# Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

**Zwardoń, 30 maja – 13 czerwca 2004**

(wydanie drugie, nieco poprawione i uzupełnione)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 30 maja –13 czerwca 2004

Dom wczasowy „Zgoda”, Zwardoń 45A
34-373 ZWARDOŃ
tel. 0-33-8646-328

Kadra:

Jerzy Bednarczuk
Joanna Jaszuńska
Lev Kourliandtchik
Mateusz Michałek
Adam Osękowski
Waldemar Pompe
Paweł Walter – kierownik naukowy
Jarosław Wróblewski

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`www.om.edu.pl`

# Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 30 maja – 13 czerwca 2004 r. w Zwardoniu, w pensjonacie „Zgoda”. Kadrę obozu stanowili: Jerzy Bednarczuk, Joanna Jaszuńska, Lev Kourliandtchik, Mateusz Michałek, Adam Osękowski, Waldemar Pompe, Paweł Walter – kierownik naukowy i Jarosław Wróblewski.

W dniach 31 maja, 1, 2, 4, 7, 8, 10 i 11 czerwca uczestnicy obozu rozwiązywali zadania indywidualnie, dnia 6 czerwca odbyły się zawody drużynowe, a 3 i 12 czerwca rozegrane zostały „mecze matematyczne” (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 174 punkty. Trzy najlepsze wyniki to: 137 punktów, 130 punktów i 113 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie.

Dla uczestników obozu zorganizowane zostały dwie wycieczki: 5 czerwca piesza wycieczka na Wielką Raczę, a 9 czerwca wycieczka pociągiem do Žiliny na Słowacji.

Po obozie, w dniach 20 – 23 czerwca 2004 r., w Bilovcu w Czechach, odbyły się IV Czesko–Polsko–Słowackie Zawody Matematyczne.

W Zawodach Czesko–Polsko–Słowackich uczestniczyli uczniowie, którzy weszli w skład delegacji tych krajów na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną. Przewodniczącym delegacji polskiej był Waldemar Pompe, zastępcą przewodniczącego był Adam Osękowski.

W ciągu dwóch dni każdy z zawodników rozwiązywał po 3 zadania, mając na to po 4,5 godziny.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu, szkice ich rozwiązań, oraz zadania z IV Czesko–Polsko–Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami.

Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych Olimpiady Matematycznej znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`.

*Komitet Główny Olimpiady Matematycznej*

# Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

| Zadanie | liczba prac na 6 punktów | liczba prac na 5 punktów | liczba prac na 2 punkty | liczba prac na 0 punktów |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | 5 | 0 | 0 | 15 |
| **2.** | 9 | 2 | 0 | 9 |
| **3.** | 0 | 0 | 0 | 20 |
| **4.** | 13 | 1 | 2 | 4 |
| **5.** | 19 | 1 | 0 | 0 |
| **6.** | 14 | 0 | 0 | 6 |
| **7.** | 10 | 8 | 1 | 1 |
| **8.** | 6 | 1 | 1 | 12 |
| **9.** | 8 | 1 | 0 | 11 |
| **10.** | 0 | 0 | 0 | 20 |
| **11.** | 3 | 6 | 1 | 10 |
| **12.** | 6 | 0 | 1 | 13 |
| **13.** | 10 | 1 | 1 | 8 |
| **14.** | 2 | 0 | 0 | 18 |
| **15.** | 6 | 1 | 1 | 12 |
| **16.** | 6 | 2 | 1 | 11 |
| **17.** | 2 | 1 | 0 | 17 |
| **18.** | 11 | 1 | 0 | 8 |
| **19.** | 9 | 0 | 0 | 11 |
| **20.** | 12 | 0 | 0 | 8 |
| **21.** | 4 | 0 | 2 | 14 |
| **22.** | 6 | 2 | 1 | 11 |
| **23.** | 7 | 2 | 0 | 11 |
| **24.** | 6 | 3 | 0 | 11 |
| **25.** | 0 | 0 | 2 | 18 |
| **26.** | 1 | 0 | 1 | 18 |
| **27.** | 8 | 0 | 0 | 12 |
| **28.** | 6 | 1 | 0 | 13 |
| **29.** | 1 | 0 | 1 | 18 |

*Uwaga:* Każda praca była oceniana w skali 0, 2, 5, 6 punktów.

# Treści zadań

**Zawody indywidualne:**

**1.** Wyznaczyć największą wartość wyrażenia
$$\sin x\cos y+\sin y\cos 2z+\sin z\cos 4x$$
dla liczb rzeczywistych $x$, $y$, $z$.

**2.** Okręgi $o_1$ i $o_2$ są styczne zewnętrznie w punkcie $D$. Prosta $k$ jest styczna do okręgów $o_1$ i $o_2$ odpowiednio w punktach $A$ i $B$. Odcinek $AC$ jest średnicą okręgu $o_1$. Prosta $l$ przechodzi przez punkt $C$ i jest styczna do okręgu $o_2$ w punkcie $E$. Wykazać, że $AC=CE$.

**3.** Wyznaczyć najmniejszą liczbę nieparzystą $n>1$ o następującej własności: istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, których kwadraty są równe sumom kwadratów $n$ kolejnych liczb naturalnych.

**4.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$, $b$ zachodzi nierówność
$$a^a+b^b>ab\,.$$

**5.** Do boku $CA$ trójkąta $ABC$ należy taki punkt $D$, że $AB=CD$ oraz spełniony jest warunek $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ABD$. Dwusieczna kąta $CAB$ przecina bok $BC$ w punkcie $E$. Udowodnić, że $AB\parallel DE$.

**6.** Niech $n>1$ będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że spośród liczb
$$n^2+1,\ n^2+2,\ \ldots,\ n^2+2n$$
można wybrać trzy różne liczby $a$, $b$, $c$ takie, że liczba $a^2+b^2$ jest podzielna przez $c$.

**7.** Punkt $F$ jest środkiem boku $AB$ trójkąta $ABC$. Na bokach $BC$ i $CA$ wybrano odpowiednio punkty $D$ i $E$ takie, że $\sphericalangle CDF=\sphericalangle CEF$. Poprowadzono prostą prostopadłą do $BC$ przechodzącą przez punkt $D$, prostą prostopadłą do $CA$ przechodzącą przez punkt $E$ oraz prostą prostopadłą do $AB$ przechodzącą przez punkt $F$. Udowodnić, że te trzy proste przecinają się w jednym punkcie.

**8.** Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a$, $b$, $c$, $d$ zachodzi nierówność
$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63cda}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63dab}}+\frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}}\geqslant 1.$$

**9.** Punkt $P$ leży wewnątrz czworościanu foremnego $ABCD$ o krawędzi 1. Proste $AP$, $BP$, $CP$, $DP$ przecinają odpowiednio ściany $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ w punktach $E$, $F$, $G$, $H$. Wykazać, że $PE+PF+PG+PH<1$.

**10.** Na każdym polu planszy $n\times n$ ustawiamy jeden pionek, a następnie wykonujemy ruchy. W jednym ruchu wolno przesunąć dowolny pionek o dwa pola w prawo lub o dwa pola w dół (o ile pole docelowe znajduje się na planszy), usuwając z planszy jeden spośród pionków znajdujących się na polu pomiędzy polem wyjściowym a docelowym (ruch wolno wykonać, o ile taki pionek istnieje). Wyznaczyć wszystkie takie $n$, dla których poprzez ciąg ruchów można doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie pionki nieusunięte z planszy znajdują się na jednym polu.

**11.** Okręgi $o_1$ i $o_2$ przecinają się w punktach $A$ i $B$. Okrąg $o_3$ jest styczny zewnętrznie do okręgów $o_1$ i $o_2$ odpowiednio w punktach $C$ i $E$, a okrąg $o_4$ jest styczny zewnętrznie do okręgów $o_1$ i $o_2$ odpowiednio w punktach $D$ i $F$. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie $ACE$ jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie $ADF$.

**12.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$, $b$, $c$ spełniających warunek $a^2+b^2+c^2=1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

**13.** Okrąg $o$, wpisany w trójkąt $ABC$, jest styczny do boków $AB$, $BC$ i $CA$ odpowiednio w punktach $Q$, $E$, $P$. Odcinek $EF$ jest średnicą okręgu $o$. Proste $FA$, $FP$, $FQ$ przecinają prostą $BC$ odpowiednio w punktach $M$, $K$, $L$. Wykazać, że punkt $M$ jest środkiem odcinka $KL$.

**14.** Udowodnić, że z dowolnych 200 liczb naturalnych można wybrać 100 liczb takich, że ich suma jest podzielna przez 100.

**15.** Niech $(a_1,a_2,\ldots,a_{2004})$ będzie permutacją zbioru $\{1,2,\ldots,2004\}$. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{2003}}{a_{2004}}+\frac{a_{2004}}{a_1}>2005.$$

**16.** Na płaszczyźnie dane są cztery proste drogi, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Każdą drogą idzie ze stałą prędkością jedna z czterech osób: Fredek, Paździoch, Boczek i Walduś. Każda para przy spotkaniu wypija 2 napoje marki MF. Dowieść, że liczba wypitych napojów marki MF jest różna od 10.

**17.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ liczba

$$\cos^n\frac{\pi}{7}+\cos^n\frac{3\pi}{7}+\cos^n\frac{5\pi}{7}$$

jest wymierna.

**18.** Punkty $P$ i $Q$ leżą wewnątrz trójkąta $ABC$, przy czym

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle QAC = \sphericalangle QCB = \sphericalangle QBA = \beta .$$

Wykazać, że $\alpha = \beta$.

**19.** Znaleźć wszystkie liczby pierwsze $p$ postaci $6k+1$, dla których istnieje funkcja $f$, określona na zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych, o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych taka, że

$$(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ razy}})(x) = 1 + x + 2\sqrt{x}.$$

**20.** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie $H$. Okrąg o średnicy $AH$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punktach $A$ i $K$. Prosta $KH$ przecina odcinek $BC$ w punkcie $M$. Wykazać, że punkt $M$ jest środkiem odcinka $BC$.

**21.** Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych taki, że żaden wyraz tego ciągu i żadna suma dowolnej liczby wyrazów tego ciągu nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym większym od 1.

**22.** Dany jest pięciokąt wypukły o wierzchołkach w punktach o współrzędnych całkowitych. Wykazać, że istnieje punkt o współrzędnych całkowitych leżący wewnątrz tego pięciokąta.

**23.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby dodatniej $a$ zachodzi nierówność

$$a^{a^2} + a^{2a} > 1.$$

**24.** Na bokach trójkąta $ABC$ zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ABDE$, $BCGF$, $CAHI$. Udowodnić, że symetralne odcinków $DF$, $GI$, $HE$ przecinają się w jednym punkcie.

**25.** Zawodnicy $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2004}$ biorą udział w Meczu Matematycznym. Zawodnicy $Z_{2003}$ i $Z_{2004}$ są kapitanami i wybierają swoje drużyny według następującego algorytmu: w każdej rundzie najpierw kapitan $Z_{2004}$ wyznacza zawodnika spośród dotąd niewybranych, a $Z_{2003}$ decyduje, do której drużyny on trafi, następnie $Z_{2003}$ wyznacza zawodnika spośród dotąd niewybranych, a $Z_{2004}$ decyduje, do której drużyny on trafi. Procedura powtarzana jest do momentu, w którym jedna z drużyn będzie liczyć już 1002 zawodników – wtedy wszyscy pozostali trafiają do drużyny przeciwnej. Dla każdego $i$ zawodnik $Z_i$ rozwiąże podczas meczu $i$ zadań, przy czym każde zadanie zostanie rozwiązane przez co najwyżej jednego zawodnika. Mecz wygra drużyna, która rozwiąże łącznie więcej zadań. Rozstrzygnąć, który z kapitanów (jeśli którykolwiek) posiada strategię wybierania drużyny pozwalającą mu, niezależnie od zachowania przeciwnika, zapewnić swojej drużynie zwycięstwo w Meczu Matematycznym.

**26.** Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami dodatnimi spełniającymi warunek
$$a_1+a_2+\ldots+a_n=1.$$
Dla $k\in\{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczmy $H_k=\frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}}$. Udowodnić, że zachodzi nierówność $H_1+H_2+\ldots+H_n<2$.

**27.** Udowodnić, że równanie
$$x^3+y^3+2=z^3$$
ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych $x$, $y$, $z$.

**28.** Dany jest taki trójkąt $ABC$, że $BC\neq CA$. Punkty $D$ i $E$ leżą odpowiednio na bokach $BC$ i $CA$ tego trójkąta, przy czym $BD=AE$. Odcinki $AD$ i $BE$ przecinają się w punkcie $P$. Dwusieczna kąta $ACB$ przecina odcinki $AD$ i $BE$ odpowiednio w punktach $Q$ i $R$. Wykazać, że
$$\frac{AQ}{BP}=\frac{QP}{PR}=\frac{PD}{RE}.$$

**29.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zbiór liczb naturalnych od 1 do $\frac{7^n-1}{2}$ można podzielić na rozłączne zbiory tak, aby w każdym zbiorze największa liczba była równa sumie pozostałych liczb z tego zbioru.

**Zawody drużynowe:**

**1.** 32 proste dzielą koło o promieniu 10 cm na pewną liczbę części. Udowodnić, że w jednej z nich da się zmieścić koło o promieniu 3 mm.

**2.** Przedstawić liczbę 1 w postaci sumy 99 odwrotności różnych nieparzystych liczb naturalnych.

**3.** Niech $p$ i $q$ będą różnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi. Dowieść, że liczbę
$$\left(1+\sqrt[q]{2}\right)^{p^{q^2}}-\left(1+\sqrt[q]{2}\right)^{p^q}$$
można przedstawić w postaci
$$p\left(n_0+n_1\sqrt[q]{2}+n_2\sqrt[q]{4}+\ldots+n_{q-1}\sqrt[q]{2^{q-1}}\right),$$
gdzie liczby $n_0, n_1, n_2, \ldots n_{q-1}$ są całkowite.

**4.** Dana jest liczba wymierna $q\in(0,1)$ oraz taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność
$$f(qx+(1-q)y)\leqslant qf(x)+(1-q)f(y).$$
Dowieść, że dla dowolnej liczby wymiernej $r\in(0,1)$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność
$$f(rx+(1-r)y)\leqslant rf(x)+(1-r)f(y).$$

**5.** Punkt $P$ leżący wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ ma tę własność, że jego rzuty prostokątne na proste $AB$, $BC$, $CD$ i $DA$ leżą na jednym okręgu $o$. Dowieść, że środki odcinków $AC$ i $BD$ oraz środek okręgu $o$ leżą na jednej prostej.

**Pierwszy Mecz Matematyczny:**

**1.** Udowodnić, że równanie $x^3+y^3+1=z^3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych $x$, $y$, $z$.

**2.** Dowieść, że istnieje taka liczba naturalna $n \leqslant 100$ oraz takie liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, że

$$x_1^{49}+x_2^{49}+\ldots+x_n^{49}=0\,,$$

a ponadto $x_i+x_j \neq 0$ dla dowolnych $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

**3.** Udowodnić, że jedyną możliwą wartością całkowitą wyrażenia

$$\frac{a^2+b^2}{ab-1},$$

gdzie $a$ i $b$ są liczbami naturalnymi, jest 5.

**4.** Dana jest liczba naturalna $n$ i wielomian $W$ stopnia mniejszego od $n$ o współczynnikach rzeczywistych. Niech $S(k)$ będzie sumą cyfr liczby $k$. Udowodnić, że

$$\left(\sum_{i=0}^{10^n-1}(-1)^{S(i)}W(i)\right)^2 \leqslant \sum_{i=0}^{\frac{10^n-1}{9}} W^2(9i).$$

**5.** Dana jest liczba naturalna $k$. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o sumie $n$ zachodzi nierówność

$$kn+\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \leqslant n+k\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

**6.** Rozwiązać równanie

$$z^x+1=(z+1)^y$$

w liczbach naturalnych $x$, $y$, $z$ .

**7.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=s^2+t^2 \\ x^4+y^4+z^4=s^4+t^4 \end{cases}$$

w liczbach naturalnych $x$, $y$, $z$, $s$, $t$ niemających wspólnego dzielnika większego od 1.

**8.** Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg $o$. Okręgi $o_1$, $o_2$, $o_3$, $o_4$, $o_5$, $o_6$ są styczne wewnętrznie do okręgu $o$ odpowiednio w punktach $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$. Jednocześnie styczne zewnętrznie są okręgi: $o_1$ i $o_2$, $o_2$ i $o_3$, $o_3$ i $o_4$, $o_4$ i $o_5$, $o_5$ i $o_6$, $o_6$ i $o_1$. Wykazać, że proste $AD$, $BE$ i $CF$ przecinają się w jednym punkcie.

**9.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste $AB$ i $CD$ przecinają się w punkcie $E$, a proste $AD$ i $BC$ przecinają się w punkcie $F$. Dwusieczne kątów $AED$ i $AFB$ przecinają się w punkcie $P$. Udowodnić, że

$$[ABP]+[CDP]=[BCP]+[DAP],$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta $XYZ$.

**10.** Punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta $ABC$, przy czym $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Punkty $K$ i $L$ są rzutami prostokątnymi punktu $P$ odpowiednio na dwusieczne kąta wewnętrznego i kąta zewnętrznego przy wierzchołku $C$ trójkąta $ABC$. Punkt $M$ jest środkiem boku $AB$. Wykazać, że punkty $K$, $L$, $M$ leżą na jednej prostej.

**11.** Na bokach $AB$ i $AC$ trójkąta $ABC$ zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty $ABF$ i $ACE$, przy czym $AF=FB$ oraz $AE=EC$. Na boku $BC$ trójkąta $ABC$ zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąt $BCD$, przy czym

$$\sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\sphericalangle AEC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DCB = \frac{1}{2}\sphericalangle AFB.$$

Odcinki $AD$ i $FE$ przecinają się. Dowieść, że te odcinki są prostopadłe.

**Drugi Mecz Matematyczny:**

**1.** Rozstrzygnąć, czy równanie

$$x_1^{88}+x_2^{88}+x_3^{88}+\ldots+x_{15}^{88}+x_{16}^{88}+y^8=z^8$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich.

