nie zależy od wyboru przekątnej.

9. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}.$$

10. Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$. Wyznaczyć największą wartość wyrażenia

$$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n$$

dla wszystkich ciągów $a_1,a_2,\ldots,a_n$ liczb rzeczywistych spełniających warunek

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1.$$

11. Dany jest wielokąt wypukły o polu S i obwodzie P. Wykazać, że można przykryć tym wielokątem koło o promieniu S/P.

Drugi Mecz Matematyczny:

1. Dowieść, że licznik sumy
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{131}$$
zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest liczbą złożoną.

2. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y równanie
$$x^4+x^3+x^2+x+1=y^2\,.$$

3. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają nierówność
$$a^8+b^8+c^8\leqslant 2a^4b^4+2b^4c^4+2c^4a^4\,.$$
Dowieść, że
$$a^6+b^6+c^6\leqslant 2a^3b^3+2b^3c^3+2c^3a^3\,.$$

4. Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne zewnątrznie. Dwie wspólne styczne do tych okręgów – jedna wewnętrzna, druga zewnętrzna – są styczne do okręgu o_1 w punktach A i B, zaś do okręgu o_2 w punktach C i D. Wykazać, że proste AB i CD przecinają się na prostej łączącej środki okręgów o_1 i o_2.

5. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele trójwyrazowych ciągów arytmetycznych, których wyrazy są kwadratami parami względnie pierwszych liczb całkowitych.

6. Danych jest $4m$ monet, z których równo połowa jest fałszywych. Waga prawdziwych monet jest jednakowa. Waga fałszywych monet też jest jednakowa, ale są one lżejsze od prawdziwych. Jak przy pomocy wagi szalkowej rozpoznać wszystkie fałszywe monety wykonując nie więcej niż $3m-1$ ważeń?

7. Na sferze wybrano takie punkty A, B, C, D, E, że odcinki AB i CD przecinają się w punkcie F, a punkty A, C, F są równoodległe od punktu E. Udowodnić, że proste BD i EF są prostopadłe.

8. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n o następującej własności: Spośród liczb
$$n^2+1,\ n^2+2,\ n^2+3,\ \ldots,\ n^2+2n$$
można wybrać niepusty zbiór liczb, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

9. Dowieść, że zbiór liczb $\{1,2,3,\ldots,200\}$ można podzielić na 100 takich par liczb (a_i,b_i), że $a_i<b_i$ oraz każde dwie spośród 200 liczb

$$a_i+b_i,\quad b_i-a_i,\quad i=1,2,3,\ldots,100$$

są różne.

10. Niech d będzie najmniejszą z odległości pomiędzy przeciwległymi krawędziami czworościanu, natomiast niech h będzie najmniejszą z wysokości tego czworościanu. Udowodnić, że $2d>h$.

11. Sześcian o krawędzi 2003 podzielono na sześciany jednostkowe, zwane dalej polami. W sześcianie tym umieszczono prostopadłościenne klocki o wymiarach $1\times 1\times 4$ o rozłącznych wnętrzach tak, że każdy klocek pokrywa 4 pola. Dowieść, że istnieje pole nieleżące przy brzegu sześcianu, które nie jest pokryte przez żaden klocek.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne:

1. Dla danej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ wyznaczyć rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} \max\{1,x_1\}=x_2 \\ \max\{2,x_2\}=2x_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \max\{n-1,x_{n-1}\}=(n-1)\,x_n \\ \max\{n,x_n\}=nx_1 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku B ma miarę większą od $45°$. Niech D, E, F będą spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C. Niech ponadto K będzie takim punktem odcinka AF, że $\sphericalangle DKF=\sphericalangle KEF$. Udowodnić, że

(a) taki punkt K zawsze istnieje;
(b) zachodzi równość $KD^2=FD^2+AF\cdot BF$.

3. Dla liczb p, q, r z przedziału $\left[\frac{2}{5};\frac{5}{2}\right]$ zachodzi równość $pqr=1$. Wykazać, że istnieją takie liczby dodatnie a, b, c oraz takie dwa trójkąty o równych polach, których boki mają odpowiednio długości a, b, c i pa, qb, rc.

4. Wewnątrz trójkąta ABC, na środkowej wychodzącej z wierzchołka C, znajduje się punkt P. Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostej AP z bokiem BC, a przez Y punkt przecięcia prostej BP z bokiem AC. Wykazać, że jeżeli czworokąt $ABXY$ można wpisać w okrąg, to trójkąt ABC jest równoramienny.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których każda z liczb

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}$$

jest parzysta.

6. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$f\left(f(x)+y\right) = 2x + f\left(f(y)-x\right) .$$

Szkice rozwiązań

Zawody indywidualne:

1. Ponieważ liczba $a+b$ jest podzielna przez liczbę $a-b$, więc liczba $2a$ jest podzielna przez $a-b$. Ciąg złożony z dwóch liczb 1, 2 spełnia warunki zadania. Niech ciąg liczb naturalnych $x_1,x_2,\ldots,x_n$ spełnia warunki zadania. Wtedy liczba $2x_1x_2\ldots x_n$ jest podzielna przez różnicę każdych dwóch liczb z ciągu $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Niech $p=x_1x_2\ldots x_n$. Wówczas ciąg złożony z $n+1$ liczb

$$p+x_1,p+x_2,\ldots,p+x_n,p$$

spełnia warunki zadania.

2. Niech $s=a+b+c+d$. Korzystając z nierówności Jensena dla funkcji wypukłej $f(x)=x^{3/2}$ mamy

$$\frac{1}{2s}\sum\sqrt{\frac{a^3}{b+c}}=\sum\frac{b+c}{2s}\cdot\left(\frac{a}{b+c}\right)^{3/2}\geqslant\left(\sum\frac{b+c}{2s}\cdot\frac{a}{b+c}\right)^{3/2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Uwaga: Nierówność w zadaniu jest szczególnym przypadkiem nierówności Radona: Jeśli $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$, p są liczbami dodatnimi, to zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{p+1}}{b_i^p}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{p+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^{p}}.$$

3. Niech $K=AI\cap BJ$ oraz niech M, N, Q będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów I, J, K na prostą AB. Wówczas

$$\begin{aligned}MQ=AQ-AM=\tfrac{1}{2}(AB+AC-BC)-\tfrac{1}{2}(AD+AC-CD)=\\=\tfrac{1}{2}(BD+CD-BC)=DN.\end{aligned}$$

Z podobieństwa trójkątów prostokątnych IMD i DNJ oraz z powyższej równości wynika, że trójkąty prostokątne IMQ i QNJ są podobne. Zatem uzyskujemy $\sphericalangle IQJ=90^\circ=\sphericalangle IDJ$, co dowodzi, że punkty I, J, D, Q leżą na jednym okręgu. Stąd $S=Q$. Pozostaje zauważyć, że $AQ+BC=BQ+AC$.

4. Następujący zbiór złożony z 16 liczb

1, 2, 3, 4, 14, 15, 16, 17, 27, 28, 29, 30, 40, 41, 42, 43

spełnia warunki zadania. Udowodnimy, że nie istnieje zbiór składający się z 17 liczb spełniający warunki zadania.

Rozpatrzmy 17 liczb naturalnych $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{17} \leqslant 50$ i podzielmy je na 4 zbiory w następujący sposób. Do pierwszego zbioru zaliczymy liczby z przedziału $[1,13]$, do drugiego z przedziału $[14,26]$, do trzeciego z przedziału $[27,39]$ i wreszcie do czwartego z przedziału $[40,50]$. W pewnym zbiorze znajdzie się więc pięć liczb $b_1 < b_2 < \ldots < b_5$. Wówczas liczby

$$c_1 = b_2 - b_1\,, \quad c_2 = b_3 - b_1\,, \quad c_3 = b_4 - b_1\,, \quad c_4 = b_5 - b_1$$

spełniają nierówności $0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4 \leqslant 12$. Jeżeli któraś z liczb c_1, c_2, c_3, c_4 jest równa 4, 5 lub 9, to zadanie jest rozwiązane. Przyjmijmy więc, że żadna z tych liczb nie jest równa 4, 5, 9.

Rozpatrzmy następujące zbiory: $\{1,6,10\}$, $\{2,7,11\}$, $\{3,8,12\}$. W jednym z nich znajdą się dwie spośród liczb c_1, c_2, c_3, c_4. Wówczas różnica tych dwóch liczb jest równa 4, 5 lub 9.

5. Mamy:

$$1 + ab - a^2 - b^2 = \frac{a^5 + b^5}{a^3 + b^3} + ab - a^2 - b^2 =$$

$$= \frac{a^4 b + b^4 a - a^3 b^2 - a^2 b^3}{a^3 + b^3} = \frac{ab(a-b)^2(a+b)}{a^3 + b^3} \geqslant 0\,.$$

6. *Sposób* I: Niech k, l będą prostymi przechodzącymi odpowiednio przez punkty A, B i równoległymi odpowiednio do boków BC, AC. Niech ponadto $P = k \cap LC$ oraz $Q = l \cap KC$. Wówczas punkty K, L, P, Q leżą na jednym okręgu. Środkiem tego okręgu jest punkt przecięcia symetralnych odcinków KQ i PL, czyli punkt M. Stąd $KM = LM$.

Sposób II: Na boku AB trójkąta ABC budujemy po jego zewnętrznej stronie taki trójkąt równoramienny ABO, że $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \sphericalangle CAK$. Z podobieństwa trójkątów prostokątnych AKC i AMO wnioskujemy, że trójkąty ACO i AKM są podobne. Analogicznie trójkąty BCO i BLM są podobne. Zatem

$$\frac{KM}{CO} = \frac{AM}{AO} = \frac{BM}{BO} = \frac{LM}{CO}\,,$$

skąd $KM = LM$.

Sposób III: Niech P i Q będą odpowiednio środkami boków AC i BC. Wówczas $PM = CQ = LQ$ oraz $QM = CP = KP$. Ponadto $\sphericalangle KPM = \sphericalangle LQM$. Zatem trójkąty KPM i LQM są przystające, skąd uzyskujemy $KM = LM$.

Uwaga: Z powyższych rozwiązań wynika, że $\sphericalangle KML = 2\sphericalangle CAK$.

7. Wszystkie liczby, które można uzyskać poprzez opisane w zadaniu ruchy mają postać $a + b\sqrt{2}$, gdzie a i b są liczbami wymiernymi, przy czym takie przedstawienie jest jednoznaczne, gdyż liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. Każdej liczbie postaci $a+b\sqrt{2}$ przyporządkowujemy punkt (a,b) na płaszczyźnie i badamy, jak zmienia się pole trójkąta odpowiadającego trzem napisanym na tablicy liczbom.

