Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 5–19 czerwca 2005

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 5 – 19 czerwca 2005

Dom wczasowy „Zgoda”, Zwardoń 45 A
34-373 ZWARDOŃ
tel. 0-33-8646-328

Kadra:

Jerzy Bednarczuk
Andrzej Grzesik
Лев Курляндчик
Adam Osękowski
Waldemar Pompe
Paweł Walter – kierownik naukowy
Jarosław Wróblewski

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 05 – 19 czerwca 2005 r. w Zwardoniu, w pensjonacie „Zgoda”. Kadrę obozu stanowili: Jerzy Bednarczuk, Andrzej Grzesik, Lev Kurlyandchik, Adam Osękowski, Waldemar Pompe, Paweł Walter – kierownik naukowy i Jarosław Wróblewski.

W dniach 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16 i 17 czerwca uczestnicy obozu rozwiązywali zadania indywidualnie, dnia 13 czerwca odbyły się zawody drużynowe, a 10 i 18 czerwca rozegrane zostały „mecze matematyczne” (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to: 159 punktów, 125 punktów i 110 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie.

Dla uczestników obozu dnia 9 czerwca zorganizowana została wycieczka pociągiem do Žiliny na Słowacji.

Po zakończeniu obozu do pensjonatu „Zgoda” przyjechali uczestnicy V Czesko – Polsko – Słowackich Zawodów Matematycznych. W zawodach tych uczestniczyli uczniowie, którzy weszli w skład delegacji tych krajów na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną. Przewodniczącym delegacji polskiej był Waldemar Pompe, zastępcą przewodniczącego był Adam Osękowski.

Zawody odbyły się w dniach 20 i 21 czerwca. W ciągu dwóch dni każdy z zawodników rozwiązywał po 3 zadania, mając na to po 4,5 godziny.

Po zakończeniu zawodów, dnia 22 czerwca uczestnicy rozegrali mecz matematyczny. W meczu startowały dwie drużyny, w skład każdej drużyny wchodziło trzech zawodników czeskich, trzech zawodników polskich i trzech zawodników słowackich.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu, szkice ich rozwiązań, oraz zadania z V Czesko – Polsko – Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami.

Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych Olimpiady Matematycznej znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

Zadanie	liczba prac na 6 punktów	liczba prac na 5 punktów	liczba prac na 2 punkty	liczba prac na 0 punktów
1.	4	6	6	4
2.	11	0	0	9
3.	3	1	0	16
4.	5	2	1	12
5.	16	3	0	1
6.	4	0	0	16
7.	8	1	1	10
8.	2	1	0	17
9.	1	1	0	18
10.	5	4	1	10
11.	1	1	0	18
12.	10	2	0	8
13.	8	0	0	12
14.	3	2	0	15
15.	0	0	0	20
16.	0	0	0	20
17.	11	1	0	8
18.	12	0	1	7
19.	1	0	2	17
20.	11	0	2	7
21.	14	0	0	6
22.	2	0	1	17
23.	6	0	7	7
24.	0	0	1	19
25.	9	2	1	8
26.	0	0	0	20
27.	8	1	0	11
28.	11	1	1	7
29.	3	0	1	16
30.	5	0	0	15
31.	5	1	0	14
32.	0	0	0	20
33.	3	0	0	17
34.	0	0	0	20
35.	5	1	3	11
36.	6	0	0	14

Uwaga: Każda praca była oceniana w skali 0, 2, 5, 6 punktów.

Treści zadań

Zawody indywidualne:

1. Na ile sposobów można przedstawić liczbę 3^{2005} w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych dodatnich?

2. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC\,, \quad \sphericalangle DCA = \sphericalangle BCM.$$

Udowodnić, że prosta DM jest równoległa do prostej BC.

3. Wyznaczyć liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x^3 = 3x - y \\ y^3 = 3y - z \\ z^3 = 3z - x \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

4. Alicja i Bob grają w pewną grę używając prostokątnej tabliczki czekolady. Czekolada składa się z jednakowych kwadratowych kostek ułożonych w 60 rzędów i 40 kolumn. Gracze w tej grze wykonują ruchy na przemian, a każdy ruch polega na podzieleniu jednego z kawałków czekolady wzdłuż linii podziału kostek na dwie części. Alicja może wykonywać jedynie cięcia wzdłuż linii pionowych, a Bob jedynie wzdłuż linii poziomych. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać żadnego ruchu zgodnego z zasadami gry. Grę rozpoczyna Alicja. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

5. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi równość

$$\left[\frac{n-2^0}{2^1}\right] + \left[\frac{n-2^1}{2^2}\right] + \left[\frac{n-2^2}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n-2^{n-1}}{2^n}\right] = 0.$$

6. Dla punktu S leżącego wewnątrz trójkąta ABC oznaczmy przez D_S, E_S, F_S punkty przecięcia odpowiednio prostej AS i boku BC, prostej BS i boku CA, prostej CS i boku AB. Wyznaczyć zbiór wszystkich takich punktów S, że suma pól trójkątów SAF_S, SBD_S, SCE_S jest równa połowie pola trójkąta ABC.

7. Dla liczby całkowitej $n > 1$ oznaczmy przez $\phi(n)$ liczbę liczb naturalnych mniejszych od n, względnie pierwszych z n. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n > 1$, że warunek

$$n \mid x^{n-1} - 1$$

jest spełniony dla dokładnie $\phi(n) - 1$ liczb naturalnych $x < n$.

8. Wśród 15 000 monet każda jest prawdziwa lub fałszywa, przy czym nie wiadomo ile jest prawdziwych, a ile fałszywych. Każda prawdziwa moneta waży dokładnie 10 gramów, a każda fałszywa dokładnie 11 gramów. Mamy do dyspozycji wagę, na której możemy umieścić dowolną liczbę monet i wyznaczyć ich łączny ciężar. Rozstrzygnąć, czy istnieje metoda pozwalająca w co najwyżej 1000 ważeniach rozpoznać wszystkie fałszywe monety.

9. Udowodnić, że liczba $512^3+675^3+720^3$ jest złożona.

10. Trójkąt równoboczny ABC wpisano w okrąg o. Okrąg q jest styczny zewnętrznie do okręgu o w punkcie należącym do krótszego łuku BC. Z punktów A, B, C poprowadzono styczne do okręgu q odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnić, że $AD=BE+CF$.

11. Niech $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Oznaczmy

$$P=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i-\Big(\prod_{i=1}^{n}a_i\Big)^{1/n}, \qquad Q=\frac{1}{2n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\ln^2\frac{a_i}{a_j}.$$

Udowodnić, że

a) jeśli $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\leqslant 1$, to $P\leqslant Q$;

b) jeśli $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\geqslant 1$, to $P\geqslant Q$.

12. Dodatnie liczby niewymierne p, q spełniają warunek $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $k=[pn]$ lub $k=[qn]$.

13. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boku AB w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku AB, punkt E jest symetryczny do punktu D względem M. Udowodnić, że proste IM oraz CE są równoległe.

14. Wyznaczyć wszystkie trójkąty, których boki mają długości całkowite, a jeden z kątów jest równy 120°.

15. Niech $x_0<x_1<\ldots<x_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Udowodnić, że

$$\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1}+\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\ldots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$$

16. Z odcinka $[-1,1]$ wybrano $k\geqslant 2$ różnych punktów. Dla każdego z tych punktów wyznaczono iloczyn jego odległości od pozostałych $k-1$ punktów. Oznaczmy przez S sumę odwrotności wszystkich tych iloczynów. Wykazać, że $S\geqslant 2^{k-2}$.

17. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC=AC$. Punkty P i Q leżą wewnątrz tego trójkąta i spełniają zależności

$$\sphericalangle PAC=\sphericalangle QBA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle PBC=\sphericalangle QAB.$$

Dowieść, że punkty C, P i Q leżą na jednej prostej.

18. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą takimi liczbami dodatnimi, że

$$a_1 a_2 \ldots a_n = 1\,.$$

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $k > l > 0$ zachodzi nierówność

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k \geqslant a_1^l + a_2^l + \ldots + a_n^l.$$

19. Odcinki AB i CD są podstawami trapezu $ABCD$. Punkty K i N należą odpowiednio do ramion AD i BC. Prosta KN nie jest równoległa do prostej AB i przecina odcinki AC i BD odpowiednio w punktach L i M. Wyznaczyć wszystkie wartości $t > 1$, dla których istnieje taki trapez $ABCD$ oraz takie punkty K i N, że

$$KL = LM = MN \quad \text{oraz} \quad \frac{AB}{CD} = t\,.$$

20. Dany jest rosnący ciąg (a_n) dodatnich liczb całkowitych. Każda dodatnia liczba całkowita jest wyrazem co najmniej jednego z ciągów (a_n) lub $(a_n + 2n)$. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność $a_n < \frac{3}{2}n$.

21. Trzy różne okręgi o_1, o_2 i o_3 o równych promieniach leżą wewnątrz trójkąta ABC i każdy z nich jest styczny do dwóch boków tego trójkąta. Okrąg o środku w punkcie P jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1, o_2 i o_3. Wykazać, że punkt P, środek okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leżą na jednej prostej.

22. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1. Wyznaczyć najmniejszą wartość sumy

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i + a_j)^{16}\,,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek

$$a_1^8 + a_2^8 + a_3^8 + \ldots + a_n^8 = 1\,.$$

23. Dowieść, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$47^n + 2500$$

jest złożona.

24. Liczby x_1, x_2, $\ldots$, x_n należą do przedziału $[a, b]$, gdzie $0 < a < b$. Udowodnić nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2(a^2+b^2)^2}{4ab(a^2+ab+b^2)} \cdot n^2.$$

Wyznaczyć wszystkie ciągi x_1, x_2, $\ldots$, x_n liczb z przedziału $[a, b]$, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

25. Punkt F leży na boku AB pięciokąta wypukłego $ABCDE$, przy czym

$$\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC\,.$$

Dowieść, że $\sphericalangle BCD + \sphericalangle AED = 180^\circ$.

26. Dany jest rosnący ciąg (a_n) dodatnich liczb całkowitych. Każda dodatnia liczba całkowita jest wyrazem co najmniej jednego z ciągów (a_n) lub (a_n+2n). Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k zachodzi nierówność $a_k < \sqrt{2}k$.

27. Dowieść, że wśród dowolnych 100 kolejnych wyrazów ciągu

$$a_n = n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$$

jest co najmniej 86 liczb złożonych.

28. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^3+xyz = x^4+y^4+z^4+\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{27}{2} \end{cases}$$

w dodatnich liczbach rzeczywistych x, y, z.

29. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Wykazać, że suma pól pewnych czterech spośród trójkątów ABC, BCD, CDE, DEA, EAB jest większa od pola pięciokąta $ABCDE$.

30. Dany jest trójmian kwadratowy $f(n) = n^2 + n + q$, gdzie q jest ustaloną liczbą naturalną. Wiadomo, że liczba $f(k)$ jest pierwsza dla każdej liczby całkowitej k takiej, że $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{q}{3}}$. Udowodnić, że $f(k)$ jest liczbą pierwszą dla każdej liczby całkowitej k takiej, że $0 \leqslant k \leqslant q-2$.

31. Dany jest czworościan foremny i dwie różne płaszczyzny, z których każda dzieli go na dwie przystające bryły. Płaszczyzny te rozcinają czworościan na 4 bryły. Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjmować iloraz objętości największej z tych czterech brył do najmniejszej z nich.

32. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wykazać, że między liczbą n^2 i liczbą $n^2+2n+2\sqrt{n}+\frac{5}{4}$ można znaleźć pewną liczbę takich dodatnich liczb całkowitych, że żadna z nich nie jest kwadratem liczby naturalnej, a ich iloczyn jest kwadratem liczby naturalnej.

33. Okrąg o, wpisany w trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, jest styczny do boku AD w punkcie E. Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu A względem punktu B. Prosta k, różna od prostej AB, przechodzi przez punkt F i jest styczna do okręgu o w punkcie S. Udowodnić, że punkty C, S i E leżą na jednej prostej.

34. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ należą do przedziału $[0,1]$. Wykazać, że w tym przedziale można znaleźć taką liczbę x, że

$$\frac{1}{|x-a_1|}+\frac{1}{|x-a_2|}+\ldots+\frac{1}{|x-a_{2n}|} \leqslant 16n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

35. Dowieść, że wśród dowolnych 10 000 kolejnych wyrazów ciągu

$$a_n = n^6 + 209$$

jest co najmniej 9916 liczb złożonych.

36. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Wykazać, że jeżeli $\sphericalangle ADM = \sphericalangle CDB$, to $\sphericalangle BCN = \sphericalangle DCA$.

Zawody drużynowe:

1. Dwóch graczy gra w następującą grę: Pierwszy gracz wybiera dziesięciocyfrową liczbę, którą drugi gracz stara się odgadnąć. W pojedynczym pytaniu gracz odgadujący wskazuje dowolny zbiór pozycji odgadywanej liczby, a gracz pierwszy podaje zbiór cyfr, które występują na tych pozycjach, ale nie mówi, ile razy każda z tych cyfr występuje i na których pozycjach. Jaka jest najmniejsza liczba pytań gwarantująca drugiemu graczowi odgadnięcie liczby wybranej przez pierwszego gracza?

2. Każdy z wierzchołków 2005-kąta foremnego pokolorowano na jeden z 10 kolorów. Wykazać, że jeśli wśród dowolnych 100 kolejnych wierzchołków występują wszystkie kolory, to wśród pewnych 90 kolejnych wierzchołków także występują wszystkie kolory.

3. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1. Wskazać liczbę rzeczywistą C_n spełniającą warunki:

♣ dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ takich, że

$$(1) \qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=1$$

prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^4 \leqslant C_n\,,$$

♠ istnieją dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ spełniające warunek (1), dla których

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^4 > C_n - \frac{1}{n}\,.$$

4. Dany jest okrąg ω oraz punkty A i B leżące na zewnątrz tego okręgu. Prosta k przechodzi przez punkt A i przecina okrąg ω w punktach P, Q. Prosta BP przecina okrąg ω w punktach P, R, prosta BQ w punktach Q, S. Wykazać, że wszystkie proste RS, odpowiadające różnym położeniom prostej k, mają punkt wspólny.

Pierwszy Mecz Matematyczny:

1. Każdą z liczb 1, 2, ..., 101 umieszczono dokładnie 101 razy w polach tablicy o wymiarach 101×101, po jednej na każdym polu. Udowodnić, że w pewnym wierszu lub w pewnej kolumnie znajduje się co najmniej 11 różnych liczb.

2. Funkcja rosnąca $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia dla dowolnych względnie pierwszych liczb m, $n \in \mathbb{N}$ warunki

$$f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{oraz} \qquad f(2) > 2.$$

Jaka jest najmniejsza możliwa wartość $f(3)$?

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki nieograniczony rosnący ciąg (a_n) dodatnich liczb rzeczywistych, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n jest spełniony warunek

$$[a_n + a_{n+1} + a_{n+2}] = [a_{9n+8}] .$$

4. Liczby całkowite a, b są różnej parzystości. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita c, że liczby $c+ab$, $c+a$, $c+b$ są kwadratami liczb całkowitych.

5. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ spełniające warunki:

- $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1} \in \{1, 2\}$,
- wszystkie pierwiastki wielomianu W są rzeczywiste.

6. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których istnieją takie dodatnie liczby całkowite $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, że

$$\frac{1}{3a_1 - 1} + \frac{1}{3a_2 - 1} + \ldots + \frac{1}{3a_k - 1} = 1.$$

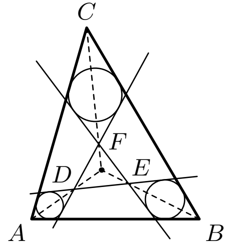
7. Wyznaczyć wszystkie takie rosnące ciągi (a_n) dodatnich liczb całkowitych, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 2005$ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{2n+1}{3} \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt M jest środkiem boku AB, punkt H jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na dwusieczną kąta ACB. Wykazać, że punkty K, L, M, H leżą na jednym okręgu.

9. W czworokącie wypukłym $ABCD$, nie będącym równoległobokiem, prosta przechodząca przez środki przekątnych przecina odcinek BC w punkcie R. Wykazać, że suma pól trójkątów ABR i CDR jest równa polu trójkąta ADR.

10. Trzy okręgi leżą wewnątrz trójkąta ABC i każdy z nich jest styczny do dwóch boków tego trójkąta, jak na rysunku obok. Do każdej pary z tych okręgów poprowadzono styczną zewnętrzną, różną od prostych AB, BC i CA. Punkty przecięcia tych stycznych oznaczono odpowiednio przez D, E i F. Udowodnić, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.



11. Dany jest sześciokąt wypukły, w którym przeciwległe boki są równoległe. Dowieść, że trzy proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Drugi Mecz Matematyczny:

1. W zbiorze liczb naturalnych wyróżniono te liczby, które dają się przedstawić w postaci sumy dwóch kwadratów dodatnich liczb całkowitych. Wśród wyróżnionych liczb są trójki kolejnych liczb, np. $72=6^2+6^2$, $73=8^2+3^2$, $74=7^2+5^2$. Udowodnić, że wśród wyróżnionych liczb istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb.

2. Czy istnieją cztery różne liczby całkowite a, b, c, d takie, że

$$a^3+b^3+c^3+d^3=a+b+c+d=2\,?$$

3. Liczby 1105 i 31 posiadają tę własność, że różnice

$$1105-31^2,\quad 1105-32^2,\quad 1105-33^2$$

są kwadratami dodatnich liczb całkowitych. Wyznaczyć inną parę dodatnich liczb całkowitych n, N, takich, że liczby

$$N-n^2,\ N-(n+1)^2,\ N-(n+2)^2$$

są kwadratami dodatnich liczb całkowitych.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste α takie, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+\alpha}].$$

5. Niech k będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że liczba $p=4k+3$ jest pierwsza. Dowieść, że spośród wierzchołków p-kąta foremnego można wybrać $2k+1$ wierzchołków w taki sposób, że wśród wzajemnych odległości wybranych wierzchołków żadna nie powtarza się więcej niż k razy.

