Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 4 czerwca – 18 czerwca 2006

(wydanie pierwsze)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 04 –18 czerwca 2006

Dom wczasowy „Zgoda", Zwardoń 45A
34-373 ZWARDOŃ
tel. 0-33-8646-328

Kadra:

Jerzy Bednarczuk
Kamil Duszenko
Andrzej Grzesik – kierownik naukowy
Michał Kieza
Adam Osękowski
Waldemar Pompe
Jarosław Wróblewski

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 04 – 18 czerwca 2006 r. w Zwardoniu, w pensjonacie „Zgoda”. Kadrę obozu stanowili: Jerzy Bednarczuk, Kamil Duszenko, Andrzej Grzesik – kierownik naukowy, Michał Kieza, Adam Osękowski, Waldemar Pompe, i Jarosław Wróblewski.

W dniach 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15 i 16 czerwca uczestnicy obozu rozwiązywali zadania indywidualnie, dnia 13 czerwca odbyły się zawody drużynowe, a 10 i 17 czerwca rozegrane zostały „mecze matematyczne” (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to: 171 punktów, 146 punktów i 131 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie.

Dla uczestników obozu zorganizowane zostały dwie wycieczki: 11 czerwca piesza wycieczka na Wielką Raczę, a 13 czerwca wycieczka pociągiem do Žiliny na Słowacji.

Po obozie, w Žilinie na Słowacji, odbyły się VI Czesko–Polsko–Słowackie Zawody Matematyczne.

W Zawodach Czesko–Polsko–Słowackich uczestniczyli uczniowie, którzy weszli w skład delegacji tych krajów na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną.

Zaswody odbyły się w dniach 26 i 27 czerwca. W ciągu dwóch dni każdy z zawodników rozwiązywał po 3 zadania, mając na to po 4,5 godziny.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu, szkice ich rozwiązań, oraz zadania z VI Czesko–Polsko–Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami.

Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych Olimpiady Matematycznej znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

Zad.	l. prac na 6 p.	l. prac na 5 p.	l. prac na 2 p.	l. prac na 0 p.
1.	18	1	0	1
2.	13	1	0	6
3.	5	0	0	15
4.	3	1	0	16
5.	9	5	0	6
6.	5	0	1	14
7.	1	3	1	15
8.	16	0	3	1
9.	1	0	0	19
10.	9	3	0	8
11.	1	0	1	18
12.	0	1	1	18
13.	17	0	0	3
14.	0	0	0	20
15.	3	0	0	17
16.	7	8	1	4
17.	11	0	1	8
18.	6	0	1	13
19.	4	0	4	12
20.	6	0	0	14
21.	4	0	3	13
22.	5	0	0	15
23.	11	1	0	8
24.	16	0	0	4
25.	10	2	0	8
26.	2	1	0	17

Zad.	l. prac na 6 p.	l. prac na 5 p.	l. prac na 2 p.	l. prac na 0 p.
27.	5	3	1	11
28.	4	0	1	15
29.	9	7	1	3
30.	4	3	1	12
31.	1	2	1	16
32.	13	2	3	2
33.	6	0	0	14
34.	5	1	0	14
35.	3	1	3	13
36.	9	3	0	8
37.	4	0	2	14
38.	6	0	0	14
39.	3	0	3	14
40.	11	0	1	8
41.	0	0	0	20
42.	15	0	2	3
43.	13	0	0	7
44.	9	0	0	11
45.	19	1	0	0
46.	5	1	0	14
47.	20	0	0	0
48.	1	3	1	15
49.	9	0	1	10
50.	11	0	0	9
51.	1	0	0	19
52.	14	1	2	3

Uwaga: Każda praca była oceniana w skali 0, 2, 5, 6 punktów.

Treści zadań

Zawody indywidualne:

1. W obozie naukowym w Zwardoniu uczestniczy 37 osób. Z niedzielnej kolacji pozostał gar bigosu, który pani Ania schowała do spiżarni. Pan Adam chce zamontować w spiżarni zamki i rozdać każdemu uczestnikowi pewną liczbę kluczy tak, aby

- dowolnych 36 uczestników mogło otworzyć spiżarnię,
- żadnych 35 uczestników nie mogło otworzyć spiżarni.

Ile co najmniej zamków musi zamontować pan Adam?

2. Wyznaczyć największy możliwy iloczyn liczb całkowitych dodatnich o sumie równej 2000.

3. Rozstrzygnąć, czy kwadrat o boku 666 można podzielić na prostokąty o wymiarach 15×20 i 14×21.

4. Dany jest czworokąt wypukły $A_1B_1C_1D_1$. Punkty A_2, A_3, A_4, …, A_9 leżą w tej właśnie kolejności na boku A_1B_1 i dzielą go na 9 równych części, punkty C_2, C_3, C_4, …, C_9 leżą w tej właśnie kolejności na boku C_1D_1 i dzielą go na 9 równych części, punkty B_2, B_3, B_4, …, B_{37} leżą w tej właśnie kolejności na boku B_1C_1 i dzielą go na 37 równych części, a punkty D_2, D_3, D_4, …, D_{37} leżą w tej właśnie kolejności na boku D_1A_1 i dzielą go na 37 równych części. Niech $\mathcal{Q}$ będzie czworokątem wypukłym, ograniczonym przez proste A_5C_6, A_6C_5, $B_{19}D_{20}$, $B_{20}D_{19}$. Niech $\mathcal{R}$ będzie czworokątem, którego wierzchołkami są środki boków czworokąta $\mathcal{Q}$. Wykazać, że pole czworokąta $\mathcal{R}$ jest 666 razy mniejsze od pola czworokąta $A_1B_1C_1D_1$.