Dodanie do jednej z liczb różnicy dwóch innych liczb pomnożonej przez liczbę wymierną r odpowiada przesunięciu jednego z wierzchołków trójkąta o wektor równoległy do przeciwległego boku. Przy takim działaniu nie zmienia się pole trójkąta. Liczbom 0, 1, $\sqrt{2}$ odpowiada trójkąt o polu $\frac{1}{2}$, zaś liczbom 0, 2, $\sqrt{2}$ trójkąt o polu 1. Zatem uzyskanie drugiego zbioru liczb z pierwszego nie jest możliwe.

8. Mamy:

$$(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)\ldots(a_n+a_1+a_2)=$$

$$=(a_1+\tfrac{1}{2}a_2+\tfrac{1}{2}a_2+a_3)(a_2+\tfrac{1}{2}a_3+\tfrac{1}{2}a_3+a_4)\ldots(a_n+\tfrac{1}{2}a_1+\tfrac{1}{2}a_1+a_2)\geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{a_1+\tfrac{1}{2}a_2}\cdot\sqrt{a_3+\tfrac{1}{2}a_2}\cdot 2\sqrt{a_2+\tfrac{1}{2}a_3}\cdot\sqrt{a_4+\tfrac{1}{2}a_3}\cdot\ldots\cdot 2\sqrt{a_n+\tfrac{1}{2}a_1}\cdot\sqrt{a_2+\tfrac{1}{2}a_1}=$$

$$=2^n\cdot\sqrt{(a_1+\tfrac{1}{2}a_2)(a_2+\tfrac{1}{2}a_1)}\cdot\sqrt{(a_2+\tfrac{1}{2}a_3)(a_3+\tfrac{1}{2}a_2)}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(a_n+\tfrac{1}{2}a_1)(a_1+\tfrac{1}{2}a_n)}>$$

$$>2^n\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)^2}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}(a_2+a_3)^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}(a_n+a_1)^2}=$$

$$=(\sqrt{2})^n(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdot\ldots\cdot(a_n+a_1)\,.$$

9. Jeśli $FG\parallel AB$, to trójkąty ADE i EBG są przystające. Wtedy czworokąt o wierzchołkach D, E, P, Q jest trapezem równoramiennym. Załóżmy z kolei, że proste FG i AB nie są równoległe i przecinają się w punkcie X. Wówczas

$$\frac{XD}{XB}=\frac{FD}{GB}=\frac{FA}{GE}=\frac{XA}{XE}\,.$$

Zatem $XD\cdot XE=XA\cdot XB=XP\cdot XQ$, co dowodzi tezy.

10. Mamy:

$$\frac{(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_n-x_1)^2}{8n}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2+\ldots+(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_1})^2(\sqrt{x_n}+\sqrt{x_1})^2}{8n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2+\ldots+(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_1})^2}{2n}=$$

$$=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_2x_3}+\ldots+\sqrt{x_nx_1}}{n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\,.$$

11. Przypuśćmy, że liczby $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{11}b_{11}$ dają różne reszty z dzielenia przez 11, będące odpowiednio liczbami $0, 1, 2, \ldots, 10$. Rozpatrzmy liczbę

$$A = (a_2b_2)\cdot(a_3b_3)\cdot\ldots\cdot(a_{11}b_{11}).$$

Licząc resztę z dzielenia liczby A przez 11 na dwa sposoby, uzyskamy sprzeczność:

Z jednej strony liczba A daje taką samą resztę z dzielenia przez 11, co liczba $10!$, czyli -1. Z drugiej strony, $a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_{11} = b_2b_3\cdot\ldots\cdot b_{11} = 10!$, skąd $A = (10!)^2$. Zatem liczba A daje resztę 1 z dzielenia przez 11.

12. *Sposób* I: Niech punkt P będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś Q środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC stycznego do boku AB. Wówczas punkt C jest wspólnym punktem prostych IK, JL i PQ. Z twierdzenia Desargues'a zastosowanego do trójkątów IJP i KLQ wynika bezpośrednio teza zadania.

Sposób II: Niech o_I, o_J, o_K, o_L będą rozważanymi w treści zadania okręgami o środkach odpowiednio I, J, K, L. Rozpatrzmy cztery stożki s_I, s_J, s_K, s_L o podstawach o_I, o_J, o_K, o_L i wysokościach równych promieniowi podstawy. Niech S_I, S_J, S_K, S_L będą wierzchołkami tych stożków, przy czym zakładamy, że wszystkie one leżą po tej samej stronie płaszczyzny ABC. Proste S_IS_K i S_JS_L przecinają się w punkcie C, co dowodzi, że punkty S_I, S_J, S_K, S_L leżą w jednej płaszczyźnie π, nierównoległej do płaszczyzny ABC. Jeśli wspólna prosta płaszczyzn ABC i π jest równoległa do prostej AB, to proste IJ, AB i KL są równoległe. W przeciwnym razie proste te przechodzą przez punkt wspólny płaszczyzny π i prostej AB.

13. Oznaczmy przez s sumę $2k$ liczb należących do tych k par. Wówczas zachodzą nierówności

$$1+2+\ldots+2k \leqslant s \leqslant 2003+2002+\ldots+(2004-k),$$

skąd $k(2k+1) \leqslant \frac{1}{2}k(4007-k)$, czyli $k \leqslant 801$.

Jednocześnie następujących 801 par spełnia warunki zadania:

$$(1,1203);\ (2,1204);\ \ldots\ ;\ (400,1602);\ (401,802);\ (402,803);\ \ldots\ ;\ (801,1202).$$

Zatem największą możliwą wartością k jest 801.

14. Wykażemy więcej, a mianowicie, że

$$\sqrt[m]{m\cdot\sqrt[m+1]{(m+1)\cdot\sqrt[m+2]{(m+2)\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n}}}} < 2 \tag{1}$$

dla dowolnych liczb naturalnych $n \geqslant m \geqslant 2$.

Dla $m = n$ nierówność (1) jest prawdziwa, bowiem $\sqrt[n]{n} < 2$. Ponadto, jeśli nierówność (1) jest prawdziwa dla pewnego m spełniającego $2 < m \leqslant n$, to jest ona również prawdziwa dla $m-1$, gdyż

$$\sqrt[m-1]{(m-1)\cdot\sqrt[m]{m\cdot\sqrt[m+1]{(m+1)\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n}}}} < \sqrt[m-1]{(m-1)\cdot 2} \leqslant 2\,.$$

Zatem nierówność (1) jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant m \geqslant 2$.

15. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Przyjmijmy, że punkty B, E, F leżą w tej właśnie kolejności na prostej BC – dowód w drugim przypadku przebiega analogicznie. Niech $P = AI \cap DE$. Z zadania 3 zamieszczonego w *Dodatku* wynika, że punkty I, B, P, E leżą na jednym okręgu. Stąd

(1) $$\sphericalangle EPI = \sphericalangle EBI\,.$$

Ponieważ $\sphericalangle APB = 90° = \sphericalangle AFB$, więc punkty A, B, P, F leżą na jednym okręgu. Zatem $\sphericalangle APF = \sphericalangle ABF$. Równość ta wraz z równością (1) pociągają $\sphericalangle FPD = \sphericalangle APD$, skąd bezpośrednio wynika teza.

16. Udowodnimy, że jedyną możliwą wartością iloczynu xyz jest 0. Dla zupełności rozwiązania musimy podać przykład takich liczb x, y, z, dla których są spełnione warunki zadania. Takimi liczbami są na przykład $x=0$, $y=2$, $z=1/2$. Dalsze rozumowanie przeprowadzimy na dwa sposoby.

Sposób I: Z drugiej równości uzyskujemy

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=0\,.$$

Stąd

$$x+y+z-(xy+yz+zx)(x+y+z)+3xyz+xyz(xy+yz+zx)=0\,.$$

Na mocy pierwszej równości z treści zadania otrzymujemy $4xyz=0$, czyli $xyz=0$.

Sposób II: Z równości $xy+yz+zx=1$ wynika, że istnieją liczby rzeczywiste α, β, γ należące do przedziału $(-\pi,\pi)$, dla których $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ oraz

$$x=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\,,\quad y=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\,,\quad z=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\,.$$

Wówczas

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=0\,.$$

Jeśli na przykład $\operatorname{tg}\alpha=0$, to $\alpha=0$, skąd wynika, że $x=0$. Zatem jedyną możliwą wartością iloczynu xyz jest 0.

17. *Sposób* I: Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną, a średnią geometryczną uzyskujemy

$$9\cdot\frac{a^3}{c^2}+4\cdot\frac{b^3}{a^2}+6\cdot\frac{c^3}{b^2}\geqslant 19\cdot\sqrt[19]{\left(\frac{a^3}{c^2}\right)^9\cdot\left(\frac{b^3}{a^2}\right)^4\cdot\left(\frac{c^3}{b^2}\right)^6}=19a\,.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$4\cdot\frac{a^3}{c^2}+6\cdot\frac{b^3}{a^2}+9\cdot\frac{c^3}{b^2}\geqslant 19c,$$

$$6\cdot\frac{a^3}{c^2}+9\cdot\frac{b^3}{a^2}+4\cdot\frac{c^3}{b^2}\geqslant 19b.$$

Dodając stronami powyższe nierówności otrzymujemy tezę.

Sposób II: Ponieważ ciągi liczb (a^3,b^3,c^3) oraz $(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2})$ są przeciwnie uporządkowane, mamy:

$$a+b+c=a^3\cdot\frac{1}{a^2}+b^3\cdot\frac{1}{b^2}+c^3\cdot\frac{1}{c^2}\leqslant a^3\cdot\frac{1}{c^2}+b^3\cdot\frac{1}{a^2}+c^3\cdot\frac{1}{b^2}.$$

Sposób III: Niech $f(x)=x^3$. Ponieważ funkcja f jest wypukła na przedziale $(0,\infty)$, więc na mocy nierówności Jensena otrzymujemy

$$\frac{c}{a+b+c}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^3+\frac{a}{a+b+c}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3+\frac{b}{a+b+c}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^3\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{c}+\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{b}{a}+\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{b}\right)^3=1.$$

18. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$FB\cap AC=K,\quad AC\cap BD=L,\quad BD\cap CE=M,$$
$$CE\cap DF=N,\quad DF\cap EA=O,\quad EA\cap FB=P,$$

a ponadto $BE\cap DA=Q$, $DA\cap FC=R$, $FC\cap BE=S$. Na mocy twierdzenia Pascala punkty K, Q, N są współliniowe. Należy zatem wykazać, że proste QN, RP i SL przecinają się w jednym punkcie. To jednak wynika bezpośrednio z trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy zastosowanej do trójkątów DQE, FRA, BSC oraz QRS.