**2.** Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$, $b$, $c$ spełniających warunek $a+b+c=0$ zachodzi nierówność

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3 \geqslant 6abc.$$

**3.** Niech $k$ będzie liczbą naturalną. Określamy ciąg $(a_n)$ następująco:

$$a_n = 0 \quad \text{dla} \quad n<0\,;$$
$$a_0 = 1\,;$$
$$a_n = a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_{n-k}\,.$$

Wykazać, że dla każdych liczb naturalnych $n$, $m$ zachodzi nierówność

$$a_n a_m \geqslant a_{n+m-1}\,.$$

**4.** Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $x$, $y$ spełniających równanie

$$x^2-5xy+y^2+5=0.$$

**5.** Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $a$, $b$ takich, że $a-b$ oraz $a^2+3b^2+1$ są sześcianami liczb całkowitych.

**6.** Liczby naturalne $x_0$, $x_1$, $x_2$, ,…, $x_{28}$ spełniają warunek

$$x_0^{15}=x_1^{15}+x_2^{15}+\ldots+x_{28}^{15}\,.$$

Dowieść, że co najmniej jedna z liczb $x_0$, $x_1$, $x_2$, …, $x_{28}$ jest podzielna przez 31.

**7.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych $n$ takich, że liczba $3n^2+3n+1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

**8.** Dany jest trójkąt $ABC$, w którym $\sphericalangle ABC>90^\circ$. Punkty $P$ i $Q$ należą do symetralnej odcinka $AB$ i leżą wewnątrz kąta $ACB$. Dowieść, że jeżeli $\sphericalangle ACP=\sphericalangle BCQ$, to $\sphericalangle PAC+\sphericalangle QBC=180^\circ$.

**9.** Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku $O$. Proste $AB$ i $CD$ przecinają się w punkcie $E$, a proste $AD$ i $BC$ przecinają się w punkcie $F$. Odcinki $AC$ i $BD$ przecinają się w punkcie $Q$. Punkt $P$ spełnia warunki

$$EP^2=EA\cdot EB \quad \text{oraz} \quad FP^2=FB\cdot FC\,.$$

Wykazać, że punkty $P$, $O$, $Q$ leżą na jednej prostej.

**10.** Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AB=BC$, $CD=DE$, $EF=FA$ oraz

$$\sphericalangle B+\sphericalangle D+\sphericalangle F=360^\circ\,.$$

Dane są miary kątów sześciokąta $ABCDEF$. Wyznaczyć miary kątów trójkąta $BDF$.

**11.** Liczby całkowite dodatnie $x_1$, $x_2$, ,…, $x_{49}$, $y$ spełniają warunek

$$y^{16}=x_1^{16}+x_2^{16}+\ldots+x_{49}^{16}\,.$$

Dowieść, że $y>2004$.

**Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne:**

**1.** Udowodnić, że liczby rzeczywiste $p$, $q$, $r$ spełniają warunek

$$p^4(q-r)^2+2p^2(q+r)+1=p^4 \tag{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy równania kwadratowe

$$x^2+px+q=0\,, \quad y^2-py+r=0 \tag{2}$$

mają takie pierwiastki rzeczywiste (niekoniecznie różne), które można oznaczyć odpowiednio $x_1$, $x_2$ oraz $y_1$, $y_2$ w taki sposób, że $x_1y_1-x_2y_2=1$.

**2.** Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $k$ istnieje co najwyżej skończona liczba takich trójek parami różnych liczb pierwszych $p$, $q$, $r$, dla których liczba $qr-k$ jest podzielna przez $p$, liczba $pr-k$ jest podzielna przez $q$ oraz liczba $pq-k$ jest podzielna przez $r$.

**3.** Wewnątrz czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg dany jest taki punkt $P$, że

$$\sphericalangle BPC=\sphericalangle BAP=\sphericalangle PDC\,.$$

Oznaczmy przez $E$, $F$, $G$ rzuty prostokątne punktu $P$ odpowiednio na proste $AB$, $AD$, $DC$. Udowodnić, że trójkąt $FEG$ jest podobny do trójkąta $PBC$.

**4.** Rozwiązać układ równań

$$\frac{1}{xy}=\frac{x}{z}+1\,, \quad \frac{1}{yz}=\frac{y}{x}+1\,, \quad \frac{1}{zx}=\frac{z}{y}+1\,.$$

w zbiorze liczb rzeczywistych.

**5.** Na bokach $AB$, $BC$, $CA$ trójkąta $ABC$ wybrano odpowiednio takie punkty $K$, $L$, $M$, że

$$\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MA}\,.$$

Udowodnić, że punkty przecięcia wysokości trójkątów $ABC$ i $KLM$ pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt $ABC$ jest równoboczny.

**6.** Na stole leży $k$ kupek, na których jest odpowiednio $1,2,\ldots,k$ kamyków, gdzie $k\geqslant 3$. W pierwszym kroku wybieramy trzy dowolne kupki, łączymy je w jedną i z tej nowej kupki odkładamy jeden kamyk (zabieramy go ze stołu). W drugim kroku znów łączymy pewne trzy kupki w jedną i z niej odkładamy dwa kamyki. W $i$-tym kroku łączymy dowolne trzy kupki, w których jest razem więcej niż $i$ kamyków w jedną kupkę i odkładamy z niej $i$ kamyków. Zakładamy, że po kilku krokach pozostanie na stole jedna kupka, w której jest $p$ kamyków. Udowodnić, że liczba $p$ jest kwadratem liczby naturalnej wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $2k+2$ i $3k+1$ są kwadratami liczb naturalnych. Znaleźć najmniejszą liczbę $k$, dla której liczba $p$ jest kwadratem liczby naturalnej.

# Szkice rozwiązań

**Zawody indywidualne:**

**1.** Wyznaczyć największą wartość wyrażenia

$$\sin x \cos y + \sin y \cos 2z + \sin z \cos 4x$$

dla liczb rzeczywistych $x$, $y$, $z$.

*Rozwiązanie*

Ponieważ

$$\sin x \cos y + \sin y \cos 2z + \sin z \cos 4x \leqslant$$

$$\leqslant |\sin x \cos y| + |\sin y \cos 2z| + |\sin z \cos 4x| \leqslant |\cos y| + |\sin y| + 1$$

oraz

$$(|\cos y| + |\sin y|)^2 = 1 + |2\sin y \cos y| = 1 + |\sin 2y| \leqslant 2,$$

więc szukana wartość nie przekracza $1+\sqrt{2}$. Wystarczy już tylko zauważyć, iż wartość ta jest osiągana dla $x = \frac{1}{2}\pi$, $y = \frac{7}{4}\pi$, $z = \frac{1}{2}\pi$.

**2.** Okręgi $o_1$ i $o_2$ są styczne zewnętrznie w punkcie $D$. Prosta $k$ jest styczna do okręgów $o_1$ i $o_2$ odpowiednio w punktach $A$ i $B$. Odcinek $AC$ jest średnicą okręgu $o_1$. Prosta $l$ przechodzi przez punkt $C$ i jest styczna do okręgu $o_2$ w punkcie $E$. Wykazać, że $AC = CE$.

*Rozwiązanie*

*Sposób I.* Oznaczmy środki okręgów $o_1$ i $o_2$ odpowiednio przez $O_1$ i $O_2$. Niech $D$ będzie punktem styczności tych okręgów. Punkty $O_1$, $D$ i $O_2$ leżą na jednej prostej, a ponadto $AO_1 \parallel BO_2$. Stąd $\sphericalangle CO_1D = \sphericalangle BO_2D$ oraz

$$\sphericalangle O_1DC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CO_1D) = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BO_2D) = \sphericalangle O_2DB,$$

czyli punkty $B$, $D$, $C$ leżą na jednej prostej. Zatem

$$CE^2 = CD \cdot BC. \tag{1}$$

Zauważmy, że trójkąty $ABC$ oraz $DAC$ są podobne; istotnie, są one prostokątne i mają wspólny kąt ostry $ACB$. Stąd

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC},$$

czyli $AC^2 = CD \cdot BC$, co w połączeniu z (1) daje tezę.

*Sposób II.* Zastosujmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie $C$ i o promieniu $CA$. Obrazem prostej $l$ jest wtedy ta sama prosta, obrazem prostej $k$ jest okrąg $o_1$, zaś obrazem okręgu $o_1$ – prosta $k$. Obrazem okręgu $o_2$ jest okrąg styczny do obrazów prostych $k$ i $l$ oraz do obrazu okręgu $o_1$, czyli styczny do okręgu $o_1$, prostej $l$ i do prostej $k$. Ponadto obraz okręgu $o_2$ leży po tej samej stronie prostej $AC$, co okrąg $o_2$. Wynika stąd, że okrąg $o_2$ jest okręgiem stałym dla naszej inwersji, zatem jest ortogonalny do okręgu inwersyjnego. Wobec tego długość odcinka stycznej poprowadzonej ze środka inwersji jest równa promieniowi okręgu inwersyjnego, czyli $CE=CA$, co było do okazania.

**3.** Wyznaczyć najmniejszą liczbę nieparzystą $n>1$ o następującej własności: istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, których kwadraty są równe sumom kwadratów $n$ kolejnych liczb naturalnych.

*Rozwiązanie*

Niech $y$ będzie liczbą, której kwadrat jest sumą kwadratów kolejnych liczb całkowitych, a $x$ niech będzie środkową z tych liczb.

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$y^2=(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=3x^2+2\,,$$

co nie jest możliwe, gdyż kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 2.

Dla $n=5$ otrzymujemy

$$y^2=(x-2)^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=5x^2+10\,.$$

Prawa strona powyższego równania jest podzielna przez 5, a zatem lewa również; po podstawieniu $y=5z$ dostajemy

$$x^2=5z^2-2\,.$$

Jednak kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 5 reszty 3.

Dla $n=7$ otrzymujemy

$$y^2=(x-3)^2+(x-2)^2+\ldots+(x+3)^2=7x^2+28\,.$$

Prawa strona powyższego równania dzieli się przez 7. Wynika stąd, że $y$ dzieli się przez 7 i po podstawieniu $y=7z$ dostajemy

$$x^2=7z^2-4\,.$$

Jednak kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 7 reszty 3.

Dla $n=9$ otrzymujemy

$$y^2=(x-4)^2+(x-3)^2+\ldots+(x+4)^2=9x^2+60\,.$$

Prawa strona jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9, nie może więc być kwadratem liczby całkowitej.

Dla $n=11$ otrzymujemy

$$y^2=(x-5)^2+(x-4)^2+\ldots+(x+5)^2=11x^2+110\,.$$

Prawa strona powyższego równania dzieli się przez 11, a więc $y$ dzieli się przez 11; po podstawieniu $y=11z$ dostajemy

$$x^2-11z^2=-10\,.$$

Powyższe równanie spełnione jest dla $x=z=1$. Wykażemy, że posiada ono nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych $x$, $z$.

Zauważmy, że

$$10^2-11\cdot 3^2=1\,.$$

Określmy ciągi $(x_k)$, $(z_k)$ liczb całkowitych następująco:

$$x_k+z_k\sqrt{11}=\left(1+\sqrt{11}\right)\cdot\left(10+3\sqrt{11}\right)^k,\ k=1,\,2,\,\ldots.$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $k$ mamy $x_k>0$, $z_k>0$ oraz

$$x_k^2-11z_k^2=(x_k+z_k\sqrt{11})(x_k-z_k\sqrt{11})=$$

$$= (1+\sqrt{11})(1-\sqrt{11})(10+3\sqrt{11})^k(10-3\sqrt{11})^k = -10\cdot 1^k = -10\,.$$

Wystarczy już tylko zauważyć, że dla różnych $k$ otrzymujemy różne rozwiązania $x_k$, $z_k$; istotnie, ciąg

$$\left(1+\sqrt{11}\right)\cdot\left(10+3\sqrt{11}\right)^k,\ k=1,\,2,\,\ldots$$

jest rosnący, a zatem różnowartościowy.

**4.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$, $b$ zachodzi nierówność

$$a^a+b^b>ab\,.$$

*Rozwiązanie*

Dla dowolnej liczby dodatniej $x$ zachodzi nierówność $x^x \geqslant x$. Wynika stąd, że dla $a<2$, $b<2$ mamy

$$a^a+b^b \geqslant a+b \geqslant 2\sqrt{ab} > ab.$$

Przypuśćmy więc, że co najmniej jedna z liczb $a$, $b$ jest niemniejsza od 2. Możemy przyjąć, że $a \geqslant b$. Mamy

$$a^a+b^b > a^a \geqslant a^2 \geqslant ab,$$

a zatem i w tym przypadku nierówność jest prawdziwa.

**5.** Do boku $CA$ trójkąta $ABC$ należy taki punkt $D$, że $AB=CD$ oraz spełniony jest warunek $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABD$. Dwusieczna kąta $CAB$ przecina bok $BC$ w punkcie $E$. Udowodnić, że $AB \parallel DE$.

*Rozwiązanie*

Trójkąty $ABC$ oraz $ADB$ są podobne, a więc

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}. \tag{1}$$

Z drugiej strony, na mocy twierdzenia o dwusiecznej,

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{EB}. \tag{2}$$

Równość $AB=CD$ w połączeniu ze związkami (1) i (2) daje

$$\frac{CE}{EB}=\frac{CD}{AD},$$

czyli $AB \parallel DE$.

**6.** Niech $n>1$ będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że spośród liczb

$$n^2+1,\ n^2+2,\ \ldots,\ n^2+2n$$

można wybrać trzy różne liczby $a$, $b$, $c$ takie, że liczba $a^2+b^2$ jest podzielna przez $c$.

*Rozwiązanie*

Dla $n=2$ liczby $a=6=2^2+2$, $b=7=2^2+2+1$, $c=5=2^2+1$ spełniają warunki zadania; dla $n=3$ wystarczy położyć $a=11=3^2+2$, $b=13=3^2+3+1$, $c=3^2+1$. Udowodnimy, że w przypadku ogólnym wystarczy wziąć $a=n^2+2$, $b=n^2+n+1$, $c=n^2+1$. Otóż

$$(n^2+2)^2+(n^2+n+1)^2 = 2n^4+2n^3+7n^2+2n+5 = (n^2+1)(2n^2+2n+5).$$

**7.** Punkt $F$ jest środkiem boku $AB$ trójkąta $ABC$. Na bokach $BC$ i $CA$ wybrano odpowiednio punkty $D$ i $E$ takie, że $\sphericalangle CDF = \sphericalangle CEF$. Poprowadzono prostą prostopadłą do $BC$ przechodzącą przez punkt $D$, prostą prostopadłą do $CA$ przechodzącą przez punkt $E$ oraz prostą prostopadłą do $AB$ przechodzącą przez punkt $F$. Udowodnić, że te trzy proste przecinają się w jednym punkcie.

*Rozwiązanie*

Niech $o_1$, $o_2$ będą okręgami opisanymi na trójkątach $AFE$, $BFD$, odpowiednio. Okręgi te przecinają się w punkcie $F$. Rozważymy dwa przypadki. Jeśli okręgi te są styczne, to teza zadania zachodzi w sposób oczywisty: odcinki $AF$, $BF$ są wówczas średnicami odpowiednio okręgów $o_1$ i $o_2$, a stąd $\sphericalangle CDF = \sphericalangle CEF = 90^\circ$ i rozważane trzy proste przecinają się w punkcie $F$.

Przypuśćmy zatem, że okręgi $o_1$ i $o_2$ przecinają się w punkcie $G \neq F$. Zauważmy, że okręgi te mają te same promienie (ponieważ $AF = BF$ oraz $\sphericalangle CDF = \sphericalangle CEF$). Odcinki $AG$ oraz $BG$ są średnicami tych okręgów, a stąd $G$ leży na symetralnej odcinka $AB$. Ponadto $\sphericalangle BDG = \sphericalangle AEG = 90^\circ$, a więc rozważane proste przecinają się w punkcie $G$.

**8.** Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a$, $b$, $c$, $d$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63cda}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63dab}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geqslant 1.$$

*Rozwiązanie*

*Sposób I.* Wystarczy dobrać taką liczbę $p$ dla której zachodzi nierówność

$$(*) \qquad \frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} \geqslant \frac{a^p}{a^p+b^p+c^p+d^p}.$$

Wówczas analogicznie

$$\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63cda}} \geqslant \frac{b^p}{a^p+b^p+c^p+d^p},$$

$$\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63dab}} \geqslant \frac{c^p}{a^p+b^p+c^p+d^p},$$

$$\frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geqslant \frac{d^p}{a^p+b^p+c^p+d^p}$$

i dodając powyższe cztery nierówności stronami dostajemy tezę.

Zajmiemy się nierównością (*); zauważmy najpierw, iż korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymujemy

$$\begin{gathered}(a^p+b^p+c^p+d^p)^3-(a^p)^3= \\ =(b^p+c^p+d^p)((a^p)^2+(b^p)^2+(c^p)^2+(d^p)^2+(a^p)^2+(ab)^p+ \\ +(ac)^p+(ad)^p+(ab)^p++(ab)^p+(ac)^p+(ac)^p+(ad)^p+(ad)^p+ \\ +(bc)^p+(bc)^p+(bd)^p+(bd)^p+(cd)^p+(cd)^p+(a^p)^2)\geqslant \\ \geqslant 3(bcd)^{p/3}\cdot 21\left(a^{5/7}\right)^p(bcd)^{3p/7}=63a^{5p/7}(bcd)^{16p/21}.\end{gathered}$$

Stąd
$$(a^p+b^p+c^p+d^p)^3 \geqslant a^{5p/7}\left(a^{16p/7}+63(bcd)^{16p/21}\right),$$
a zatem nierówność (*) zachodzi dla $p=\frac{21}{16}$.

*Sposób II.* Z jednorodności możemy założyć, że $a+b+c+d=1$. Korzystając z nierówności Jensena dla funkcji wypukłej
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$
mamy
$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63cda}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63dab}}+\frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{a^4+63abcd+b^4+63abcd+c^4+63abcd+d^4+63abcd}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{a^4+b^4+c^4+d^4+252abcd}}.$$
Zatem wystarczy udowodnić, że
$$a^4+b^4+c^4+d^4+252abcd \leqslant 1=(a+b+c+d)^4.$$
Upraszczając wyrazy $a^4$, $b^4$, $c^4$, $d^4$ zapisujemy prawą stronę jako sumę 252 składników. Pozostaje skorzystać z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną.