6. Zbiór liczb naturalnych podzielono na 6 parami rozłącznych podzbiorów. Dowieść, że istnieją takie liczby naturalne $1\leqslant a<b<c\leqslant 2005$, że liczby a^2+b^2, a^2+c^2, b^2+c^2 należą do tego samego podzbioru.

7. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Dowieść, że każdy dzielnik pierwszy liczby

$$\frac{4^p-2^p+1}{3}$$

jest postaci $6pk+1$.

8. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2005$ oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ spełniające równanie

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}^2 \left(x_i x_{i+1} + x_i x_{i+3} + x_{i+1} x_{i+4} + x_{i+3} x_{i+4}\right),$$

gdzie $x_{n+k} = x_k$ dla $k = 1, 2, 3, 4$.

Dowieść, że wśród liczb x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, x_{17}, x_{19}, x_{101}, x_{103}, x_{107}, x_{109} jest co najmniej sześć liczb równych.

9. Okrąg ω wpisany w trójkąt nierównoramienny ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB. Styczna do okręgu ω, różna od prostej BC, przechodząca przez punkt K przecina prostą EF w punkcie X; styczna do okręgu ω, różna od prostej CA, przechodząca przez punkt L przecina prostą FD w punkcie Y; styczna do okręgu ω, różna od prostej AB, przechodząca przez punkt M przecina prostą DE w punkcie Z. Dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

10. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku S i promieniu 1. Proste BC i AD przecinają się w punkcie P; proste AC i BD przecinają się w punkcie Q. Wiedząc, że $PS = p$, $QS = s$, wyznaczyć długość odcinka PQ.

11. Dany jest okrąg ω oraz punkty A i B leżące na nim. Punkt X, różny od A i B, należy do okręgu ω. Okrąg styczny wewnętrznie do okręgu ω jest styczny do odcinków AX i BX odpowiednio w punktach Y i Z. Wyznaczyć zbiór środków odcinka YZ przy ustalonym okręgu ω, ustalonych punktach A, B oraz zmieniającym położenie punkcie X.

Czesko – Polsko – Słowackie Zawody Matematyczne:

1. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1+x_2^2+x_3^3+\ldots+x_n^n=n \\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n=\dfrac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

w liczbach nieujemnych $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

2. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O i opisany na okręgu o środku I. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkty O, I, P leżą na jednej prostej.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n\geqslant 3$, dla których wielomian

$$W(x)=x^n-3x^{n-1}+2x^{n-2}+6$$

daje się przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów, każdy dodatniego stopnia i o współczynnikach całkowitych.

4. Rozdajemy $n\geqslant 1$ ponumerowanych kulek dziewięciu osobom: A, B, C, D, E, F, G, H, I. Rozstrzygnąć, na ile sposobów można rozdać te kulki tak, aby osoba A otrzymała tyle samo kulek, co w sumie osoby B, C, D, E.

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Wyznaczyć zbiór tych punktów P leżących wewnątrz czworokąta $ABCD$, dla których

$$[PAB]\cdot[PCD]=[PBC]\cdot[PDA],$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

6. Wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie

$$y(x+y)=x^3-7x^2+11x-3.$$

Czesko – Polsko – Słowacki Mecz Matematyczny:

1. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że wszystkie dzielniki pierwsze liczby n^2+1 są mniejsze od n.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, $z_1,z_2,\ldots,z_{2005}$ spełniające równość

$$x^k+y^k=z_1^k+z_2^k+\ldots+z_{2005}^k \quad \text{dla } k=1,2,3.$$

3. Liczby p oraz $q=p+2$ są liczbami pierwszymi. Dowieść, że największy wspólny dzielnik liczb p^q-p oraz q^p-q jest większy od $2p^3$.

4. Dowieść, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba $n^{n^{n^{n^n}}} - n^{n^{n^n}}$ jest podzielna przez 547.

5. Punkty P, Q, R, S, T, U są odpowiednio środkami przekątnych AC, BD, CE, DF, EA, FB sześciokąta wypukłego $ABCDEF$. Wykazać, że pole sześciokąta $ABCDEF$ jest cztery razy większe od pola sześciokąta $PQRSTU$.

6. Dany jest sześciokąt wypukły. Każdy z trzech odcinków łączących środki przeciwległych boków tego sześciokąta dzieli go na dwa pięciokąty o równych polach. Dowieść, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie.

7. Dany jest okrąg ω o środku O i promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie kwadraty $ABCD$, których wierzchołki A i B leżą na ω. Wyznaczyć największą wartość długości odcinka OC.

8. Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}} + \sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}} \leqslant 4\,.$$

9. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$ o następującej własności:

Dla dowolnych liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ niepodzielnych przez n istnieją takie liczby $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k \leqslant n-1$, że liczba

$$a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + \ldots + a_{i_k} - 1$$

jest podzielna przez n.

10. Komisja matematyków ma zdecydować, czy dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata jest poprawny. Po zapoznaniu się z dowodem komisja przeprowadza głosowanie, przy czym każdy z członków komisji podejmuje decyzję zgodną ze stanem faktycznym z takim samym prawdopodobieństwem $p \in (\frac{1}{2}, 1)$, a decyzje poszczególnych członków komisji są zdarzeniami niezależnymi. Ostateczną decyzję komisja podejmuje większością głosów, a w przypadku parzystej liczby członków i remisu w głosowaniu, o opinii komisji w sprawie poprawności dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata decyduje rzut monetą.

Rozstrzygnąć, w zależności od p, jaka komisja ustali stan faktyczny z większym prawdopodobieństwem: 2005-osobowa czy 2006-osobowa.

11. Dowieść, że dla wszystkich dodatnich liczb a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\frac{a}{e+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+e} + \frac{e}{d+e+a} < 2\,.$$

Szkice rozwiązań

Zawody indywidualne:

1. Na ile sposobów można przedstawić liczbę 3^{2005} w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych dodatnich?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że liczba ta wynosi 2005.

Przypuśćmy, że

$$3^{2005}=m+(m+1)+\ldots+(m+k-1)=\frac{1}{2}k(2m+k-1).$$

Jeśli k jest liczbą parzystą: $k=2n$, to n oraz $2m+k-1=2m+2n-1$ muszą być nieujemnymi potęgami liczby 3; stąd

$$(m,n)\in\left\{\left(\frac{3^{2005}-1}{2},1\right),\left(\frac{3^{2004}-5}{2}),3\right)\ldots,\left(\frac{3^{1003}-2\cdot 3^{1002}+1}{2},3^{1002}\right)\right\},$$

łącznie 1003 rozwiązania.

Niech teraz k będzie liczbą nieparzystą: $k=2n+1$. Wówczas liczby k oraz $m+n$ są nieujemnymi potęgami liczby 3, stąd

$$(m,n)\in\left\{\left(3^{2005},1\right),\left(3^{2004}-1,4\right),\ldots,\left(3^{1003}-\frac{3^{1002}-1}{2},\frac{3^{1002}-1}{2}\right)\right\},$$

łącznie 1002 rozwiązania.

2. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki

$$\sphericalangle DAC=\sphericalangle ABC,\quad \sphericalangle DCA=\sphericalangle BCM.$$

Udowodnić, że prosta DM jest równoległa do prostej BC.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy przekształcenie p będące złożeniem obrotu wokół punktu C o kąt $\sphericalangle ACD$ z jednokładnością o środku C i skali CD/AC. Wówczas $p(A)=D$ oraz niech $p(B)=E$. Ponadto punkt $N=p(M)$ należy do boku BC.

Z podobieństwa trójkątów ACD i BCE wynika, że

$$\sphericalangle BCM=\sphericalangle BCE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBM=\sphericalangle CBE.$$

A zatem punkt E jest obrazem symetrycznym punktu M względem prostej BC. Stąd oraz z równości $DN=NE$ otrzymujemy tezę.

3. Wyznaczyć liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x^3=3x-y\\ y^3=3y-z\\ z^3=3z-x \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

Rozwiązanie

Mamy

$$(*)\qquad x^3-3x-2=(x-2)(x+1)^2,\quad x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2.$$

Stąd widać, że liczby x, y, z muszą leżeć w przedziale $[-2,2]$; istotnie, gdyby np. $x>2$, to mielibyśmy $y+2=-x^3+3x+2<0$, czyli $y<-2$. Analogicznie, uwzględniając drugie równanie i drugą tożsamość (*) dostalibyśmy $z>2$ i wreszcie $x<-2$, sprzeczność.

Możemy więc podstawić $x=2\sin\alpha$. Wówczas dostajemy $y=2\sin 3\alpha$, $z=2\sin 9\alpha$ oraz $x=2\sin 27\alpha$. Stąd $\sin\alpha=\sin 27\alpha$, co ma dokładnie 27 różnych rozwiązań ze względu na α w przedziale $(\pi/2,3\pi/2)$. Każde z tych rozwiązań daje inne rozwiązanie wyjściowego układu.

4. Alicja i Bob grają w pewną grę używając prostokątnej tabliczki czekolady. Czekolada składa się z jednakowych kwadratowych kostek ułożonych w 60 rzędów i 40 kolumn. Gracze w tej grze wykonują ruchy na przemian, a każdy ruch polega na podzieleniu jednego z kawałków czekolady wzdłuż linii podziału kostek na dwie części. Alicja może wykonywać jedynie cięcia wzdłuż linii pionowych, a Bob jedynie wzdłuż linii poziomych. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać żadnego ruchu zgodnego z zasadami gry. Grę rozpoczyna Alicja. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Rozwiązanie

Rozważmy ogólniejszą sytuację. Pokażemy, że gdy liczba rzędów w tabliczce czekolady jest nie mniejsza od liczby kolumn, to Bob ma strategię wygrywającą. Dowód tego faktu przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na liczbę kolumn.

Gdy mamy jedną kolumnę, Alicja nie może wykonać pierwszego ruchu, więc Bob wygrywa. Rozważmy teraz tabliczkę o n wierszach i $m\leqslant n$ kolumnach. Alicja w swym pierwszym ruchu musi ją podzielić na dwie części: $n\times k$ i $n\times l$, gdzie $k+l=m$. Bez straty ogólności przypuśćmy, że $k\leqslant l$. Wówczas Bob może odciąć kwadrat o boku k z kawałka $n\times k$. Wtedy Alicja musi wykonać swój ruch mając do dyspozycji kawalki: $n-k\times k$, $k\times k$, $n\times l$. Zauważmy jednak, że $n\geqslant m\geqslant l$ oraz $n\geqslant m=k+l\geqslant 2k$, więc $n-k\geqslant k$. Na każdym z tych kawałków osobno Alicja przegra (założenie indukcyjne), więc może zostać zmuszana przez Boba do rozpoczynania gry na kolejnych kawałkach i ostatecznej kapitulacji.

5. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ zachodzi równość

$$\left[\frac{n-2^0}{2^1}\right]+\left[\frac{n-2^1}{2^2}\right]+\left[\frac{n-2^2}{2^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n-2^{n-1}}{2^n}\right]=0.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy sumę stojącą po lewej stronie przez S_n. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n=2$ otrzymujemy równość $0+0=0$. Przypuśćmy teraz, że $S_n=0$; chcemy wykazać, że $S_{n+1}=0$. Jak widać, $n+1$-szy składnik S_{n+1} wynosi -1. Porównajmy k-te składniki S_n oraz S_{n+1}, $k=1,2,\ldots,n$:

$$\left[\frac{n-2^{k-1}}{2^k}\right],\quad \left[\frac{n+1-2^{k-1}}{2^k}\right].$$

Widzimy, iż różnią się one o jeden bądź są równe; różnią się one o jeden wtedy i tylko wtedy, gdy w rozwinięciu dwójkowym liczb n oraz $n+1$ liczba k jest numerem miejsca, gdzie $n+1$ ma 1, a n ma 0. Jest dokładnie jedno takie miejsce; zatem widzimy, iż $S_{n+1}-S_n = -1+1=0$, a więc dowód jest zakończony.

6. Dla punktu S leżącego wewnątrz trójkąta ABC oznaczmy przez D_S, E_S, F_S punkty przecięcia odpowiednio prostej AS i boku BC, prostej BS i boku CA, prostej CS i boku AB. Wyznaczyć zbiór wszystkich takich punktów S, że suma pól trójkątów SAF_S, SBD_S, SCE_S jest równa połowie pola trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że trójkąt ABC ma pole 1. Przypuśćmy, że S spełnia warunki zadania. Wówczas istnieją liczby α, β, γ o sumie 1 takie, że jeśli w punktach A, B, C umieścić odpowiednio masy α, β, γ, to S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Jak łatwo sprawdzić, pola trójkątów SAF_S, SBD_S, SCE_S wynoszą wówczas odpowiednio

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta},\ \frac{\gamma\alpha}{\beta+\gamma},\ \frac{\alpha\beta}{\gamma+\alpha}.$$

Mamy więc

$$(*) \qquad \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\gamma\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\gamma+\alpha}=\frac{1}{2}$$

oraz, po odjęciu obustronnie 1,

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma\beta}{\gamma+\alpha}=\frac{1}{2}.$$

Odejmując obustronnie powyższe równości dochodzimy do związku

$$\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}=0,$$

a więc pewne dwie masy są równe. Oznacza to, iż S musi leżeć na jednej ze środkowych. Z drugiej strony, jeśli leży on na jednej ze środkowych, to pewne dwie masy są równe i warunek $(*)$ jest spełniony.

7. Dla liczby całkowitej $n>1$ oznaczmy przez $\phi(n)$ liczbę liczb naturalnych mniejszych od n, względnie pierwszych z n. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n>1$, że warunek

$$n \mid x^{n-1}-1$$

jest spełniony dla dokładnie $\phi(n)-1$ liczb naturalnych $x<n$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli $\mathrm{NWD}(x,n)>1$, to podany warunek nie może być spełniony. Może on więc zachodzić dla co najwyżej $\phi(n)$ liczb x względnie pierwszych z n. Przypuśćmy, że nie zachodzi on dla pewnego y względnie pierwszego z n, zachodzi natomiast dla pewnych $x_1 \neq x_2$ względnie pierwszych z n. Wówczas mamy

$$(x_1y)^{n-1} \equiv (x_1)^{n-1}y^{n-1} \equiv y^{n-1} \pmod n \text{ i podobnie } (x_2y)^{n-1} \equiv y^{n-1} \pmod n.$$

Zatem x_1y i x_2y są liczbami względnie pierwszymi z n nie spełniającymi podanego w zadaniu warunku. Oczywiście n nie dzieli różnicy $x_1y-x_2y=y(x_1-x_2)$. Wiemy więc, że jeśli warunek z zadania jest spełniony dla dokładnie $\phi(n)-1$ liczb x mniejszych od n, to $\phi(n)<3$. Sprawdzając wszystkie takie n dostajemy, że $n=4$ lub $n=6$.

8. Wśród 15 000 monet każda jest prawdziwa lub fałszywa, przy czym nie wiadomo ile jest prawdziwych, a ile fałszywych. Każda prawdziwa moneta waży dokładnie 10 gramów, a każda fałszywa dokładnie 11 gramów. Mamy do dyspozycji wagę, na której możemy umieścić dowolną liczbę monet i wyznaczyć ich łączny ciężar. Rozstrzygnąć, czy istnieje metoda pozwalająca w co najwyżej 1000 ważeniach rozpoznać wszystkie fałszywe monety.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje algorytm rozstrzygający w 1000 ważeniach, które monety są prawdziwe, a które fałszywe. Musi on więc stwierdzić, która spośród $2^{15\,000}$ możliwości zachodzi. Algorytm ten wykona 1000 ważeń, a każde z nich da jedynie informację ile spośród monet położonych na wadze jest fałszywych (liczba z przedziału od 0 do 15 000). Stąd łącznie po 1000 ważeniach algorytm uzyska jedną z co najwyżej $15\,001^{1000}$ odpowiedzi. Jednakże

$$15\,001^{1000} < (2^{14})^{1000} < 2^{15\,000}.$$

Zatem dla pewnych dwóch różnych układów monet algorytm da ten sam wynik, więc nie będzie w stanie rozróżnić tych układów.

9. Udowodnić, że liczba $512^3 + 675^3 + 720^3$ jest złożona.

Rozwiązanie

Niech $x = 512$, $y = 675$, $z = 720$. Wówczas $2z^2 = 3xy$. Zatem

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz = (x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx),$$

czyli rozważana liczba dzieli się przez $x+y-z = 467$.

10. Trójkąt równoboczny ABC wpisano w okrąg o. Okrąg q jest styczny zewnętrznie do okręgu o w punkcie należącym do krótszego łuku BC. Z punktów A, B, C poprowadzono styczne do okręgu q odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnić, że $AD = BE + CF$.

Rozwiązanie

Niech P będzie punktem styczności danych okręgów. Jednokładność o środku P i skali λ przeprowadzająca okrąg o na okrąg q przeprowadza trójkąt równoboczny ABC na trójkąt równoboczny $A'B'C'$ wpisany w okrąg q.

Ponadto $AD^2 = AP \cdot AA' = AP^2(1-\lambda)$. Analogicznie uzyskujemy $BE^2 = BP^2(1-\lambda)$ oraz $CF^2 = CP^2(1-\lambda)$. Ze znanej równości $AP = BP + CP$ (która wynika bezpośrednio z twierdzenia Ptolemeusza zastosowanego do czworokąta $ABPC$) oraz z uzyskanych wyżej zależności dostajemy tezę.