19. Niech $P(t)=(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_n)$. Wówczas z danych w treści zadania równań wnioskujemy, że

$$0=P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)=nP(1).$$

Zatem jedna z liczb $x_1,x_2,\ldots,x_n$ jest równa 1. Przechodząc od układu z n niewiadomymi do układu z $n-1$ niewiadomymi i powtarzając powyższe rozumowanie otrzymujemy, że $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$.

20. *Sposób* I: Niech $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$ dla $x\in(0,1)$. Funkcja g zadana wzorem

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x & \text{dla } x\in(0,\frac{1}{3}),\\ f(x) & \text{dla } x\in[\frac{1}{3},1),\end{cases}$$

jest wypukłą powłoką funkcji f. Mamy więc

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2} \geqslant g(a^2)+g(b^2)+g(c^2) \geqslant 3g\big(\tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\big) = 3g(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Sposób II: Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (0,1)$ zachodzi nierówność

$$\frac{x}{1-x^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}\,x^2.$$

Stąd $\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

21. Na boku AB trójkąta ABC budujemy po jego zewnętrznej stronie taki trójkąt równoramienny ABO, że $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \sphericalangle CAK$. Z zamieszczonego w Dodatku zadania 2 wynika, że punkty C, P, O leżą na jednej prostej. Ze sposobu II rozwiązania zadania 6 wnioskujemy, że kąt między prostymi CO i KM jest równy $\sphericalangle CAK$. Na mocy uwagi po rozwiązaniu zadania 6 uzyskujemy równość $\sphericalangle MKL = 90^\circ - \sphericalangle CAK$. Stąd wynika, że proste CO i KL są prostopadłe.

22. Numerujemy pola pierwszego rzędu cyklicznie: 1, 2, 3, 5, 4, 6, 1, … . W każdym kolejnym rzędzie numery pól zwiększamy o 1 modulo 6. Środkowe pole ma wówczas numer 2.

Każdy prostokąt pokrywa pola o różnych numerach, a tymczasem szachownica zawiera 309 pól z numerem 1, 307 pól z numerem 2, 308 pól z każdym z numerów 3, 4, 5, 6.

23. Niech $q=p+2$. Szukany iloczyn powinien dawać przy dzieleniu przez p resztę $p-1$, a przy dzieleniu przez q resztę 1.

Rozważmy ciąg kolejnych $p-1$ liczb, które przy dzieleniu przez p dają reszty $1, 2, 3, \ldots, p-1$, a przy dzieleniu przez q reszty $2, 3, 4, \ldots, q-2$. Wówczas na mocy twierdzenia Wilsona ich iloczyn daje przy dzieleniu przez p i q takie reszty, jak żądane w zadaniu.

Możliwość wyboru kolejnych liczb spełniających podany warunek wynika z chińskiego twierdzenia o resztach. Takie liczby można wskazać: są to kolejne liczby począwszy od $\frac{1}{2}(p^2+p)+1$.

24. Załóżmy najpierw, że przekątne AC i BD nie są prostopadłe. Niech AK i BL będą odpowiednio wysokościami w trójkącie ABP. Niech X i Y będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów M i N odpowiednio na proste AC i BD. Wówczas

$$\frac{LP}{LX}=\frac{KP}{KY}, \quad \text{skąd} \quad \frac{LP}{LC}=\frac{KP}{KD}, \quad \text{czyli} \quad \frac{LP}{PC}=\frac{KP}{PD}.$$

Zatem

$$\frac{BP}{AP}=\frac{LP}{KP}=\frac{PC}{PD},$$

co oznacza, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

W przypadku, gdy przekątne AC i BD są prostopadłe, proste l i m przecinają się w punkcie Q będącym środkiem odcinka CD. Wówczas

$$\measuredangle ACD = \measuredangle CPQ = \measuredangle ABD,$$

co oznacza, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

25. Rozważmy takie punkty płaszczyzny A, B, C, O, że $AO=a$, $BO=b$, $CO=c$, $\measuredangle AOB = 90^\circ$, $\sin\measuredangle AOC = 4/5$, przy czym kąty AOC i BOC są rozwarte. Wówczas z podanych w zadaniu równości na mocy twierdzenia cosinusów mamy $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$. Obliczając pole trójkąta ABC dochodzimy do równości

$$5ab+3bc+4ca=60\,.$$

Uwaga: Liczbami spełniającymi dane w zadaniu warunki są

$$a=\frac{6}{\sqrt{13}},\quad b=\frac{9}{\sqrt{13}},\quad c=\frac{10}{\sqrt{13}}\,.$$

26. Wybierzmy największy z danych trójkątów i oznaczmy jego bok przez a. Każdy trójkąt, którego wnętrze ma punkty wspólne z wnętrzem wybranego trójkąta, jest zawarty w otoczeniu wybranego trójkąta o promieniu a. Otoczenie to ma pole $a^2(3+\sqrt{3}/4+\pi) < 16(a^2\sqrt{3}/4)$.

Usuńmy z dalszych rozważań wybrany trójkąt oraz wszystkie trójkąty przecinające jego wnętrze. Pole sumy rozważanych trójkątów zmniejszy się o mniej niż 16-krotność pola wybranego trójkąta.

Postępując tak dalej otrzymamy zbiór trójkątów spełniających warunki zadania.

27. Ponieważ 211 jest liczbą pierwszą postaci $6k+1$, więc istnieje taka liczba r, że $1<r<211$ oraz $r^3\equiv 1 \pmod{211}$. Liczbę r można wskazać korzystając z równości

$$211=14^2+14+1=\frac{14^3-1}{14-1}\,,$$

która daje $r=14$.

Podzielmy zbiór $\{1,2,3,\ldots,210\}$ na 70 nieuporządkowanych trójek liczb $\{a,b,c\}$ takich, że

$$b\equiv 14a \pmod{211} \quad\text{oraz}\quad c\equiv 14b \pmod{211}\,.$$

Usuńmy połowę trójek tak, aby z każdych dwóch trójek postaci

$$\{a,\,b,\,c\} \quad\text{oraz}\quad \{211-a,\,211-b,\,211-c\}$$

pozostawić dokładnie jedną. W każdej z pozostawionych trójek ustalmy porządek. Mamy więc 35 uporządkowanych trójek liczb o następujących własnościach:

1. suma liczb w każdej trójce jest podzielna przez 211,

2. dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant 210$ dokładnie jedna z liczb i oraz $211-i$ występuje wśród 105 elementów rozważanych trójek i przy tym występuje ona tylko raz.

Ponumerujmy zawodników liczbami 0, 1, 2, ..., 210. Dla każdej trójki (a, b, c) i każdej liczby $0 \leqslant i < 211$ planujemy rozdanie $R(i,a,b,c)$, w którym zagrają zawodnicy o numerach i, $i +_{211} a$, $i +_{211} a +_{211} b$, gdzie $+_{211}$ oznacza dodawanie modulo 211. Wówczas zawodnicy o numerach i, j spotykają się dokładnie raz, a mianowicie w rozdaniu:

$R(i,a,b,c)$, gdy $i+a \equiv j \pmod{211}$,
$R(j,a,b,c)$, gdy $j+a \equiv i \pmod{211}$,
$R(k,a,b,c)$, gdy $i+b \equiv j \pmod{211}$, $k \equiv j+c \pmod{211}$,
$R(k,a,b,c)$, gdy $j+b \equiv i \pmod{211}$, $k \equiv i+c \pmod{211}$,
$R(i,a,b,c)$, gdy $j+c \equiv i \pmod{211}$,
$R(j,a,b,c)$, gdy $i+c \equiv j \pmod{211}$.

Zawody drużynowe:

1. Oznaczmy przez O punkt przecięcia symetralnych odcinków AD i BE. Wówczas z danych w treści zadania równości wynika, że punkt O jest środkiem obrotu o kąt $0 < \alpha < 360°$, przekształcającego trójkąt ABC na trójkąt DEF. Obracając trójkąt ABC wokół punktu O o kąt $\alpha/2$, a następnie przekształcając otrzymany obraz przez jednokładność o środku O i skali $\cos(\alpha/2)$ otrzymamy trójkąt o wierzchołkach będących środkami odcinków AD, BE i CF (gdy $\alpha \neq 180°$) lub jeden punkt (gdy $\alpha = 180°$).

2. Fakt 1: Jeżeli liczba pierwsza p nie będąca postaci $6k+1$, jest dzielnikiem liczby a^3+b^3, to jest ona dzielnikiem liczby $a+b$.

Dowód: Jeżeli $p = 3k+2$, to liczba $q = \frac{2(p-1)+1}{3}$ jest całkowita. Z kongruencji $a^3 \equiv -b^3 \pmod{p}$ wynika $a^{3q} \equiv -b^{3q} \pmod{p}$, co na mocy małego twierdzenia Fermata jest równoważne kongruencji $a \equiv -b \pmod{p}$.

Dla $p=3$ na mocy małego twierdzenia Fermata kongruencja $a^3 \equiv -b^3 \pmod{3}$ jest równoważna $a \equiv -b \pmod{3}$.

Fakt 2: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, przy czym $\mathrm{NWD}\,(a+b, a^2-ab+b^2)$ jest równe 1 lub 3 dla a i b względnie pierwszych.

Dowód: Fakt ten wynika z równości $a^2-ab+b^2 = (a+b)(a-2b)+3b^2$.

Fakt 3: Liczba a^2-ab+b^2 nie jest podzielna przez 9, jeżeli liczby a i b nie są obie podzielne przez 3.

Dowód: Fakt ten wynika z równości $a^2-ab+b^2 = (a+b)^2-3ab$.

Fakt 4: Niech $n = a^3+b^3 = q_3 r_3$, gdzie q_3 jest iloczynem liczb pierwszych postaci $6k+1$, a r_3 jest iloczynem liczb nie będących tej postaci. Wtedy $r_3 < 6\sqrt[3]{n}$.

Dowód: Na mocy faktów 1-3 liczba r_3 jest dzielnikiem liczby
$$3(a+b) \leqslant 6\max(a,b) < 6\sqrt[3]{n}\,.$$

Fakt 5: Jeżeli liczba pierwsza p nie będąca postaci $10k+1$, jest dzielnikiem liczby a^5+b^5, to jest ona dzielnikiem liczby $a+b$.

Dowód: Jeżeli $p=5k+r$, gdzie r jest jedną z liczb 3, 2, 4, to liczba $q=\frac{i(p-1)+1}{5}$ jest całkowita dla i odpowiednio równego 2, 4, 3. Z kongruencji $a^5 \equiv -b^5 \pmod{p}$ wynika $a^{5q} \equiv -b^{5q} \pmod{p}$, co na mocy małego twierdzenia Fermata jest równoważne kongruencji $a \equiv -b \pmod{p}$.