**9.** Punkt $P$ leży wewnątrz czworościanu foremnego $ABCD$ o krawędzi 1. Proste $AP$, $BP$, $CP$, $DP$ przecinają odpowiednio ściany $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ w punktach $E$, $F$, $G$, $H$. Wykazać, że $PE+PF+PG+PH<1$.

*Rozwiązanie*

Oznaczmy rzuty prostokątne punktu $P$ na ściany $BCD$, $CAD$, $ABD$, $ABC$ odpowiednio przez $K$, $L$, $M$, $N$. Niech $h$ oznacza wysokość czworościanu $ABCD$. Zachodzi następująca równość $PK+PL+PN+PM=h$ (można to udowodnić korzystając z tego, iż objętość czworościanu $ABCD$ jest równa sumie objętości czworościanów $BCDP$, $CDAP$, $DABP$, $ABCP$).

Mamy
$$\frac{PE}{PK}=\frac{AE}{h}<\frac{1}{h},$$
czyli
$$PE<\frac{PK}{h}.$$
Analogicznie
$$PF<\frac{PL}{h},\quad PG<\frac{PM}{h},\quad PH<\frac{PN}{h}.$$
Dodając stronami ostatnie cztery nierówności dostajemy
$$PE+PF+PG+PH<\frac{PK+PL+PM+PN}{h}=1.$$

**10.** Na każdym polu planszy $n\times n$ ustawiamy jeden pionek, a następnie wykonujemy ruchy. W jednym ruchu wolno przesunąć dowolny pionek o dwa pola w prawo lub o dwa pola w dół (o ile pole docelowe znajduje się na planszy), usuwając z planszy jeden spośród pionków znajdujących się na polu pomiędzy polem wyjściowym a docelowym (ruch wolno wykonać, o ile taki pionek istnieje). Wyznaczyć wszystkie takie $n$, dla których poprzez ciąg ruchów można doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie pionki nieusunięte z planszy znajdują się na jednym polu.

*Rozwiązanie*

Dla $n=1$ i $n=3$ łatwo podać ciąg ruchów prowadzący do odpowiedniej sytuacji. Wykażemy, że dla innych wartości $n$ jest to niemożliwe.

Niech $(a_n)$ będzie ciągiem Fibonacciego, tzn. $a_1=a_2=1$ oraz $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, dla $n = 1, 2, \ldots$. Polu w $k$-tym wierszu oraz $l$-tej kolumnie, $1\leqslant k, l\leqslant n$, przypisujemy liczbę $a_k a_l$.

Jak łatwo zauważyć, dowolny ruch nie zmienia sumy liczb przypisanych polom, na których znajdują się pionki (każde pole liczone jest tyle razy, ile pionków się na nim znajduje). Suma ta jest równa $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=(a_{n+2}-1)^2$ (łatwy dowód indukcyjny). Załóżmy, że liczba $n>1$ spełnia warunki zadania. Wobec tego po ostatnim ruchu wszystkie pionki pozostałe na planszy znajdują się na polu w $n$-tej kolumnie i $n$-tym wierszu. Wynika stąd, że $(a_{n+2}-1)^2$ dzieli się przez $a_n^2$, a więc dla pewnej liczby całkowitej dodatniej $k$,

$$ka_n=a_{n+2}-1=a_{n+1}+a_n-1=2a_n+a_{n-1}-1,$$

czyli

$$a_{n-1}=(k-2)a_n+1.$$

Ale $a_{n-1}\leqslant a_n$, skąd $k=2$ i $a_{n-1}=1$, a zatem $n-1=1$ lub $n-1=2$, czyli $n=2$ lub $n=3$. Łatwo sprawdzić, że dla $n=2$ nie istnieje odpowiedni ciąg ruchów.

Zatem szukanymi wartościami $n$ są 1 i 3.

**11.** Okręgi $o_1$ i $o_2$ przecinają się w punktach $A$ i $B$. Okrąg $o_3$ jest styczny zewnętrznie do okręgów $o_1$ i $o_2$ odpowiednio w punktach $C$ i $E$, a okrąg $o_4$ jest styczny zewnętrznie do okręgów $o_1$ i $o_2$ odpowiednio w punktach $D$ i $F$. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie $ACE$ jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie $ADF$.

*Rozwiązanie*

Zastosujmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie $A$. Niech $X^*$ oznacza obraz figury $X$. Proste $o_1^*$ i $o_2^*$ przecinają się w punkcie $B^*$, okrąg $o_3^*$ jest styczny do tych prostych odpowiednio w punktach $C^*$ i $E^*$, a okrąg $o_4^*$ – odpowiednio w punktach $D^*$ i $F^*$. Ponadto obydwa okręgi są zawarte w tym spośród czterech kątów wyznaczonych przez proste $o_1^*$, $o_2^*$, do którego należy punkt $A$, ponieważ wnętrza kół $o_1$, $o_2$ i $o_3$ są rozłączne (i analogicznie dla $o_4$).

Obrazem okręgu opisanego na trójkącie $ACE$ jest prosta $C^*E^*$, zaś obrazem okręgu opisanego na trójkącie $ADF$ jest prosta $D^*F^*$. Odcinki $B^*C^*$ i $B^*E^*$ są równe jako odcinki stycznych z punktu $B^*$ do okręgu $o_3^*$, analogicznie $B^*D^*=B^*F^*$. Wobec tego proste $C^*E^*$ i $D^*F^*$ są równoległe, czyli okręgi opisane na trójkątach $ACE$ i $ADF$ są styczne.

**12.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$, $b$, $c$ spełniających warunek $a^2+b^2+c^2=1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

*Rozwiązanie*

*Sposób I.* Niech $S=a+b+c$ i niech $f(x)=\frac{1}{1-x}$ dla $x\in(0,1)$. Przedstawmy nierówność w postaci:

$$\frac{a}{S}f(a)+\frac{b}{S}f(b)+\frac{c}{S}f(c)\geqslant\frac{3\sqrt{3}+3}{2S}.$$

Funkcja $f$ jest wypukła; na mocy nierówności Jensena mamy

$$\frac{a}{S}f(a)+\frac{b}{S}f(b)+\frac{c}{S}f(c)\geqslant f\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{S}\right)=f\left(\frac{1}{S}\right).$$

Ponieważ $f$ jest funkcją rosnącą i $S=a+b+c\leqslant\sqrt{3}$, więc mamy:

$$f\left(\frac{1}{S}\right)\geqslant f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

*Sposób II.* Przedstawmy nierówność w postaci:

$$\frac{a^2}{a(1-a)}+\frac{b^2}{b(1-b)}+\frac{c^2}{c(1-c)}\geqslant\frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

Niech $f(x)=\frac{1}{x(1-x)}$ dla $x\in(0,1)$. Zatem nierówność zapisuje się następująco:

$$a^2f(a)+b^2f(b)+c^2f(c)\geqslant\frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

Funkcja $f$ jest wypukła; na mocy nierówności Jensena mamy:

$$a^2f(a)+b^2f(b)+c^2f(c)\geqslant f(a^3+b^3+c^3).$$

Z nierówności pomiędzy średnimi potęgowymi otrzymujemy

$$\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{1/3}\geqslant\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Stąd $a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ponieważ na odcinku $[\frac{1}{2},\,1)$ funkcja $f$ jest rosnąca, więc

$$f(a^3+b^3+c^3)\geqslant f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

*Sposób III.* Dla dowolnej liczby dodatniej $x$ zachodzi nierówność

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2(x+\sqrt{3}+1)\geqslant 0.$$

Jeśli $x\in(0,1)$, to jest ona równoważna związkowi

$$\frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\frac{x}{1-x}\geqslant x^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Pisząc tę nierówność dla $x=a$, $x=b$, $x=c$ i sumując uzyskane trzy nierówności dostajemy nierówność równoważną nierówności z tezy zadania:

$$\frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\left(\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\right)\geqslant 1+3\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

**13.** Okrąg $o$, wpisany w trójkąt $ABC$, jest styczny do boków $AB$, $BC$ i $CA$ odpowiednio w punktach $Q$, $E$, $P$. Odcinek $EF$ jest średnicą okręgu $o$. Proste $FA$, $FP$, $FQ$ przecinają prostą $BC$ odpowiednio w punktach $M$, $K$, $L$. Wykazać, że punkt $M$ jest środkiem odcinka $KL$.

*Rozwiązanie*

*Sposób I.* Bez straty ogólności możemy założyć, że $AB > AC$, wtedy punkt $M$ należy do odcinka $BE$. Ponadto leży on między punktami $K$ i $L$, więc wystarczy wykazać, że $KM = LM$.

Udowodnijmy najpierw

**Lemat:** Okrąg $o$, wpisany w trójkąt $ABC$, jest styczny do boków $AB$, $BC$ i $CA$ odpowiednio w punktach $Q$, $E$, $P$. Okrąg $o'$, dopisany do trójkąta $ABC$, jest styczny do boku $BC$ w punkcie $M$. Wówczas odcinki $BM$ i $CE$ są równej długości.

**Dowód lematu:** Oznaczmy punkty styczności okręgu $o'$ z przedłużeniami boków $AB$ i $AC$ odpowiednio przez $Q'$ i $P'$. Porównując długości odcinków prostych stycznych, otrzymujemy

$$2\cdot BM + EM = BE + BM = BQ + BQ' = QQ' =$$

$$= PP' = CP + CP' = CE + CM = 2\cdot CE + EM,$$

czyli $BM = CE$, co kończy dowód lematu.

**Przejdźmy do rozwiązania zadania:**

Niech okrąg $o'$ oraz punkty $P'$, $Q'$ będą takie, jak w lemacie. Zastosujmy jednokładność o środku w punkcie $A$ i o skali $\frac{AM}{AF}$. Przeprowadza ona okrąg $o$ na okrąg $o'$ oraz punkty $F$, $P$, $Q$ odpowiednio na punkty $M$, $P'$, $Q'$.

Zauważmy, że kąt $EPF$, jako wpisany oparty na średnicy, jest prosty. Stąd wynika, że kąt $EPK$ również jest prosty. Ponadto $CE=CP$, więc punkt $C$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $EPK$. Wobec tego $CK = CE$; analogicznie $BL = BE$, zaś na mocy lematu $BM = CE$. Mamy zatem

$$KM = KC + CE + EM = 2\cdot CE + EM =$$

$$= 2\cdot BM + EM = BE + EM = BL + BM = LM,$$

co kończy dowód.

*Sposób II.* Wykażemy, że istnieją okręgi $o_1$, $o_2$ styczne do prostej $BC$ odpowiednio w punktach $K$ i $L$ i takie, że punkt $M$ leży na ich osi potęgowej. Wtedy otrzymamy $MK^2 = ML^2$, co jest równoważne tezie zadania.

Zastosujmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie $F$ i promieniu $EF$. Obrazem okręgu $o$ jest prosta $BC$, zaś obrazem prostej $BC$ jest okrąg $o$. Obraz prostej $AC$ jest okręgiem stycznym do prostej $BC$ w obrazie punktu $P$, czyli w punkcie $K$. Ponadto przechodzi przez środek inwersji $F$ i obraz $A^*$ punktu $A$. Podobnie obraz prostej $AB$ to okrąg styczny do prostej $BC$ w punkcie $L$ i przechodzący przez $F$ oraz przez $A^*$. Zauważmy, że punkt $A^*$ leży na prostej $FA$, czyli prosta ta jest osią potęgową obrazów prostych $AB$ i $AC$. Ponieważ punkt $M$ należy do prostej $FA$, otrzymane okręgi spełniają podane na początku warunki, co kończy dowód.

**14.** Udowodnić, że z dowolnych 200 liczb naturalnych można wybrać 100 liczb takich, że ich suma jest podzielna przez 100.

*Rozwiązanie*

Oznaczmy przez $T(a)$ następujące twierdzenie: z $2a-1$ liczb naturalnych można wybrać $a$ liczb, suma których jest podzielna przez $a$.

Udowodnimy najpierw, iż zachodzą $T(2)$ i $T(5)$. Twierdzenie $T(2)$ jest oczywiste. Zajmijmy się twierdzeniem $T(5)$.

Przypuśćmy przeciwnie, że $T(5)$ nie zachodzi. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_9$ będą takie, że żadne pięć z nich nie daje sumy podzielnej przez 5. Dalej będziemy utożsamiać liczby równe modulo 5, więc bez straty ogólności można założyc, że $0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_9 \leqslant 4$. Gdyby wśród $a_1, a_2, \ldots, a_9$ występowały cztery różne liczby $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}$, to dla dowolnego $k = 0, 1, 2, 3, 4$ można wybrać $t, u$ takie, że $a_{i_t} + a_{i_u} \equiv k \pmod 5$. Tak jest, gdyż spośród par $(0,\ k)$, $(1,\ k-1)$, $(2,\ k-2)$, $(3,\ k-3)$, $(4,\ k-4)$ co najwyżej jedna zawiera dwa jednakowe elementy i każda z reszt występuje w co najwyżej dwóch parach. Zatem można wziąc dowolne $a_{i_5}, a_{i_6}, a_{i_7}$ i dobrać do nich odpowiednie $a_{i_t}, a_{i_u}$, tak, by $a_{i_5} + a_{i_6} + a_{i_7} + a_{i_t} + a_{i_u}$ było podzielne przez 5. Oczywistym jest, że żadna z liczb nie może wystąpić wśród $a_1, a_2, \ldots, a_9$ więcej niż cztery razy. Zatem wśród $a_1, a_2, \ldots, a_9$ występują dokładnie trzy różne liczby i każda z nich co najwyżej cztery razy. Wystarczy rozważyć 2 przypadki:

1. Te trzy liczby są kolejne. Zatem są one równe $q-1, q, q+1$ dla pewnego $q$ (oczywiście modulo 5). Stąd któraś z konfiguracji

$$[k, k-1, k-1, k+1, k+1], [k, k, k, k+1, k-1]$$

występuje wśród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_9$.

2. Te trzy liczby nie są kolejne. Zatem są one równe $q-2, q, q+2$ dla pewnego $q$. Stąd któraś z konfiguracji

$$[k, k-2, k-2, k+2, k+2], [k, k, k, k+2, k-2]$$

występuje wśród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_9$.

Udowodnimy teraz, iż jeśli zachodzą twierdzenia $T(a)$ oraz $T(b)$, to zachodzi również twierdzenie $T(ab)$; da to natychmiast tezę zadania.

Przypuśćmy, że danych jest $2ab-1$ liczb naturalnych. Wybierzmy z nich $b$ liczb, suma których jest podzielna przez $b$. Z pozostałych znów wybieramy $b$ liczb, suma których jest podzielna przez $b$. Powtarzamy tę czynność $2a-1$ razy. Utworzyliśmy więc $2a-1$ grup po $b$ liczb. Oznaczmy sumy liczb z tych grup odpowiednio przez $bS_1, bS_2, ..., bS_{2a-1}$. Spośród liczb $S_1, S_2, ..., S_{2a-1}$ wybieramy $a$ liczb, tak, by ich suma była podzielna przez $a$. W ten sposób otrzymaliśmy $ab$ liczb, których suma jest podzielna przez $ab$.

**15.** Niech $(a_1, a_2, \ldots, a_{2004})$ będzie permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, 2004\}$. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{2003}}{a_{2004}} + \frac{a_{2004}}{a_1} > 2005.$$

*Rozwiązanie*

Będziemy indukcyjnie dowodzić, że dla dowolnego $n \geqslant 4$ oraz dowolnej permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} > n+1.$$

Dla $n = 4$ wystarczy sprawdzić 6 przypadków, gdyż bez straty ogólności możemy przyjąć $a_1 = 1$.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{1} = \frac{71}{12} > 5,$$
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{3} + \frac{3}{1} = \frac{16}{3} > 5,$$
$$\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{1} = \frac{19}{3} > 5,$$
$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{2} + \frac{2}{1} = \frac{61}{12} > 5,$$
$$\frac{1}{4} + \frac{4}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{1} = \frac{71}{12} > 5,$$
$$\frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{1} = \frac{61}{12} > 5.$$

Przejdźmy do kroku indukcyjnego. Niech $n \geqslant 5$ będzie liczbą naturalną. Zauważmy, że dla dowolnych liczb naturalnych $i, j < n$ zachodzi nierówność

$$\frac{i}{n} + \frac{n}{j} > \frac{i}{j} + 1.$$

Istotnie,

$$\frac{i}{n} + \frac{n}{j} - \frac{i}{j} - 1 = \frac{ij + n^2 - in - jn}{jn} = \frac{(n-i)(n-j)}{jn} > 0.$$

Niech $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ będzie permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a_n = n$. Wobec tego

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} + \left(\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{n}{a_1}\right) >$$
$$> \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} + \left(\frac{a_{n-1}}{a_1} + 1\right) =$$
$$= \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_1}\right) + 1 > n+1.$$

**16.** Na płaszczyźnie dane są cztery proste drogi, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Każdą drogą idzie ze stałą prędkością jedna z czterech osób: Fredek, Paździoch, Boczek i Walduś. Każda para przy spotkaniu wypija 2 napoje marki MF. Dowieść, że liczba wypitych napojów marki MF jest różna od 10.

*Rozwiązanie*

Równoważne sformułowanie zadania jest następujące: niemożliwa jest sytuacja, aby dokładnie jedna para osób się nie spotkała. Oznaczmy położenie Fredka, Paździocha, Boczka i Waldusia odpowiednio przez $F$, $P$, $B$ i $W$.