11. Niech $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Oznaczmy

$$P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}, \qquad Q = \frac{1}{2n^2}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln^2 \frac{a_i}{a_j}.$$

Udowodnić, że

a) jeśli $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \leqslant 1$, to $P \leqslant Q$;

b) jeśli $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \geqslant 1$, to $P \geqslant Q$.

Rozwiązanie

Oznaczmy $t_i = \ln a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas

$$P - Q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{t_i} - e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i} - \frac{1}{2n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(t_i - t_j)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{t_i} - e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{t_i} - \frac{t_i^2}{2}\right) - \left(e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2\right).$$

Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$. Wtedy

$$P - Q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right).$$

Ponieważ funkcja f w przedziale $(-\infty, 0]$ jest wklęsła, a w przedziale $[0, \infty)$ jest wypukła, więc na mocy nierówności Jensena otrzymujemy tezę zadania.

12. Dodatnie liczby niewymierne p, q spełniają warunek $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $k = [pn]$ lub $k = [qn]$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania nie jest prawdziwa. Wówczas istnieje liczba k, która nie dopuszcza przedstawień $[pn]$, $[qn]$. Wobec tego istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n, że

$$pm < k < p(m+1) - 1 \quad \text{oraz} \quad qn < k < q(n+1) - 1,$$

czyli równoważnie

$$m < \frac{k}{p} < m + 1 - \frac{1}{p} \quad \text{oraz} \quad n < \frac{k}{q} < n + 1 - \frac{1}{q}.$$

Po dodaniu ostatnich dwóch nierówności stronami i uwzględnieniu warunku $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dostajemy

$$m + n < k < m + n + 1,$$

sprzeczność.

13. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boku AB w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku AB, punkt E jest symetryczny do punktu D względem M. Udowodnić, że proste IM oraz CE są równoległe.

Rozwiązanie

Okrąg ω dopisany do trójkąta ABC, styczny do przedłużeń boków AC i BC, jest styczny do boku AB w punkcie E (łatwe ćwiczenie). Niech odcinek DF będzie średnicą okręgu o, wpisanego w trójkąt ABC. Jednokładność o środku C przeprowadzająca okrąg o na okrąg ω, przeprowadza punkt F na punkt E. Zatem punkty C, F i E są współliniowe. Z równości $DM = ME$ oraz $DI = IF$ wynika teza.

14. Wyznaczyć wszystkie trójkąty, których boki mają długości całkowite, a jeden z kątów jest równy 120°.

Rozwiązanie

Niech a, b, c oznaczają długości boków. Z twierdzenia kosinusów otrzymujemy

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab.$$

Niech $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$. Wówczas zachodzi równość

$$x^2 + y^2 + xy = 1.$$

Musimy wyznaczyć wszystkie wymierne dodatnie rozwiązania tego równania. Na krzywej opisanej powyższym równaniem znajduje się punkt wymierny $(-1,0)$. Poprowadźmy przez ten punkt prostą o współczynniku kierunkowym t: $y = t(x+1)$. Stąd otrzymujemy

$$x^2 + tx(x+1) + t^2(x+1)^2 = 1,$$

czyli

$$(x-1)(x+1) + tx(x+1) + t^2(x+1)^2 = 0.$$

Ponieważ $x \neq -1$, więc

$$x(t^2+t+1) + t^2 - 1 = 0.$$

Stąd

$$x = \frac{1-t^2}{t^2+t+1}, \quad y = \frac{2t+t^2}{t^2+t+1}.$$

Niech $t = n/m$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, przy czym $n < m$. Wówczas

$$x = \frac{m^2-n^2}{m^2+mn+n^2}, \quad y = \frac{n^2+2mn}{m^2+mn+n^2}.$$

Załóżmy, że liczba pierwsza p dzieli m^2-n^2 oraz m^2+mn+n^2. Wówczas p jest dzielnikiem liczb $2m^2+mn = m(2m+n)$ oraz $2n^2+mn = n(2n+m)$, a zatem p dzieli $2m+n$ oraz $2n+m$, a więc także ich sumę $3(m+n)$. Zauważmy, że p nie może dzielić liczby $m+n$; w przeciwnym przypadku p byłoby dzielnikiem m i n, co przeczy wyborowi liczb m, n jako względnie pierwszych. Ostatecznie, $p=3$. Zauważmy, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $m-n$ jest podzielna przez 3.

Zatem

$$a = (m^2-n^2)d, \; b = (n^2+2mn)d, \; c = (m^2+mn+n^2)d,$$

gdzie d jest liczbą naturalną, a w przypadku gdy odpowiednie liczby mają wspólny dzielnik 3, liczba d jest wielokrotnością $\frac{1}{3}$.

Na koniec podamy kilka przykładów. Gdy $m=2$, $n=1$, $d=1$, to dostajemy trójkąt o bokach 3, 5, 7; dla $m=10$, $n=7$, $d=\frac{1}{3}$ otrzymujemy trójkąt o bokach 17, 63, 73; dla $m=2005$, $n=1729$, $d=\frac{1}{3}$ otrzymujemy $a=343\,528$, $b=3\,307\,577$, $c=3\,492\,037$.

15. Niech $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Udowodnić, że

$$\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1} + \frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Rozwiązanie

Jeśli $x_k > n^2$, to

$$\frac{\sqrt{x_k - x_{k-1}}}{x_k} < \frac{\sqrt{x_k}}{x_k} = \frac{1}{\sqrt{x_k}} < \frac{1}{n},$$

a więc suma odpowiednich składników jest nie większa niż 1. Jeśli $x_k \leqslant n^2$, to

$$\frac{\sqrt{x_k - x_{k-1}}}{x_k} < \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \leqslant \frac{1}{x_{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{x_k}.$$

Dodając stronami wszystkie takie nierówności otrzymujemy, iż suma odpowiednich składników jest nie większa niż

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

16. Z odcinka $[-1,1]$ wybrano $k \geqslant 2$ różnych punktów. Dla każdego z tych punktów wyznaczono iloczyn jego odległości od pozostałych $k-1$ punktów. Oznaczmy przez S sumę odwrotności wszystkich tych iloczynów. Wykazać, że $S \geqslant 2^{k-2}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\cos(m+1)\phi = 2\cos m\phi \cos\phi - \cos(m-1)\phi.$$

Wykorzystując tę tożsamość udowodnimy indukcyjnie, że istnieje wielomian T_m taki, że

$$T_m(\cos\phi) = \cos m\phi,$$

przy czym współczynnik przy najwyższej potędze tego wielomianu wynosi 2^{m-1}. Dla $m=1$ jest to oczywiste. Krok indukcyjny wynika z równości

$$\cos(m+1)\phi = 2T_m(\cos\phi)\cos\phi - T_{m-1}(\cos\phi).$$

Wielomiany T_m noszą nazwę wielomianów Czebyszewa. Zauważmy, że dla $x \in [-1,1]$ zachodzi nierówność $|T_m(x)| \leqslant 1$.

Oznaczmy punkty dane w treści zadania przez x_0, x_1, …, x_{k-1}. Każdy wielomian W stopnia $k-1$ jest jednoznacznie określony przez swoje wartości w tych punktach. Wartości te oznaczmy odpowiednio przez a_0, a_1, …, a_{k-1}. Nietrudno wykazać, że

$$W(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})\ldots(x-x_{k-1})}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})\ldots(x_n-x_{k-1})}.$$

Jeśli weźmiemy $a_n = T_{k-1}(x_n)$, to powyższy wielomian będzie równy T_{k-1}. Współczynnik przy jego największej potędze, o którym wiemy, że jest równy 2^{k-2}, okazuje się być sumą wyrażeń postaci

$$\frac{a_n}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})\ldots(x_n-x_{k-1})}.$$

Ponieważ dla każdego $n = 0,1,\ldots,k-1$, $|a_n| \leqslant 1$, więc wartość bezwzględna każdego z tych wyrażeń nie przekracza

$$\frac{1}{|x_n-x_0|\ldots|x_n-x_{n-1}||x_n-x_{n+1}|\ldots|x_n-x_{k-1}|}.$$

Tymczasem suma takich wyrażeń dla $n=0,1,\ldots,k-1$ to właśnie suma S. Zatem wykazaliśmy nierówność $S \geqslant 2^{k-2}$ i staje się ona równością dla

$$x_n = -\cos\frac{n\pi}{k-1}, \quad n=0,1,\ldots,k-1.$$

17. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC=AC$. Punkty P i Q leżą wewnątrz tego trójkąta i spełniają zależności

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle QBA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle PBC = \sphericalangle QAB.$$

Dowieść, że punkty C, P i Q leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Niech $K=AP\cap BQ$ oraz $L=BP\cap AQ$. Wówczas z danych w treści zadania równości wynika, że punkty K, L, A, B leżą na jednym okręgu, który jest styczny do prostych AC i BC. Korzystając z twierdzenia Pascala dla „sześciokąta” $AAKBBL$ uzyskujemy tezę.

18. Niech $a_1,a_2,\ldots,a_n$ będą takimi liczbami dodatnimi, że

$$a_1a_2\ldots a_n = 1.$$

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $k>l>0$ zachodzi nierówność

$$a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k \geqslant a_1^l+a_2^l+\ldots+a_n^l.$$

Rozwiązanie

Mamy, na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną oraz nierówności między średnimi potęgowymi,

$$(*) \qquad 1=\sqrt[n]{a_1^la_2^l\ldots a_n^l} \leqslant \frac{a_1^l+a_2^l+\ldots+a_n^l}{n} \leqslant \left(\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}\right)^{l/k}.$$

Zatem

$$\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n} \geqslant 1,$$

skąd

$$\left(\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}\right)^{l/k} \leqslant \frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n},$$

co w połączeniu z $(*)$ daje tezę.

19. Odcinki AB i CD są podstawami trapezu $ABCD$. Punkty K i N należą odpowiednio do ramion AD i BC. Prosta KN nie jest równoległa do prostej AB i przecina odcinki AC i BD odpowiednio w punktach L i M. Wyznaczyć wszystkie wartości $t>1$, dla których istnieje taki trapez $ABCD$ oraz takie punkty K i N, że

$$KL=LM=MN \quad \text{oraz} \quad \frac{AB}{CD}=t.$$

Rozwiązanie

Poprowadźmy przez punkt L prostą równoległą do AD, przecinającą proste AB i CD odpowiednio w punktach L_1, L_2 oraz prostą równoległą do BC, przecinającą proste AB i CD odpowiednio w punktach L_3, L_4.

Analogicznie przez punkt M prowadzimy proste równoległe do AD i BC przecinające proste AB i CD odpowiednio w punktach M_1, M_2, M_3, M_4

Wprowadźmy oznaczenia: $CD=x$, $AB=y$, $AL_1=a$, $BM_3=b$. Wówczas $DL_2=AL_1=a$ oraz $CM_4=BM_3=b$. Ponieważ $KL=LM=MN$, a rzut równoległy zachowuje stosunki odcinków równoległych, więc otrzymujemy $AM_1=2AL_1=2a$ i $BL_3=2AM_3=2b$.

Zauważmy, że trójkąty LAL_3 i LCL_4 są podobne. Wynika stąd, że

$$\frac{CL_2}{AL_1}=\frac{CL_4}{AL_3}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{x-a}{a}=\frac{2b}{y-2b},$$

skąd otrzymujemy

$$ay+2bx=xy \ (*)$$

Podobne są również trójkąty MBM_1 i MDM_2. Otrzymujemy więc:

$$\frac{DM_4}{BM_3}=\frac{DM_2}{BM_1}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{x-b}{b}=\frac{2a}{y-2a},$$

skąd otrzymujemy

$$by+2ax=xy \ (**)$$

Porównując $(*)$ z $(**)$, dostajemy $y(a-b)=2x(a-b)$. Ponieważ, zgodnie z założeniami, prosta KN jest nierównoległa do AB, więc $a\neq b$, skąd $y=2x$. Zatem

$$t=\frac{AB}{CD}=2.$$

Pozostaje sprawdzić, że jeżeli $t=2$, to istnieje taka prosta KN, że $KL = LM = MN$. Niech P będzie dowolnym punktem na odcinku CD, takim, że $CP\neq PD$. Przez P poprowadźmy proste równoległe do prostych AD i BC. Przetną one podstawę AB odpowiednio w punktach Q i R. Niech teraz $L=AC\cap PQ$ i $M=BD\cap PR$. Prosta LM przecina boki AD i BC odpowiednio w punktach K i N. Wykażemy, że prosta KN spełnia nasz warunek.

Przez L poprowadźmy prostą równoległą do BC, przecinającą AB w punkcie T. Wówczas

$$\frac{BT}{TA}=\frac{CL}{LA}=\frac{CP}{PD}$$

a stąd

$$\frac{BT}{2(CP+PD)-BT}=\frac{CP}{PD}.$$

Otrzymujemy więc

$$BT=2CP=2BR.$$

Wynika stąd, że $LM=MN$. Analogicznie wykazujemy, że $KL=LM$. Wobec tego

$$KL=LM=MN.$$

Jako że $CP\neq PD$, prosta KN jest nierównoległa do AB. Spełnia więc warunki zadania.

20. Dany jest rosnący ciąg (a_n) dodatnich liczb całkowitych. Każda dodatnia liczba całkowita jest wyrazem co najmniej jednego z ciągów (a_n) lub (a_n+2n). Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność $a_n < \frac{3}{2}n$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dla pewnej liczby k zachodzi nierówność $a_k \geqslant \frac{3}{2}k$. W zbiorze

$$\{1,2,\ldots,\frac{3}{2}k-1\}$$

znajduje się co najwyżej $k-1$ wyrazów ciągu (a_n). Rozważymy dwa przypadki.

Jeśli k jest liczbą parzystą, to pozostałe $\frac{1}{2}k$ liczb musi być postaci a_i+2i dla pewnego i; ale $a_{k/2}+2\frac{k}{2} \geqslant \frac{3k}{2}$, sprzeczność.

Jeśli zaś k jest liczbą nieparzystą, to pozostałe $\frac{k}{2}+\frac{1}{2}$ liczb musi być postaci a_i+2i dla pewnego i. Ale $a_{(k+1)/2}+2\frac{k+1}{2} \geqslant 3\frac{k+1}{2}$, sprzeczność.

21. Trzy różne okręgi o_1, o_2 i o_3 o równych promieniach leżą wewnątrz trójkąta ABC i każdy z nich jest styczny do dwóch boków tego trójkąta. Okrąg o środku w punkcie P jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1, o_2 i o_3. Wykazać, że punkt P, środek okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Niech D, E, F będą środkami danych okręgów stycznych odpowiednio do par prostych (CA,AB), (AB,BC), (BC,CA). Z równości promieni tych okręgów wynika, że punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wówczas istnieje jednokładność o środku I przeprowadzająca trójkąt ABC na trójkąt DEF. Jednokładność ta przeprowadza punkt O na punkt P. Stąd wniosek, że punkty I, O oraz P leżą na jednej prostej.

22. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1. Wyznaczyć najmniejszą wartość sumy

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^{16},$$

gdzie $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek

$$a_1^8+a_2^8+a_3^8+\ldots+a_n^8=1\,.$$

Rozwiązanie

Niech C_n będzie szukaną najmniejsza wartością sumy. Wówczas należy wskazać liczby a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, dla których dana w zadaniu suma przyjmuje wartość C_n oraz wystarczy udowodnić nierówność

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^{16} \geqslant C_n\left(a_1^8+a_2^8+a_3^8+\ldots+a_n^8\right)^2,$$

czyli

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^{16} \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{C_n}{n-1}a_i^{16}+2C_na_i^8a_j^8+\frac{C_n}{n-1}a_j^{16},$$

co sprowadza się do

$$(1)\qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^{16} - \frac{C_n}{n-1}a_i^{16} - 2C_n a_i^8 a_j^8 - \frac{C_n}{n-1}a_j^{16} \geqslant 0\,.$$

Dla $a_1=1$ oraz $a_2=a_3=\ldots=a_n=0$ dana w zadaniu suma przyjmuje wartość $n-1$.

Przyjmując $C_n=n-1$ możemy przepisać nierówność (1) w postaci

$$(2)\qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^{16} - a_i^{16} - 2(n-1)a_i^8 a_j^8 - a_j^{16} \geqslant 0\,.$$

Dla dowodu nierówności (2) wystarczy wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y zachodzi nierówność

$$(x+y)^{16} - x^{16} - 2(n-1)x^8y^8 - y^{16} \geqslant 0\,,$$

czyli

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{15} \binom{16}{i} x^i y^{16-i} \geqslant 2(n-1)x^8y^8\,.$$

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$(4)\qquad x^iy^{16-i} + x^{16-i}y^i \geqslant 2x^8y^8\,,$$

co po uwzględnieniu równości $\binom{16}{i}=\binom{16}{16-i}$ prowadzi do

$$\sum_{i=1}^{15} \binom{16}{i} x^i y^{16-i} \geqslant \sum_{i=1}^{15} \binom{16}{i} x^8y^8 = \left(2^{16}-2\right)x^8y^8 = 2\left(2^{15}-1\right)x^8y^8\,,$$

a to dowodzi nierówności (3) w przypadku $n\leqslant 2^{15}=32\,768$.