Dla $p=5$ na mocy małego twierdzenia Fermata kongruencja $a^5 \equiv -b^5 \pmod{5}$ jest równoważna $a \equiv -b \pmod{5}$.

Fakt 6: $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$, przy czym
$$\mathrm{NWD}\,(a+b, a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$
jest równe 1 lub 5 dla a i b względnie pierwszych.

Dowód: Fakt ten wynika z równości
$$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4=(a+b)(a^3-2a^2b+3ab^2-4b^3)+5b^4\,.$$

Fakt 7: Liczba $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$ nie jest podzielna przez 25, jeżeli a i b nie są obie podzielne przez 5.

Dowód: Fakt ten wynika z równości
$$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4=(a+b)^4-5ab(a+b)^2+5a^2b^2\,.$$

Fakt 8: Niech $n=a^5+b^5=q_5r_5$, gdzie q_5 jest iloczynem liczb pierwszych postaci $10k+1$, a r_5 jest iloczynem liczb nie będących tej postaci. Wtedy $r_5<10\sqrt[5]{n}$.

Dowód: Na mocy faktów 5-7 liczba r_5 jest dzielnikiem liczby
$$5(a+b) \leqslant 10\max(a,b) < 10\sqrt[5]{n}\,.$$

Rozwiązanie właściwe: Niech n będzie liczbą spełniającą warunki zadania.

Przedstawmy liczbę n w postaci $xyzt$, gdzie t jest iloczynem liczb pierwszych postaci $30k+1$, x jest iloczynem liczb pierwszych postaci $6k+1$, ale nie $30k+1$, y jest iloczynem liczb pierwszych postaci $10k+1$, ale nie $30k+1$, z jest iloczynem liczb pierwszych nie będących postaci $6k+1$, ani $10k+1$.

Wówczas na mocy faktów 4 i 8 zachodzą nierówności
$$yz<6n^{1/3} \quad \text{oraz} \quad xz<10n^{1/5}\,,$$
skąd $xyz<60n^{8/15}$ i w konsekwencji
$$t>\frac{n^{7/15}}{60}>\frac{2^7}{60}>1\,.$$
Nierówność $t>1$ jest równoważna tezie zadania.

Uwaga: Podana w zadaniu liczba nie musi być sumą 15-tych potęg dwóch względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich, co pokazuje przykład

$$43977108474 = 3071^3 + 2467^3 = 119^5 + 115^5 .$$

3. Dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej u nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną daje

$$u^3 \leqslant \frac{1+u^4+u^4+u^4}{4}, \quad \text{skąd} \quad 4u^3 - 3u^4 \leqslant 1 .$$

Niech liczby dodatnie x, y spełniają nierówność $x^3+y^3 \leqslant 2xy$. Wtedy

$$x^9+y^9 = \left(x^3+y^3\right)\left(\left(x^3+y^3\right)^2 - 3x^3y^3\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2xy\left((2xy)^2 - 3x^3y^3\right) = 2\left(4(xy)^3 - 3(xy)^4\right) \leqslant 2 .$$

Ponadto dla $n \leqslant 9$ z nierówności między średnią stopnia n i średnią stopnia 9 wynika nierówność

$$\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}} \leqslant \sqrt[9]{\frac{x^9+y^9}{2}} \leqslant 1 ,$$

co daje $x^n+y^n \leqslant 2$. Zatem liczby n nie większe od 9 spełniają warunki zadania.

Wykażemy teraz, że dla $n=10$ twierdzenie podanie w treści zadania jest fałszywe. Z nierówności między średnimi stopnia 10 i stopnia $n \geqslant 10$ wynika, że wówczas twierdzenie będzie fałszywe dla liczb n nie mniejszych od 10. Niech bowiem

$$x = \frac{2a^2b}{a^3+b^3} \quad \text{oraz} \quad y = \frac{2ab^2}{a^3+b^3} .$$

Wtedy $x^3+y^3=2xy$. Nierówność $x^{10}+y^{10} \leqslant 2$ jest wówczas równoważna nierówności

$$2^{10}a^{10}b^{10}\left(a^{10}+b^{10}\right) \leqslant 2\left(a^3+b^3\right)^{10} ,$$

co po podstawieniu $a=1-\varepsilon$ oraz $b=1+\varepsilon$ dla odpowiednich wielomianów W_i przyjmuje postać

$$2^{10}\left(1-10\varepsilon^2+\varepsilon^4W_1(\varepsilon)\right)2\left(1+45\varepsilon^2+\varepsilon^4W_2(\varepsilon)\right) \leqslant 2\cdot 2^{10}\left(1+3\varepsilon^2\right)^{10} ,$$

czyli

$$1+35\varepsilon^2+\varepsilon^4W_3(\varepsilon) \leqslant 1+30\varepsilon^2+\varepsilon^4W_4(\varepsilon) ,$$

co prowadzi do sprzeczności w nierówności postaci $5 \leqslant \varepsilon^2W_5(\varepsilon)$, która jest fałszywa dla ε bliskich 0.

Pierwszy Mecz Matematyczny:

1. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $5^{2^n}-1$ jest podzielna przez 2^n. Wykażemy, że liczba $A=5^{2^{100}+100}$ spełnia warunki zadania. Liczba ta ma ponad 100 cyfr. Dalej, ponieważ liczba

$$A-5^{100} = 5^{100}(5^{2^{100}}-1)$$

jest podzielna przez 10^{100}, więc liczby A i 5^{100} mają takie same cyfry na 100 ostatnich miejscach swojego zapisu dziesiętnego.

Liczba 5^{100} ma mniej niż siedemdziesiąt cyfr. Istotnie, $5^3 < 2^7$. Dlatego $5^{10} < 10^7$, a więc $5^{100} < 10^{70}$. Oznacza to, że na nie więcej niż 70 ostatnich miejscach w zapisie dziesiętnym liczby A znajdują się cyfry różne od zera.

2. Zauważmy, że liczby k i 10 są względnie pierwsze. Istotnie: rozpatrując liczbę zaczynającą się cyfrą 1 i podzielną przez k uzyskamy liczbę podzielną przez k i kończącą się cyfrą 1.

Istnieje zatem liczba zapisana samymi jedynkami i podzielna przez k. Niech liczbą tą będzie

$$A = \underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Wówczas liczba

$$B = 29A = \underbrace{322\ldots219}_{n+1}$$

jest podzielna przez k. Dlatego liczba

$$B' = \underbrace{9122\ldots23}_{n+1}$$

jest podzielna przez k. Stąd

$$C = B' - 2A = \underbrace{8900\ldots01}_{n+1}$$

dzieli się przez k, a więc liczba

$$C' = \underbrace{100\ldots098}_{n+1}$$

jest podzielna przez k. Ostatecznie liczba $D = C' - 9A = 99$ dzieli się przez k.

3. Taka liczba istnieje. Przykład:

$$2\underbrace{00\ldots0}_{1000}8\underbrace{00\ldots0}_{1000}8.$$

Wówczas

$$2\underbrace{00\ldots0}_{1000}8\underbrace{00\ldots0}_{1000}8 = 2\cdot(1\underbrace{00\ldots0}_{1000}2)^2 \quad \text{oraz} \quad 8\underbrace{00\ldots0}_{1000}8\underbrace{00\ldots0}_{1000}2 = 2\cdot(2\underbrace{00\ldots0}_{1000}1)^2.$$

4. Oznaczmy przez K, L, M punkty styczności okręgu o odpowiednio z bokami BC, CA, AB. Na mocy zadania 5 zamieszczonego w *Dodatku* wystarczy udowodnić, że proste DK, EL, FM przecinają się w jednym punkcie. Przyjmijmy, że styczne do okręgu o w punktach D, E, F przecinają odpowiednio proste BC, CA, AB

w punktach X, Y, Z. Korzystając z zadania 7 zamieszczonego w *Dodatku* wystarczy dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej. A to jest prawda, gdyż punkty X, Y, Z leżą na osi potęgowej okręgu wpisanego i okręgu opisanego na trójkącie ABC.

5. Wykażemy, że taka liczba n nie istnieje.

Niech A będzie taką liczbą $(k+1)$-cyfrową, że pierwsze $k+1$ cyfr liczby A^2 tworzą liczbę A. Oznacza to, że

$$A^2 = A\cdot 10^n + B\,,$$

gdzie $10^k < A < 10^{k+1}$, $0 < B < 10^n$. Liczba B jest podzielna przez A, skąd wynika, że $B \geqslant A$. Jednocześnie $B = A(A-10^n)$. Dlatego $A > 10^n$. Otrzymujemy zatem sprzeczość: $10^n > B \geqslant A > 10^n$.

6. Rozważmy dwa wielomiany:

$$P(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^2 + pt^2 + qt + r\,,$$
$$Q(t) = (t-a)(t-b)(t-c) = t^2 + pt^2 + kt + r\,.$$

Niech $R(t) = P(t) - Q(t) = (q-k)t$. Wówczas

$$(q-k)a = P(a) = (a-x)(a-y)(a-z) \leqslant 0 \quad \text{skąd} \quad q-k \leqslant 0\,.$$

Jednocześnie mamy

$$(q-k)c = P(c) = (c-x)(c-y)(c-z) \geqslant 0\,, \quad \text{skąd} \quad q-k \geqslant 0\,.$$

Zatem $q = k$, czyli wielomiany P i Q są równe i mają te same pierwiastki.

7. Niech $P(t) = t^5 + pt^4 + qt^3 + rt^2 + kt + l$ będzie wielomianem, którego pierwiastkami są liczby a, b, c, d i e. Wówczas wszystkie współczynniki tego wielomianu są liczbami całkowitymi, przy czym liczby p i q dzielą się przez n. Sumując stronami równości $P(a) = 0$, $P(b) = 0$, $P(c) = 0$, $P(d) = 0$, $P(e) = 0$ otrzymujemy, że liczba

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + 5l + r(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) + k(a+b+c+d+e)$$

jest podzielna przez n, skąd natychmiast wynika teza zadania, gdyż $l = -abcde$.

8. *Sposób* I: Niech $ABCD$ będzie danym czworokątem. Oznaczmy przez I_A, I_B, I_C, I_D środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty DAB, ABC, BCD, CDA. Wówczas czworokąt $I_AI_BI_CI_D$ jest prostokątem (zob. zadanie 6 w *Dodatku*). Zatem $I_AI_C = I_BI_D$.