*Sposób I.* Wprowadźmy układ współrzędnych na płaszczyźnie i rozważmy trójwymiarową przestrzeń, w której trzecią współrzędną jest czas. Ponieważ każda z osób idzie ze stałą prędkością, więc jej droga w opisanej czasoprzestrzeni jest linią prostą. Przypuśćmy, że wbrew tezie zadania było dokładnie pięć spotkań; załóżmy, że Walduś i Fredek nie spotkali się. Spotkanie dwóch osób oznacza, że ich drogi w czasoprzestrzeni przecinają się. Rozważmy płaszczyznę rozpinaną przez drogi Boczka i Paździocha. Ponieważ droga Fredka przecina zarówno drogę Boczka, jak i drogę Paździocha, więc leży ona w rozważanej płaszczyźnie. Droga Waldusia przecina drogę Boczka i Paździocha, a więc też leży w tej płaszczyźnie. Stąd drogi Fredka i Waldusia leżą w jednej płaszczyźnie i nie są równoległe, a zatem przecinają się – czyli Fredek i Walduś spotykają się.

*Sposób II.* Przypuśćmy, wbrew tezie, że wszystkie spotkania mają miejsce za wyjątkiem spotkania Waldusia ($W$) i Fredka ($F$). Rozważmy prostą $k$ przechodzącą przez punkt spotkania Paździocha ($P$) i Boczka ($B$) prostopadłą do prostej przechodzącej przez punkty położenia $P$ i $B$ w godzinę po ich spotkaniu.

Prosta $k$ posiada następującą własność: w każdym momencie rzuty punktów $P$ i $B$ na prostą $k$ pokrywają się. Rzut Fredka na prostą $k$ pokrywa się z rzutami $P$ i $B$ zarówno w momencie spotkania Fredka z Paździochem, jak i w momencie spotkania Fredka z Boczkiem. Wynika stąd, że rzuty punktów $P$, $B$, $F$ pokrywają się w każdym momencie. Analogicznie postępujemy z punktem $W$. Ponieważ Walduś i Fredek rzutują się na ten sam punkt, więc znajdą się w punkcie przecięcia ich dróg w tym samym momencie.

*Uwaga.* Można dodatkowo wykazać, że w dowolnym momencie wszystkie cztery osoby znajdują się na jednej prostej. Przy rozwiązaniu sposobem I ta prosta to przecięcie płaszczyzny podniesionej o $t$ z płaszczyzną, o której mowa w rozwiązaniu. Przy sposobie II obrazem tej prostej jest wspólny punkt otrzymany jako rzut punktów $W$, $F$, $B$ i $P$.

**17.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ liczba
$$\cos^n \frac{\pi}{7} + \cos^n \frac{3\pi}{7} + \cos^n \frac{5\pi}{7}$$
jest wymierna.

*Rozwiązanie*

Oznaczmy
$$r_n = \cos^n \frac{\pi}{7} + \cos^n \frac{3\pi}{7} + \cos^n \frac{5\pi}{7},\ n \geqslant 0.$$
Niech
$$c_k = \cos \frac{k\pi}{7},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$
Zauważmy, że $c_k$ jest współrzędną $x$ jednostkowego wektora $\vec{e_k}$, który tworzy kąt $\frac{k\pi}{7}$ z dodatnią półosią $x$. Łatwo sprawdzić, że $c_{7+m} = c_{7-m} = -c_m$.

Zauważmy, że zachodzi równość

$$(*)\qquad \overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_5}+\overrightarrow{e_7}+\overrightarrow{e_{-5}}+\overrightarrow{e_{-3}}+\overrightarrow{e_{-1}}=\overrightarrow{0}.$$

Istotnie, po obrocie o kąt $\frac{2\pi}{7}$ cały układ wektorów przechodzi w siebie, więc suma nie zmienia się, a więc jest równa $\overrightarrow{0}$.

Z równania (*) natychmiast wynika, że $c_7+2c_1+2c_3+2c_5=0$, skąd

$$r_1=c_1+c_3+c_5=-\frac{1}{2}c_7=\frac{1}{2}.$$

Ponieważ

$$2c_1^2=c_2+1=-c_5+1,\quad 2c_3^2=c_6+1=-c_1+1,\quad 2c_5=c_{10}+1=-c_3+1,$$

więc

$$r_2=c_1^2+c_3^2+c_5^2=\frac{1}{2}(3-c_1-c_3-c_5)=\frac{5}{4}.$$

Udowodnimy, że liczby $c_1$, $c_3$, $c_5$ są pierwiastkami wielomianu o współczynnikach wymiernych. Rozważmy wielomian

$$W(x)=(x-c_1)(x-c_3)(x-c_5)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

Mamy

$$a_2=-(c_1+c_3+c_5)=-r_1=-\frac{1}{2},$$

$$a_1=c_1c_3+c_3c_5+c_5c_1=\frac{1}{2}((c_1+c_3+c_5)^2-c_1^2-c_3^2-c_5^2)=\frac{1}{2}(r_1^2-r_2)=-\frac{1}{2},$$

$$a_0=-c_1c_3c_5=-c_1c_2c_4=-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{4\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Zatem dla każdego $i=1$, 3, 5 spełniona jest równość

$$c_i^3-\frac{1}{2}c_i^2-\frac{1}{2}c_i+\frac{1}{8}=0.$$

A więc dla każdego $n\geqslant 2$ mamy

$$c_i^{n+1}=\frac{1}{2}c_i^n+\frac{1}{2}c_i^{n-1}-\frac{1}{8}c_i^{n-2}.$$

Dodając trzy równości, odpowiadające $i=1$, 3, 5, uzyskujemy

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{2}r_{n-1}-\frac{1}{8}r_{n-2}.$$

Ponieważ $r_0$, $r_1$ i $r_2$ są wymierne, więc wszystkie liczby $r_n$ są wymierne.

**18.** Punkty $P$ i $Q$ leżą wewnątrz trójkąta $ABC$, przy czym

$$\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBC=\sphericalangle PCA=\alpha \quad\text{oraz}\quad \sphericalangle QAC=\sphericalangle QCB=\sphericalangle QBA=\beta.$$

Wykazać, że $\alpha=\beta$.

*Rozwiązanie*

Oznaczmy przez $P'$ punkt izogonalnie sprzężony do punktu $P$. Wówczas

$$\sphericalangle P'AC = \sphericalangle P'CB = \sphericalangle P'BA = \alpha .$$

Ponieważ punkt $X$ spełniający równości $\sphericalangle XAC = \sphericalangle XCB = \sphericalangle XBA$ jest wyznaczony jednoznacznie w trójkącie $ABC$, więc mamy $P' = Q$, a więc $\alpha = \beta$.

**19.** Znaleźć wszystkie liczby pierwsze $p$ postaci $6k+1$, dla których istnieje funkcja $f$, określona na zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych, o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych taka, że

$$(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ razy}})(x) = 1 + x + 2\sqrt{x}.$$

*Rozwiązanie*

Określmy

$$f(x) = (\frac{1}{p} + \sqrt{x})^2.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że dla każdego $n$

$$(*) \qquad (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ razy}})(x) = (\frac{n}{p} + \sqrt{x})^2,$$

co dowiedzie, iż wszystkie liczby pierwsze postaci $6k+1$ mają żądaną własność. Dla $n = 1$ równość (*) to definicja $f$. Dla $n > 1$,

$$(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ razy}}) = f((\frac{n-1}{p} + \sqrt{x})^2) =$$

$$(\frac{1}{p} + \frac{n-1}{p} + \sqrt{x})^2 = (\frac{n}{p} + \sqrt{x})^2.$$

**20.** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie $H$. Okrąg o średnicy $AH$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punktach $A$ i $K$. Prosta $KH$ przecina odcinek $BC$ w punkcie $M$. Wykazać, że punkt $M$ jest środkiem odcinka $BC$.

*Rozwiązanie*

**Lemat:** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$ wpisany w okrąg $o$, punkt $H$ jest jego ortocentrum. Obrazy $H$ w symetriach względem boków trójkąta leżą na okręgu $o$.

**Dowód lematu:** Niech $AR$ będzie wysokością trójkąta $ABC$, zaś $H'$ niech będzie punktem przecięcia półprostej $AH^{\rightarrow}$ z okręgiem $o$. Wykażemy, że $H'$ jest obrazem punktu $H$ w symetrii względem boku $BC$. W tym celu wystarczy udowodnić, że $HR = H'R$.

Zauważmy, że trójkąty $CBP$ i $CAR$ są podobne, zaś kąty $\sphericalangle CBH'$ i $\sphericalangle CAH'$ są wpisane oparte na tym samym łuku. Wobec tego

$$\sphericalangle RBH = \sphericalangle CBP = \sphericalangle CAR = \sphericalangle CAH' = \sphericalangle CBH' = \sphericalangle RBH'.$$

Odcinek $BR$ jest zatem jednocześnie wysokością i dwusieczną w trójkącie $HBH'$, zatem jest też środkową, czyli $HR = H'R$, co kończy dowód lematu.

**Rozwiązanie zadania:** Zauważmy, że średnicą okręgu opisanego na trójkącie $APQ$ jest odcinek $AH$. Niech $N$ będzie środkiem boku $BC$, półprosta $NH^{\rightarrow}$ niech przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punkcie $L$. Wykażemy, że $\sphericalangle ALH = 90^\circ$, czyli $L = K$.

Niech punkt $O$ będzie środkiem okręgu $o$ opisanego na trójkącie $ABC$, punkt $H'$ obrazem $H$ w symetrii względem boku $BC$, punkt $H''$ obrazem $H$ w symetrii środkowej względem punktu $M$. Na mocy lematu punkt $H'$ leży na okręgu $o$. Punkt $H''$ jest jego obrazem w symetrii względem symetralnej cięciwy $BC$, więc też leży na okręgu $o$. Ta symetralna cięciwy $BC$ przechodzi przez punkt $O$, a prosta $AH'$ jest do niej równoległa, więc punkt $O$ jest środkiem odcinka $AH''$. Stąd kąt $ALH''$, jako wpisany oparty na średnicy okręgu $o$, jest prosty. To kończy dowód, ponieważ $\sphericalangle ALH = \sphericalangle ALH''$.

**21.** Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych taki, że żaden wyraz tego ciągu i żadna suma dowolnej liczby wyrazów tego ciągu nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym większym od 1.

*Rozwiązanie*

Szukanym ciągiem jest ciąg

$$2,\quad 2^2\cdot 3,\quad 2^2\cdot 3^2\cdot 5,\quad 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7,\quad \ldots,\quad 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot {p_{n-1}}^2\cdot p_n,\quad \ldots,$$

gdzie $p_n$ oznacza $n$-tą liczbę pierwszą. Żadna suma wyrazów tego ciągu nie jest potęgą liczby naturalnej, ponieważ każda z takich sum jest podzielna przez $p_k$, gdzie $k$ jest najmniejszym z numerów wyrazów ciągu wchodzących w skład tej sumy i nie jest podzielna przez ${p_k}^2$.

**22.** Dany jest pięciokąt wypukły o wierzchołkach w punktach o współrzędnych całkowitych. Wykazać, że istnieje punkt o współrzędnych całkowitych leżący wewnątrz tego pięciokąta.

*Rozwiązanie*

Niech $ABCDE$ będzie pięciokątem wypukłym o wierzchołkach w punktach kratowych, zawartym w danym pięciokącie i mającym najmniejsze pole. Z zasady szufladkowej wynika, że środek pewnej przekątnej pięciokąta $ABCDE$ lub środek jednego z jego boków jest punktem kratowym. W pierwszym przypadku teza zadania jest spełniona. W drugim przypadku przyjmijmy, że $X$ jest środkiem odcinka $AB$. Wówczas pięciokąt $XBCDE$ ma wierzchołki w punktach kratowych, jest zawarty w wyjściowym pięciokącie oraz ma pole mniejsze od pola pięciokąta $ABCDE$. Uzykana sprzeczność dowodzi, że istnieje punkt kratowy leżący wewnątrz pięciokąta $ABCDE$.

**23.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby dodatniej $a$ zachodzi nierówność

$$a^{a^2} + a^{2a} > 1.$$

*Rozwiązanie*

Udowodnimy, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$ i $b$ zachodzi nierówność

$$a^b + b^a > 1.$$

Nierówność ta natychmiast pociąga za sobą tezę zadania: wystarczy przyjąć $b = a^2$.

Jeżeli $a \geqslant 1$ lub $b \geqslant 1$ to nierówność zachodzi w sposób oczywisty. Przypuśćmy zatem, że $a, b \in (0,1)$. Udowodnimy, że

$$a^b > \frac{a}{a+b}, \quad b^a > \frac{b}{a+b}.$$

Ze względu na symetrię wystarczy udowodnić tylko pierwszą z tych nierówności. Na mocy nierówności Bernoulliego,

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^{1/b} > 1+\frac{1}{a} > \frac{1}{a}.$$

Wystarczy już tylko obie strony podnieść do potęgi $b$.

**24.** Na bokach trójkąta $ABC$ zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ABDE$, $BCGF$, $CAHI$. Udowodnić, że symetralne odcinków $DF$, $GI$, $HE$ przecinają się w jednym punkcie.

*Rozwiązanie*

*Sposób I.* Oznaczmy przez $P$ punkt przecięcia symetralnych odcinków $DF$ i $GI$. Wówczas

$$\begin{aligned} PH^2 - PE^2 &= (PI^2 + PA^2 - PC^2) - (PD^2 + PA^2 - PB^2) = \\ &= PI^2 - PC^2 - PD^2 + PB^2 = PG^2 - PC^2 - PF^2 + PB^2 = 0, \end{aligned}$$

skąd wynika, że punkt $P$ leży na symetralnej odcinka $HE$.

*Sposób II.* Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że trójkąt $ABC$ jest ostrokątny. Dowód dla pozostałych trójkątów przebiega analogicznie.

Oznaczmy przez $K$, $L$, $M$ środki okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach $AHE$, $BDG$, $CFI$. Wówczas proste $KA$, $LB$, $MC$ przecinają się w jednym punkcie $S$ – środku jednokładności trójkątów $ABC$ i $KLM$. Niech $X$, $Y$, $Z$ będą odpowiednio środkami odcinków $HE$, $DG$, $FI$. Wówczas

$$\sphericalangle AKM = \tfrac{1}{2}\sphericalangle AKH = \sphericalangle AEH = \sphericalangle XKL.$$

Zatem proste $KX$, $LY$, $MZ$, czyli symetralne odcinków $HE$, $DF$, $GI$, przecinają się w jednym punkcie – izogonalnie sprzężonym do punktu $S$.

**25.** Zawodnicy $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2004}$ biorą udział w Meczu Matematycznym. Zawodnicy $Z_{2003}$ i $Z_{2004}$ są kapitanami i wybierają swoje drużyny według następującego algorytmu: w każdej rundzie najpierw kapitan $Z_{2004}$ wyznacza zawodnika spośród dotąd niewybranych, a $Z_{2003}$ decyduje, do której drużyny on trafi, następnie $Z_{2003}$ wyznacza zawodnika spośród dotąd niewybranych, a $Z_{2004}$ decyduje, do której drużyny on trafi. Procedura powtarzana jest do momentu, w którym jedna z drużyn będzie liczyć już 1002 zawodników – wtedy wszyscy pozostali trafiają do drużyny przeciwnej. Dla każdego $i$ zawodnik $Z_i$ rozwiąże podczas meczu $i$ zadań, przy czym każde zadanie zostanie rozwiązane przez co najwyżej jednego zawodnika. Mecz wygra drużyna, która rozwiąże łącznie więcej zadań. Rozstrzygnąć, który z kapitanów (jeśli którykolwiek) posiada strategię wybierania drużyny pozwalającą mu, niezależnie od zachowania przeciwnika, zapewnić swojej drużynie zwycięstwo w Meczu Matematycznym.

*Rozwiązanie*

Najpierw przedstawimy strategię kapitana $Z_{2003}$ zapewniającą mu co najmniej remis. Otóż w każdej rundzie, w której $Z_{2004}$ wyznaczy $Z_k$, $Z_{2003}$ bierze go do swojej drużyny, jeśli tylko $k \geqslant 1002$, w przeciwnym wypadku go odrzuca. Następnie wyznacza zawodnika $Z_{2003-k}$. Po tak rozegranej rundzie albo którać z drużyn wzbogaci się o dwóch zawodników i 2005 zadań, albo obie drużyny wezmą po jednym zawodniku, przy czym $Z_{2003}$ weźmie zawodnika o większym numerze niż $Z_{2004}$. Ponieważ jednak $Z_{2003}$ ma w swej drużynie do obsadzenia nieparzystą liczbę miejsc, to w którejś rundzie musiał wziąć dokładnie jednego zawodnika, a zatem zyskać przewagę nad drużyną zawodnika $Z_{2004}$ i co najmniej wyrównać liczbę zadań rozwiązanych podczas Meczu.

Strategia kapitana $Z_{2004}$ może natomiast wyglądać jak poniżej:
Na początku gry wyznacza on zawodnika $Z_{1002}$, a na kolejne ruchy przeciwnika reaguje następująco (załóżmy, że przeciwnik wyznaczył zawodnika $Z_k$):

Przypadek 1. $k=1001$. Wtedy podejmuje taką decyzję, aby $Z_{1001}$ i $Z_{1002}$ znaleźli się w różnych drużynach. Na takiej "wymianie" może on stracić co najwyżej jedno zadanie. Dalej wyznacza zgodnie z metodą opisaną w przypadku 2.

Przypadek 2. $k \neq 1001$. Jeśli $k \geqslant 1002$, to bierze tego zawodnika, w przeciwnym wypadku go odrzuca i w najbliższej rundzie: jeżeli $Z_{2003-k}$ jest jeszcze niewybrany, to go wyznacza, jeżeli już był, to wyznacza dowolnego zawodnika $Z_l$ takiego, że $Z_{2003-l}$ również pozostaje nadal niewybrany. Łatwo zauważyć, że przy tej strategii taki zawodnik będzie zawsze istnieć (par postaci $(i, 2003-i)$ jest nieparzyście wiele, więc jeśli drugi gracz mógl "napocząć" nową parę, to pierwszy w kolejnym ruchu także będzie mógl to zrobić).

Rozumowanie analogiczne do przedstawionego przy strategii kapitana $Z_{2003}$ pokazuje, że, pomijając kapitanów zawodników $Z_{1001}$ i $Z_{1002}$, którzy znajdą się na pewno w przeciwnych drużynach, zawodnicy wybrani przez $Z_{2004}$ rozwiążą w sumie przynajmniej tyle zadań, co zawodnicy wybrani przez $Z_{2003}$.