Niech teraz $n>2^{15}$. Wówczas dla $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=\frac{1}{\sqrt[8]{n}}$ dana w zadaniu suma przyjmuje wartość $C_n=\frac{2^{15}(n-1)}{n}$. Z kolei nierówność (1) przyjmuje postać

$$(5)\qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^{16} - \frac{2^{15}}{n}a_i^{16} - \frac{2^{16}(n-1)}{n}a_i^8 a_j^8 - \frac{2^{15}}{n}a_j^{16} \geqslant 0\,.$$

Dla dowodu nierówności (5) wystarczy wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y zachodzi nierówność

$$n(x+y)^{16} - 2^{15}x^{16} - 2^{16}(n-1)x^8y^8 - 2^{15}y^{16} \geqslant 0\,,$$

czyli

$$(6)\qquad \left(n-2^{15}\right)\left(x^{16}+y^{16}\right) + \sum_{i=1}^{15} n\binom{16}{i} x^i y^{16-i} \geqslant 2^{16}(n-1)x^8y^8\,.$$

Korzystając z nierówności (4) otrzymujemy

$$\left(n-2^{15}\right)\left(x^{16}+y^{16}\right) + \sum_{i=1}^{15} n\binom{16}{i} x^i y^{16-i} \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(n-2^{15}\right)x^8y^8 + \sum_{i=1}^{15} n\binom{16}{i} x^8y^8 =$$

$$= \left(2n-2^{16}+n\left(2^{16}-2\right)\right)x^8y^8 = 2^{16}(n-1)\,x^8y^8\,,$$

co kończy dowód nierówności (6).

Odpowiedź: Najmniejsza wartość danej w zadaniu sumy jest równa $n-1$ wtedy, gdy $n \leqslant 32\,768$ oraz $32\,768 \cdot \frac{n-1}{n}$, gdy $n > 32\,768$.

23. Dowieść, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$47^n + 2500$$

jest złożona.

Rozwiązanie

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to

$$47^n + 2500 \equiv (-1)^n + 1 = 0 \pmod 3\,,$$

a zatem dana w zadaniu liczba jest podzielna przez 3.

Jeżeli liczba n jest postaci $4k+2$, to

$$47^n + 2500 = 47^{4k+2} + 2500 \equiv (-4)^{4k+2} + 1 =$$
$$= (-4)^{4k} \cdot (-4)^2 + 1 \equiv 16 + 1 = 17 \equiv 0 \pmod{17}$$

i dana w zadaniu liczba jest podzielna przez 17.

Jeżeli zaś $n = 4k$, to korzystając z tożsamości

$$x^4 + 4y^4 = \left(x^2 - 2xy + 2y^2\right)\left(x^2 + 2xy + 2y^2\right)$$

otrzymujemy

$$47^{4k} + 4 \cdot 5^4 = \left(47^{2k} - 2 \cdot 47^k \cdot 5 + 2 \cdot 5^2\right)\left(47^{2k} + 2 \cdot 47^k \cdot 5 + 2 \cdot 5^2\right) =$$
$$= \left(2209^k - 10 \cdot 47^k + 50\right)\left(2209^k + 10 \cdot 47^k + 50\right).$$

Oto rozkłady na czynniki pierwsze wybranych liczb postaci danej w zadaniu:

$$47^2 + 2500 = 17 \cdot 277$$

$$47^4 + 2500 = 1789 \cdot 2729$$

$$47^{17} + 2500 = 3 \cdot 8\,882\,645\,502\,320\,731\,146\,440\,731\,729$$

$$47^{20} + 2500 = 2153 \cdot 1\,984\,133 \cdot 26\,509\,881\,113 \cdot 24\,430\,624\,491\,073$$

$$47^{95} + 2500 = 3 \cdot P_{159}\,,$$

gdzie P_{159} jest 159-cyfrową liczbą pierwszą.

24. Liczby $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ należą do przedziału $[a,b]$, gdzie $0<a<b$. Udowodnić nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2(a^2+b^2)^2}{4ab(a^2+ab+b^2)} \cdot n^2.$$

Wyznaczyć wszystkie ciągi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ liczb z przedziału $[a,b]$, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że dla $x \in [a,b]$ zachodzi nierówność
$$x^3 + \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{x} \leqslant (a+b)(a^2+b^2).$$
Istotnie,
$$(a+b)(a^2+b^2) - x^3 - \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{x} =$$
$$= \frac{(x-a)(b-x)(a^2+b^2+x^2+ab+ax+bx)}{x}.$$
W takim razie
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sum_{i=1}^{n} \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{x_i} \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \sum_{i=1}^{n} \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{x_i}\right)^2}{4} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(n(a+b)(a^2+b^2))^2}{4} = \frac{(a+b)^2(a^2+b^2)^2}{4} \cdot n^2.$$
Stąd wynika już dowodzona nierówność.

Równość w tej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie x_i są równe a lub b i przy tym
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = ab(a^2+ab+b^2) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$
Niech k liczb x_i jest równe a, a $n-k$ liczb x_i jest równe b. Wówczas
$$ka^3 + (n-k)b^3 = ab(a^2+ab+b^2)\left(\frac{k}{a} + \frac{n-k}{b}\right).$$
Stąd
$$k = \frac{b^3 - ab^2 - a^2b - a^3}{2(b^3 - a^3)} \cdot n.$$
Zatem równość w nierówności zachodzi, jeśli b/a jest pierwiastkiem równania
$$(n-2k)x^3 - nx^2 - nx + 2k - n = 0,$$
większym od 1, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$, przy czym k liczb jest równych a, a $n-k$ liczb jest równych b.

25. Punkt F leży na boku AB pięciokąta wypukłego $ABCDE$, przy czym
$$\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC.$$
Dowieść, że $\sphericalangle BCD + \sphericalangle AED = 180^\circ$.

Rozwiązanie

Niech X będzie punktem przecięcia prostych BC i AE, Y – punktem przecięcia prostych AD i FC, Z – punktem przecięcia prostych BD i EF.

Z danych w treści zadania równości kątów wynika, że punkty Y i Z leżą na okręgu ω opisanym na trójkącie CDE. Ponieważ punkt F leży na boku AB, więc z twierdzenia Pascala wynika, że punkt X również leży na okręgu ω. Stąd $\sphericalangle XCD + \sphericalangle XED = 180^\circ$, a to jest równość, którą należało wykazać.

26. Dany jest rosnący ciąg (a_n) dodatnich liczb całkowitych. Każda dodatnia liczba całkowita jest wyrazem co najmniej jednego z ciągów (a_n) lub (a_n+2n). Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k zachodzi nierówność $a_k < \sqrt{2}k$.

Rozwiązanie

Załóżmy, że a_k jest najmniejszym wyrazem ciągu, który nie spełnia tej nierówności. Wówczas liczba a_k-1 nie należy do tego ciągu: istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy

$$a_k-1 \geqslant \sqrt{2}k-1 > \sqrt{2}(k-1),$$

wbrew określeniu liczby k. W takim razie istnieje liczba naturalna $s<k$ taka, że $a_s+2s= =a_k-1$. Weźmy

$$n=\left[\frac{a_s+1}{2+\sqrt{2}}\right].$$

Zatem

$$\frac{a_s+1}{2+\sqrt{2}}>n, \qquad \text{czyli} \qquad a_s+1>(2+\sqrt{2})n.$$

Zauważmy, że

$$\frac{a_s+1}{2+\sqrt{2}}=\frac{(a_s+1)(2-\sqrt{2})}{2}=a_s+1-\frac{a_s+1}{\sqrt{2}}.$$

Ponieważ liczba $\frac{a_s+1}{\sqrt{2}}$ nie jest liczbą całkowitą, więc

(1) $$n=\left[\frac{a_s+1}{2+\sqrt{2}}\right]=a_s-\left[\frac{a_s+1}{\sqrt{2}}\right].$$

Udowodnimy, że $a_n+2n<(2+\sqrt{2})n$, czyli, równoważnie $a_n<\sqrt{2}n$. W tym celu wystarczy udowodnić, że $n<k$. Mamy

$$n=\left[\frac{a_s+1}{2+\sqrt{2}}\right]<\frac{a_s+1}{2+\sqrt{2}}<s<k.$$

Uzyskaliśmy zatem następującą podwójną nierówność

$$a_n+2n<(2+\sqrt{2})n<a_s+1.$$

W przedziale $[a_s+1,a_k]$ mamy a_k-a_s liczb całkowitych, a w przedziale $[n+1,k]$ mamy $k-n$ liczb całkowitych. Udowodnimy, że $a_k-a_s\leqslant k-n$. Zauważmy najpierw, że w zbiorze liczb $\{a_s+1,a_s+2,\ldots,a_k\}$ znajduje się $k-s$ wyrazów naszego ciągu: a_{s+1}, a_{s+2}, …, a_k. Pokażemy, że pozostałych liczb w tym zbiorze jest nie więcej niż $s-n$. Każda taka liczba jest postaci a_i+2i dla pewnego i. Mamy

$$a_s+1\leqslant a_i+2i\leqslant a_k-1.$$

Z drugiej strony wiemy, że $a_n+2n<a_s+1$, $a_s+2s=a_k-1$, a zatem i musi należeć do przedziału $[n+1,s]$. W tym przedziale jest oczywiście $s-n$ liczb całkowitych. Zatem wszystkich liczb w zbiorze $\{a_s+1,a_s+2,\ldots,a_k\}$ jest nie więcej niż $(k-s)+(s-n)=k-n$. Uzyskujemy nierówność

(2) $$a_k-(a_s-n)\leqslant k.$$

Oznaczmy

$$w=\left[\frac{a_s+1}{\sqrt{2}}\right].$$

Na mocy wzoru (1) otrzymujemy, że $w=a_s-n$. Nierówność (2) możemy zapisać w postaci

$$a_k-w\leqslant k. \tag{3}$$

Mamy $s<k$, a zatem $a_s<\sqrt{2}s$. Wobec tego

$$\sqrt{2}s>a_s>\sqrt{2}w-1.$$

Stąd $s\geqslant w$ i

$$\frac{a_k}{2+\sqrt{2}}=\frac{a_s+2s+1}{2+\sqrt{2}}\geqslant\frac{\sqrt{2}w-1+2w+1}{2+\sqrt{2}}=w.$$

Udowodniliśmy więc, że $w\leqslant a_k/(2+\sqrt{2})$. Dodając do tej nierówności związek (3) dostajemy

$$a_k<k+\frac{a_k}{2+\sqrt{2}}.$$

Stąd wynika $a_k\leqslant\sqrt{2}k$, co przeczy wyborowi liczby k.

27. Dowieść, że wśród dowolnych 100 kolejnych wyrazów ciągu

$$a_n=n^8+n^6+n^4+n^2+1$$

jest co najmniej 86 liczb złożonych.

Rozwiązanie

Z tożsamości

$$n^8+n^6+n^4+n^2+1=\frac{n^{10}-1}{n^2-1}=\frac{n^5-1}{n-1}\cdot\frac{n^5+1}{n+1}=$$
$$=\left(n^4+n^3+n^2+n+1\right)\left(n^4-n^3+n^2-n+1\right)$$

wynika, że wszystkie wyrazy ciągu oprócz $a_1=5$ są liczbami złożonymi.

Uwaga

Z pomocą komputera można sprawdzić, że wśród dowolnych 100 kolejnych wyrazów ciągu (a_n) co najmniej 85 jest podzielnych przez jedną z liczb 5, 11, 31.

Można jednak wykazać, że dla dowolnej liczby N istnieje 100 kolejnych wyrazów ciągu (a_n), wśród których pewnych 15 wyrazów ma tylko dzielniki pierwsze większe od liczby N.

Na przykład żaden z wyrazów $a_{3121856439978}$, $a_{3121856439987}$, $a_{3121856439988}$, $a_{3121856439998}$, $a_{3121856440000}$, $a_{3121856440022}$, $a_{3121856440032}$, $a_{3121856440033}$, $a_{3121856440042}$, $a_{3121856440043}$, $a_{3121856440053}$, $a_{3121856440055}$, $a_{3121856440065}$, $a_{3121856440075}$, $a_{3121856440077}$ nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 3121.

28. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^3+xyz=x^4+y^4+z^4+\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{27}{2} \end{cases}$$

w dodatnich liczbach rzeczywistych x, y, z.

Rozwiązanie

Mamy

$$\frac{1}{8}+x^4+y^4+z^4=(x^3+y^3+z^3+xyz)(x+y+z).$$

Stąd

$$(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)=\frac{1}{8}.$$

Zatem

$$1=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{2(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)}=1.$$

Stąd wynika, że

$$x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx),$$

a więc

$$xy+yz+zx=\frac{1}{4}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{27}{2},$$

więc

$$xyz=\frac{1}{54}.$$

Rozważmy wielomian

$$W(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-t^2+\frac{1}{4}t-\frac{1}{54}.$$

Zauważmy, że $W(\frac{2}{3})=0$; stąd łatwo obliczyć, że $W(t)=\left(t-\frac{2}{3}\right)\left(t-\frac{1}{6}\right)^2$. Stąd

$$(x,y,z)\in\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)\right\}.$$

29. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Wykazać, że suma pól pewnych czterech spośród trójkątów ABC, BCD, CDE, DEA, EAB jest większa od pola pięciokąta $ABCDE$.

Rozwiązanie

Niech ABC będzie trójkątem o najmniejszym polu spośród trójkątów ABC, BCD, CDE, DEA, EAB. Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych AD i CE oraz niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Ponieważ $[BCD]\geqslant[ABC]$, więc również $[BCD]\geqslant[BCX]$. Analogicznie otrzymujemy $[EAB]\geqslant[ABX]$. Stąd $[BCD]+[EAB]\geqslant[ABCX]$. Dodając do obu stron powyższej nierówności sumę $[CDE]+[DEA]$ wnioskujemy, że suma pól trójkątów BCD, CDE, DEA, EAB jest większa od pola pięciokąta $ABCDE$.

30. Dany jest trójmian kwadratowy $f(n)=n^2+n+q$, gdzie q jest ustaloną liczbą naturalną. Wiadomo, że liczba $f(k)$ jest pierwsza dla każdej liczby całkowitej k takiej, że $0\leqslant k\leqslant\sqrt{\frac{q}{3}}$. Udowodnić, że $f(k)$ jest liczbą pierwszą dla każdej liczby całkowitej k takiej, że $0\leqslant k\leqslant q-2$.

Rozwiązanie

Niech y będzie najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną taką, że $f(y)$ jest liczbą złożoną. Przypuśćmy, wbrew tezie, że $y \leqslant q-2$. Niech p będzie najmniejszym pierwszym dzielnikiem liczby $f(y)$. Udowodnimy, że $p \geqslant 2y+1$, skąd dostaniemy

$$y^2+y+q=f(y) \geqslant p^2 \geqslant (2y+1)^2=4y^2+4y+1,$$

czyli $y^2<\frac{q}{3}$ - sprzeczność.

Przypuśćmy, że $p \leqslant 2y$ i rozważmy różnicę

$$f(y)-f(x)=(y-x)(y+x+1).$$

Jeśli x przebiega zbiór liczb całkowitych od 0 do $y-1$, to wyrażenie $y-x$ przyjmuje wartości $y, y-1, \ldots, 1$, a wyrażenie $y+x+1$ przyjmuje wartości $y+1, y+2, \ldots, 2y$. Zatem dla pewnej liczby $x \in \{0, 1, \ldots, y-1\}$ liczba $f(y)-f(x)$ jest podzielna przez p. Ponieważ $f(y)$ dzieli się przez p, więc $f(x)$ także dzieli się przez p. Zgodnie z założeniem, $f(x)$ jest liczbą pierwszą, skąd $f(x)=p$. To natychmiast prowadzi do sprzeczności: istotnie,

$$y-x<y+x+1 \leqslant q+x-1<q+x+x^2=f(x),$$

a zatem liczba p nie może być dzielnikiem $(y-x)(y+x+1)$.

31. Dany jest czworościan foremny i dwie różne płaszczyzny, z których każda dzieli go na dwie przystające bryły. Płaszczyzny te rozcinają czworościan na 4 bryły. Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjmować iloraz objętości największej z tych czterech brył do najmniejszej z nich.

Rozwiązanie

Niech M i N będą odpowiednio środkami krawędzi AB i CD czworościanu foremnego $ABCD$. Ponieważ obrót o 180° wokół prostej MN przeprowadza czworościan $ABCD$ na siebie, więc każda płaszczyzna zawierająca prostą MN rozcina czworościan $ABCD$ na dwie przystające bryły. Zatem rozpatrywany iloraz może przyjąć dowolną wartość z przedziału $(0,1\rangle$.

32. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wykazać, że między liczbą n^2 i liczbą $n^2+2n+2\sqrt{n}+\frac{5}{4}$ można znaleźć pewną liczbę takich dodatnich liczb całkowitych, że żadna z nich nie jest kwadratem liczby naturalnej, a ich iloczyn jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Łatwo rozwiązać to zadanie dla $n=1$ i $n=2$. Dla $n \geqslant 3$ znajdziemy czwórkę liczb a, b, c, d postaci

$$a=(n-x)(n+x+1)=n^2+n-x^2-x,$$

$$b=(n-x)(n+x+2)=n^2+2n-x^2-2x,$$

$$c=(n-x+1)(n+x+1)=n^2+2n+1-x^2,$$

$$d=(n-x+1)(n+x+2)=n^2+3n+2-x^2-x,$$

gdzie x jest pewną liczbą naturalną. Łatwo zauważyć, że $abcd$ jest kwadratem liczby naturalnej. Niech x będzie największą liczbą całkowitą taką, że $x^2+x \leqslant n$. Wówczas $n^2<a<b<c<d$ i aby rozwiązać zadanie pozostaje wykazać, że $d<n^2+2n+2\sqrt{n}+\frac{5}{4}$, czyli $x^2+x>n-2\sqrt{n}+\frac{3}{4}$.