Niech K i L będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów I_A i I_C na prostą BD. Wówczas $(I_AK + I_CL)^2 + KL^2 = I_AI_C^2$. Stąd oraz z faktu, że

$$KL = \tfrac{1}{2}|(AB+CD) - (BC+DA)|$$

wynika teza zadania.

Sposób II: Dany jest trójkąt ABC oraz punkt X leżący w jego płaszczyźnie. Oznaczmy przez $d(X,AB)$ odległość od punktu X do prostej AB, jeśli punkty C i X leżą po tej samej stronie prostej AB oraz $(-1)\cdot$(odległość od punktu X do prostej AB), jeśli punkty X i C leżą po przeciwnych stronach prostej AB. Analogicznie definiujemy $d(X,BC)$ oraz $d(X,CA)$.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, R jego promieniem, zaś r promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wykażemy, że

$$R+r=d(O,AB)+d(O,BC)+d(O,CA)\,, \tag{1}$$

skąd wynika teza zadania.

Oznaczmy $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Wówczas na mocy twierdzenia Ptolemeusza uzyskujemy

$$\begin{aligned}
d(O,AB)\cdot\tfrac{1}{2}b+d(O,CA)\cdot\tfrac{1}{2}c&=R\cdot\tfrac{1}{2}a\,,\\
d(O,BC)\cdot\tfrac{1}{2}c+d(O,AB)\cdot\tfrac{1}{2}a&=R\cdot\tfrac{1}{2}b\,,\\
d(O,CA)\cdot\tfrac{1}{2}a+d(O,CA)\cdot\tfrac{1}{2}b&=R\cdot\tfrac{1}{2}c\,,
\end{aligned}$$

skąd

$$R(a+b+c)=d(O,BC)\cdot(b+c)+d(O,CA)\cdot(c+a)+d(O,AB)\cdot(a+b)\,. \tag{2}$$

Jednocześnie

$$r(a+b+c)=2\cdot(\text{pole trójkąta } ABC)=d(O,BC)\cdot a+d(O,CA)\cdot b+d(O,AB)\cdot c\,. \tag{3}$$

Z równości (2) i (3) wynika dowodzona równość (1).

9. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}=D_n\,,\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{\binom{n}{k}}=E_n\,,\quad \frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}=F_n\,.$$

Wówczas zachodzą następujące równości

$$D_n=\frac{2}{n+2}\,E_n\,,\qquad E_n=(n+1)(D_{n+1}-1)\,.$$

Stąd wynika, że

$$D_{n+1}=1+\frac{n+2}{2(n+1)}\,D_n\,.$$

Korzystając z indukcji matematycznej oraz z powyższej zależności dowodzimy, że $D_n=F_n$ dla $n=0,1,2,\ldots$, co kończy rozwiązanie zadania.

10. Znajdziemy najmniejszą stałą $C>0$, dla której zachodzi nierówność

$$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n\leqslant C(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\,.$$

Oczywiście $C\leqslant 1$. Definiujemy ciąg $p_1,p_2,\ldots,p_n$ wzorami:

$$p_1=C\,,\quad p_{k+1}=C-\frac{1}{4p_k}\quad \text{dla}\ \ k=1,2,\ldots,n-1\,.$$

Wówczas zachodzi równość

$$C\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \left(a_i - \frac{a_{i+1}}{2p_i} \right)^2 + p_n a_n^2 .$$

Powyższe wyrażenie jest nieujemne dla wszystkich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są nieujemne.

Podstawmy $C = \cos\alpha$, gdzie $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Indukcyjnie dowodzimy, że

$$p_k = \frac{\sin(k+1)\alpha}{2\sin k\alpha} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) .$$

Nieujemność liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jest równoważna warunkom

$$\sin\alpha > 0 , \quad \sin 2\alpha > 0 , \quad \ldots , \quad \sin n\alpha > 0 , \quad \sin(n+1)\alpha \geqslant 0 .$$

To oznacza, że $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/(n+1)$. Stąd poszukiwana wartość C wynosi $\cos(\pi/(n+1))$.

11. Na każdym boku wielokąta budujemy prostokąt skierowany do wnętrza danego wielokąta o drugim boku S/P. Wówczas suma pól wszystkich zbudowanych prostokątów wynosi S. Stąd wynika, że wewnątrz wielokąta istnieje punkt nie należący do żadnego z tych prostokątów. Koło o środku w tym punkcie i promieniu S/P spełnia warunki zadania.

Drugi Mecz Matematyczny:

1. Dowodzimy, że licznik ten jest podzielny przez liczbę pierwszą 137. Bezpośrednio sprawdzamy, że

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60} .$$

Ponadto dla $i = 6$, 7, 8, …, 68 mamy

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{137-i} = \frac{137}{i(137-i)} .$$

Licznik danego ułamka jest większy od 137, gdyż mianownik jest podzielny przez 128, a cały ułamek jest większy od 2.

2. Mamy dwa oczywiste rozwiązania: $(0,1)$ i $(0,-1)$. Niech $x \neq 0$. Z równości

$$\left(8x^2+4x+8\right)^2 - 80x^2 = 64x^4 + 64x^3 + 64x^2 + 64x + 64 = (8y)^2$$

dostajemy

$$8|y| < 8x^2 + 4x + 8 ,$$

a na podstawie równości

$$\left(8x^2+4x\right)^2 + (4x+8)^2 + 32x^2 = 64x^4 + 64x^3 + 64x^2 + 64x + 64$$

dostajemy

$$8|y| > 8x^2 + 4x\,.$$

Mamy więc $8|y| = 8x^2 + 4x + 4$, skąd

$$(8x^2 + 4x + 4)^2 = 64x^4 + 64x^3 + 64x^2 + 64x + 64.$$

Zatem $x = 3$ lub $x = -1$. Dobierając y otrzymujemy 6 rozwiązań: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(3,11)$ i $(3,-11)$.

3. Bez szkody dla ogólności rozwiązania możemy założyć, że $a \leqslant b \leqslant c$. Korzystając z tożsamości

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = \\ = (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

sprowadzamy pierwszą z nierówności danych w treści zadania do postaci

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2\,,$$

a drugą do postaci

$$c^{3/2} \leqslant a^{3/2} + b^{3/2}\,.$$

Wystarczy więc udowodnić nierówność

$$\left(s^4 + t^4\right)^{3/4} \leqslant s^3 + t^3$$

dla $s,t > 0$. Nierówność ta jest kolejno równoważna nierównościom

$$\left(s^4 + t^4\right)^3 \leqslant \left(s^3 + t^3\right)^4\,,$$

$$s^{12} + 3s^8t^4 + 3s^4t^8 + t^{12} \leqslant s^{12} + 4s^9t^3 + 6s^6t^6 + 4s^3t^9 + t^{12}\,,$$

$$3s^5t + 3st^5 \leqslant 4s^6 + 6s^3t^3 + 4t^6\,.$$

Z nierówności $3s^2t \leqslant 2s^3 + t^3$, $3st^2 \leqslant s^3 + 2t^3$ otrzymujemy zaś

$$3s^5t + 3st^5 \leqslant 2s^6 + 2s^3t^3 + 2t^6\,.$$

4. *Sposób* I: Niech E będzie punktem przecięcia danych stycznych, zaś K punktem przecięcia prostych AB i CD. Z równoramienności trójkątów ABE i CDE wynika, że proste CD i AB są prostopadłe. Niech s_1 i s_2 będą odpowiednio okręgami o średnicach AD i BC. Wówczas punkt K oraz środki okręgów o_1 i o_2 leżą na osi potęgowej okręgów s_1 i s_2, a zatem są one współliniowe.

Sposób II: Poprowadźmy drugą wspólną styczną zewnętrzną do okręgów o_1 i o_2 przecinającą daną styczną wewnętrzną w punkcie F. Niech P i Q będą punktami przecięcia odpowiednio prostych AB i CD z prostą l, łączącą środki okręgów o_1 i o_2. Wówczas prosta PF jest prostopadła do prostej l (zob. zadanie 3 zamieszczone w *Dodatku*) oraz prosta QF jest prostopadła do prostej l (zob. zadanie 4 zamieszczone w *Dodatku*). Zatem $P = Q$, co kończy dowód.

5. *Sposób* I: Dowolna prosta przechodząca przez punkt (1,1) i mająca wymierny współczynnik kierunkowy różny od -1, przecina okrąg o równaniu $x^2+y^2=2$ w punkcie $(x,y)\neq(1,1)$ o obu współrzędnych wymiernych.

Mamy więc nieskończenie wiele ciągów arytmetycznych postaci $x^2,1,y^2$ dla liczb wymiernych x, y. Po przemnożeniu wyrazów takiego ciągu przez wspólny mianownik jego wyrazów otrzymujemy ciąg spełniający warunki zadania.

Sposób II: Równanie Pella $2x^2-1=y^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y. Istotnie, para (1,1) jest rozwiązaniem tego równania, a dla dowolnego rozwiązania (x,y), rozwiązaniem jest też $(3x+2y,4x+3y)$. Wówczas liczby 1, x^2, y^2 tworzą ciąg arytmetyczny.

Sposób III: Kwadraty liczb wchodzących w skład trójek $(1,5,7)$, $(7,13,17)$, $(17,25,31)$, ... tworzą ciągi arytmetyczne.

Poszczególne liczby w n-tej trójce dane są wzorami:

$$2n^2-1,\quad n^2+(n+1)^2,\quad 2(n+1)^2-1\,.$$

6. Udowodnimy indukcyjnie, że jeśli danych jest $2n$ monet i wiadomo, ile wśród nich jest fałszywych, to można rozpoznać wszystkie fałszywe monety wykonując nie więcej niż $\left[\frac{3n}{2}\right]-1$ ważeń.

Najpierw dowodzimy twierdzenie dla $n=2$ i $n=3$.

Jeśli wśród 4 monet są 2 fałszywe, porównujemy wagę dowolnych dwóch monet. W przypadku nierównowagi obie są rozpoznane, a porównanie wagi pozostałych dwóch monet pozwala określić, która jest prawdziwa, a która fałszywa. Gdy natomiast pierwsze dwie monety są jednakowe, to porównujemy ich wagę z pozostałymi dwoma.

Jeśli wśród 4 monet jest 1 fałszywa (analogicznie, gdy jest jedna prawdziwa), porównujemy wagę dowolnych dwóch monet, a w razie potrzeby porównujemy wagę pozostałych dwóch monet.

Jeśli wśród 6 monet jest 1 fałszywa (analogicznie, gdy jest jedna prawdziwa), porównujemy wagę dowolnych dwóch monet, a w razie potrzeby porównujemy wagę innych dwóch monet, a potem wagę pozostałych dwóch monet.