**26.** Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami dodatnimi spełniającymi warunek

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1.$$

Dla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczmy $H_k = \frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}}$. Udowodnić, że zachodzi nierówność $H_1 + H_2 + \ldots + H_n < 2$.

*Rozwiązanie*

Udowodnimy najpierw, że

$$(*) \qquad H_k \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2}(a_1 + 4a_2 + \ldots + k^2 a_k).$$

Korzystając z nierówności Schwarza mamy

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}\right)(a_1 + 4a_2 + \ldots + k^2 a_k) =$$

$$= \left(\left(\sqrt{\frac{1}{a_1}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{a_2}}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{\frac{1}{a_k}}\right)^2\right)((\sqrt{a_1})^2 + (2\sqrt{a_2})^2 + \ldots + (k\sqrt{a_k})^2) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sqrt{\frac{1}{a_1}}\cdot\sqrt{a_1} + \sqrt{\frac{1}{a_2}}\cdot 2\sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{a_k}}\cdot k\sqrt{a_k}\right)^2 =$$

$$=(1+2+\ldots+k)^2=\frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

skąd bezpośrednio wynika nierówność (*).

Dodając stronami nierówności (*) dla $k=1, 2, \ldots, n$ otrzymujemy nierówność

$$H_1+H_2+\ldots+H_n \leqslant \alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_n a_n,$$

gdzie

$$\alpha_i=4i^2\left(\frac{1}{i(i+1)^2}+\frac{1}{(i+1)(i+2)^2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)^2}\right).$$

Do rozwiązania zadania pozostało więc wykazać, iż $\alpha_i<2$ dla $i=1, 2, \ldots, n$. Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej $m$ mamy

$$\frac{1}{m(m+1)^2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{2m+1}{m^2(m+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\right).$$

Zatem dla każdego $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$

$$\alpha_i<4i^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(i+1)^2}-\frac{1}{(i+2)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$
$$=2i^2\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)<2.$$

**27.** Udowodnić, że równanie

$$x^3+y^3+2=z^3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych $x$, $y$, $z$.

*Rozwiązanie*

Zachodzi tożsamość

$$(k-1)^3+6k^2+2=(k+1)^3.$$

Wybierzmy takie $k$, aby liczba $6k^2$ była sześcianem liczby naturalnej, np. $k=6m^3$; otrzymujemy równość

$$(6m^3-1)^3+(6m^2)^3+2=(6m^3+1)^3.$$

Zatem wszystkie trójki postaci $(6m^3-1,\ 6m^2,\ 6m^3+1)$ są rozwiązaniami równania.

**28.** Dany jest taki trójkąt $ABC$, że $BC\neq CA$. Punkty $D$ i $E$ leżą odpowiednio na bokach $BC$ i $CA$ tego trójkąta, przy czym $BD=AE$. Odcinki $AD$ i $BE$ przecinają się w punkcie $P$. Dwusieczna kąta $ACB$ przecina odcinki $AD$ i $BE$ odpowiednio w punktach $Q$ i $R$. Wykazać, że

$$\frac{AQ}{BP}=\frac{QP}{PR}=\frac{PD}{RE}.$$

*Rozwiązanie*

Oznaczmy przez $K$, $L$, $M$ odpowiednio środki odcinków $CP$, $DE$, $AB$. Wówczas punkty $K$, $L$, $M$ leżą na jednej prostej. Ponieważ $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{LM}$ oraz $EA=DB$, więc prosta $LM$ jest równoległa do prostej $CQ$, a więc $KM\parallel CQ$.

Oznaczmy przez $F$ punkt przecięcia prostych $CQ$ i $AB$. Niech ponadto $G$ będzie punktem symetrycznym do punktu $F$ względem punktu $M$. Wówczas $AF = GB$ oraz $CF \parallel PG$. Niech $\ell$ będzie dowolną prostą prostopadłą do dwusiecznej kąta $ACB$.

Oznaczmy przez $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $P'$ odpowiednio rzuty prostokątne punktów $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $P$ na prostą $\ell$. Wtedy $A'E' = B'D'$ oraz $E'C' = P'D'$, skąd bezpośrednio wynika teza.

**29.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zbiór liczb naturalnych od 1 do $\frac{7^n-1}{2}$ można podzielić na rozłączne zbiory tak, aby w każdym zbiorze największa liczba była równa sumie pozostałych liczb z tego zbioru.

*Rozwiązanie*

Dla $n=1$ teza zadania jest oczywista. Dla pozostałych $n$ teza zadania wynika indukcyjnie z następującego faktu:

Dla dowolnej liczby naturalnej $k$, zbiór liczb od $k+1$ do $7k+3$ można podzielić na rozłączne zbiory tak, aby w każdym zbiorze największa liczba była równa sumie pozostałych liczb z tego zbioru.

Podziałem spełniającym powyższy warunek jest:

$$\{k+1,\ 4k+2,\ 5k+3\},\ \ \{k+2,\ 4k+3,\ 5k+5\},\ \ \{k+3,\ 4k+4,\ 5k+7\},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \{2k-1,\ 5k,\ 7k-1\},\ \ \{2k,\ 5k+1,\ 7k+1\},\ \ \{2k+1,\ 5k+2,\ 7k+3\},$$

$$\{2k+2,\ 3k+2,\ 5k+4\},\ \ \{2k+3,\ 3k+3,\ 5k+6\},\ \ \{2k+4,\ 3k+4,\ 5k+8\},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \{3k-1,\ 4k-1,\ 7k-2\},\ \ \{3k,\ 4k,\ 7k\},\ \ \{3k+1,\ 4k+1,\ 7k+2\}.$$

## Zawody drużynowe:

**1.** 32 proste dzielą koło o promieniu 10 cm na pewną liczbę części. Udowodnić, że w jednej z nich da się zmieścić koło o promieniu 3 mm.

*Rozwiązanie*

Przypuśćmy, że nie istnieje taka część, w której możnaby pomieścić okrąg o promieniu 3 mm. Dla każdej z prostych utwórzmy strefę między dwoma równoległymi do danej prostej biegnącymi w odległości 3 mm od niej. Tak więc te strefy pokrywają koło o promieniu $(100-3)mm$. Spróbujmy oszacować pole pokryte tymi strefami. W tym celu postępujemy w następujący sposób: rozpatrzmy sferę o środku wspólnym ze środkiem naszego koła i promieniu $R = 97mm$. Przez proste ograniczające każdą ze stref prowadzimy płaszczyzny naszego koła. Tak więc otrzymane na sferze strefy powinny ją w całości pokrywać. Każda ze stref na sferze wycina pole $2\pi \cdot 6mm \cdot R$. Pole całej sfery wynosi $4\pi R^2$. Stąd otrzymujemy $2\pi \cdot 6mm \cdot R \cdot 32 \geqslant 4\pi R^2$, co prowadzi do nierówności $96 \geqslant 97$.

**2.** Przedstawić liczbę 1 w postaci sumy 99 odwrotności różnych nieparzystych liczb naturalnych.

*Rozwiązanie*

Zauważmy, że liczba $945=3^3\cdot 5\cdot 7$ ma 15 dzielników właściwych o sumie 975. Usuwając spośród nich liczby 1, 3, 5 i 21 otrzymamy przedstawienie liczby 945 w postaci sumy 11 jej dzielników:

$$945=315+189+135+105+63+45+35+27+15+9+7.$$

Stąd uzyskujemy równość:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{105}+\frac{1}{135}.$$

Zauważmy, że zachodzi tożsamość:

$$\frac{1}{3a}=\frac{1}{5a}+\frac{1}{9a}+\frac{1}{45a}.$$

Posługując się tą równością, z podanego wyżej przedstawienia jedynki jako sumy jedenastu ułamków kolejno możemy uzyskać odpowiednie przedstawienia jedynki jako sumy 13, 15, 17, ..., 99 ułamków egipskich o mianownikach nieparzystych.

**3.** Niech $p$ i $q$ będą różnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi. Dowieść, że liczbę

$$\left(1+\sqrt[q]{2}\right)^{p^{q^2}}-\left(1+\sqrt[q]{2}\right)^{p^q}$$

można przedstawić w postaci

$$p\left(n_0+n_1\sqrt[q]{2}+n_2\sqrt[q]{4}+\ldots+n_{q-1}\sqrt[q]{2^{q-1}}\right),$$

gdzie liczby $n_0, n_1, n_2, \ldots n_{q-1}$ są całkowite.

*Rozwiązanie*

Niech $\mathbb{Z}\left[\sqrt[q]{2}\right]$ oznacza zbiór liczb postaci

$$n_0+n_1\sqrt[q]{2}+n_2\sqrt[q]{4}+\ldots+n_{q-1}\sqrt[q]{2^{q-1}}.$$

Dla liczb $a,b\in\mathbb{Z}\left[\sqrt[q]{2}\right]$ niech zapis $a\equiv b\pmod p$ oznacza, że liczba $a-b$ jest postaci

$$p\left(n_0+n_1\sqrt[q]{2}+n_2\sqrt[q]{4}+\ldots+n_{q-1}\sqrt[q]{2^{q-1}}\right).$$

Ponieważ współczynniki dwumianu Newtona $\binom{p}{k}$ są podzielne przez liczbę $p$ dla $1\leqslant k\leqslant p-1$, więc dla dowolnych $a,b\in\mathbb{Z}\left[\sqrt[q]{2}\right]$ mamy

$$(a+b)^p\equiv a^p+b^p$$

i podobnie dla dowolnego $m$

$$(a+b)^{p^m}\equiv a^{p^m}+b^{p^m}.$$

Teza zadania polega na udowodnieniu

$$\left(1+\sqrt[q]{2}\right)^{p^{q^2}}\equiv\left(1+\sqrt[q]{2}\right)^{p^q}\pmod p,$$

czyli

$$2^{p^{q^2}/q}\equiv 2^{p^q/q}\pmod p,$$

co z kolei można otrzymać przez obustronne podniesienie

$$2^{p^{q(q-1)}/q}\equiv 2^{1/q}\pmod p$$

do potęgi $p^q$. Ostatni warunek wynika z małego twierdzenia Fermata, jeżeli liczba $p^{q(q-1)}-1$ jest podzielna przez $q(p-1)$.

Liczba $p^{q-1}-1$ jest podzielna przez $q$ i przez $p-1$, więc jest podzielna przez $q(p-1)$, o ile $q$ nie jest dzielnikiem liczby $p-1$.

Jeżeli liczba $p-1$ jest podzielna przez $q^k$, ale nie jest podzielna przez $q^{k+1}$, to liczba $p$ jest postaci $aq^k+1$. Wówczas liczba $p^q-1$ jest podzielna przez $q^{k+1}$, a co za tym idzie, jest podzielna przez $q(p-1)$.

Tak więc zawsze jedna z liczb $p^q-1$ oraz $p^{q-1}-1$ jest podzielna przez $q(p-1)$, zatem liczba $p^{q(q-1)}-1$ jest podzielna przez $p(q-1)$.

**4.** Dana jest liczba wymierna $q\in(0,1)$ oraz taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność

$$f(qx+(1-q)y)\leqslant qf(x)+(1-q)f(y)\,.$$

Dowieść, że dla dowolnej liczby wymiernej $r\in(0,1)$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność

$$f(rx+(1-r)y)\leqslant rf(x)+(1-r)f(y)\,.$$

*Rozwiązanie*

Niech $x$, $y$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech $z=(x+y)/2$. Wówczas

$$f(z)=f\left(q^2z+q(1-q)x+q(1-q)y+(1-q)^2z\right)\leqslant$$

$$\leqslant qf\,(qz+(1-q)x)+(1-q)f\,(qy+(1-q)z)\leqslant$$

$$\leqslant q^2f(z)+q(1-q)f(x)+q(1-q)f(y)+(1-q)^2f(z)\,,$$

co po uproszczeniu daje

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}\,.$$

Przez indukcję względem $k$ dowodzimy, że dla $n=2^k$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$(*)\qquad f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f\,(x_1)+f\,(x_2)+\ldots+f\,(x_n)}{n}\,.$$

Kładąc we wzorze $(*)$

$$x_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}$$

dowodzimy, że

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)\leqslant\frac{f\,(x_1)+f\,(x_2)+\ldots+f\,(x_{n-1})}{n-1}\,,$$

co przez indukcję wsteczną daje $(*)$ dla dowolnego $n$.

Jeśli $r=m/n$, to teza zadania wynika z podstawienia we wzorze $(*)$

$$x_1=x_2=\ldots=x_m=x$$

oraz

$$x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots=x_n=y\,.$$

**5.** Punkt $P$ leżący wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ ma tę własność, że jego rzuty prostokątne na proste $AB$, $BC$, $CD$ i $DA$ leżą na jednym okręgu $o$. Dowieść, że środki odcinków $AC$ i $BD$ oraz środek okręgu $o$ leżą na jednej prostej.

*Rozwiązanie*

*Sposób I.* Rozwiązanie to jest oparte na dwóch poniższych lematach. Przez $[\mathcal{F}]$ będziemy oznaczać pole figury $\mathcal{F}$.

*Lemat* 1. Punkty $A$, $B$, $C$, $D$ leżą na okręgu $o$. Proste $AB$ i $CD$ przecinają się w punkcie $P$. Punkty $A$ i $D$ są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu $Q$, leżącego wewnątrz okręgu $o$, na proste $AB$ i $CD$. Analogicznie, punkty $B$ i $C$ są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu $R$ na proste $AB$ i $CD$. Wówczas

$$[PBQ]=[PDR].$$

*Dowód:* Z faktu, że punkty $A$, $B$, $C$, $D$ leżą na jednym okręgu otrzymujemy równość $\sphericalangle ADQ=\sphericalangle CBR$. Analogicznie uzyskujemy $\sphericalangle DAQ=\sphericalangle BCR$. Stąd wynika, że trójkąty $ADQ$ i $CBR$ są podobne. Podobne są również trójkąty $PAD$ i $PCB$. Zatem

$$\frac{PD}{PB}=\frac{AD}{CB}=\frac{QA}{RC},$$

skąd $PB\cdot QA=PD\cdot RC$, czyli $[PBQ]=[PDR]$.

*Lemat* 2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, nie będący równoległobokiem, oraz liczba dodatnia $a$. Wówczas wszystkie punkty $P$ leżące wewnątrz czworokąta $ABCD$, dla których $[PAB]+[PCD]=a$, leżą na jednej prostej.

*Dowód:* Bez straty ogólności możemy przyjąć, że proste $AB$ i $CD$ nie są równoległe. Oznaczmy przez $E$ punkt przecięcia prostych $AB$ i $CD$ (rys. 1). Niech ponadto $K$ i $L$ będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na półprostych $EA^{\to}$ i $ED^{\to}$, że $EK=AB$ oraz $EL=CD$. Wówczas

$$a=[PAB]+[PCD]=[PEK]+[PEL]=[EKL]+[KLP]. \tag{1}$$

Punkty $E$, $K$ i $L$ nie zależą od wyboru punktu $P$. Zatem na mocy równości (1), pole trójkąta $KLP$ również nie zależy od wyboru punktu $P$. Stąd wynika, że wszystkie punkty $P$ leżą na pewnej prostej, równoległej do prostej $KL$.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Niech $K$ i $L$ oznaczają odpowiednio środki przekątnych $AC$ i $BD$, zaś niech $O$ będzie środkiem okręgu $o$. Wówczas

$$[AKB]+[CKD]=\tfrac{1}{2}[ABCD]=[ALB]+[CLD].$$

Zatem, na mocy lematu 2, wystarczy wykazać, że $[AOB]+[COD]=\frac{1}{2}[ABCD]$.

Niech $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu $P$ na proste $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Niech $Q$ będzie punktem symetrycznym do punktu $P$ względem punktu $O$. Oznaczmy ponadto przez $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ rzuty prostokątne punktu $Q$ odpowiednio na proste $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Wówczas punkty $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ leżą na okręgu $o$. Korzystając z lematu 1 uzyskujemy następujące równości

$$[AA_2P]=[AD_1Q],\quad [DD_1Q]=[DPC_2],\quad [CC_2P]=[CB_1Q],\quad [BB_1Q]=[BA_2P].$$

Stąd otrzymujemy $[APB]+[CPD]=[AQD]+[BQC]$, co daje

$$[APB]+[AQB]+[CPD]+[CQD]=[ABCD].$$

Ponieważ punkt $O$ jest środkiem odcinka $PQ$, mamy ostatecznie

$$[AOB]+[COD]=\tfrac{1}{2}[ABCD].$$

*Sposób II.* Z warunków zadania wynika, że istnieje elipsa $e$ wpisana w czworokąt $ABCD$, której jednym z ognisk jest punkt $P$. Elipsa ta jest również styczna do okręgu $o$, a jej środek pokrywa się ze środkiem okręgu $o$.

Przekształcając afinicznie elipsę $e$ na okrąg, zadanie sprowadza się do znanego twierdzenia Newtona, które jest szczególnym przypadkiem omawianego zadania: Środek okręgu wpisanego w dany czworokąt oraz środki przekątnych tego czworokąta leżą na jednej prostej. (Twierdzenie Newtona to prosty wniosek z lematu 2.)

**Pierwszy Mecz Matematyczny:**

**1.** Udowodnić, że równanie $x^3+y^3+1=z^3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych $x$, $y$, $z$.

*Rozwiązanie*

*Sposób I.* Niech $x=3k-1$. Wówczas

$$x^3+1=(3k-1)^3+1=9k(3k^2-3k+1)=9k(k^3-(k-1)^3).$$

Jeśli więc przyjąć $k=3m^3$, to widać, że trójki $(9m^3-1, 3m(3m^3-1), 9m^4)$, $m=1, 2, \ldots$, są rozwiązaniami danego równania.