Przypuśćmy, że $x^2+x \leqslant n-2\sqrt{n}+\frac{3}{4}$. Oznacza to, że $x \leqslant \sqrt{n}-\frac{3}{2}$; w przeciwnym przypadku mielibyśmy

$$x^2+x > n-3\sqrt{n}+\frac{9}{4}+\sqrt{n}-\frac{3}{2} = n-2\sqrt{n}+\frac{3}{4}.$$

Wobec tego $x+1 \leqslant \sqrt{n}-\frac{1}{2}$, a zatem

$$(x+1)^2+(x+1) \leqslant n-\sqrt{n}+\frac{1}{4}+\sqrt{n}-\frac{1}{2} = n-\frac{1}{4} < n,$$

co przeczy wyborowi x. Liczba x została więc znaleziona.

33. Okrąg o, wpisany w trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, jest styczny do boku AD w punkcie E. Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu A względem punktu B. Prosta k, różna od prostej AB, przechodzi przez punkt F i jest styczna do okręgu o w punkcie S. Udowodnić, że punkty C, S i E leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego lematu.

Lemat

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Wówczas styczne do okręgu o w punktach B i D przecinają się na prostej AC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AB \cdot CD = BC \cdot DA.$$

Dowód

Załóżmy, że styczne do okręgu o w punktach B i D przecinają się w punkcie X leżącym na prostej AC. Wówczas z podobieństwa trójkątów XAB i XBC, jak również z podobieństwa trójkątów XAD i XDC otrzymujemy

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AX}{BX} = \frac{AX}{DX} = \frac{DA}{CD},$$

czyli $AB \cdot CD = BC \cdot DA$.

Przyjmijmy z kolei, że $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ oraz niech styczna do okręgu o w punkcie B przecina prostą AC w punkcie X. Z punktu X prowadzimy styczną do okręgu o w punkcie D', przy czym $D' \neq B$. Z danej równości oraz z udowodnionej wyżej implikacji wynika, że

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD'}{D'C}.$$

Punkty B, D i D' leżą więc na okręgu Apoloniusza punktów A i C. Jest to możliwe jedynie wtedy, gdy $D = D'$.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Oznaczmy przez K i L punkty styczności okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ odpowiednio z bokami BC i CD. Niech ponadto P będzie punktem przecięcia prostych FS i AD.

Na mocy lematu wystarczy wykazać, że $KS \cdot LE = SL \cdot EK$, bądź też, że punkty P, K, L leżą na jednej prostej.

Oznaczmy przez N punkt symetryczny do punktu M względem punktu B. Tak jak w rozwiązaniu zadania 13 dowodzimy, że P, L i N leżą na jednej prostej. Ponadto mamy $\sphericalangle MKN = 90^\circ = \sphericalangle MKL$, skąd wynika, że punkty K, L, N leżą na jednej prostej. A zatem punkty P, K, L leżą na jednej prostej.

34. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ należą do przedziału $[0,1]$. Wykazać, że w tym przedziale można znaleźć taką liczbę x, że

$$\frac{1}{|x-a_1|}+\frac{1}{|x-a_2|}+\ldots+\frac{1}{|x-a_{2n}|}\leqslant 16n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenie

$$I_k=\left(\frac{k}{4n},\frac{k+1}{4n}\right),\quad k=0,1,\ldots,4n-1.$$

Spośród tych $4n$ odcinków co najmniej $2n$ nie zawiera żadnej z liczb $a_1, a_2,, \ldots, a_{2n}$. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ będą środkami tych odcinków. Oznaczmy jeszcze przez d_{ij} odległości $|x_j-a_i|$ i niech

$$A=16n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

Ustalmy $1\leqslant i\leqslant 2n$. Dla dowolnego j $(j=1,2,\ldots 2n)$ mamy $d_{ij}\geqslant\frac{1}{8n}$. Dla wszystkich j, z wyjątkiem co najwyżej dwóch, zachodzi nierówność $d_{ij}\geqslant\frac{3}{8n}$. Z kolei dla co najmniej $2n-4$ możliwych j mamy $d_{ij}\geqslant\frac{5}{8n}$, itd., ogólnie, dla co najmniej $2n-2k$ możliwych j zachodzi nierówność $d_{ij}\geqslant\frac{2k+1}{8n}$. Wobec tego,

$$\frac{1}{d_{i1}}+\frac{1}{d_{i2}}+\ldots+\frac{1}{d_{i2n}}\leqslant\frac{16n}{2n-1}+\frac{16n}{2n-3}+\ldots+\frac{16n}{1}.$$

Dodając takie nierówności stronami dla $i=1,2,\ldots,2n$ otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{d_{11}}+\frac{1}{d_{12}}+\ldots+\frac{1}{d_{12n}}\right)+\left(\frac{1}{d_{21}}+\frac{1}{d_{22}}+\ldots+\frac{1}{d_{22n}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{d_{2n1}}+\frac{1}{d_{2n2}}+\ldots+\frac{1}{d_{2n2n}}\right)\leqslant 2nA.$$

Zatem musi istnieć takie k, dla którego

$$\frac{1}{d_{1k}}+\frac{1}{d_{2k}}+\ldots+\frac{1}{d_{2nk}}\leqslant A.$$

To zaś oznacza, że x_k jest szukaną liczbą.

35. Dowieść, że wśród dowolnych 10 000 kolejnych wyrazów ciągu

$$a_n=n^6+209$$

jest co najmniej 9916 liczb złożonych.

Rozwiązanie

Liczba n^6+209 jest parzysta dla n nieparzystych oraz podzielna przez 3 dla n niepodzielnych przez 3. Ponadto z małego twierdzenia Fermata wynika, że liczba $n^6+209=$ $=n^6-1+7\cdot 30$ jest podzielna przez 7, jeśli n nie jest podzielne przez 7.

Zatem dla n niepodzielnych przez 42 liczba a_n jest podzielna przez 2, 3 lub 7.

Dla $n=5k\pm 1$ liczba a_n jest podzielna przez 5.

Dla $n=13k+r$, gdzie r jest nieresztą kwadratową modulo 13, czyli jedną z liczb 2, 5, 6, 7, 8, 11, liczba a_n jest podzielna przez 13.

Tak więc liczba a_n nie dzieli się przez żadną z liczb 2, 3, 5, 7, 13 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest podzielna przez 42, przy dzieleniu przez 5 daje jedną z reszt 0, 2, 3, a przy dzieleniu przez 13 jedną z siedmiu reszt 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12.

Zatem wśród dowolnych 2730 kolejnych wyrazów ciągu (a_n) co najwyżej 21 może być liczbami pierwszymi. Wśród 10920 kolejnych wyrazów liczb pierwszych jest nie więcej niż 84. Zatem wśród dowolnych 10000 kolejnych wyrazów jest co najmniej 9916 liczb złożonych.

36. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Wykazać, że jeżeli $\sphericalangle ADM = \sphericalangle CDB$, to $\sphericalangle BCN = \sphericalangle DCA$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania wynika natychmiast z następującego lematu.

Lemat

Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt M jest środkiem przekątnej AC. Wówczas $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDM$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AB \cdot CD = BC \cdot DA.$$

Dowód

Ponieważ $\sphericalangle MCD = \sphericalangle ABD$, więc dana w treści zadania równość kątów jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABD i MCD są podobne. To natomiast jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AB}{BD} = \frac{MC}{CD}.$$

Ostatnia równość na mocy twierdzenia Ptolemeusza jest równoważna zależności

$$AB \cdot CD = BC \cdot DA.$$

Zawody drużynowe:

1. Dwóch graczy gra w następującą grę: Pierwszy gracz wybiera dziesięciocyfrową liczbę, którą drugi gracz stara się odgadnąć. W pojedynczym pytaniu gracz odgadujący wskazuje dowolny zbiór pozycji odgadywanej liczby, a gracz pierwszy podaje zbiór cyfr, które występują na tych pozycjach, ale nie mówi, ile razy każda z tych cyfr występuje i na których pozycjach. Jaka jest najmniejsza liczba pytań gwarantująca drugiemu graczowi odgadnięcie liczby wybranej przez pierwszego gracza?

Rozwiązanie

Jest oczywiste, że 10 pytań wystarczy, żeby zgadnąć wymyśloną liczbę. Udowodnimy indukcyjnie, że dla $n \leqslant 10$ nie istnieje strategia pozwalająca odgadnąć n-cyfrową liczbę liczbę w $n-1$ pytaniach. Udowodnimy to nawet w przypadku gdy pierwszy gracz wymyśla liczby złożone z samych jedynek i dwójek. Oczywiste jest, że dwucyfrowej liczby nie można odgadnąć przy pomocy tylko jednego pytania. Zauważmy, że nie ma sensu zadawać pytania o 1 pozycję. Wtedy bowiem zadanie sprowadziłoby się do odgadnięcia $n-1$-cyfrowej liczby w $n-2$ pytaniach, co na mocy założenia indukcyjnego jest niemożliwe. Zbudujemy pewien graf, którego wierzchołkami będą numery pozycji w liczbie. Początkowo graf zawiera jeden (dowolny) wierzchołek. Następnie w każdym kroku wybieramy pytanie, które zawiera zarówno pozycje występujące w już zbudowanym grafie jak i pewną pozycję która jeszcze w grafie nie występuje; dołączamy do grafu krawędź pomiędzy dwoma z pozycjami, o które pytano, przy czym dokładnie jedna z nich znajduje się w już zbudowanym grafie. Postępujemy tak, dopóki to jest możliwe. Przypuśćmy w zbudowanym grafie występuje $k \leqslant n-1$ wierzchołków. Występuje wtedy w nim dokładnie $k-1$ krawędzi, a to oznacza że wszystkie pozostałe pytania zostały zadane o pozycje wszystkie spoza grafu, bądz wszystkie w obrębie grafu. Jeżeli wszystkie pozostałe pytania były zadane o pozycje spoza grafu, to musimy odgadnąć k pozycji (w obrębie grafu) na podstawie $k-1$ pytań, co jak wiemy jest niemożliwe z założenia indukcyjnego. W przeciwnym wypadku, zużyliśmy co najmniej k pytań na k pozycji, więc musimy odgadnąć pozostałe $n-k$ pozycji w co najwyżej $n-k-1$ pytaniach, co jak wiemy jest także niemożliwe. Przypuśćmy teraz, że zbudowany graf zawiera wszystkie n wierzchołków. Sposób konstrukcji wskazuje, że zbudowany graf jest drzewem. Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że istnieją dwie takie n-cyfrowe liczby, dla których odpowiedzi na wszystkie zadane pytania brzmiały $1,2$. Ustalmy jeden wierzchołek drzewa jako korzeń. Niech pierwsza liczba będzie taka, że na pozycjach o parzystej odległości od korzenia ma jedynki, a na pozycjach o nieparzystej odległości od korzenia ma dwójki. Druga liczba z kolei ma na pozycjach o parzystej odległości od korzenia dwójki, a na pozostałych jedynki. Dla każdej z tych liczb każda krawędź drzewa łączy pozycję, na której jest jedynka z pozycją na której jest dwójka.

2. Każdy z wierzchołków 2005-kąta foremnego pokolorowano na jeden z 10 kolorów. Wykazać, że jeśli wśród dowolnych 100 kolejnych wierzchołków występują wszystkie kolory, to wśród pewnych 90 kolejnych wierzchołków także występują wszystkie kolory.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że wśród dowolnych 90 kolejnych punktów brakuje któregoś z kolorów. Wtedy jest oczywistym, że dla dowolnych 10 kolejnych punktów istnieje kolor, którego nie ma wśród następnych 90 punktów. Rozważmy dowolne 10 kolejnych punktów i nazwijmy odpowiedni kolor kolorem 1. Wśród następnych 10 punktów istnieje kolor 2, różny od koloru 1, który nie występuje wśród następnych 80 punktów. Wśród następnych 10 punktów znajdujemy kolor 3 itd. Rozważając dziewiątą dziesiątkę punktów znajdujemy kolor 9, którego nie ma wśród ostatnich 10 punktów. Z tego wynika, że wszystkie te 10 punktów są tego samego koloru. Zatem dowolne 10 kolejnych punktów muszą być tego samego koloru, co oznacza, że wszystkie punkty na okręgu muszą być tego samego koloru. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

3. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1. Wskazać liczbę rzeczywistą C_n spełniającą warunki:

♣ dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, …, a_n takich, że

$$(1) \qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=1$$

prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^4 \leqslant C_n\,,$$

♠ istnieją dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, …, a_n spełniające warunek (1), dla których

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i+a_j)^4 > C_n-\frac{1}{n}\,.$$

Rozwiązanie

Dla $n=2$ przyjmijmy $C_2=4$.

Wówczas dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$(a_1+a_2)^4 \leqslant 4\left(a_1^2+a_2^2\right)^2,$$

czyli równoważnie

$$(a_1+a_2)^2 \leqslant 2\left(a_1^2+a_2^2\right),$$

skąd widać, że dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa, a równość zachodzi przy $a_1 = = a_2 = 1/\sqrt{2}$.

Dla $n=3$ przyjmijmy $C_3=16/3$.

Wówczas dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$(a_1+a_2)^4+(a_2+a_3)^4+(a_3+a_1)^4 \leqslant \frac{16}{3}\left(a_1^2+a_2^2+a_2^3\right)^2$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\left(a_i^4+4a_i^3a_j+6a_i^2a_j^2+4a_ia_j^3+a_j^4\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\frac{16}{3}\left(\frac{a_i^4}{2}+2a_i^2a_j^2+\frac{a_j^4}{2}\right)$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}3\left(a_i^4+4a_i^3a_j+6a_i^2a_j^2+4a_ia_j^3+a_j^4\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\left(8a_i^4+32a_i^2a_j^2+8a_j^4\right)$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\left(5a_i^4-12a_i^3a_j+14a_i^2a_j^2-12a_ia_j^3+5a_j^4\right) \geqslant 0$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(a_i-a_j)^2\left(5a_i^2-2a_ia_j+5a_j^2\right) \geqslant 0,$$

skąd widać, że dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa, a równość zachodzi przy $a_1 = = a_2 = a_3 = 1/\sqrt{3}$.

Wykażemy, że dla $n \geqslant 4$ stałą spełniającą warunki zadania jest

$$C_n = \frac{n(n-1)}{n-2}.$$

Daną w zadaniu nierówność sprowadzamy kolejno do postaci

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i+a_j)^4 \leqslant C_n\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^2,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(a_i^4+4a_i^3a_j+6a_i^2a_j^2+4a_ia_j^3+a_j^4\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{n(n-1)}{n-2}\left(\frac{a_i^4}{n-1}+2a_i^2a_j^2+\frac{a_j^4}{n-1}\right),$$

$$(n-2)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(a_i^4+4a_i^3a_j+6a_i^2a_j^2+4a_ia_j^3+a_j^4\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(na_i^4+2n(n-1)a_i^2a_j^2+na_j^4\right).$$

Zatem

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\Big(2a_i^4-4(n-2)a_i^3a_j+(2n(n-1)-6(n-2))a_i^2a_j^2-$$

$$-4(n-2)a_ia_j^3+2a_j^4\Big)\geqslant 0,$$

czyli

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(a_i^4-2(n-2)a_i^3a_j+\left(n^2-4n+6\right)a_i^2a_j^2-2(n-2)a_ia_j^3+2a_j^4\right)\geqslant 0.$$

Ostatecznie

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(a_i^2-(n-2)a_ia_j+a_j^2\right)^2\geqslant 0\,,$$

co kończy dowód nierówności.

Zauważmy, że $C_4=6$ i przy $a_1=a_2=a_3=a_4=1/2$ w danej nierówności zachodzi równość.

Dla $n\geqslant 5$ wskazanie optymalnej stałej C_n jest trudne, wykażemy jednak, że stałej podanej wyżej nie można istotnie poprawić.

W tym celu przyjmijmy

$$a_1=\sqrt{\frac{n-1}{n}},\qquad a_2=a_3=\ldots=a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\,.$$

Wówczas

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i+a_j)^4=(n-1)\,(a_1+a_2)^4+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\,(2a_2)^4=$$

$$=(n-1)\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^4+\frac{8(n-2)}{n^2(n-1)}=$$

$$=\frac{n^2}{n-1}+\frac{8(n-2)}{n^2(n-1)}=n+1+\frac{1}{n-1}+\frac{8(n-2)}{n^2(n-1)}=$$

$$=n+1+\frac{n^2+8n-16}{n^2(n-1)}\,,$$

a wobec

$$C_n-\frac{1}{n}=\frac{n(n-1)}{n-2}-\frac{1}{n}=n+1+\frac{n+2}{n(n-2)}$$

do udowodnienia pozostaje nierówność

$$\frac{n^2+8n-16}{n^2(n-1)}>\frac{n+2}{n(n-2)}\,,$$

czyli

$$\frac{n^2+8n-16}{n(n-1)} > \frac{n+2}{n-2}\,.$$

Zatem

$$(n-2)(n^2+8n-16)-n(n-1)(n+2)>0,$$

czyli

$$5n^2-30n+32>0\,,$$

co jest prawdą dla $n \geqslant 5$, gdyż

$$5n^2-30n+32=5(n-5)^2+20(n-5)+7\,.$$

4. Dany jest okrąg ω oraz punkty A i B leżące na zewnątrz tego okręgu. Prosta k przechodzi przez punkt A i przecina okrąg ω w punktach P, Q. Prosta BP przecina okrąg ω w punktach P, R, prosta BQ w punktach Q, S. Wykazać, że wszystkie proste RS, odpowiadające różnym położeniom prostej k, mają punkt wspólny.