Jeśli wśród 6 monet są 2 fałszywe (analogicznie, gdy są dwie prawdziwa), kładziemy po 3 monety na każdą szalkę, co pozwala ustalić, ile monet fałszywych jest na każdej szalce. Do rozpoznania 3 monet wystarczy jedno ważenie.

Jeśli wśród 6 monet są 3 fałszywe, kładziemy po 1 monecie na każdą szalkę. Gdy ciężary monet są różne, zadanie sprowadzone jest do przypadku 4 monet. Gdy zaś obie monety mają tę samą masę, kładziemy jedną z nich na jednej szalce, a dowolną nie ważoną jeszcze monetę na drugiej. W przypadku równowagi wszystkie 3 monety są jednakowe i pozostałe 3 monety są jednakowe, zatem trzecie ważenie wystarczy do ustalenia, które monety są fałszywe. Natomiast przy braku równowagi w drugim ważeniu, pierwsze 3 monety są rozpoznane i trzecie ważenie rozpoznaje pozostałe 3 monety.

Przechodzimy do kroku indukcyjnego.

Porównajmy wagi dowolnych dwóch monet. Jeżeli ciężary monet są różne, to wiadomo, która jest prawdziwa, a która fałszywa, zadanie sprowadza się więc do $2n-2$ monet.

Jeśli obie monety mają tę samą wagę, to kładziemy je na jednej szalce, a na drugiej szalce kładziemy dwie inne monety.

Jeśli nie ma równowagi, to pierwsze dwie monety są już rozpoznane, a dwie ostatnie rozpoznajemy przy pomocy jednego ważenia. Tak więc wykonując 3 ważenia zmniejszyliśmy liczbę monet do rozpoznania o 4.

Jeśli obie pary monet mają tę samą wagę, to kładziemy je na jednej szalce, a na drugiej dowolne 4 inne monety. Jeżeli teraz nie ma równowagi, to trzecie ważenie rozpoznaje pierwsze 4 monety.

Jeśli obie czwórki monet ważą tyle samo, to wszystkie 8 monet ma tę samą wagę i porównujemy je z inną ósemką monet.

Jeśli w którymś momencie ustalimy, że $2^k > n$ monet ma tę samą wagę, to informacja o liczbie monet fałszywych pozwala określić, czy są one fałszywe, czy prawdziwe.

Uwagi:

Można udowodnić, że w przypadku 8 monet, wśród których 4 są fałszywe, wystarczą 4 ważenia.

W przypadku 10 monet, wśród których 5 jest fałszywych, wystarczy 6 ważeń (dowód powyżej), ale 5 ważeń nie wystarczy.

Jeśli dysponujemy 3 monetami prawdziwymi i 3 monetami fałszywymi, możemy położyć je na jednej szalce, a na drugiej 6 dowolnych monet. W ten sposób uzyskujemy informację, czy wśród tych sześciu monet liczba monet fałszywych jest mniejsza, równa czy większa od 3. Ta informacja wystacza, aby w 3 kolejnych ważeniach rozpoznać wszystkie 6 monet (łącznie na rozpoznanie całej szóstki potrzebujemy więc 4 ważenia).

7. Niech punkt S będzie rzutem prostokątnym punktu E na płaszczyznę ABC. Na mocy twierdzenia o trzech prostopadłych wystarczy udowodnić, że proste BD i SF są prostopadłe. Ponieważ $AE=FE=CE$, więc punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AFC. W tej sytuacji dowód potrzebnej prostopadłości jest prostym ćwiczeniem.

8. *Sposób* I: Niech $k \geqslant 2$. Niech

$$n=k(2k+1)\,, \quad a=n-k=2k^2\,, \quad b=n+k=2k(k+1)\,.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
n^2 &< (2a+1)b/2 = (n-k+1/2)(n+k) = n^2-k^2+n/2+k/2 < \\
&< a(b+1) = (n-k)(n+k+1) = n^2-k^2+n-k < \\
&< (a+1)b = (n-k+1)(n+k) = n^2-k^2+n+k < \\
&< a(b+2) = (n-k)(n+k+2) = n^2-k^2+2n-2k < \\
&< (a+1)(b+1) = (n-k+1)(n+k+1) = n^2-k^2+2n+1 < \\
&< (2a+1)(b+2)/2 = (n-k+1/2)(n+k+2) = n^2-k^2+5n/2-3k/2+1 < \\
&< (n+1)^2 = n^2+2n+1\,.
\end{aligned}$$

Szukanymi liczbami są zatem:

$$(2a+1)b/2\,,\ a(b+1)\,,\ (a+1)b\,,\ a(b+2)\,,\ (a+1)(b+1)\,,\ (2a+1)(b+2)/2\,.$$

Sposób II: Ustalmy liczby całkowite dodatnie $M<N$. Niech Z_k będzie zbiorem wszystkich liczb postaci km^2 spełniających nierówność $M^2<km^2<N^2$. Wtedy liczba elementów zbioru Z_k jest równa

$$\left[\frac{N}{\sqrt{k}}\right]-\left[\frac{M}{\sqrt{k}}\right] > \frac{N-M}{\sqrt{k}}-1\,.$$

Rozważmy zbiór Z będący sumą zbiorów Z_k po wszystkich k będących dzielnikami liczby 210 większymi od 1.

Liczba elementów zbioru Z jest więc większa od

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k|210\\k>1}}\left(\frac{N-M}{\sqrt{k}}-1\right) = \\
&\quad = (N-M)\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)-1\right)-15 > \\
&\quad > 4.36(N-M)-15.
\end{aligned}$$

Jeśli $N-M>50$, to $4.36(N-M)-15>4(N-M)$.

Wówczas istnieje takie n, że pomiędzy liczbami n^2 i $(n+1)^2$ znajduje się co najmniej 5 elementów zbioru Z. Z tych 5 elementów można utworzyć 31 iloczynów, każdy postaci km^2, gdzie k jest dzielnikiem liczby 210. Pewne 2 iloczyny są więc postaci km^2 i kr^2. Szukanymi liczbami są liczby występujące w dokładnie jednym z tych dwóch iloczynów.

9. Niech $f(i)$ będzie resztą z dzielenia liczby $10i$ przez 101. Niech

$$a_i = i \quad \text{oraz} \quad b_i = 100+f(i) \quad \text{dla} \ \ i=1,2,3,\ldots,100.$$

Udowodnimy, że wówczas dla dowolnych i, j takich, że $1\leqslant i<j\leqslant 100$, liczby a_i+b_i, a_j+b_j, b_i-a_i, b_j-a_j są różne.

Gdyby $a_i+b_i=a_j+b_j$, to wówczas mielibyśmy $i+10i\equiv j+10j \pmod{101}$, skąd $11i\equiv 11j \pmod{101}$ i dalej $i\equiv j \pmod{101}$, co jest sprzeczne z wyborem i, j.

Gdyby $b_i-a_i=b_j-a_j$, to wówczas mielibyśmy $10i-i\equiv 10j-j \pmod{101}$, skąd $9i\equiv 9j \pmod{101}$ i dalej $i\equiv j \pmod{101}$, co jest sprzeczne z wyborem i, j.

Gdyby $a_i+b_i=b_j-a_j$, to wówczas mielibyśmy $i+10i\equiv 10j-j \pmod{101}$, skąd $11i\equiv 9j \pmod{101}$ i dalej $121i\equiv 20i\equiv 99j\equiv -2j \pmod{101}$, co daje $10i\equiv -j \pmod{101}$ oraz $i\equiv 10j \pmod{101}$. Zatem $f(i)=101-j$ oraz $f(j)=i$ i w konsekwencji $a_i+b_i= =i+201-j$ oraz $b_j-a_j=100+i-j$ wbrew założeniu.

10. Niech równoległoboki $ABCD$ i $EFGH$ będą ścianami takiego równoległościanu r, że $ACHF$ jest rozważanym czworościanem c. Przypuśćmy, że trójkąt AFH jest ścianą czworościanu c o największym polu. Niech pole równoległoboku $ABCD$ będzie równe a, wysokość równoległościanu r poprowadzona na $ABCD$ równa d_1, pole trójkąta AFH równe b. Wówczas wysokość czworościanu c poprowadzona na AFH jest równa h. Ponieważ suma pól trójkątów AFH i CFH jest większa od pola równoległoboku $ABCD$, więc $2b>a$. Stąd $2bh>ah$. Ale objętość czworościanu c jest 3 razy mniejsza od objętości równoległościanu r, więc $bh=ad_1$. Na koniec wystarczy zauważyć, że d_1 jest odległością prostych AC i FH, więc nie przekracza odległości odcinków AC i FH.

11. Wprowadźmy układ współrzędnych, w którym środek każdego pola jest punktem o współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2003\}$. Pomalujmy na fioletowo pola, których środki mają wszystkie współrzędne parzyste.

Wówczas liczba fioletowych pól jest równa 1001^3, jest więc nieparzysta. Każdy klocek pokrywa dwa fioletowe pola lub nie pokrywa żadnego. Liczba fioletowych pól pokrytych przez klocki jest więc parzysta, a zatem istnieje fioletowe pole niepokryte przez żaden klocek. Rozwiązanie jest zakończone, gdyż żadne fioletowe pole nie leży przy brzegu kwadratu.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne:

1. Z danego układu wynika ciąg równości

$$x_2=\max\{1,x_1\},\ x_3=\max\left\{1,\tfrac{1}{2}x_2\right\},\ \ldots,\ x_1=\max\left\{1,\tfrac{1}{n}x_n\right\}.$$

Stąd

$$x_1=\max\left\{1,\tfrac{1}{n}x_n\right\}=\max\left\{1,\tfrac{1}{n}\max\left\{1,\tfrac{1}{n-1}x_{n-1}\right\}\right\}=$$
$$=\max\left\{1,\tfrac{1}{n(n-1)}x_{n-1}\right\}=\ldots=\max\left\{1,\tfrac{1}{n!}x_1\right\}.$$

Ponieważ każda z liczb $x_1,x_2,\ldots,x_n$ jest równa co najmniej 1, więc z równości $x_1=\max\left\{1,\frac{1}{n!}x_1\right\}$ wynika, że $x_1=1$, a stąd natychmiast dostajemy ciąg równości $x_2=1,\ldots,x_n=1$.

2. Oznaczmy miary kątów wewnętrznych przy wierzchołkach B i C odpowiednio przez β i γ. Ponieważ czworokąt $BCEF$ jest wpisany w okrąg, więc

$$\sphericalangle EFC=\sphericalangle EBC=90^\circ-\gamma,\quad \sphericalangle FEB=90^\circ-\beta,\quad \sphericalangle EFA=90^\circ-\sphericalangle EFC=\gamma.$$

Analogicznie uzyskujemy $\sphericalangle DFB = \gamma$.