Dla $m=1$ dostajemy trójkę (8, 6, 9), dla $m=2$ trójkę (71, 138, 144), dla $m=3$ trójkę (242, 720, 729), itd. Nasuwa się pytanie, czy w ten sposób otrzymamy wszystkie rozwiązania. Okazuje się, że nie. Przytoczymy kilka przykładów, które nie należą do wskazanego zbioru rozwiązań:

$$(135, 138, 172),\ (372, 426, 505),\ (426, 486, 577).$$

*Sposób II.* Łatwo sprawdzić, że wystarczy wziąć

$$x=3^{4n+2}-3^{n+1},\quad y=3^{3n+2}-1,\quad z=3^{4n+2}.$$

**2.** Dowieść, że istnieje taka liczba naturalna $n\leqslant 100$ oraz takie liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, że

$$x_1^{49}+x_2^{49}+\ldots+x_n^{49}=0,$$

a ponadto $x_i+x_j\neq 0$ dla dowolnych $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

*Rozwiązanie*

Niech $N$ będzie dużą liczbą całkowitą. Rozważmy zbiór wszystkich 50-wyrazowych ciągów liczb naturalnych $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_{50}\leqslant N$. Ciągów tych jest nie mniej niż $N^{50}/50!$. Każdemu ciągowi przyporządkujmy sumę 49-tych potęg jego wyrazów, a więc liczbę nie większą niż $50N^{49}$. Jeżeli $N>50\cdot 50!$, to ciągów jest więcej niż $50N^{49}$, a zatem pewne dwa ciągi mają tę samą sumę 49-tych potęg wyrazów.

Wykreślamy wyrazy powtarzające się w obu ciągach, łączymy je w jeden ciąg, biorąc wyrazy jednego ze znakiem minus.

**3.** Udowodnić, że jedyną możliwą wartością całkowitą wyrażenia
$$\frac{a^2+b^2}{ab-1},$$
gdzie $a$ i $b$ są liczbami naturalnymi, jest 5.

*Rozwiązanie*

Niech
$$\frac{a^2+b^2}{ab-1}=q.$$
Wtedy $a^2-qab+b^2+q=0$. Rozważmy równanie
$$x^2-qxy+y^2+q=0. \tag{$*$}$$
Mamy udowodnić, że jeżeli powyższe równanie posiada rozwiązanie w liczbach naturalnych $x,y$, to $q=5$. Zauważmy, że dla $q=1$ i $q=2$ takich rozwiązań nie ma; istotnie, w tych przypadkach lewa strona jest dodatnia.

Zauważmy, że dla $q>2$ nie ma takich całkowitych rozwiązań, że $x=y$; istotnie, wówczas mielibyśmy
$$0=x^2-qx^2+x^2+q,$$
czyli
$$x^2=\frac{q}{q-2}=1+\frac{2}{q-2}\in(1,3).$$
Dalej, zauważmy, że równanie (*) rozważane jako równanie zmiennej $x$ przy $q>2$ i $y>0$ nie może mieć pierwiastków wielokrotnych; istotnie, jeśli
$$\triangle=y^2q^2-4(y^2+q)=0,$$
to
$$y^2=\frac{4q}{q^2-4}$$
i prawa strona dla $q>2$ nie przekracza $\frac{12}{5}$ i nie może być równa 1.

Z każdego rozwiązania $(x,y)$ równania (*) możemy uzyskać inne rozwiązanie z tym samym $y$; wśrod wszystkich rozwiązań $(x,y)$ równania (*) takich, że $x>y$ rozważmy rozwiązania $(v,y)$, $(w,y)$, $v<w$, o najmniejszym $y$. Zatem $v\geqslant y+1$, $w\geqslant y+2$. Ze wzorów Viete'a mamy
$$vw=y^2+q,\ \ v+w=qy.$$
Stąd
$$y^2+q-qy=vw-v-w=(v-1)(w-1)-1\geqslant y(y+1)-1=y^2+y-1,$$
a zatem
$$1-y+q-qy\geqslant 0,$$
czyli
$$(1-y)(1+q)\geqslant 0.$$
Wobec tego $y=1$ i wszystkie powyższe nierówności muszą być równościami. Stąd $v=2$, $w=3$ i $q=5$.

**4.** Dana jest liczba naturalna $n$ i wielomian $W$ stopnia mniejszego od $n$ o współczynnikach rzeczywistych. Niech $S(k)$ będzie sumą cyfr liczby $k$. Udowodnić, że

$$\left(\sum_{i=0}^{10^n-1}(-1)^{S(i)}W(i)\right)^2 \leqslant \sum_{i=0}^{\frac{10^n-1}{9}} W^2(9i).$$

*Rozwiązanie*

Wykażemy, że lewa strona nierówności jest równa 0. To natychmiast da nam tezę. Wystarczy wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $k<n$ mamy

$$(*)\qquad \sum_{i=0}^{10^n-1}(-1)^{S(i)}i^k=0.$$

Rozważmy funkcję

$$f(x)=(1-e^x+e^{2x}-e^{3x}+\ldots-e^{9x})\cdot(1-e^{10x}+e^{20x}-e^{30x}+\ldots-e^{90x})\cdot\ldots$$
$$\cdot(1-e^{10^{n-1}x}+e^{2\cdot 10^{n-1}x}-\ldots-e^{9\cdot 10^{n-1}x}).$$

Każde z wyrażeń w nawiasach jest równe 0 dla $x=0$; zatem wszystkie pochodne funkcji $f$ rzędu mniejszego niż $n$ w zerze są równe 0. Opuszczając nawiasy otrzymujemy

$$f(x)=\sum_{i=1}^{10^n-1}(-1)^{S(i)}e^{ix},$$

skąd

$$f^{(k)}(x)=\sum_{i=1}^{10^n-1}(-1)^{S(i)}i^k e^{ix}$$

i podstawiając $x=0$ otrzymujemy tożsamość (*).

**5.** Dana jest liczba naturalna $k$. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$ o sumie $n$ zachodzi nierówność

$$kn+\sum_{i=1}^n x_i^3 \leqslant n+k\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

*Rozwiązanie*

Jeśli $k=1$, to dostajemy nierówność

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2$$

i widzimy, że dla $n=1$ jest ona spełniona, natomiast dla $n>1$, biorąc

$$x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0,\ x_n=n$$

dostajemy nierówność $n^3\leqslant n^2$, która nie zachodzi.

Załóżmy więc, że $k\geqslant 2$ i rozważmy funkcję

$$f(x)=(x-1)^2(x-k+2)=x^3-kx^2+(2k-3)x-k+2.$$

Mamy $f(x)\leqslant 0$ dla $x\in[0,k-2]$. Jeśli $n\leqslant k-2$, to

$$(*)\qquad \sum_{i=1}^n x_i^3-k\sum_{i=1}^n x_i^2+kn-n=\sum_{i=1}^n\Big(x_i^3-kx_i^2+(2k-3)x_i-k+2\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant 0,$$

a zatem nierówność jest spełniona.

Z drugiej strony, jeśli $n \geqslant k$, to biorąc $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n = n$ dostajemy nierówność

$$kn + n^3 \leqslant n + kn^2,$$

czyli

$$n(n-1)(n+1-k) \leqslant 0.$$

która nie jest spełniona, gdyż każde z wyrażeń w nawiasach po lewej stronie jest dodatnie.

Pozostało więc zbadać przypadek $n = k-1$. Dla $k = 2$ nierówność jest oczywista, w dalszym ciągu przyjmiemy więc, że $k \geqslant 3$. Jeśli wszystkie liczby $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ leżą w przedziale $[0, k-2] = [0, n-1]$, to nierówność jest spełniona na mocy (*). Przypuśćmy, że jedna z tych liczb jest większa niż $n-1$. Bez straty ogólności można przyjąć, że jest to $x_1$. Wówczas $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$ muszą leżeć w przedziale $[0, 1]$. Ponieważ $f$ jest wklęsła na przedziale $[0, 1]$ ($f''(x) = 6x - 2k$), wystarczy sprawdzać nierówność w przypadku, gdy $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = x$. Wówczas $x_1 = n - (n-1)x$ i nierówność w zadaniu ma postać

$$n(n+1) + (n-1)x^3 + (n-(n-1)x)^3 \leqslant n + (n+1)\Big((n-1)x^2 + (n-(n-1)x)^2\Big).$$

Po przekształceniach otrzymujemy równoważny związek

$$0 \leqslant n(n-1)x(x-1)^2,$$

a więc nierówność jest spełniona.

Reasumując, jeśli $k = 1$, to nierówność zachodzi dla $n = 1$, natomiast przy $k > 1$ nierówność jest spełniona dla $1 \leqslant n \leqslant k-1$.

**6.** Rozwiązać równanie

$$z^x + 1 = (z+1)^y$$

w liczbach naturalnych $x$, $y$, $z$ .

*Rozwiązanie*

Jeśli $z = 1$, to otrzymujemy rozwiązania $(1, x, 1)$, gdzie $x$ jest dowolną liczbą naturalną.

Załóżmy, że $z = 2$. Otrzymujemy równanie

$$2^x + 1 = 3^y.$$

Widzimy, że $x = 1$, $y = 1$ jest rozwiązaniem. Dalej przyjmiemy więc, że $x > 1$.

Załóżmy, że $y$ jest liczbą parzystą: $y = 2k$. Wtedy

$$2^x = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1).$$

Oba czynniki po prawej stronie muszą być potęgami dwójki, różniącymi się o 2; stąd $3^k - 1 = 2$, czyli $y = 2$, $x = 3$.

Przypuśćmy, że $y$ jest liczbą nieparzystą. Wówczas $3^y \equiv 3\ (mod 4)$, ale

$$2^x + 1 \equiv 1\ (mod 4).$$

Otrzymujemy więc rozwiązania $(1, 1, 2)$ oraz $(3, 2, 2)$.

Załóżmy, że liczby $x$, $y$, $z$ spełniają zadane równanie i $z \geqslant 3$.

Jest oczywiste, że $x \geqslant y$. Rozważmy przypadek $x=y$. Mamy $z^x+1=(z+1)^x$, skąd $x=1$ i dostajemy rozwiązanie $(1,1,z)$, gdzie $z$ jest dowolną liczbą naturalną.

Załóżmy zatem, że $x>y$. Udowodnimy, że $z$ musi być potęgą liczby 2. Przypuśćmy, że $z$ ma nieparzysty pierwszy dzielnik $p$: $z=p^m z_1$, gdzie $m \geqslant 1$, a $z_1$ jest liczbą względnie pierwszą z $p$. Niech $y=p^n y_1$, gdzie $n \geqslant 0$, a $y_1$ jest liczbą względnie pierwszą z $p$. Mamy

$$(1+z)^{y_1}=1+y_1 z+\binom{y_1}{2} z^2+\ldots+z^{y_1}=1+z(y_1+\binom{y_1}{2} z+\ldots+z^{y_1-1}).$$

Zatem, ponieważ $y_1$ nie jest podzielne przez $p$, więc

$$(1+z)^{y_1}=1+p^m \cdot A,$$

gdzie $A \equiv y_1 z_1 (\mathrm{mod} p)$. Zauważmy, że dla dowolnych liczb naturalnych $B$ oraz $i$ mamy

$$(1+p^i B)^p=1+p^{i+1} D,$$

gdzie $B \equiv D (\mathrm{mod} p)$. Istotnie,

$$(1+p^i B)^p=1+\binom{p}{1} p^i B+\binom{p}{2} p^{2i} B^2+\ldots+\binom{p}{p} p^{pi} B^p=$$

$$=1+p^{i+1} B+\binom{p}{2} p^{2i} B^2+\ldots+p^{pi} B^p=$$

$$=1+p^{i+1}\left(B+\binom{p}{2} p^{i-1} B^2+\ldots+p^{(p-1)i-1} B^p\right).$$

Zatem mamy

$$(1+z)^y=((1+z)^{y_1})^{p^n}=(1+p^m \cdot A)^{p^n}=(1+p^{m+1} A_1)^{p^{n-1}}=\ldots=1+p^{m+n} A_n,$$

przy czym $A \equiv A_1 \equiv \ldots A_n$ $(\mathrm{mod} p)$. Stąd otrzymujemy, iż $A_n$ nie dzieli się przez $p$. Zatem równanie

$$z^x+1=(1+z)^y$$

możemy zapisać w postaci

$$p^{m+n} A_n=p^{mx} z_1^x.$$

Ponieważ $z_1$ nie dzieli się przez $p$, więc musi zachodzić równość $m+n=mx$. Ale $x>y$, więc $x>p^n$. Zatem

$$m+n=mx>mp^n \geqslant m(1+n(p-1)),$$

skąd $m(p-1)<1$, co jest niemożliwe.

Udowodniliśmy, że $z$ nie ma nieparzystych dzielników pierwszych, czyli musi być potęgą liczby 2.

Udowodnimy, że $z$ nie jest podzielne przez 4. Załóżmy, że tak nie jest: $z=2^k$, $k \geqslant 2$. Otrzymujemy równanie

$$(2^k+1)^y=2^{kx}+1.$$

Przypuśćmy, że $y$ jest liczbą parzystą: $y=2l$. Wówczas

$$((2^k+1)^l-1)((2^k+1)^l+1)=2^{kx}.$$

Stąd $(2^k+1)^l=3$, czyli $l=1$, $k=1$ - sprzeczność z założeniem $k \geqslant 2$.

Załóżmy więc, że $y$ jest liczbą nieparzystą. Otrzymujemy

$$y\cdot 2^k+\binom{y}{2}2^{2k}+\ldots+\binom{y}{y}2^{ky}=2^{kx},$$

czyli

$$y+\binom{y}{2}2^k+\ldots+\binom{y}{y}2^{k(y-1)}=2^{k(x-1)}.$$

Po lewej stronie mamy liczbę nieparzystą, a po prawej - parzystą (bo $x>1$). Sprzeczność.

Zatem rozważane w treści zadania równanie posiada następujące rozwiązania: $(1,1,z)$, gdzie $z$ jest dowolną liczbą naturalną, $(x,1,1)$, gdzie $x$ jest dowolną liczbą naturalną oraz $(3,2,2)$.

**7.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=s^2+t^2 \\ x^4+y^4+z^4=s^4+t^4 \end{cases}$$

w liczbach naturalnych $x$, $y$, $z$, $s$, $t$ niemających wspólnego dzielnika większego od 1.

*Rozwiązanie*

Istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania

$$3a^2+3a+1=b^2$$

(patrz rozwiązanie zadania 7 z drugiego meczu matematycznego). Z każdego rozwiązania dostajemy rozwiązanie układu, biorąc $x=a$, $y=a+1$, $z=2a+1$, $s=t=b$.

*Uwaga.* Rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że

$$x^2+y^2+(x+y)^2=2\left(x^2+xy+y^2\right)$$

oraz

$$x^4+y^4+(x+y)^4=2\left(x^2+xy+y^2\right)^2,$$

co nasuwa pomysł przyjęcia $z=x+y$ oraz $s=t$. Wówczas wystarczy rozwiązać równanie

$$x^2+xy+y^2=t^2.$$

Przyjmując na przykład $y=x+1$ otrzymujemy

$$3x^2+3xy+1=t^2.$$

**8.** Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg $o$. Okręgi $o_1$, $o_2$, $o_3$, $o_4$, $o_5$, $o_6$ są styczne wewnętrznie do okręgu $o$ odpowiednio w punktach $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$. Jednocześnie styczne zewnętrznie są okręgi: $o_1$ i $o_2$, $o_2$ i $o_3$, $o_3$ i $o_4$, $o_4$ i $o_5$, $o_5$ i $o_6$, $o_6$ i $o_1$. Wykazać, że proste $AD$, $BE$ i $CF$ przecinają się w jednym punkcie.

*Rozwiązanie*

Zastosujmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie $A$. Niech $X^*$ oznacza obraz figury $X$. Proste $o^*$, $o_1^*$ są równoległe, okręgi $o_2^*$, $o_3^*$, $o_4^*$, $o_5^*$, $o_6^*$ są styczne do $o^*$ w punktach odpowiednio $B^*$, $C^*$, $D^*$, $E^*$, $F^*$. Ponadto styczne są okręgi $o_2^*$ i $o_3^*$, $o_3^*$ i $o_4^*$, $o_4^*$ i $o_5^*$, $o_5^*$ i $o_6^*$.

Obrazem inwersyjnym prostej $AD$ jest prosta przechodząca przez $D^*$ i środek inwersji $A$, nazwijmy ją $k$. Obrazem prostej $BE$ jest okrąg przechodzący przez punkty $B^*$, $E^*$ i $A$, oznaczmy ten okrąg $\Gamma_1$. Obrazem prostej $CF$ jest okrąg przechodzący przez punkty $C^*$, $F^*$ i $A$; oznaczmy go $\Gamma_2$. Współpękowość z tezy zadania jest równoważna temu, że okręgi $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ przecinają się na prostej $k$ w punkcie różnym od $A$. Wystarczy zatem wykazać, że prosta $k$ jest osią potęgową tych okręgów. Punkt $A$ oczywiście należy do osi potęgowej $\Gamma_1$ i $\Gamma_2$. Pokażemy, że również punkt $D^*$ do niej należy.

Zauważmy, że okręgi $o_2^*$ i $o_6^*$ są styczne do $o_1^*$, zatem mają równe promienie; oznaczmy je przez $r$.

Oznaczmy odpowiednio przez $r_c$, $r_d$, $r_e$ promienie okręgów $o_3^*$, $o_4^*$, $o_5^*$. Wtedy na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$BC = \sqrt{(r+r_c)^2 - |r-r_c|^2} = 2\sqrt{rr_c};$$

analogicznie można wyliczyć $CD$, $DE$, $EF$. Potęga punktu $D^*$ względem okręgu $\Gamma_1$ jest wobec tego równa

$$Pot(D^*, \Gamma_1) = DB \cdot DE = (2\sqrt{r_d r_c} + 2\sqrt{r_c r}) \cdot 2\sqrt{r_d r_e} = 4\sqrt{r_c r_d r_e}(\sqrt{r_d} + \sqrt{r}).$$

Z symetrii problemu potęga punktu $D^*$ względem okręgu $\Gamma_2$ też jest równa

$$Pot(D^*, \Gamma_2) = 4\sqrt{r_c r_d r_e}(\sqrt{r_d} + \sqrt{r}).$$

Stąd punkt $D^*$ należy do osi potęgowej okręgów $\Gamma_1$ i $\Gamma_2$, co jak wcześniej wykazaliśmy jest równoważne tezie zadania.