Rozwiązanie

Niech okrąg opisany na trójkącie BRS przecina prostą AB po raz drugi w punkcie C. Wówczas punkty A, P, R, C leżą na jednym okręgu. Zatem $BC\cdot BA=BR\cdot BP$, skąd wynika, że położenie punktu C nie zależy od wyboru prostej k.

Rozpatrzmy teraz proste k_1 i k_2 oraz odpowiadające im punkty S_1, R_1 oraz S_2, R_2. Niech ponadto ω_1, ω_2 będą okręgami opisanymi odpowiednio na trójkątach BR_1S_1, BR_2S_2. Jak wykazaliśmy wyżej, okręgi ω_1 i ω_2 przechodzą przez punkt C. Stąd wynika, że proste R_1S_1, R_2S_2 oraz BC przecinają się w jednym punkcie, gdyż są osiami potęgowymi odpowiednio par okręgów (ω_1,ω), (ω_2,ω) oraz (ω_1,ω_2). Zatem wszystkie proste RS mają punkt wspólny leżący na prostej AB.

Pierwszy Mecz Matematyczny:

1. Każdą z liczb 1, 2, ..., 101 umieszczono dokładnie 101 razy w polach tablicy o wymiarach 101×101, po jednej na każdym polu. Udowodnić, że w pewnym wierszu lub w pewnej kolumnie znajduje się co najmniej 11 różnych liczb.

Rozwiązanie

Umówmy się, że zarówno wiersz jak i kolumnę będziemy nazywać rzędem. Tablica zawiera więc 202 rzędy. Możemy je ponumerować dowolnie. Niech a_j oznacza liczbę różnych liczb w j-tym rzędzie. Przez b_i oznaczmy liczbę rzędów, w których znajduje się liczba i. Zauważmy, że

$$a_1+a_2+\ldots+a_{202}=b_1+b_2+\ldots+b_{101},$$

gdyż zarówno liczenie pierwszej, jak i drugiej sumy polega na stopniowym dodawaniu tej samej liczby 1. Każda liczba od 1 do 101, jeśli występuje w danym rzędzie, jest „zauważona" tylko raz, następnie zamieniana jest na 1, która staje się kolejnym składnikiem sumy.

Udowodnimy, że dla każdego $i\in\{1,2,\ldots,101\}$ liczba b_i jest niemniejsza niż 21.

Załóżmy, że liczba i znajduje się w n wierszach i k kolumnach. Wówczas $b_i = n+k$ oraz $nk \geqslant 101$ (gdyby $nk < 101$, tzn. $k < \frac{101}{n}$, to w każdym z n wierszy liczba i występowałaby mniej niż $\frac{101}{n}$ razy, więc w sumie liczb i byłoby mniej niż $n \cdot \frac{101}{n} = 101$, wbrew założeniu, że każda liczba występuje 101 razy. Mamy zatem

$$b_i = n+k \geqslant 2\sqrt{nk} \geqslant 2\sqrt{101} > 20.$$

Wobec tego

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{202} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{101} \geqslant 101 \cdot 21 = 2121 > 202 \cdot 10,$$

czyli $a_1 + a_2 + \ldots + a_{202} > 202 \cdot 10$. Z ostatniej nierówności wnioskujemy, że co najmniej jedna z liczb a_1, a_2, ..., a_{202} musi być niemniejsza niż 11.

2. Funkcja rosnąca $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia dla dowolnych względnie pierwszych liczb m, $n \in \mathbb{N}$ warunki

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{oraz} \quad f(2) > 2.$$

Jaka jest najmniejsza możliwa wartość $f(3)$?

Rozwiązanie

Funkcja $f(n) = n^2$ spełnia warunki zadania i $f(3) = 9$. Udowodnimy, że 9 jest najmniejszą możliwą wartością $f(3)$. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi, natomiast n, k niech będą liczbami naturalnymi takimi, że $p^n < q^k < p^{n+1}$. Wówczas

$$f^n(p) < f^k(q) < f^{n+1}(p).$$

Stąd

$$n \ln f(p) < k \ln f(q) < (n+1) \ln f(p).$$

Zatem

$$\frac{n}{k} < \frac{\ln f(q)}{\ln f(p)} < \frac{n+1}{k}.$$

Z drugiej strony,

$$\frac{n}{k} < \frac{\ln q}{\ln p} < \frac{n+1}{k}.$$

Oznacza to, iż

$$\frac{\ln q}{\ln p} < \frac{n+1}{k} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{k} < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln f(q)}{\ln f(p)}.$$

Przy $n \to \infty$ otrzymujemy

$$\frac{\ln q}{\ln p} \leqslant \frac{\ln f(q)}{\ln f(p)}.$$

Zamieniając p i q miejscami dostajemy nierówność

$$\frac{\ln p}{\ln q} \leqslant \frac{\ln f(p)}{\ln f(q)}.$$

Zatem mamy

$$\frac{\ln p}{\ln q} = \frac{\ln f(p)}{\ln f(q)}.$$

Stąd

$$\frac{\ln f(p)}{\ln p} = \frac{\ln f(q)}{\ln q}.$$

Oznaczmy $\log_2 f(2) = c$. Tym samym, dla dowolnej liczby pierwszej p mamy

$$\frac{\ln f(p)}{\ln p} = \frac{\ln f(2)}{\ln 2} = \log_2 f(2) = c.$$

Stąd $f(p) = p^c$. Udowodnimy, że $c \geqslant 2$. W tym celu wykażemy, że $f(2) \geqslant 4$. Przypuśćmy, wbrew tej tezie, że $f(2) = 3$. Wówczas jednak $c = \log_2 3$ i $f(3) = 3^{\log_2 3}$, co nie jest liczbą całkowitą. Tym samym $f(3) = 3^c \geqslant 9$.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki nieograniczony rosnący ciąg (a_n) dodatnich liczb rzeczywistych, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n jest spełniony warunek

$$[a_n + a_{n+1} + a_{n+2}] = [a_{9n+8}].$$

Rozwiązanie

Udowodnimy, że ciąg zadany wzorem

$$a_n = \sqrt{n}$$

spełnia warunki zadania. Dla $n = 1$ łatwo sprawdzić równość

$$[1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}] = [\sqrt{17}].$$

Niech $n \geqslant 2$. Oznaczmy $p = [\sqrt{9n+8}]$. Dla dowolnego $n \in N$, liczba $9n+8$ nie może być kwadratem liczby naturalnej, więc

$$p < \sqrt{9n+8} < p+1.$$

Stąd

$$p^2 \leqslant 9n+7, \qquad (p+1)^2 \geqslant 9n+9.$$

Ponieważ

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})^2 =$$

$$= 3n + 3 + 2\sqrt{n(n+1)} + 2\sqrt{n(n+2)} + \sqrt{(n+1)(n+2)} <$$

$$< 3n + 3 + 2\left(n + \frac{1}{2}\right) + 2(n+1) + 2\left(n + \frac{3}{2}\right) = 9n + 9 \leqslant (p+1)^2,$$

więc

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} < p+1 \text{ i stąd } [\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}] \leqslant p.$$

Ponieważ

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})^2 =$$

$$= 3n + 3 + 2\sqrt{n(n+1)} + 2\sqrt{n(n+2)} + 2\sqrt{(n+1)(n+2)} >$$

$$> 3n + 3 + 2\left(n + \frac{2}{5}\right) + 2\left(n + \frac{4}{5}\right) + 2(n+1) = 9n + \frac{37}{5} > p^2,$$

więc

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} > p \text{ i stąd } [\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}] \geqslant p,$$

co kończy dowód.

4. Liczby całkowite a, b są różnej parzystości. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita c, że liczby $c+ab$, $c+a$, $c+b$ są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie

Weźmy $c=\left(\frac{a-b+1}{2}\right)^2-a$. Liczba c jest całkowita i mamy

$$c+a=\left(\frac{a-b+1}{2}\right)^2, \qquad c+b=\left(\frac{a-b+1}{2}\right)^2+b-a=\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2$$

oraz

$$c+ab=\left(\frac{a-b+1}{2}\right)^2+ab-a=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2.$$

5. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ spełniające warunki:

- $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}\in\{1,2\}$,
- wszystkie pierwiastki wielomianu W są rzeczywiste.

Rozwiązanie

Łatwo zauważyć, że dla $n\leqslant 2$ szukanymi wielomianami są: $x+1$, $x+2$, x^2+2x+1. Udowodnimy, że są to jedyne wielomiany spełniające warunki zadania. Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech r_1, r_2, ..., r_n będą pierwiastkami wielomianu

$$W(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0,$$

gdzie $n\geqslant 3$. Mamy

$$\sum_{i=1}^n r_i^2=\left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\geqslant n} r_ir_j=a_{n-1}^2-2a_{n-2}\leqslant 2.$$

Z drugiej zaś strony,

$$\sum_{i=1}^n r_i^2\geqslant n\sqrt[n]{r_1^2r_2^2\ldots r_n^2}=n(a_0^2)^{1/n}\geqslant n.$$

Uzyskaliśmy więc sprzeczność.

6. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których istnieją takie dodatnie liczby całkowite $a_1<a_2<\ldots<a_k$, że

$$\frac{1}{3a_1-1}+\frac{1}{3a_2-1}+\ldots+\frac{1}{3a_k-1}=1.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że rozbiliśmy liczbę 1 na k takich składników:

$$1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}.$$

Mnożąc tę równość przez iloczyn mianowników otrzymujemy

$$a_1a_2\ldots a_k=a_2a_3\ldots a_k+\ldots+a_1a_2\ldots a_{k-1}.$$

Liczba po lewej stronie daje przy dzieleniu przez 3 resztę $(-1)^k$, a każdy ze składników po prawej stronie daje resztę $(-1)^{k-1}$. Wobec tego $k\cdot(-1)^{k-1}\equiv(-1)^k \pmod 3$. Zatem liczba k przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Ponieważ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}<1,$$

więc nie można przedstawić 1 w postaci sumy 5 takich składników. Zauważmy że

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{50}+\frac{1}{200}.$$

Ponadto zachodzi równość

$$\frac{1}{8a}=\frac{1}{14a}+\frac{1}{35a}+\frac{1}{50a}+\frac{1}{200a}.$$

Stąd rozbijając liczbę $\frac{1}{200}$ na cztery składniki otrzymujemy przedstawienie 1 jako sumy 11 składników. Z takiego przedstawienia możemy otrzymać sumę 14, 17 itd. składników.

Zatem 1 można rozbić na n składników żądanej postaci pod warunkiem, że $n=5+3m$, gdzie m jest liczbą całkowitą dodatnią.

7. Wyznaczyć wszystkie takie rosnące ciągi (a_n) dodatnich liczb całkowitych, że dla dowolnej liczby naturalnej $n>2005$ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2=\frac{2n+1}{3}\sum_{i=1}^{n} a_i\,.$$

Rozwiązanie

Niech $n>2005$. Wówczas

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=\frac{2n+1}{3}(a_1+a_2+\ldots+a_n),$$

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n+1}^2=\frac{2n+3}{3}(a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}).$$

Po odjęciu stronami otrzymujemy

$$a_{n+1}^2=\frac{2}{3}(a_1+a_2+\ldots+a_n)+\frac{2n+3}{3}a_{n+1}.$$

Stąd

$$\frac{a_{n+1}(a_{n+1}-1)}{2}+a_{n+1}(a_{n+1}-n-1)=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Ze wzoru na sumę n początkowych liczb naturalnych mamy

$$\frac{a_{n+1}(a_{n+1}-1)}{2}=1+2+\ldots+(a_{n+1}-1).$$

Ponieważ (a_n) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, więc

$$a_{n+1}\geqslant n+1 \quad \text{i} \quad a_{n+1}-1\geqslant a_n.$$

Ponieważ

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{a_{n+1}(a_{n+1}-1)}{2}+a_{n+1}(a_{n+1}-n-1)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a_{n+1}(a_{n+1}-1)}{2}=1+2+\ldots+a_{n+1}-1\geqslant$$

$$\geqslant 1+2+\ldots+a_n\geqslant a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

więc

$$a_1=1, a_2=2, \ldots, a_n=n.$$

Wynika stąd, że $a_1=1$, $a_2=2$, …, $a_n=n$ dla dowolnego $n\geqslant 2005$. tak więc jedynym ciągiem spełniającym warunki zadania jest ciąg $a_n=n$.

8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt M jest środkiem boku AB, punkt H jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na dwusieczną kąta ACB. Wykazać, że punkty K, L, M, H leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy bez straty ogólności, że $\sphericalangle BAC \geqslant \sphericalangle ABC$.

Z równości $\sphericalangle CHB = 90^\circ = \sphericalangle CLB$ wynika, że punkty B, C, H, L leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle HLK = \sphericalangle ABC\,. \tag{1}$$

Niech D będzie punktem symetrycznym do punktu A względem dwusiecznej kąta ACB. Wówczas odcinki BD oraz MK są równoległe skąd uzyskujemy

$$\sphericalangle AMK = \sphericalangle ABC\,. \tag{2}$$

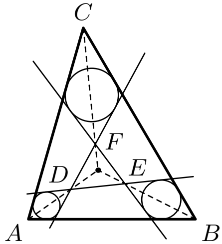
Z zależności (1) oraz (2) otrzymujemy tezę.

9. W czworokącie wypukłym $ABCD$, nie będącym równoległobokiem, prosta przechodząca przez środki przekątnych przecina odcinek BC w punkcie R. Wykazać, że suma pól trójkątów ABR i CDR jest równa polu trójkąta ADR.

Rozwiązanie

Niech M i N będą odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Niech X będzie punktem leżącym wewnątrz (lub na obwodzie) czworokąta $ABCD$, dla którego zachodzi równość $[ABX]+[CDX]=\frac{1}{2}[ABCD]$. Zależność ta oczywiście zachodzi, jeśli $X=M$ lub jeśli $X=N$, skąd wynika, że zachodzi ona również dla dowolnego punktu X leżącego na prostej MN i zawierającego się w czworokącie $ABCD$ (zob. Lemat 2 w rozwiązaniu zadania 5 zawodów drużynowych Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w 2004 r., broszura str. 33). Przyjmując w szczególności $X=R$ uzyskujemy tezę.

10. Trzy okręgi leżą wewnątrz trójkąta ABC i każdy z nich jest styczny do dwóch boków tego trójkąta, jak na rysunku obok. Do każdej pary z tych okręgów poprowadzono styczną zewnętrzną, różną od prostych AB, BC i CA. Punkty przecięcia tych stycznych oznaczono odpowiednio przez D, E i F. Udowodnić, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.



Rozwiązanie

Niech o będzie okręgiem wpisanym w trójkąt ABC, a ω okręgiem wpisanym w trójkąt DEF. Rozpatrzmy jednokładność j o środku X i skali ujemnej przeprowadzającą okrąg ω na okrąg o. Niech K, L, M będą odpowiednio obrazami punktów D, E, F przy jednokładności j. Wówczas proste DK, EL i FM przecinają się w punkcie X.

Niech o_A będzie jednym z trzech danych okręgów, który jest styczny do boków AB i AC. Rozpatrzmy teraz jednokładność o środku A przeprowadzającą okrąg o_A na okrąg o. Przy tej jednokładności punkt D przechodzi na punkt K. Stąd wniosek, że punkty A, D, K są współliniowe, a więc prosta AD przechodzi przez punkt X.

Analogicznie dowodzimy, że proste BE i CF przechodzą przez punkt X.

11. Dany jest sześciokąt wypukły, w którym przeciwległe boki są równoległe. Dowieść, że trzy proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Niech $ABCDEF$ będzie danym sześciokątem oraz niech K, L, M, N, O, P będą odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Oznaczmy ponadto przez X punkt przecięcia przekątnych CF i AD, przez Y punkt przecięcia przekątnych AD i BE, a przez Z punkt przecięcia przekątnych BE i CF.

Z równoległości przeciwległych boków danego sześciokąta wynika, że punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na odcinkach MP, NK i OL. Aby dokończyć rozwiązanie zadania wystarczy dowieść, na mocy trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy, że

$$\frac{\sin\sphericalangle FXP}{\sin\sphericalangle PXA}\cdot\frac{\sin\sphericalangle BZL}{\sin\sphericalangle LZC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle DYN}{\sin\sphericalangle NYE}=1\,. \tag{1}$$

Korzystając z twierdzenia sinusów otrzymujemy

$$\frac{\sin\sphericalangle FXP}{\sin\sphericalangle PXA}=\frac{AX}{FX}=\frac{AD}{CF}\,.$$

Piszemy analogiczne równości dla dwóch pozostałych ułamków stojących po lewej stronie zależności (1), mnożymy je stronami, po czym otrzymujemy równość (1).

Drugi Mecz Matematyczny:

1. W zbiorze liczb naturalnych wyróżniono te liczby, które dają się przedstawić w postaci sumy dwóch kwadratów dodatnich liczb całkowitych. Wśród wyróżnionych liczb są trójki kolejnych liczb, np. $72=6^2+6^2$, $73=8^2+3^2$, $74=7^2+5^2$. Udowodnić, że wśród wyróżnionych liczb istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb.