(a) Rozważmy punkt K poruszający się po odcinku AF, od punktu A do punktu F. Dla $K = A$ mamy $\sphericalangle DKF = 90^\circ - \beta$, $\sphericalangle KEF = \beta > 90^\circ - \beta$; przy K zmierzającym do F mamy $\sphericalangle DKF \to \sphericalangle DFB = \gamma$, $\sphericalangle KEF \to 0^\circ < \gamma$. Zatem pomiędzy punktami A i F istnieje taki punkt K, że zachodzi $\sphericalangle DKF = \sphericalangle KEF$.

(b) Niech D' będzie obrazem punktu D w symetrii osiowej względem prostej AB. Ponieważ $\sphericalangle AFE = \sphericalangle BFD = \gamma$, więc punkty E, F i D' leżą na jednej prostej. Ponieważ czworokąt $AEBD'$ jest wpisany w okrąg, więc $AF \cdot BF = EF \cdot FD'$. Stąd

(1)
$$FD^2 + AF \cdot BF = FD^2 + EF \cdot FD' = \\ = FD' \cdot (FD' + EF) = FD' \cdot ED'\,.$$

Z równości $\sphericalangle D'KF = \sphericalangle DKF = \sphericalangle KEF$ wynika, że prosta $D'K$ jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie KEF. Stąd otrzymujemy

(2)
$$FD' \cdot ED' = (KD')^2 = KD^2.$$

Dowodzona równość wynika bezpośrednio z równości (1) i (2).

3. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $p \leqslant q \leqslant r$. Z równości $pqr = 1$ wynika (i) $p \leqslant q \leqslant 1 \leqslant r$ lub (ii) $p \leqslant 1 \leqslant q \leqslant r$.

(i) Weźmy $a = q, b = 1, c = pq$. Wówczas $pa = pq, qb = q, rc = 1$. Trójkąty z bokami o długościach a, b, c i pa, qb, rc odpowiednio są przystające, mają więc równe pola, o ile tylko trójkąt o bokach $q, 1, pq$ istnieje. Z nierówności $pq \leqslant q \leqslant 1$ wynika, że aby udowodnić istnienie takiego trójkąta wystarczy wykazać nierówność $pq + q > 1$. Ta nierówność wynika z następujących nierówności:

$$pq = \frac{1}{r} \geqslant \frac{1}{5/2} = \frac{2}{5}, \quad q \geqslant \sqrt{pq} \geqslant \sqrt{\frac{1}{r}} \geqslant \sqrt{\frac{2}{5}} > \frac{3}{5}.$$

(ii) Podobnie jak w przypadku (i) pokażemy, że istnieje trójkąt o bokach $q, 1, pq$. Ponieważ $pq \geqslant q \geqslant 1$, więc wystarczy sprawdzić, czy zachodzi nierówność $q + 1 > pq$. Mamy $1 \leqslant pq = \frac{1}{r} \leqslant \frac{5}{2}$, a stąd $q + 1 \geqslant \sqrt{pq} + 1 > pq$.

4. Oznaczmy $AC = a, BC = b$. Obliczając potęgę punktu C względem okręgu opisanego na czworokącie $ABXY$ dostajemy

$$CX \cdot a = CY \cdot b.$$

Oznaczmy przez D środek boku AB. Z twierdzenia Cevy wynika, że

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

Po przekształceniach dwóch ostatnich równości otrzymujemy tezę zadania.

5. Niech $n = 2^m \cdot k$, gdzie k jest liczbą nieparzystą, będzie liczbą o danej w zadaniu własności. Wykażemy, że $k=1$. Gdyby było $k>1$, wówczas

$$\binom{n}{2^m} = \frac{2^m k}{2^m} \cdot \frac{(2^m k-1)}{1} \cdot \frac{2^m k-2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2^m k - 2^m + 1)}{2^m - 1}$$

byłoby liczbą nieparzystą, gdyż po sprowadzeniu każdego z ułamków występujących po prawej stronie do postaci nieskracalnej dostalibyśmy ułamek o nieparzystym liczniku i nieparzystym mianowniku.

Udowodnimy teraz, że dla każdej liczby naturalnej n postaci 2^m i dla każdego $l \in \{1, 2, \ldots, 2^m - 1\}$ współczynnik $\binom{n}{l}$ jest liczbą parzystą. Mamy

$$\binom{n}{l} = \frac{2^m}{l} \cdot \frac{(2^m-1)}{1} \cdot \frac{2^m-2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2^m - l + 1)}{l-1}.$$

Zauważmy, że każdy z ułamków występujących po prawej stronie, poza pierwszym, po sprowadzeniu do postaci nieskracalnej, ma nieparzysty licznik i nieparzysty mianownik, ułamek $\frac{2^m}{l}$ ma zaś licznik parzysty i mianownik nieparzysty. Zatem współczynnik dwumianowy $\binom{n}{l}$ jest liczą parzystą.

6. W równaniu

$$f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x) \tag{3}$$

podstawiamy $y = -f(x)$ i dostajemy $f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x)$. Z ostatniego równania wynika, że f jest surjekcją. Niech b będzie liczbą, dla której $f(b) = 0$. W równaniu (3) podstawiamy $x = b$ i dostajemy $f(y) = 2b + f(f(y) - b)$. Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą x_0 i niech c będzie liczbą, dla której $f(c) = x_0 + b$; wówczas dla $y = x_0 + b$ z ostatniej równości otrzymujemy

$$x_0 + b = 2b + f(x_0)\ .$$

Zatem funkcja f jest postaci $f(x) = x - b$. Bezpośrednie sprawdzenie prowadzi do wniosku, że każda taka funkcja spełnia dane w zadaniu równanie.

Dodatek

A. Kilka zadań z geometrii

Poniżej prezentujemy kilka prostych, lecz użytecznych zadań geometrycznych, które wykorzystywaliśmy w zadaniach na obozie.

Zadanie 1: (*Trygonometryczna wersja twierdzenia Cevy*)
Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Oznaczmy:

$$\sphericalangle BAD = \alpha_1\,, \quad \sphericalangle CBE = \beta_1\,, \quad \sphericalangle ACF = \gamma_1\,,$$
$$\sphericalangle DAC = \alpha_2\,, \quad \sphericalangle EBA = \beta_2\,, \quad \sphericalangle FCB = \gamma_2\,.$$

Wykazać, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1\,.$$

Rozwiązanie: Na mocy twierdzenia sinusów otrzymujemy

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\,.$$

Analogiczne równości zachodzą dla kątów β_1, β_2 oraz γ_1, γ_2. Mnożąc stronami uzyskane równości oraz korzystając z twierdzenia Cevy uzyskujemy tezę.

Zadanie 2: Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, takie trójkąty BCD, CAE, ABF, że

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle FBA\,, \quad \sphericalangle FAB = \sphericalangle EAC\,, \quad \sphericalangle ECA = \sphericalangle DCB\,.$$

Wykazać, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie: Na mocy twierdzenia sinusów otrzymujemy

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = 1\,. \tag{1}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $P = AD\cap BC$, $Q = BE\cap CA$, $R = CF\cap AB$. Wówczas

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle ABD}{\sin\sphericalangle ACD}\,.$$

Analogiczne równości zachodzą dla punktów Q i R. Mnożąc uzyskane w ten sposób równości oraz korzystając z równości (1) i twierdzenia Cevy otrzymujemy tezę.

Zadanie 3: Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Proste AI i DE przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $BP \perp AI$.

Rozwiązanie: Zachodzą następujące równości:

$$\sphericalangle PIB = \sphericalangle IAB + \sphericalangle IBA = 90^\circ - \sphericalangle ICE = \sphericalangle CED\,.$$

Zatem punkty I, B, P, E leżą na jednym okręgu. Stąd $\sphericalangle IPB = 90^\circ$.

Zadanie 4: Okrąg o środku I, dopisany do trójkąta ABC, jest styczny do boku BC w punkcie E oraz jest styczny do prostej AC w punkcie D. Proste AI i DE przecinają się w punkcie Q. Wykazać, że $BQ \perp AI$.

Rozwiązanie: Zachodzą następujące równości:

$$\sphericalangle QIB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC - \sphericalangle IAB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ACB = \sphericalangle CED\,.$$

Zatem punkty I, B, Q, E leżą na jednym okręgu. Stąd $\sphericalangle IQB = 90^\circ$.

Zadanie 5: Okrąg o wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Punkt P leży wewnątrz okręgu o. Proste DP, EP i FP przecinają krótsze łuki EF, FD i DE okręgu o odpowiednio w punktach X, Y i Z. Udowodnić, że proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie: Zachodzą następujące równości:

$$\sphericalangle AFX = \sphericalangle XEF = \sphericalangle XDF = \alpha,$$

$$\sphericalangle AEX = \sphericalangle XFE = \sphericalangle XDE = \beta.$$

Wówczas

$$\frac{\sin \sphericalangle FAX}{\sin \sphericalangle EAX} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2.$$

Analogiczne równości zachodzą dla konfiguracji przy kątach B i C. Mnożymy otrzymane równości stronami. Ponieważ odcinki DX, EY, FZ przecinają się w jednym punkcie, stosujemy trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy. Stąd otrzymujemy tezę na mocy odwrotnego twierdzenia Cevy.

Zadanie 6: Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty DAB, ABC, BCD i CDA są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie: Niech I_A, I_B, I_C będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty DAB, ABC, BCD. Proste DI_A i CI_B przecinają się w punkcie M, który jest środkiem łuku AB okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Ponadto $MA = MI_A = MI_B = MB$. Zatem punkty A, I_A, B, I_B leżą na jednym okręgu. Podobnie, punkty B, I_B, C, I_C leżą na jednym okręgu. Stąd

$$\sphericalangle I_AI_BI_C = 360^\circ - \sphericalangle BI_BI_C - \sphericalangle BI_BI_A = \sphericalangle BCI_C + \sphericalangle BAI_A = 90^\circ.$$

Zadanie 7: Dany jest okrąg s o środku O oraz prosta l. Z punktu A leżącego na prostej l i na zewnątrz okręgu s poprowadzono proste, styczne do okręgu s w punktach K i L. Wykazać, że wszystkie proste KL, odpowiadające różnym położeniom punktu A na prostej l, mają punkt wspólny.

Rozwiązanie: Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy prosta l i okrąg s nie mają punktów wspólnych, bowiem jedynie ten przypadek wykorzystywaliśmy na obozie. Dowód w ogólnym przypadku przebiega podobnie.