**9.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste $AB$ i $CD$ przecinają się w punkcie $E$, a proste $AD$ i $BC$ przecinają się w punkcie $F$. Dwusieczne kątów $AED$ i $AFB$ przecinają się w punkcie $P$. Udowodnić, że

$$[ABP] + [CDP] = [BCP] + [DAP],$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta $XYZ$.

*Rozwiązanie*

Lemat 1: Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste $AB$ i $CD$ przecinają się w punkcie $E$, a proste $AD$ i $BC$ przecinają się w punkcie $F$. Punkty $M$ i $N$ są odpowiednio środkami przekątnych $BD$ i $AC$. Dwusieczne kątów $AFB$ i $BED$ przecinają się w punkcie $P$. Wówczas punkty $M$, $N$, $P$ leżą na jednej prostej.

Dowód: Z podobieństwa trójkątów $ACF$ i $BDF$ wynika, że prosta $PF$ jest dwusieczną kąta $MFN$. Oznaczmy przez $P_1$ punkt przecięcia prostej $FP$ z odcinkiem $MN$. Wówczas

$$\frac{MP_1}{P_1N} = \frac{MF}{NF} = \frac{BD}{AC}.$$

Analogicznie, oznaczając przez $P_2$ punkt przecięcia prostej $EP$ z odcinkiem $MN$ dowodzimy, że

$$\frac{MP_2}{P_2N} = \frac{BD}{AC}.$$

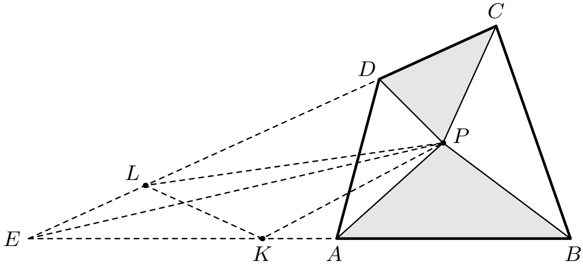
Stąd wynika, że $P_1 = P_2 = P$. Stąd wniosek, że punkty $M$, $N$, $P$ leżą na jednej prostej.

Lemat 2: Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, nie będący równoległobokiem, oraz liczba dodatnia $a$. Wówczas wszystkie punkty $P$ leżące wewnątrz czworokąta $ABCD$, dla których $[PAB] + [PCD] = a$, leżą na jednej prostej.

Dowód: Bez straty ogólności możemy przyjąć, że proste $AB$ i $CD$ nie są równoległe. Oznaczmy przez $E$ punkt przecięcia prostych $AB$ i $CD$. Niech ponadto $K$ i $L$ będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na półprostych $EA^{\rightarrow}$ i $ED^{\rightarrow}$, że $EK=AB$ oraz $EL=CD$. Wówczas

$$a=[PAB]+[PCD]=[PEK]+[PEL]=[EKL]+[KLP]. \tag{1}$$

Punkty $E$, $K$ i $L$ nie zależą od wyboru punktu $P$. Zatem na mocy równości (1), pole trójkąta $KLP$ również nie zależy od wyboru punktu $P$. Stąd wynika, że wszystkie punkty $P$ leżą na pewnej prostej, równoległej do prostej $KL$.




rys. 1

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Niech $K$ i $L$ oznaczają odpowiednio środki przekątnych $AC$ i $BD$. Ponieważ

$$[AKB]+[CKD]=\tfrac{1}{2}[ABCD]=[ALB]+[CLD]$$

i na mocy lematu 1 punkty $K$, $L$, $P$ są współliniowe, więc na mocy lematu 2

$$[ABP]+[CDP]=[BCP]+[DAP].$$

**10.** Punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta $ABC$, przy czym $\sphericalangle PAC=\sphericalangle PBC$. Punkty $K$ i $L$ są rzutami prostokątnymi punktu $P$ odpowiednio na dwusieczne kąta wewnętrznego i kąta zewnętrznego przy wierzchołku $C$ trójkąta $ABC$. Punkt $M$ jest środkiem boku $AB$. Wykazać, że punkty $K$, $L$, $M$ leżą na jednej prostej.

*Rozwiązanie*

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący fakt:

*Punkt $P$ leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$. Wówczas $\sphericalangle ABP=\sphericalangle ADP$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle PAD=\sphericalangle PCD$.*

Dla dowodu wystarczy uzupełnić trójkąt $ADP$ do równoległoboku $ADPQ$ i zauważyć, że obie równości są równoważne stwierdzeniu, że na czworokącie $APBQ$ można opisać okrąg.

Przystępujemy do rozwiązania zadania. Niech $S$ będzie punktem symetrycznym do punktu $P$ względem prostej $CK$. Uzupełnijmy trójkąt $ABC$ do równoległoboku $ACBD$. Oznaczmy przez $X$, $Y$ punkty przecięcia prostej $AB$ odpowiednio z prostymi $PD$ i $CS$. Wówczas na mocy powyższego faktu proste $DX$ i $CY$ są równoległe oraz punkt $M$ jest środkiem odcinka $XY$. Ponadto $LK \parallel CS$ oraz $KM \parallel SY$, skąd wynika, że punkty $K$, $L$, $M$ są współliniowe.

**11.** Na bokach $AB$ i $AC$ trójkąta $ABC$ zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty $ABF$ i $ACE$, przy czym $AF=FB$ oraz $AE=EC$. Na boku $BC$ trójkąta $ABC$ zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąt $BCD$, przy czym

$$\sphericalangle DBC=\frac{1}{2}\sphericalangle AEC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DCB=\frac{1}{2}\sphericalangle AFB\,.$$

Odcinki $AD$ i $FE$ przecinają się. Dowieść, że te odcinki są prostopadłe.

*Rozwiązanie*

Oznaczmy przez $S$ punkt przecięcia okręgu o środku $F$ i promieniu $FA$ z okręgiem o środku $E$ i promieniu $EA$. Punkt $S$ leży na krótszych łukach $AB$ i $AC$ tych okręgów. Wówczas

$$\sphericalangle BSC=360^\circ-\sphericalangle ASB-\sphericalangle ASC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle AFB+\tfrac{1}{2}\sphericalangle AEC=180^\circ-\sphericalangle BDC\,.$$

Stąd wynika, że punkty $B$, $D$, $C$, $S$ leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle DSC=\sphericalangle DBC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle AEC=180^\circ-\sphericalangle ASC\,,$$

skąd wynika, że punkty $A$, $S$, $D$ leżą na jednej prostej. Prosta $EF$ jest prostopadła do prostej $AS$, a więc również do prostej $AD$.

**Drugi Mecz Matematyczny:**

**1.** Rozstrzygnąć, czy równanie

$$x_1^{88}+x_2^{88}+x_3^{88}+\ldots+x_{15}^{88}+x_{16}^{88}+y^8=z^8$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich.

*Rozwiązanie*

Niech $z=a+b$ oraz $y=a-b$. Wtedy

$$z^8-y^8=16ab^7+112a^3b^5+112a^5b^3+16a^7b\,.$$

Kładąc $a=16c^8$ oraz $b=d^8$ zapisujemy lewą stronę powyższej równości w postaci

$$A^8+7B^8+7C^8+D^8\,,$$

gdzie

$$A=2cd^7, \qquad B=4c^3d^5, \qquad C=8c^5d^3, \qquad D=16c^7d.$$

Dobieramy $c$ i $d$ tak, aby $A$, $B$, $C$, $D$ były jedenastymi potęgami liczb naturalnych. W tym celu wystarczy przyjąć $c=2^7\cdot s^{11}$ oraz $d=2^2\cdot t^{11}$.

Otrzymamy wówczas

$$A=2^{22}\cdot s^{11}\cdot t^{77}=\left(2^2\cdot s\cdot t^7\right)^{11}\,,$$

$$B=2^{33}\cdot s^{33}\cdot t^{55}=\left(2^3\cdot s^3\cdot t^5\right)^{11}\,,$$

$$C=2^{44}\cdot s^{55}\cdot t^{33}=\left(2^4\cdot s^5\cdot t^3\right)^{11}\,,$$

$$D=2^{55}\cdot s^{77}\cdot t^{11}=\left(2^5\cdot s^7\cdot t\right)^{11}\,.$$

Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $s$, $t$ dane w zadaniu równanie jest spełnione przez liczby

$$x_1 = 2^2 \cdot s \cdot t^7 ,$$

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_8 = 2^3 \cdot s^3 \cdot t^5 ,$$

$$x_9 = x_{10} = \ldots = x_{15} = 2^4 \cdot s^5 \cdot t^3 ,$$

$$x_{16} = 2^5 \cdot s^7 \cdot t ,$$

$$y = \left| 2^{60} \cdot s^{88} - 2^{16} \cdot t^{88} \right| ,$$

$$z = 2^{60} \cdot s^{88} + 2^{16} \cdot t^{88} .$$

**2.** Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$, $b$, $c$ spełniających warunek $a+b+c=0$ zachodzi nierówność

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \geqslant 6abc.$$

*Rozwiązanie*

Przekształcamy równoważnie daną nierówność:

$$(a^2b^2 - 2abc + 1) + (b^2c^2 - 2abc + 1) + (c^2a^2 - 2abc + 1) \geqslant 0,$$

a następnie każde z wyrażeń występujących w nawiasach dopełniamy do kwadratu:

$$a^2b^2 - 2abc + 1 = (ab - c + 1)^2 - (c^2 + 2ab - 2c),$$

$$b^2c^2 - 2abc + 1 = (bc - a + 1)^2 - (a^2 + 2bc - 2a),$$

$$c^2a^2 - 2abc + 1 = (ca - b + 1)^2 - (b^2 + 2ca - 2b).$$

Po dodaniu stronami trzech powyższych równości dostajemy

$$(a^2b^2 - 2abc + 1) + (b^2c^2 - 2abc + 1) + (c^2a^2 - 2abc + 1) =$$

$$= (ab - c + 1)^2 + (bc - a + 1)^2 + (ca - b + 1)^2 - (a + b + c)^2 + 2(a + b + c) =$$

$$= (ab - c + 1)^2 + (bc - a + 1)^2 + (ca - b + 1)^2 \geqslant 0.$$

**3.** Niech $k$ będzie liczbą naturalną. Określamy ciąg $(a_n)$ następująco:

$$a_n = 0 \quad \text{dla} \quad n < 0 ;$$
$$a_0 = 1 ;$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-k} .$$

Wykazać, że dla każdych liczb naturalnych $n$, $m$ zachodzi nierówność

$$a_n a_m \geqslant a_{n+m-1} .$$

*Rozwiązanie*

Niech $k$ będzie ustaaloną liczbą naturalną. Udowodnimy następujący lemat: dla $n>0$, $a_n$ jest liczbą wszystkich ciągów zer i jedynek długości $n-1$ (dalej zwanych ciągami $k$-odpowiednimi), w których jedynka nigdzie nie pojawia się $k$ razy pod rząd.

W tym celu zastosujemy indukcję względem $n$. Dla $n \leqslant k$ łatwo widać, że $a_n = 2^{n-1}$, więc twierdzenie jest prawdziwe. Przypuśćmy prawdziwość twierdzenia dla wszystkich $m \leqslant n$. Każdy $k$-odpowiedni ciąg długości $n$ ma jedną z następujących postaci:
$k$-odpowiedni ciąg długości $n-1$ z dopisanym na końcu 0 (takich ciągów jest $a_{n-1}$),
$k$-odpowiedni ciąg długości $n-2$ z dopisanym na końcu 01 (takich ciągów jest $a_{n-2}$),
$k$-odpowiedni ciąg długości $n-3$ z dopisanym na końcu 011 (takich ciągów jest $a_{n-3}$),
...
$k$-odpowiedni ciąg długości $n-k$ z dopisanym na końcu $011\ldots1$ (takich ciągów jest $a_{n-k}$).
Zatem wobec $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-k}$ dowód lematu został zakończony.

Odnotujmy teraz, że jeśli dla $n, m$ dodatnich ciąg $n+m-2$-elementowy jest $k$-odpowiedni, to także jego prefiks długości $n-1$ i jego sufiks długości $m-1$ są $k$-odpowiednie. Ponadto, wspomniany prefiks i sufiks jednoznacznie determinują cały ciąg. To spostrzeżenie dowodzi nierówności z tezy zadania.

**4.** Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $x$, $y$ spełniających równanie

$$x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0.$$

*Rozwiązanie*

Mnożąc obustronnie przez 4 dostajemy

$$(2x-5y)^2 - 21y^2 = -20.$$

Podstawmy $a = 2x-5y$, $b = y$. Otrzymujemy

$$a^2 - 21b^2 = -20. \tag{1}$$

Zauważmy, że $a=1$, $b=1$ spełniają to równanie. Równanie Pella $c^2 - 21d^2 = 1$ ma rozwiązanie $c=55$, $d=12$. Stąd pary liczb naturalnych $a_k$, $b_k$, $k=1, 2, \ldots$ określone za pomocą związku

$$a_k + b_k\sqrt{21} = (1+\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^k \tag{2}$$

spełniają równanie (1). Zauważmy, że biorąc różne $k$ otrzymujemy różne rozwiązania, gdyż wyrażenie po prawej równości stronie (2) jest rosnącą funkcją zmiennej $k$. Pozostaje już tylko odczytać rozwiązania w liczbach $x$, $y$:

$$x = \frac{a+5b}{2}, \quad y = b.$$

**5.** Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $a$, $b$ takich, że $a-b$ oraz $a^2+3b^2+1$ są sześcianami liczb całkowitych.

*Rozwiązanie*

*Sposób I.* Weźmy $a = kl^3$, $b = (k+1)l^3$. Wówczas $a-b$ jest sześcianem. Mamy

$$a^2 + 3b^2 + 1 = l^6(k^2 + 3(k+1)^2) + 1 = 4k^2l^6 + 6kl^6 + 3l^6 + 1.$$

Jeśli teraz przyjmiemy $l = 2m$, $k = 32m^6$, to dostajemy

$$a^2 + 3b^2 + 1 = (64m^6+1)^3.$$

*Sposób II.* Weźmy $a=2^{9n-1}$, $b=2^{9n-1}+2^{3n}$. Wówczas mamy

$$a-b=(-2^n)^3\,,\quad a^2+3b^2+1=(2^{6n}+1)^3\,.$$

**6.** Liczby naturalne $x_0$, $x_1$, $x_2$, ,..., $x_{28}$ spełniają warunek

$$x_0^{15}=x_1^{15}+x_2^{15}+\ldots+x_{28}^{15}\,.$$

Dowieść, że co najmniej jedna z liczb $x_0$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_{28}$ jest podzielna przez 31.

*Rozwiązanie*

Załóżmy nie wprost, że żadna z liczb $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{28}$ nie jest podzielna przez 31. Z małego twierdzenia Fermata wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej $a$ niepodzielnej przez 31 mamy $\quad a^{15}\equiv\pm1 \pmod{31}$.
Zatem $\quad x_1^{15}+x_2^{15}+\ldots+x_{28}^{15}\equiv r \pmod{31}$,
gdzie $r\in\{-28,-26,\ldots,-2,0,2,\ldots,26,28\}=\{0,2,3,4,5,\ldots,26,27,28,29\}$.
Tymczasem $\quad x_0^{15}\equiv\pm1 \pmod{31}$.

**7.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych $n$ takich, że liczba $3n^2+3n+1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

*Rozwiązanie*

Zadanie sprowadza się do wykazania, że równanie diofantyczne

$$3a^2+3a+1=b^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań. Mnożąc stronami powyższe równanie przez 4 dochodzimy do

$$3\,(2a+1)^2+1=(2b)^2\,,$$

czyli po podstawieniu $c=2a+1$ oraz $d=2b$

$$d^2-3c^2=1\,.$$

Jest to równanie Pella, którego rozwiązania spełniają warunek

$$d+c\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\,.$$

Całkowite wartości $a$ i $b$ otrzymujemy dla $n$ nieparzystych.

**8.** Dany jest trójkąt $ABC$, w którym $\sphericalangle ABC>90^\circ$. Punkty $P$ i $Q$ należą do symetralnej odcinka $AB$ i leżą wewnątrz kąta $ACB$. Dowieść, że jeżeli $\sphericalangle ACP=\sphericalangle BCQ$, to $\sphericalangle PAC+\sphericalangle QBC=180^\circ$.

*Rozwiązanie*

Oznaczmy przez $K$ punkt przecięcia prostych $BC$ i $PQ$. Wówczas wówczas punkty $P$ i $Q$ są izogonalnie sprzężone w trójkącie $AKC$. Stąd

$$\sphericalangle PAC=\sphericalangle QAK=\sphericalangle QBK=180^\circ-\sphericalangle QBC\,.$$

**9.** Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku $O$. Proste $AB$ i $CD$ przecinają się w punkcie $E$, a proste $AD$ i $BC$ przecinają się w punkcie $F$. Odcinki $AC$ i $BD$ przecinają się w punkcie $Q$. Punkt $P$ spełnia warunki

$$EP^2=EA\cdot EB \quad \text{oraz} \quad FP^2=FB\cdot FC\,.$$

Wykazać, że punkty $P$, $O$, $Q$ leżą na jednej prostej.

*Rozwiązanie*

Oznaczmy przez $K$, $L$ punkty styczności danego okręgu z prostymi przechodzącymi przez punkt punkt $E$. Podobnie, niech $M$, $N$ będą punktami styczności danego okręgu z prostymi przechodzącymi przez punkt $F$. Wówczas proste $KL$ i $MN$ przecinają się w punkcie $Q$. Oznaczmy przez $o_1$ okrąg o środku $E$ i promieniu $EK$, a przez $o_2$ okrąg o środku $F$ i promieniu $FM$. Wówczas punkty $P$, $Q$, $O$ leżą na osi potęgowej okręgów $o_1$ i $o_2$.

**10.** Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AB=BC$, $CD=DE$, $EF=FA$ oraz

$$\sphericalangle B+\sphericalangle D+\sphericalangle F=360^\circ\,.$$

Dane są miary kątów sześciokąta $ABCDEF$. Wyznaczyć miary kątów trójkąta $BDF$.