Rozwiązanie

Wykażemy, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich k takich, że $8k^2+1$ jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych. To już da tezę; istotnie,

$$8k^2=(2k)^2+(2k)^2,\quad 8k^2+2=(2k-1)^2+(2k+1)^2.$$

Pokażemy, że dla nieskończenie wielu k istnieje takie a, że $8k^2+1=3^2+a^2$, czyli $a^2=8k^2-8$. Podstawiając $a=4b$ dostajemy równanie Pella

$$k^2-2b^2=1,$$

które, jak wiadomo, posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

2. Czy istnieją cztery różne liczby całkowite a, b, c, d takie, że

$$a^3+b^3+c^3+d^3=a+b+c+d=2\,?$$

Rozwiązanie

Oczywiste jest, że dwie spośród danych liczb są nieparzyste. Przypuśćmy, że są to liczby a i b. Niech $a+b=4$ (założenie $a+b=0$ oraz $a+b=2$ nie prowadzą do celu, co łatwo sprawdzić), wtedy $b=4-a$, $d=-2-c$ i otrzymujemy

$$2=a^3+(4-a)^3+c^3-(2+c)^3,$$

a stąd
$$2(a-2)^2+2=(c+1)^2.$$
Z tego wynika, że c jest liczbą nieparzystą, $c=2k+1$. W takim razie,
$$(a-2)^2+1=2(k+1)^2,$$
skąd wynika, że a też jest liczbą nieparzystą, $a=2m+1$. Mamy
$$(2m-1)^2+1=2(k+1)^2,$$
skąd
$$2m(m-1)=k(k+2),$$
czyli k jest liczbą parzystą, $k=2p$. A zatem
$$m(m-1)=2p(p+1).$$
Podstawiając za p w powyższej równości 1, 2, … otrzymujemy parę $p=14$, $m=21$, stąd zaś
$$a=43,\ b=-39,\ c=57,\ d=-59.$$

3. Liczby 1105 i 31 posiadają tę własność, że różnice
$$1105-31^2,\quad 1105-32^2,\quad 1105-33^2$$
są kwadratami dodatnich liczb całkowitych. Wyznaczyć inną parę dodatnich liczb całkowitych n, N, takich, że liczby
$$N-n^2,\ N-(n+1)^2,\ N-(n+2)^2$$
są kwadratami dodatnich liczb całkowitych.

Rozwiązanie

Niech
$$N=n^2+k_1^2=(n+1)^2+k_2^2=(n+2)^2+k_3^2.$$
Oznaczmy
$$a=\frac{k_1+k_3}{2},\quad b=\frac{k_1-k_3}{2}.$$
Wówczas
$$k_1=a+b,\quad k_3=a-b.$$
Zatem
$$n^2+(a+b)^2=(n+2)^2+(a-b)^2.$$
Wynika stąd, że $n=ab-1$. Skoro
$$n^2+(a+b)^2=(n+1)^2+k_2^2,$$
to $k_2^2=a^2+b^2+1$. Wybierzmy teraz b w taki sposób, aby wyrażenie a^2+b^2+1 było kwadratem liczby naturalnej. W tym celu weźmy $b^2=2a$. Niech $b=2t$, $a=2t^2$; stąd wynika, że
$$n=4t^3-1,\quad k_1=2t(t+1),\quad k_2=2t^2+1,\quad k_3=2t(t-1),$$
gdzie $t>1$. Wówczas
$$N=16t^6+4t^4+4t^2+1.$$
Dla $t=2$ otrzymujemy daną w treści zadania parę 1105 i 31; dla $t=3$ dostajemy $N=12025$, $n=107$, itd.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste α takie, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+\alpha}].$$

Rozwiązanie

Niech t będzie liczbą naturalną taką, że

$$t^2 \leqslant n \leqslant (t+1)^2.$$

Rozważmy dwa przypadki:

$$t^2 \leqslant n \leqslant t^2+t-1 \quad \text{i} \quad t^2+t \leqslant n \leqslant t^2+2t.$$

Załóżmy, że dla danej liczby naturalnej n spełniony jest pierwszy z powyższych warunków i podstawmy $n=t^2+u$, gdzie $0 \leqslant u \leqslant t-1$. Wówczas $t \leqslant \sqrt{n} < t+\frac{1}{2}$ oraz $t < \sqrt{n+1} < t+\frac{1}{2}$ i wobec tego

$$2t < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < 2t+1.$$

Oznacza to, że $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=2t$, a więc liczba α musi spełniać warunek $2t \leqslant \sqrt{4n+\alpha} < 2t+1$. Stąd

$$-4u \leqslant \alpha < 4t-4u+1.$$

Aby dla dowolnego u przyjmującego wartości od 0 do $t-1$ liczba α spełniała ostatni warunek, muszą być spełnione nierówności

$$(*) \qquad 0 \leqslant \alpha < 5.$$

W przypadku, gdy n spełnia warunek 2, podstawmy $n=t^2+t+u$, gdzie $0 \leqslant u \leqslant t$. Wówczas

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{t^2+t}+\sqrt{t^2+t+1} \geqslant 2t+1$$

oraz

$$\sqrt{n} < t+1 \quad \text{i} \quad \sqrt{n+1} \leqslant t+1.$$

Mamy zatem

$$2t+1 \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < 2t+2.$$

Dlatego żądamy, aby $1-4u \leqslant \alpha < 4t-4u+4$ dla dowolnych wartości u od 0 do t. W konsekwencji,

$$(**) \qquad 1 \leqslant \alpha < 4.$$

Jeśli więc dla wszystkich liczb naturalnych ma być spełniony żądany warunek, to muszą być spełnione warunki $(*)$ i $(**)$, skąd ostatecznie $1 \leqslant \alpha < 4$.

5. Niech k będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że liczba $p=4k+3$ jest pierwsza. Dowieść, że spośród wierzchołków p-kąta foremnego można wybrać $2k+1$ wierzchołków w taki sposób, że wśród wzajemnych odległości wybranych wierzchołków żadna nie powtarza się więcej niż k razy.

Rozwiązanie

Ponumerujmy wierzchołki p-kąta liczbami od 0 do $p-1$ i wybierzmy te wierzchołki, które zostały ponumerowane nieresztami kwadrartowymi modulo p. Oznaczmy te niereszty przez n_1, n_2, n_3, ..., n_{2k+1}. Niech dla $r=1,2,3,\ldots,p-1$ zapis $N(r)$ oznacza liczbę takich par (i,j), że $1\leqslant i\leqslant 2k+1$, $1\leqslant j\leqslant 2k+1$, $i\neq j$ oraz $n_i-n_j\equiv r(\operatorname{mod} p)$.

Ponieważ zbiór $\{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_{2k+1}\}$ jest niezmienniczy na mnożenie modulo p przez reszty kwadratowe, $N(r)$ ma taką samą wartość dla wszystkich reszt kwadratowych r oraz taką samą wartość dla wszystkich niereszt kwadratowych r. Ponadto $N(r)=N(p-r)$, a ponieważ -1 jest nieresztą kwadratową modulo p, liczba $N(r)$ jest taka sama dla każdego r, skąd $N(r)=k$.

6. Zbiór liczb naturalnych podzielono na 6 parami rozłącznych podzbiorów. Dowieść, że istnieją takie liczby naturalne $1\leqslant a<b<c\leqslant 2005$, że liczby a^2+b^2, a^2+c^2, b^2+c^2 należą do tego samego podzbioru.

Rozwiązanie

Rozważmy graf o 2005 wierzchołkach ponumerowanych liczbami od 1 do 2005, w którym każde dwa wierzchołki są połaczone odcinkiem. Niech przy tym odcinek łączący wierzchołki o numerach a i b będzie pokolorowany jednym z 6 kolorów, w zależności od tego, do którego z 6 zbiorów należy liczba a^2+b^2.

Wówczas na mocy twierdzenia Ramsey'a (Zwardoń 1999, dodatek C) istnieją trzy wierzchołki połaczone trzema odcinkami tego samego koloru. Stąd bezpośrednio wynika teza zadania.

7. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Dowieść, że każdy dzielnik pierwszy liczby

$$\frac{4^p-2^p+1}{3}$$

jest postaci $6pk+1$.

Rozwiązanie

Niech q będzie dzielnikiem pierwszym liczby $\frac{4^p-2^p+1}{3}$. Wówczas q jest dzielnikiem liczby $(4^p-2^p+1)(2^p+1)=2^{3p}+1$.

Ponieważ $2^{6p}-1=\left(2^{3p}+1\right)\left(2^{3p}-1\right)$, a liczby $2^{3p}+1$ oraz $2^{3p}-1$ są względnie pierwsze, liczba q jest dzielnikiem liczby $2^{6p}-1$, ale nie jest dzielnikiem liczby $2^{3p}-1$, ani tym bardziej liczby 2^p-1.

Ponadto $4^p-2^p+1=(2^p-2)(2^p+1)+3$, skąd wynika, że największy wspólny dzielnik liczb 4^p-2^p+1 oraz 2^p+1 jest równy 1 lub 3. Jednak liczba 4^p-2^p+1 przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3, skąd wynika, że dana w treści zadania liczba nie jest podzielna przez 3, a w konsekwencji q nie jest dzielnikiem liczby 2^p+1, ani liczby $2^{2p}-1$.

Liczba q nie jest też dzielnikiem liczby $2^6-1=63$, gdyż wówczas musiałaby być równa 7, a więc byłaby dzielnikiem liczby $2^{3p}-1$.

Zatem $w=6p$ jest najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią taką, że q jest dzielnikiem liczby 2^w-1. Ponieważ zaś na podstawie małego twierdzinia Fermata q jest dzielnikiem liczby $2^{q-1}-1$, liczba $q-1$ jest wielokrotnością liczby $6p$, co kończy rozwiązanie.

8. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2005$ oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ spełniające równanie

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}^2 \left(x_i x_{i+1} + x_i x_{i+3} + x_{i+1} x_{i+4} + x_{i+3} x_{i+4}\right),$$

gdzie $x_{n+k} = x_k$ dla $k = 1, 2, 3, 4$.

Dowieść, że wśród liczb x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, x_{17}, x_{19}, x_{101}, x_{103}, x_{107}, x_{109} jest co najmniej sześć liczb równych.

Rozwiązanie

Dane w treści zadania równanie jest równoważne równaniu

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_{i+1} - x_{i+2}\right)^2 \left(x_i - x_{i+3}\right)^2,$$

co z kolei jest równoważne warunkowi, że dla każdego i zachodzi co najmniej jedna z równości $x_i = x_{i+3}$ lub $x_{i+1} = x_{i+2}$.

Rozwiązania równiania wyglądają więc następująco:

Jeżeli n jest podzielne przez 3, to x_1, x_2, x_3 mogą być dowolne i $x_{i+3} = x_i$ dla każdego i. Wówczas liczby x_2, x_5, x_{11}, x_{17}, x_{101}, x_{107} są równe.

Dla dowolnego n istnieją też rozwiązania wyglądające następująco: Większośc z liczb x_i ma tę samą wartość a, wyjątki mają indeksy różniące się o co najmniej 3 i mogą przyjmować dowolne wartości. Wówczas dla dowolnego i co najmniej jedna z liczb x_i oraz x_{i+1} jest równa a, a także co najmniej jedna z liczb x_i oraz x_{i+2} jest równa a. Zatem wśród danych 12 liczb co najmniej 6 jest równych a.

9. Okrąg ω wpisany w trójkąt nierównoramienny ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB. Styczna do okręgu ω, różna od prostej BC, przechodząca przez punkt K przecina prostą EF w punkcie X; styczna do okręgu ω, różna od prostej CA, przechodząca przez punkt L przecina prostą FD w punkcie Y; styczna do okręgu ω, różna od prostej AB, przechodząca przez punkt M przecina prostą DE w punkcie Z. Dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy trójkąt PQR, różny od trójkąta ABC, opisany na okręgu ω i taki, że $PQ \parallel AB$, $QR \parallel BC$, $RP \parallel CA$. Z zadania 33 wynika, że punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na prostych QR, RP, PQ. Zatem korzystając z twierdzenia Desargues'a wystarczy wykazać, że proste PD, QE i RF przecinają się w jednym punkcie.

Rozpatrując jednokładność o środku P widzimy, że prosta PD przecina prostą QR w punkcie styczności okręgu dopisanego do trójkąta PQR, stycznego do boku QR. Zatem korzystając z twierdzenia Cevy wnioskujemy, że proste PD, QE i RF przecinają się w jednym punkcie.

10. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku S i promieniu 1. Proste BC i AD przecinają się w punkcie P; proste AC i BD przecinają się w punkcie Q. Wiedząc, że $PS = p$, $QS = s$, wyznaczyć długość odcinka PQ.

Rozwiązanie

Niech $p(X,\omega)$ oznacza potęgę punktu X względem okręgu ω. Wykażemy, że prawdziwy jest wzór

$$p(P,\omega)+p(Q,\omega)=PQ^2\,,$$

z którego bezpośrednio obliczamy $PQ=\sqrt{p^2+s^2-2}$.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkty C i D leżą odpowiednio na odcinkach BP i AP. Załóżmy, że okrąg opisany na trójkącie ACP przecina prostą PQ w punktach P i R. Z równości $\sphericalangle QRC=\sphericalangle PAC=\sphericalangle DBC$ wynika, że punkty B, C, Q, R leżą na jednym okręgu. Stąd

$$p(P,\omega)+p(Q,\omega)=PB\cdot PC-QA\cdot QC=PQ\cdot PR-PQ\cdot QR=PQ^2\,.$$

11. Dany jest okrąg ω oraz punkty A i B leżące na nim. Punkt X, różny od A i B, należy do okręgu ω. Okrąg styczny wewnętrznie do okręgu ω jest styczny do odcinków AX i BX odpowiednio w punktach Y i Z. Wyznaczyć zbiór środków odcinka YZ przy ustalonym okręgu ω, ustalonych punktach A, B oraz zmieniającym położenie punkcie X.

Rozwiązanie

Z zadania 13 z Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w 1999 r. wynika, że środek odcinka YZ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABX.

Niech M będzie środkiem tego łuku AB okręgu ω, który nie zawiera punktu X. Wówczas środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na okręgu o środku M i promieniu AM (łatwe ćwiczenie).

Również odwrotnie: punkt I znajdujący się wewnątrz okręgu ω, leżący na okręgu o środku M i promieniu AM jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABX, gdzie $X\neq M$ jest punktem przecięcia prostej MI z okręgiem ω.

Resumując: jeśli przez M i N oznaczymy środki dwóch łuków AB okręgu ω, to szukany zbiór składa się z dwóch łuków okręgów $o(M,AM)$ oraz $o(N,AN)$ zawartych wewnątrz okręgu ω.

Czesko – Polsko – Słowackie Zawody Matematyczne:

1. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1+x_2^2+x_3^3+\ldots+x_n^n=n \\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n=\dfrac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

w liczbach nieujemnych $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że $x_1,x_2,\ldots,x_n$ spełniają warunki zadania. Wówczas

$$0=x_1+x_2^2+x_3^3+\ldots+x_n^n-n-(x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n-\tfrac{1}{2}n(n+1))=$$
$$=(x_2^2-2x_2+2-1)+(x_3^3-3x_3+3-1)+\ldots+(x_n^n-nx_n+n-1).$$

Ale wyrażenia w nawiasach są nieujemne; istotnie, dla $k\geqslant 2$ i $x\geqslant 0$, na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną,

$$x^k+k-1=x^k+1+1+\ldots+1\geqslant k\cdot\sqrt[k]{x^k}=kx$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1$. Zatem $x_2=x_3=\ldots=x_n=1$ i na mocy pierwszej równości, $x_1=1$.

2. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O i opisany na okręgu o środku I. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkty O, I, P leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że proste AI, BI, CI, DI przecinają okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ odpowiednio w punktach E, F, G, H. Ponieważ proste AI, BI, CI, DI są dwusiecznymi odpowiednich kątów czworokąta $ABCD$, więc proste EG i FH średnicami okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Zatem proste EG i FH przecinają się w punkcie O.

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych EB i CH.

Korzystając z twierdzenia Pascala dla sześciokąta $ACHDBE$ widzimy, że punkty P, X, I leżą na jednej prostej. Stosując ponownie twierdzenie Pascala dla sześciokąta $GCHFBE$ wnioskujemy, że punkty O, X, I są współliniowe. Zatem punkty O, I oraz P są współliniowe.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n\geqslant 3$, dla których wielomian

$$W(x)=x^n-3x^{n-1}+2x^{n-2}+6$$

daje się przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów, każdy dodatniego stopnia i o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Dla $n=3$,

$$x^3-3x^2+2x+6=(x+1)(x^2-4x+6).$$

Przypuśćmy, że dla $n=4$ mamy

$$x^4-3x^3+2x^2+6=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d).$$

Wówczas, porównując współczynniki, otrzymujemy

$$a+c=-3,\quad ac+b+d=2,\quad bd=6.$$

Pierwsza równość impilkuje, iż a i c są różnej parzystości, a zatem na mocy drugiej równości, b i d są tej samej parzystości. To zaś daje sprzeczność w połączeniu z trzecią równością.

Dalej założymy, że $n \geqslant 5$. Przypuśćmy, że zachodzi równość

$$W(x)=P(x)Q(x), \tag{1}$$

gdzie

$$P(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$
$$Q(x)=b_{n-k}x^{n-k}+b_{n-k-1}x^{k-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

i $a_k=b_{n-k}=\pm1$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $k\leqslant[n/2]<n-2$ (gdyż $n\geqslant5$). Porównując współczynniki obu stron równości (1) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} a_0b_0=6 \\ a_0b_1+a_1b_0=0 \\ \vdots \\ a_0b_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_{k-1}b_1+a_kb_1=0 \end{cases}$$

Udowodnimy indukcyjnie, że a_0 dzieli a_1, a_2, ..., a_k. Wiedząc to dla $k\leqslant l$, mamy

$$0=a_0(a_0b_{l+1}+a_1b_l+\ldots+a_lb_1+a_{l+1}b_0)=$$
$$=a_0^2b_{l+1}+a_0a_1b_l+\ldots+a_0a_lb_1+6a_{l+1},$$

a zatem

$$6a_{l+1}=-(a_0^2b_{l+1}+a_0a_1b_l+\ldots+a_0a_lb_1).$$

Wszystkie składniki po prawej stronie są podzielne przez a_0^2, a więc lewa strona też ma tę własność. Zatem $a_0\,|\,a_{l+1}$. Ale $a_k=\pm1$; zatem $a_0=\pm1$ i bez straty ogólności możemy założyć, że $a_0=1$; wówczas $b_0=6$.