Niech B będzie rzutem prostokątnym punktu O na prostą l. Niech okrąg s_1 o średnicy BO przecina okrąg s w punktach M i N. Wówczas punkty A, B, K, L, O leżą na jednym okręgu s_2. Zatem proste KL, MN i BO przecinają się w jednym punkcie, gdyż są one osiami potęgowymi odpowiednio par okręgów (s, s_2), (s, s_1) i (s_1, s_2). Stąd wynika, że prosta KL przechodzi przez środek odcinka MN.

B. Twierdzenie Wilsona

Twierdzenie Wilsona: Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to liczba $(p-1)!+1$ jest podzielna przez p.

Dowód: Dla każdej liczby r takiej, że $1 \leqslant r \leqslant p-1$, istnieje liczba q spełniająca warunek $rq \equiv 1 \pmod{p}$. Jeśli przy tym $2 \leqslant r \leqslant p-2$, to $q \neq r$. Zatem wszystkie liczby od 2 do $p-2$ można połączyć w pary liczb o iloczynie, który przy dzieleniu przez p daje resztę 1. Bez pary pozostają liczby 1 i $p-1$. Tak więc $(p-1)! \equiv p-1 \pmod{p}$, czego należało dowieść.

Zadanie 1: Dowieść, że jeżeli liczba $4k+3$ jest pierwsza, to jedna z liczb

$$(2k+1)!-1, \quad (2k+1)!+1$$

jest podzielna przez $4k+3$.

Rozwiązanie: Na mocy twierdzenia Wilsona mamy:

$$-1 \equiv (4k+2)! = (2k+1)! \cdot (2k+2) \cdot (2k+3) \cdot \ldots \cdot (4k+2) \equiv$$
$$\equiv (2k+1)! \cdot (-2k-1) \cdot (-2k) \cdot \ldots \cdot (-1) \equiv -((2k+1)!)^2 \pmod{4k+3},$$

skąd

$$(2k+1)! \equiv -1 \pmod{4k+3} \quad \text{lub} \quad (2k+1)! \equiv 1 \pmod{4k+3},$$

czego należało dowieść.

Zadanie 2: Dowieść, że dla każdej liczby pierwszej p postaci $4k+1$, istnieje taka liczba całkowita n, że liczba n^2+1 jest podzielna przez p.

Rozwiązanie: Podobnie jak w poprzednim zadaniu dowodzimy, że

$$((2k)!)^2 \equiv -1 \pmod{4k+1}$$

i wystarczy przyjąć $n=(2k)!$.

ZADANIE 3: Dowieść, że wśród liczb postaci $n!-1$ istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych.

ROZWIĄZANIE: Jeżeli liczba $n+2$ jest pierwsza, to z twierdzenia Wilsona wynika, że liczba $n!-1$ jest podzielna przez $n+2$.

ZADANIE 4: Niech $S_0=3$ oraz $S_n=S_{n-1}!$ dla $n\geqslant 1$. Dowieść, że wśród liczb postaci S_n+1 jest nieskończenie wiele liczb złożonych.

ROZWIĄZANIE: Jeżeli liczba S_n+1 jest pierwsza, to liczba $S_{n+1}+1=S_n!+1$ jest podzielna przez S_n+1, a więc złożona. Zatem liczby S_n+1 nie mogą być pierwsze dla dwóch kolejnych wartości n.

C. Permutacje i nierówności

Ciągi liczb rzeczywistych $x_1,x_2,\ldots,x_n$ oraz $y_1,y_2,\ldots,y_n$ nazywamy *jednakowo uporządkowanymi*, jeśli dla wszystkich $1\leqslant i,j\leqslant n$ zachodzi nierówność

$$(x_i-x_j)(y_i-y_j)\geqslant 0.$$

Analogicznie, ciągi liczb rzeczywistych $x_1,x_2,\ldots,x_n$ oraz $y_1,y_2,\ldots,y_n$ nazywamy *przeciwnie uporządkowanymi*, jeśli dla wszystkich $1\leqslant i,j\leqslant n$ zachodzi nierówność

$$(x_i-x_j)(y_i-y_j)\leqslant 0.$$

TWIERDZENIE: (a) Jeżeli ciągi liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ oraz $b_1,b_2,\ldots,b_n$ są jednakowo uporządkowane, to dla każdej permutacji $b'_1,b'_2,\ldots,b'_n$ liczb $b_1,b_2,\ldots,b_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\geqslant\sum_{i=1}^{n} a_ib'_i\,. \tag{1}$$

(b) Jeżeli ciągi liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ oraz $b_1,b_2,\ldots,b_n$ są przeciwnie uporządkowane, to dla każdej permutacji $b'_1,b'_2,\ldots,b'_n$ liczb $b_1,b_2,\ldots,b_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\leqslant\sum_{i=1}^{n} a_ib'_i\,. \tag{2}$$

DOWÓD: Dowód nierówności (1) przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na n. Dla $n=2$ nierówność (1) przybiera postać

$$a_1b_1+a_2b_2\geqslant a_1b'_1+a_2b'_2\,.$$

Jeśli $b'_1=b_1$ oraz $b'_2=b_2$ to powyższa nierówność jest spełniona. Jeśli zaś $b'_1=b_2$ oraz $b'_2=b_1$, to mamy

$$a_1b_1+a_2b_2-a_1b'_1-a_2b'_2=(a_1-a_1)(b_1-b_2)\,.$$

Krok indukcyjny przeprowadzamy tak jak w przypadku $n=2$.

Nierówność (2) wynika z nierówności (1), gdy zamiast ciągu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ rozważymy $-b_1, -b_2, \ldots, -b_n$.

Zadanie 1: Udowodnić, że dla liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 a_{i+1}, \quad \text{gdzie} \quad a_{n+1} = a_1 .$$

Rozwiązanie: Wystarczy zauważyć, że ciągi

$$a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2 \quad \text{oraz} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n$$

są ciągami jednakowo uporządkowanymi, a ciąg $a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1$ jest permutacją ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Zadanie 2: Udowodnić, że dla liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \text{gdzie} \quad a_{n+1} = a_1 .$$

Rozwiązanie: Wystarczy zauważyć, że ciągi

$$a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$$

są ciągami przeciwnie uporządkowanymi.

Zadanie 3: Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geqslant abc(a+b+c) .$$

Rozwiązanie: Ciągi a^2, b^2, c^2 oraz bc, ca, ab są przeciwnie uporządkowane. Zatem $a^2 \cdot bc + b^2 \cdot ca + c^2 \cdot ab \leqslant a^2 \cdot ab + b^2 \cdot bc + c^2 \cdot ca$.

Zadanie 4: Udowodnić, że dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ parami różnych liczb naturalnych zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} .$$

Rozwiązanie: Niech $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ będzie permutacją liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wówczas $b_i \geqslant i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Oczywiście ciągi

$$1, \frac{1}{2^2}, \ldots \frac{1}{n^2} \quad \text{oraz} \quad b_1, b_2, \ldots, n_n$$

są przeciwnie uporządkowane. Zatem

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{i^2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,.$$

D. Twierdzenie o trzech prostopadłych

Twierdzenie o trzech prostopadłych: Załóżmy, że prosta k nie jest prostopadła do płaszczyzny p, a prosta l jest jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Niech prosta m będzie zawarta w płaszczyźnie p. Wówczas prosta m jest prostopadła do k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do l.

Dowód: Niech punkt A należy do prostej k, ale nie należy do płaszczyzny p. Wówczas prosta n, przechodząca przez punkt A, prostopadła do płaszczyzny p przecina prostą l. Przypuśćmy, że prosta m jest prostopadła do prostej k. Ponieważ jednocześnie prosta n jest prostopadła do prostej m, więc prosta m jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez proste k i n, w szczególności jest prostopadła do prostej l. Dowód wynikania w drugą stronę przebiega analogicznie.

Zadanie 1: Wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku A czworościanu $ABCD$ są proste. Wykazać, że rzut prostokątny H punktu A na płaszczyznę BCD jest ortocentrum trójkąta BCD.

Rozwiązanie: Prosta CA jest prostopadła do płaszczyzny ABD, więc jest prostopadła do prostej BD. Ponieważ rzutem prostokątnym prostej CA na płaszczyznę CBD jest prosta CH, więc na mocy twierdzenia o trzech prostopadłych prosta CH jest prostopadła do BD. Podobnie dowodzimy, że prosta BH jest prostopadła do CD.

Zadanie 2: Wykazać, że dla każdego $n > 3$ istnieje ostrosłup n-kątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi.

Rozwiązanie: Niech wielokąt wypukły $AB_1B_2...B_{n-1}$ spełnia warunek: dla każdego $i = 1, \ldots n-2$, kąt AB_iB_{i+1} jest prosty. Ostrosłup, którego podstawą jest ten wielokąt, a punkt A spodkiem wysokości, spełnia warunki zadania.

Regulamin Meczu Matematycznego

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy.

3. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

4. Podczas rozgrywki ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania rozwiązania jednego z zadań. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą.
5. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie.
6. Jeżeli drużyna wywołana przyjmuje zadanie, Kapitan drużyny **wywołującej** wyznacza zawodnika drużyny wywołanej do zreferowania rozwiązania przy tablicy. Rozwiązanie to jest oceniane przez Jury.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny był już wyznaczony do referowania nie mniej razy niż on.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny wywołanej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Kapitan prosi wówczas drużynę przeciwną o wyznaczenie nowego referującego. N-ta zmiana **w czasie meczu** powoduje odjęcie N punktów drużynie zmieniającej referującego. Jeżeli do referowania wyznaczono kapitana, wskazuje on swego zastępcę.
10. Czas na zreferowanie rozwiązania wynosi 15 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, może poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieje na poprawność i zbliża się do końca.
11. Po oznajmieniu przez referującego, że zakończył referowanie, drużyna przeciwna zgłasza zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli Jury uznaje rozwiązanie za poprawne, punktuje je od 5 do 10 punktów. Jury może przyznać drużynie wywołującej te punkty, które zostały odjęte drużynie rozwiązującej, jeżeli usterki rozwiązania zostały przez tę drużynę zauważone.
13. Jeżeli Jury nie uznaje rozwiązania za poprawne, żadna z drużyn nie otrzymuje punktów, chyba że drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie. Wtedy ma ona prawo do przedstawienia własnego rozwiązania na zasadach i przy punktacji określonych w punktach **6–12**.
14. Jeżeli drużyna wywołana nie przyjmie zadania, rozwiązuje je drużyna wywołująca zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–12**. Jeśli jednak nie przedstawi ona poprawnego rozwiązania, otrzyma -10 (minus 10) punktów.
15. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

notatki

notatki

Spis treści