*Rozwiązanie*

Wybierzmy punkt $P$ w taki sposób, aby punkt $D$ był środkiem okręgu opisanego na trójkącie $EPC$ oraz $\sphericalangle CDP=\sphericalangle CBA$. Wówczas $\sphericalangle EDP=\sphericalangle EFA$. Ponadto trójkąty $CDP$ i $CBA$ są podobne. Stąd wynika, że podobne są również trójkąty $CBD$ i $CAP$. Zatem kąt między prostymi $BD$ i $AP$ jest równy kątowi między prostymi $CB$ i $CA$, czyli $90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle B$. Analogicznie, kąt pomiędzy prostymi $FD$ i $AP$ jest równy $90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle F$. Stąd

$$\sphericalangle BDF=180^\circ-\tfrac{1}{2}\sphericalangle B-\tfrac{1}{2}\sphericalangle F=\tfrac{1}{2}\sphericalangle D\,.$$

Analogicznie obliczamy $\sphericalangle DFB=\frac{1}{2}\sphericalangle F$ oraz $\sphericalangle FBD=\frac{1}{2}\sphericalangle B$.

**11.** Liczby całkowite dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_{49}, y$ spełniają warunek

$$y^{16}=x_1^{16}+x_2^{16}+\ldots+x_{49}^{16}\,.$$

Dowieść, że $y>2004$.

*Rozwiązanie*

16-ta potęga liczby całkowitej przy dzieleniu przez 64 daje resztę 0 lub 1, w zależności od parzystości liczby.

Gdyby $y$ było liczbą parzystą, to parzyste byłyby także wszystkie składniki po prawej stronie, moglibyśmy więc dzielić wszystkie liczby przez 2, aż do wystąpienia liczby nieparzystej.

Zatem możemy przyjąć, że $y$ jest liczbą nieparzystą. Wówczas po prawej stronie występuje dokładnie jeden składnik nieparzysty, powiedzmy $x_1^{16}$.

Liczba $y^{16}-x_1^{16}$ jest sumą 16-tych potęg liczb parzystych, jest więc podzielna przez $2^{16}$. Wobec równości

$$y^{16}-x_1^{16}=\left(y^8+x_1^8\right)\left(y^4+x_1^4\right)\left(y^2+x_1^2\right)(y+x_1)(y-x_1)\,,$$

po której prawej stronie każdy czynnik jest parzysty, ale tylko jeden z dwóch ostatnich jest podzielny przez 4, jedna z liczb $y+x_1$, $y-x_1$ jest podzielna przez $2^{12}=4096$. Ponieważ jednak $2004>y>x_1$, nie jest to możliwe.

**Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne:**

**1.** Udowodnić, że liczby rzeczywiste $p$, $q$, $r$ spełniają warunek

$$p^4(q-r)^2+2p^2(q+r)+1=p^4 \tag{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy równania kwadratowe

$$x^2+px+q=0\,, \quad y^2-py+r=0 \tag{2}$$

mają takie pierwiastki rzeczywiste (niekoniecznie różne), które można oznaczyć odpowiednio $x_1$, $x_2$ oraz $y_1$, $y_2$ w taki sposób, że $x_1y_1-x_2y_2=1$.

*Rozwiązanie*

Przypuśćmy, że dane równania mają pierwiastki $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ spełniające warunek $x_1y_1-x_2y_2=1$. Mamy

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm K}{2}, \quad y_{1,2}=\frac{p\pm L}{2}, \tag{3}$$

gdzie $K^2=p^2-4q$, $L^2=p^2-4r$. Stąd

$$1=x_1y_1-x_2y_2=\frac{(-p+K)(p+L)-(-p-K)(p-L)}{4}=\frac{p(K-L)}{2},$$

skąd otrzymujemy, iż $p\neq 0$ oraz $K-L=2/p$. Ponadto,

$$(K+L)(K-L)=K^2-L^2=(p^2-4q)-(p^2-4r)=4(r-q),$$

skąd $K+L=2p(r-q)$. Wobec tego,

$$K=\frac{K-L}{2}+\frac{K+L}{2}=\frac{1}{p}-p(q-r)\,, \quad K^2=\frac{1}{p^2}-2(q-r)+p^2(q-r)^2,$$

co w połączeniu ze związkiem $K^2=p^2-4q$ daje równość (1).

Przejdźmy teraz do implikacji w drugą stronę. Związek (1) jest równoważny następującym równościom:

$$p^4(q-r)^2+2p^2(q-r)+1=p^4-4p^2r\,, \quad p^4(r-q)^2+2p^2(r-q)+1=p^4-4p^2q.$$

Dzieląc obustronnie przez $p^2$ (co jest dozwolone, gdyż z równości (1) w sposób oczywisty wynika, iż $p\neq 0$) dostajemy, iż wyróżniki równań (2) wynoszą

$$p^2-4q=\left(\frac{p^2(r-q)+1}{p}\right)^2, \quad p^2-4r=\left(\frac{p^2(q-r)+1}{p}\right)^2.$$

Wobec tego są one nieujemne i pierwiastki (2) można wyrazić wzorami (3), gdzie

$$K=\frac{p^2(r-q)+1}{p}, \quad L=-\frac{p^2(q-r)+1}{p}.$$

Wówczas

$$x_1y_1-x_2y_2=\frac{p(K-L)}{2}=\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p^2(r-q)+1}{p}+\frac{p^2(q-r)+1}{p}\right)=1.$$

Dowód jest zakończony.

**2.** Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $k$ istnieje co najwyżej skończona liczba takich trójek parami różnych liczb pierwszych $p$, $q$, $r$, dla których liczba $qr-k$ jest podzielna przez $p$, liczba $pr-k$ jest podzielna przez $q$ oraz liczba $pq-k$ jest podzielna przez $r$.

*Rozwiązanie*

Parami różne liczby pierwsze $p$, $q$, $r$ spełniają warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $pq+qr+rp-k$ jest podzielna przez każdą z liczb $p$, $q$, $r$, czyli przez iloczyn $pqr$. Zatem istnieje taka liczba całkowita $n$, że $k=pq+qr+rp-npqr$.

Jeśli $n\leqslant 0$, to żadna z liczb $pq$, $qr$, $rp$ nie przekracza $k$, a więc żadna z liczb $p$, $q$, $r$ nie przekracza $k/2$. Takich trójek $p$, $q$, $r$ jest oczywiście skończenie wiele.

Przyjmijmy z kolei, że $n\geqslant 1$. Wykażemy, że istnieje wówczas co najwyżej jedna trójka $p<q<r$, dla której $k=pq+qr+rp-npqr$.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $2\leqslant p<q<r$ oraz załóżmy, że $r\geqslant 7$. Wtedy

$$\frac{pq+qr+rp-npqr}{pqr}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-n\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-1<0.$$

Zatem $k=pq+qr+rp-npqr<0$ — sprzeczność. Stąd wniosek, że $p=2$, $q=3$, $r=5$.

**3.** Wewnątrz czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg dany jest taki punkt $P$, że

$$\sphericalangle BPC=\sphericalangle BAP=\sphericalangle PDC.$$

Oznaczmy przez $E$, $F$, $G$ rzuty prostokątne punktu $P$ odpowiednio na proste $AB$, $AD$, $DC$. Udowodnić, że trójkąt $FEG$ jest podobny do trójkąta $PBC$.

*Rozwiązanie*

Przedstawimy rozwiązanie w przypadku, gdy proste $AB$ i $CD$ nie są równoległe.

Niech $T$ będzie takim punktem leżącym wewnątrz kąta $BPC$, że $\sphericalangle BPT=\sphericalangle PAB$. Wówczas $\sphericalangle CPT=\sphericalangle CDP$. Zatem okręgi $k_1$ i $k_2$ opisane odpowiednio na trójkątach $ABP$ i $CDP$ są styczne do prostej $PT$ w punkcie $T$. Ponadto proste $AB$, $CD$ i $PT$ przecinają się w jednym punkcie $Q$, gdyż proste te są osiami potęgowymi odpowiednio par okręgów $(k_1,k)$, $(k_2,k)$ i $(k_1,k_2)$, gdzie $k$ oznacza okrąg opisany na czworokącie $ABCD$.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt $Q$ leży na półprostych $BA^{\to}$ i $CD^{\to}$. Wówczas

$$\sphericalangle FEG=\sphericalangle FEP-\sphericalangle GEP=\sphericalangle DAP-\sphericalangle GQP=$$
$$=\sphericalangle QDA-\sphericalangle QPA=\sphericalangle QBC-\sphericalangle ABP=\sphericalangle PBC.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle FGE=\sphericalangle PCB$, skąd uzyskujemy tezę.

**4.** Rozwiązać układ równań

$$\frac{1}{xy}=\frac{x}{z}+1,\qquad \frac{1}{yz}=\frac{y}{x}+1,\qquad \frac{1}{zx}=\frac{z}{y}+1.$$

w zbiorze liczb rzeczywistych.

*Rozwiązanie*

Z postaci danych równań wnioskujemy, że $x,y,z\neq 0$. Dwie spośród liczb $x$, $y$, $z$ mają ten sam znak; bez straty ogólności przyjmijmy, że są to liczby $x$, $y$. Wówczas z drugiego równania wynika, że $yz$ jest dodatnia, a więc $z$ musi mieć taki sam znak, jak $y$. Stąd wynika, że $x,y,z>0$ lub $x,y,z<0$.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $x,y,z>0$ (jeśli trójka $(x,y,z)$ jest rozwiązaniem danego układu równań, to trójka $(-x,-y,-z)$ też spełnia podany układ) oraz $x\geqslant y$ oraz $x\geqslant z$. Wówczas

$$\frac{1}{xy}=\frac{x}{z}+1\geqslant 2\,,\quad \text{skąd}\quad xy\leqslant\frac{1}{2}\,.$$

Zatem $yz\leqslant xy\leqslant \frac{1}{2}$ oraz

$$\frac{y}{x}+1=\frac{1}{yz}\geqslant 2\,,\quad \text{czyli}\quad y\geqslant x\,.$$

Wykazaliśmy tym samym, że $x=y$. Stąd uzyskujemy $zx=zy\leqslant xy\leqslant\frac{1}{2}$, co prowadzi do

$$\frac{z}{y}+1=\frac{1}{zy}\geqslant 2\,,\quad \text{czyli}\quad z\geqslant y\,.$$

Wykazaliśmy zatem, że $x=y=z$, skąd obliczamy $x=y=z=\sqrt{2}/2$. Podany układ równań ma więc dwa rozwiązania: $x=y=z=\sqrt{2}/2$ oraz $x=y=z=-\sqrt{2}/2$.

**5.** Na bokach $AB$, $BC$, $CA$ trójkąta $ABC$ wybrano odpowiednio takie punkty $K$, $L$, $M$, że

$$\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MA}\,.$$

Udowodnić, że punkty przecięcia wysokości trójkątów $ABC$ i $KLM$ pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt $ABC$ jest równoboczny.

*Rozwiązanie*

Jeśli trójkąt $ABC$ jest równoboczny, to trójkąt $KLM$ jest też równoboczny i ich środki pokrywają się.

Przyjmijmy z kolei, że punkty przecięcia wysokości trójkątów $ABC$ i $KLM$ pokrywają się. Z danych w treści zadania równości wynika, że środki ciężkości trójkątów $ABC$ i $KLM$ pokrywają się.

W dowolnym trójkącie środek okręgu opisanego jest obrazem punktu przecięcia wysokości w jednokładności o środku w środku ciężkości i skali $-1/2$ (prosta, na której leżą te trzy punkty nazywa się *prostą Eulera*). Stąd wynika, że również środki okręgów opisanych na trójkątach $ABC$ i $KLM$ pokrywają się.

Oznaczmy: $r$ — promień okręgu opisanego na trójkącie $KLM$; $R$ — promień okręgu opisanego na trójkącie $ABC$;

$$\lambda=\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MA}\,.$$

Wówczas obliczamy $AK=BL=CM=\sqrt{\lambda(R^2-r^2)}$, skąd bezpośrednio uzyskujemy równości $AB=BC=CA$.

**6.** Na stole leży $k$ kupek, na których jest odpowiednio $1,2,\ldots,k$ kamyków, gdzie $k\geqslant 3$. W pierwszym kroku wybieramy trzy dowolne kupki, łączymy je w jedną i z tej nowej kupki odkładamy jeden kamyk (zabieramy go ze stołu). W drugim kroku znów łączymy pewne trzy kupki w jedną i z niej odkładamy dwa kamyki. W $i$-tym kroku łączymy dowolne trzy kupki, w których jest razem więcej niż $i$ kamyków w jedną kupkę i odkładamy z niej $i$ kamyków. Zakładamy, że po kilku krokach pozostanie na stole jedna kupka, w której jest $p$ kamyków. Udowodnić, że liczba $p$ jest kwadratem liczby naturalnej wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $2k+2$ i $3k+1$ są kwadratami liczb naturalnych. Znaleźć najmniejszą liczbę $k$, dla której liczba $p$ jest kwadratem liczby naturalnej.

*Rozwiązanie*

Każdy ruch powoduje zmniejszenie liczby kupek o dwie; ponieważ na końcu zostaje jedna kupka, więc liczba $k$ musi być nieparzysta i liczba ruchów wynosi $\frac{1}{2}(k-1)$. Liczba $k$ może dawać przy dzieleniu przez 4 reszty 1 lub 3; rozważymy osobno te dwa przypadki.

Przypadek $k=4c+1$. Na początku mamy $1+2+\ldots+k=\frac{1}{2}k(k+1)=(4c+1)(2c+1)$ kamieni, po $\frac{1}{2}(k-1)=2c$ ruchach usuwamy $1+2+\ldots+2c=c(2c+1)$ z nich; wobec tego liczba kamieni w kupce na końcu wynosi

$$p=(4c+1)(2c+1)-c(2c+1)=(2c+1)(3c+1).$$

Jak łatwo zauważyć, liczby $2c+1$ oraz $3c+1$ są względnie pierwsze. Zatem liczba $p$ jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy $2c+1$ oraz $3c+1$ są kwadratami liczb całkowitych. Jest to równoważne warunkowi, iż $4(2c+1)=2k+2$ oraz $4(3c+1)=3k+1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Przypadek $k=4c+3$. Na początku mamy $1+2+\ldots+k=\frac{1}{2}k(k+1)=2(c+1)(4c+3)$ kamieni, z których usuwamy $1+2+\ldots+(2c+1)=(c+1)(2c+1)$ po $2c+1$ ruchach; zatem liczba kamieni w ostatniej kupce wyniesie

$$p=2(c+1)(4c+3)-(c+1)(2c+1)=(c+1)(6c+5).$$

Łatwo zauważyć, iż liczby $c+1$ oraz $6c+5$ są względnie pierwsze, więc gdyby liczba $p$ była kwadratem liczby całkowitej, to $c+1$ oraz $6c+5$ też miałyby tę własność. Wykażemy, że jest to niemożliwe. Przypuśćmy, że istnieją takie liczby całkowite $x$, $y$, że $c+1=x^2$, $6c+5=y^2$. Wówczas $6x^2-y^2=1$, skąd wnioskujemy, iż liczba $y$ jest nieparzysta, a więc jej kwadrat daje resztę 1 przy dzieleniu przez 8. Zatem $6x^2$ daje resztę 2 przy dzieleniu przez 8, skąd $3x^2$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez 4, co jest niemożliwe. Zatem w tym przypadku liczba $p$ nie jest nigdy kwadratem liczby całkowitej. Zauważmy, iż $3k+1=12c+10$ także nie może być kwadratem liczby całkowitej — jest to liczba parzysta niepodzielna przez 4.

Pozostało więc znaleźć najmniejszą liczbę $k=4c+1$, dla której obie liczby $2c+1$ oraz $3c+1$ są kwadratami liczb całkowitych. Oznaczając te kwadraty odpowiednio przez $x^2$, $y^2$ dostajemy, iż $3x^2-2y^2=1$, skąd $x$ jest liczbą nieparzystą. Wobec tego $2y^2$ daje resztę 2 przy dzieleniu przez 4, więc $y$ też jest liczbą nieparzystą. Podstawiając $x=2a+1$, $y=2b+1$ do równania $3x^2-2y^2=1$ dostajemy związek $3a(a+1)=2b(b+1)$ i podstawiając $a=1,2,\ldots$ znajdujemy rozwiązanie $a=4$, $b=5$, które odpowiada $x=9$, $y=11$, $c=40$ i $k=161$.

# Regulamin Meczu Matematycznego

**1.** W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

**2.** W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy.

**3.** Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

**4.** Podczas rozgrywki ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania rozwiązania jednego z zadań. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą.

**5.** Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie.

**6.** Jeżeli drużyna wywołana przyjmuje zadanie, Kapitan drużyny **wywołującej** wyznacza zawodnika drużyny wywołanej do zreferowania rozwiązania przy tablicy. Rozwiązanie to jest oceniane przez Jury.

**7.** Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny był już wyznaczony do referowania nie mniej razy niż on.

**8.** Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przerywać referującemu.

**9.** Kapitan drużyny wywołanej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Kapitan prosi wówczas drużynę przeciwną o wyznaczenie nowego referującego. $N$-ta zmiana **w czasie meczu** powoduje odjęcie $N$ punktów drużynie zmieniającej referującego. Jeżeli do referowania wyznaczono kapitana, wskazuje on swego zastępcę.

**10.** Czas na zreferowanie rozwiązania wynosi 15 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, może poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieje na poprawność i zbliża się do końca.

**11.** Po oznajmieniu przez referującego, że zakończył referowanie, drużyna przeciwna zgłasza zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

**12.** Jeżeli Jury uznaje rozwiązanie za poprawne, punktuje je od 5 do 10 punktów. Jury może przyznać drużynie wywołującej te punkty, które zostały odjęte drużynie rozwiązującej, jeżeli usterki rozwiązania zostały przez tę drużynę zauważone.

**13.** Jeżeli Jury nie uznaje rozwiązania za poprawne, żadna z drużyn nie otrzymuje punktów, chyba że drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie. Wtedy ma ona prawo do przedstawienia własnego rozwiązania na zasadach i przy punktacji określonych w punktach **6–12**.

**14.** Jeżeli drużyna wywołana nie przyjmie zadania, rozwiązuje je drużyna wywołująca zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–12**. Jeśli jednak nie przedstawi ona poprawnego rozwiązania, otrzyma $-10$ (minus 10) punktów.

**15.** Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

# Spis treści