Jeśli teraz powtórzymy to rozumowanie dla wielomianu Q, to dostajemy, iż $b_0=6$ dzieli b_1, b_2, ..., b_{n-3} (kładziemy $b_l=0$, jeśli $l>n-k$). Wówczas otrzymujemy sprzeczność ($b_{n-k}=\pm1$), chyba że $n-k>n-3$. Rozważymy dwa przypadki.

Przypadek $k=2$.

Wówczas

$$a_0b_{n-k}+a_1b_{n-k-1}+\ldots+a_{n-k-1}b_1+a_{n-k}b_0=2,$$

sprzeczność, gdyż wszystkie składniki, oprócz pierwszego, po lewej stronie, są podzielne przez 6, a zatem są parzyste, podczas gdy pierwszy składnik jest równy ±1.

Przypadek $k=1$.

Wówczas problem sprowadza się do wyznaczenia całkowitego pierwiastka wielomianu W; łatwo sprawdzić, że dla n parzystych nie ma takich pierwiastków; jeśli zaś n jest nieparzyste, $W(-1)=0$.

Wobec tego wielomian W dopuszcza przedstawienie w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia dodatniego tylko dla $n\geqslant3$ nieparzystych.

4. Rozdajemy $n \geqslant 1$ ponumerowanych kulek dziewięciu osobom: A, B, C, D, E, F, G, H, I. Rozstrzygnąć, na ile sposobów można rozdać te kulki tak, aby osoba A otrzymała tyle samo kulek, co w sumie osoby B, C, D, E.

Rozwiązanie

Rozważmy wielomian

$$(x+2)^{2n} = (x^2+4x+4)^n =$$
$$= (x^2+x+x+x+x+1+1+1+1)\cdot(x^2+x+x+x+x+1+1+1+1)\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot(x^2+x+x+x+x+1+1+1+1).$$

Po otworzeniu nawiasów, otrzymujemy 9^n składników. Udowodnimy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy liczbą składników równych x^n i liczbą „rozdań" o jakich mowa w zadaniu.

Przypuśćmy, iż rozdano kulki zgodnie z warunkami zadania. Jeśli k-ta kula trafiła do osoby A, bierzemy x^2 z k-tego nawiasu. Jeśli trafiła do B, C, D, E, to bierzemy pierwszą, drugą, trzecią lub czwartą 1, odpowiednio, z k-tego nawiasu. Wreszcie, jeśli trafiła do F, G, H, I, to bierzemy pierwszego, drugiego, trzeciego lub czwartego x z k-tego nawiasu. Jeśli teraz wymnożymy wszystkie wybrane czynniki widzimy, iż wynik jest równy x^n wtedy i tylko wtedy, gdy A otrzymał tę samą liczbę kul, co łącznie B, C, D, E.

Zatem liczba sposobów, na które można rozdać kulki zgodnie z warunkami zadania, jest równa współczynnikowi przy x^n w wielomianie $(x+2)^{2n}$, czyli

$$\binom{2n}{n}\cdot 2^n.$$

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Wyznaczyć zbiór tych punktów P leżących wewnątrz czworokąta $ABCD$, dla których

$$[PAB]\cdot[PCD] = [PBC]\cdot[PDA],$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

Rozwiązanie

Jeśli P leży na jednej z przekątnych AC lub BD, powiedzmy na AC, to

$$\frac{[PAB]}{[PBC]} = \frac{AP}{PC} = \frac{[PDA]}{[PCD]}.$$

Równość ta jest równoważna danej w treści zadania równości.

Oznaczmy przez O punkt przecięcia przekątnych AC i BD oraz załóżmy, że punkt P leży wewnątrz trójkąta ABO. Niech ponadto proste BP i AC przecinają się w punkcie Q, a proste DP i AC w punkcie R. Wtedy

$$\frac{[PAB]}{[PBC]} = \frac{AQ}{QC} \quad \text{oraz} \quad \frac{[PDA]}{[PCD]} = \frac{AR}{RC}.$$

Zatem podana w treści zadania równość nie jest spełniona

Stąd szukanym zbiorem punktów P są przekątne AC i BD.

6. Wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie

$$y(x+y)=x^3-7x^2+11x-3\,.$$

Rozwiązanie

Rozważana równość jest równoważna

$$(2y+x)^2=4x^3-27x^2+44x-12=(x-2)(4x^2-19x+6)=$$
$$=(x-2)((x-2)(4x-11)-16).$$

Powyższe wyrażenie musi być kwadratem liczby całkowitej. Zatem $(x-2)=ks^2$, gdzie $k\in\{-2,-1,1,2\}$ i $s\in\mathbb{N}$; istotnie, jeśli dla pewnej liczby pierwszej p i liczby całkowitej nieujemnej m, p^{2m+1} dzieli $x-2$ i p^{2m+2} nie dzieli $x-2$, to mamy $p\,|\,(x-2)(4x-11)-16$, więc $p\,|\,16$ i $p=2$.

Rozważymy oddzielnie trzy przypadki.

Przypadek $k=\pm2$. Wówczas mamy $4x^2-19x+6=\pm2u^2$ dla pewnej liczby całkowitej u, czyli równoważnie,

$$(8x-19)^2-265=\pm32u^2,$$

sprzeczność modulo 5.

Przypadek $k=1$. Wówczas $4x^2-19x+6=u^2$ dla pewnej liczby całkowitej u, co prowadzi do

$$265=(8x-19)^2-16u^2=(8x-19-4u)(8x-19+4u).$$

Łatwo sprawdzić, że $x=6$ jest jedynym rozwiązaniem (rozważamy wszsystkie rozkłady: $265=1\cdot265=5\cdot53=\ldots$, itd, i bierzemy pod uwagę fakt, iż $x-2=s^2$). Stąd otrzymaliśmy dwa rozwiązania wyjściowego równania: $(x,y)\in\{(6,3),(6,-9)\}$.

Przypadek $k=-1$. Jak przedtem, mamy $4x^2-19x+6=-u^2$, co równoważnie można zapisać w postaci

$$265=(8x-19)^2+(4u)^2$$

i sprawdzamy wszystkie możliwości: dla $u=0$, 1, 2 nie ma rozwiązań; jeśli $u=3$, dostajemy $(8x-19)^2=121=11^2$, co prowadzi do $x=1$ i daje dwa rozwiązania: $(x,y)\in\{(1,1),(1,-2)\}$. Wreszcie, dla $u=4$ otrzymujemy $(8x-19)^2=9=3^2$ i $x=2$, skąd dochodzi rozwiązanie $(x,y)=(2,-1)$.

Zatem zbiór rozwiązań danego w zadaniu równania jest następujący:

$$\{(6,3),(6,-9),(1,1),(1,-2),(2,-1)\}.$$

Czesko – Polsko – Słowacki Mecz Matematyczny:

1. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że wszystkie dzielniki pierwsze liczby n^2+1 są mniejsze od n.

Rozwiązanie

Sposób I. Niech $n=F_{2k}$ będzie wyrazem ciągu Fibonacciego. Wtedy

$$n^2+1=F_{2k}^2+1=F_{2k-1}F_{2k+1}$$

i wystarczy, aby liczba F_{2k+1} była złożona, np. F_{6i+3} jest podzielne przez 2.

Sposób II. Niech $n=2k^2$. Wtedy

$$n^2+1=4k^4+1=(2k^2-2k+1)(2k^2+2k+1)$$

i wystarczy, aby liczba $2k^2+2k+1$ była złożona, np. dla $k=5i+1$ jest ona podzielna przez 5.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, $z_1, z_2, \ldots, z_{2005}$ spełniające równość

$$x^k+y^k=z_1^k+z_2^k+\ldots+z_{2005}^k \quad \text{dla } k=1,2,3.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że podany układ równań nie ma rozwiązań rzeczywistych dodatnich. Podnosząc do kwadratu równanie dla $k=1$ oraz odejmując od niego równanie dla $k=2$, po podzieleniu przez 2 otrzymujemy

(1) $$xy=\sum_{i<j} z_i z_j\,.$$

Mnożąc dane w treści zadania równanie dla $k=1$ przez równanie (1) otrzymujemy

$$x^2y+xy^2=\sum_{i\neq j} z_i^2 z_j\,.$$

Z kolei podnosząc dane w treści zadania równanie dla $k=1$ do sześcianu, otrzymujemy

$$x^3+y^3+3\left(x^2y+xy^2\right)=\sum_{i=1}^{2005} z_i^3+3\sum_{i\neq j} z_i^2 z_j+6\sum_{i<j<k} z_i z_j z_k\,,$$

skąd

$$\sum_{i<j<k} z_i z_j z_k=0$$

wbrew założeniu, że liczby z_i są dodatnie.

3. Liczby p oraz $q=p+2$ są liczbami pierwszymi. Dowieść, że największy wspólny dzielnik liczb p^q-p oraz q^p-q jest większy od $2p^3$.

Rozwiązanie

Wykażemy, że podane liczby są podzielne przez $pq(p+q)$.

Podzielność przez p i q wynika z małego twierdzenia Fermata. Wykażemy podzielność przez $p+q$. Niech $n=(p+q)/4$. Wówczas

$$p^q+p=(2n-1)^{2n+1}-2n+1\equiv 2n\binom{2n+1}{1}-1\binom{2n+1}{0}-2n+1=$$

$$=4n^2+2n-1-2n+1\equiv 0 \pmod{4n}$$

oraz

$$q^p + q = (2n+1)^{2n-1} - 2n - 1 \equiv 2n\binom{2n-1}{1} + 1\binom{2n-1}{0} - 2n - 1 =$$
$$= 4n^2 - 2n + 1 - 2n - 1 \equiv 0 \pmod{4n}.$$

4. Dowieść, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba $n^{n^{n^{n^n}}} - n^{n^{n^n}}$ jest podzielna przez 547.

Rozwiązanie

Liczba $n^n - n$ jest podzielna przez 2. Zatem na mocy małego twierdzenia Fermata liczba $n^{n^n} - n^n$ jest podzielna przez 3, a na mocy twierdzenia Eulera jest ona podzielna przez 4.

Stąd na mocy małego twierdzenia Fermata liczba $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ jest podzielna przez 2, 3, 7 i 13. Ponieważ liczba 547 jest pierwsza oraz $547-1=546=2\cdot3\cdot7\cdot13$, więc na mocy małego twierdzenia Fermata liczba $n^{n^{n^{n^n}}} - n^{n^{n^n}}$ jest podzielna przez 547.

5. Punkty P, Q, R, S, T, U są odpowiednio środkami przekątnych AC, BD, CE, DF, EA, FB sześciokąta wypukłego $ABCDEF$. Wykazać, że pole sześciokąta $ABCDEF$ jest cztery razy większe od pola sześciokąta $PQRSTU$.

Rozwiązanie

Wykażemy, że pole czworokąta $ABCD$ jest cztery razy większe od pola czworokąta $RSTU$. Istotnie: jeśli przez α oznaczymy kąt między przekątnymi AC i BD, to kąt między prostymi RT i SU też jest równy α oraz

$$[ABCD] = \tfrac{1}{2}\, AC\cdot BD\cdot \sin\alpha = \tfrac{1}{8}\, RT\cdot SU\cdot \sin\alpha = \tfrac{1}{4}[RSTU].$$

6. Dany jest sześciokąt wypukły. Każdy z trzech odcinków łączących środki przeciwległych boków tego sześciokąta dzieli go na dwa pięciokąty o równych polach. Dowieść, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Niech $ABCDEF$ będzie danym sześciokątem. Oznaczmy przez K, L, M, N, O, P odpowiednio środki boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Przyjmijmy ponadto, że proste KN i LO przecinają się w punkcie Q. Wówczas $[KBLQ] = [NEOQ]$, gdzie przez $[\mathcal{F}]$ oznaczono pole figury $\mathcal{F}$. Stąd $[ABCQ] = [DEFQ]$. Zatem łamana PQM dzieli sześciokąt $ABCDEF$ na dwie figury o równych polach. Stąd wynika, że Q należy do odcinka PM.

7. Dany jest okrąg ω o środku O i promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie kwadraty $ABCD$, których wierzchołki A i B leżą na ω. Wyznaczyć największą wartość długości odcinka OC.

Rozwiązanie

Bez straty ogólności możemy założyć, że punkt B jest ustalonym punktem danego okręgu. Wówczas wierzchołek C powstaje z A poprzez obrót wokół punktu B o 90°. Obracając okrąg ω wokół punktu B uzyskamy okrąg ω'. Zadanie sprowadza się tym samym do wyznaczenia odległości od punktu O do najdalszego punktu okręgu ω'. Odległość ta wynosi $1+\sqrt{2}$.

8. Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}}+\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}}\leqslant 4\,.$$

Rozwiązanie

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną szacujemy pierwszy składnik danej sumy:

$$3\sqrt[9]{1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}\cdot\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}}\leqslant\frac{1}{3}\left(6+\frac{2a}{a+b}+\frac{3(a+b)}{a+b+c}\right).$$

Drugi składnik można oszacować podobnie:

$$\sqrt[3]{1\cdot\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{3c}{a+b+c}}\leqslant\frac{1}{3}\left(1+\frac{2b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c}\right).$$

Dodając te nierówności stronami uzyskujemy tezę.

9. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n\geqslant 2$ o następującej własności:

Dla dowolnych liczb całkowitych $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1}$ niepodzielnych przez n istnieją takie liczby $1\leqslant i_1<i_2<i_3<\ldots<i_k\leqslant n-1$, że liczba

$$a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+\ldots+a_{i_k}-1$$

jest podzielna przez n.

Rozwiązanie

Jeżeli n jest liczbą złożoną, to teza zadania nie jest spełniona, wystarczy bowiem przyjąć

$$a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=d\,,$$

gdzie d jest dzielnikiem liczby n różnym od 1 i od n.

Wykażemy, że liczby pierwsze n spełniają warunki zadania.

Niech Z_k będzie zbiorem reszt z dzielenia przez n wszystkich liczb postaci

$$c_1a_1+c_2a_2+\ldots+c_ka_k,\quad \text{gdzie}\quad c_i\in\{0,1\}\,.$$

Wówczas zbiór Z_1 ma 2 elementy oraz dla każdego $k>1$ zbiór Z_k jest większy od Z_{k-1} lub jest równy zbiorowi $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

Wynika to z faktu, że zbiór $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ jest jedynym niepustym zbiorem niezmienniczym na dodawanie modulo n pewnej liczby niepodzielnej przez n, a zatem pewien element zbioru Z_{k-1} po dodaniu a_k (mod n) nie należy do Z_{k-1}, chyba że $Z_{k-1}=$ $=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

Zatem Z_{n-1} ma n elementów i $1\in Z_{n-1}$, co kończy rozwiązanie.

10. Komisja matematyków ma zdecydować, czy dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata jest poprawny. Po zapoznaniu się z dowodem komisja przeprowadza głosowanie, przy czym każdy z członków komisji podejmuje decyzję zgodną ze stanem faktycznym z takim samym prawdopodobieństwem $p \in (\frac{1}{2}, 1)$, a decyzje poszczególnych członków komisji są zdarzeniami niezależnymi. Ostateczną decyzję komisja podejmuje większością głosów, a w przypadku parzystej liczby członków i remisu w głosowaniu, o opinii komisji w sprawie poprawności dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata decyduje rzut monetą.

Rozstrzygnąć, w zależności od p, jaka komisja ustali stan faktyczny z większym prawdopodobieństwem: 2005-osobowa czy 2006-osobowa.

Rozwiązanie

Z takim samym.

Dla komisji 2005-osobowej prawdopodobieństwo wynosi

$$\sum_{i=0}^{1002} p^{2005-i}(1-p)^i \binom{2005}{i},$$

a dla komisji 2006-osobowej prawdopodobieństwo wynosi

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=0}^{1002} p^{2006-i}(1-p)^i \binom{2006}{i}\right) + p^{1003}(1-p)^{1003}\binom{2006}{1003}/2 = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{1002} p^{2006-i}(1-p)^i \left(\binom{2005}{i-1} + \binom{2005}{i}\right)\right) + p^{1003}(1-p)^{1003}\binom{2005}{1002} = \\
&= \sum_{i=0}^{1002} p^{2005-i}(1-p)^i (p+1-p)\binom{2005}{i} = \sum_{i=0}^{1002} p^{2005-i}(1-p)^i \binom{2005}{i}.
\end{aligned}$$

11. Dowieść, że dla wszystkich dodatnich liczb a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\frac{a}{e+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+e} + \frac{e}{d+e+a} < 2.$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a+b+c$ jest najmniejszym spośród pięciu mianowników $e+a+b$, $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+e$, $d+e+a$.

Wówczas

$$\frac{a}{e+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} \leqslant \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1. \tag{1}$$

Ponadto

$$\frac{d}{c+d+e} + \frac{e}{d+e+a} < \frac{d}{d+e} + \frac{e}{d+e} = 1. \tag{2}$$

Dodając nierówności (1) i (2) stronami uzyskujemy tezę.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny był już wyznaczony do referowania nie mniej razy niż on. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **6 i 7**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, może poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna zgłasza zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania. Gdy drużyna wywołująca wyrazi na to chęć, staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie na zasadach określonych w punktach **6–11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów.

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej 7, 8, 9, 10 lub −10 (minus 10) punktów, w zależności od tego, czy zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Wszelkie spory wynikające z niniejszego regulaminu rozstrzyga przewodniczący Jury.

Spis treści