5. Liczby rzeczywiste $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, gdzie $n\geqslant 1$, spełniają warunki

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{x_k+1}\leqslant\frac{1}{2}\quad\text{oraz}\quad x_k>-1,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Udowodnić, że $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\leqslant n$.

6. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Okręgi o środkach P i Q są wpisane odpowiednio w trójkąty ACD i BCD. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie E. Udowodnić, że punkty D, E, P i Q leżą na jednym okręgu.

7. Dany jest czworościan $A_1A_2A_3A_4$. Część wspólna środkowej czworościanu poprowadzonej z wierzchołka A_i i kuli wpisanej w ten czworościan jest odcinkiem długości s_i dla $i=1,\ldots,4$. Wiadomo, że $s_1=s_2=s_3=s_4$. Czy stąd wynika, że czworościan $A_1A_2A_3A_4$ jest foremny?

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie x, y, z spełniające równanie
$$3^x = 4^y + 5^z.$$

9. W urnie znajduje się n kul ponumerowanych liczbami $1, 2, \ldots, n$. Losujemy liczbę k ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, a następnie losujemy bez zwracania k kul z urny. Niech P_n będzie prawdopodobieństwem, że wylosowano wszystkie 4 liczby $1, 2, 3, 4$, a nie wylosowano ani liczby 5, ani liczby 6. Rozstrzygnąć, która z liczb P_{41}, P_{61} jest większa.

10. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite nieujemne $n < 2501$, dla których liczba $n^{11} - 2$ jest podzielna przez 2501.

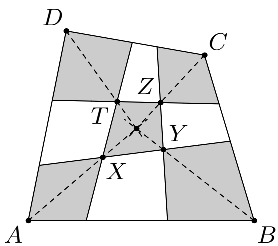
11. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AD i BC czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym
$$\frac{AK}{KD} = \frac{CL}{LB}.$$
Prosta KL przecina odcinki AC i BD odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że
$$\frac{KP}{QL} = \frac{[ACD]}{[BCD]},$$
gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

12. Wykazać, że w czworościanie równościennym ortocentra ścian oraz spodki wysokości tego czworościanu leżą na jednej sferze.

13. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$a\sqrt{b^2 - bc + c^2} \;+\; c\sqrt{a^2 - ab + b^2} \;\geqslant\; b\sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

14. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Wyznaczyć największą liczbę naturalną m o następującej własności: Istnieją takie podzbiory S_1, S_2, S_3, $\ldots$, S_m ustalonego n-elementowego zbioru S, że dla dowolnych wskaźników $i, j, k, l \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zbiór $S_i \cup S_j \cup S_k \cup S_l$ ma najwyżej $n - 2$ elementów.

15. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na dziewięć czworokątów wypukłych, jak pokazano na rysunku. Wykazać, że jeśli w zacieniowane czworokąty można wpisać okręgi, to proste AX, BY, CZ, DT przecinają się w jednym punkcie.



16. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite dodatnie n, że dla dowolnej liczby całkowitej a, jeśli $a^2 \equiv 1 \pmod{n}$, to $a \equiv \pm 1 \pmod{n}$.

17. Wielomian $W(x)$ stopnia 2005 o współczynnikach rzeczywistych spełnia warunek $W(k)=\frac{k^2}{k+1}$ dla $k=0,1,2,\ldots,2005$. Rozstrzygnąć, czy z tego wynika, że $W(2006)$ jest liczbą całkowitą.

18. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o_1. Styczna do tego okręgu w punkcie C przecina prostą AB w punkcie D. Okrąg o_2, styczny do prostej AB w punkcie D, przechodzi przez punkt C i przecina okrąg o_1 w różnych punktach C i E. Wykazać, że

$$\frac{EA}{EB}=\frac{AC^3}{BC^3}\,.$$

19. Rozstrzygnąć, czy układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=6 \\ ab+bc+cd+de+ef+fa=7 \\ ad+be+cf=2 \\ abc+bcd+cde+def+efa+fab=7 \\ ace+bdf=1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f.

20. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których licznik liczby

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^{155}}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest podzielny przez p^2.

8 zadań, które powinieneś już znać

21. Dowieść, że wśród dowolnych 18 osób istnieją cztery, z których każde dwie się znają lub cztery, z których żadne dwie się nie znają.

22. Dany jest 1000-wyrazowy ciąg różnych liczb rzeczywistych. Dowieść, że z tego ciągu można wybrać 28-wyrazowy podciąg rosnący lub 38-wyrazowy podciąg malejący.

23. W Multilotku losuje się 20 różnych liczb ze zbioru $\{1,2,\ldots,80\}$. Dowieść, że po każdym losowaniu, z wylosowanych liczb można wybrać dwa niepuste rozłączne podzbiory o takiej samej sumie kwadratów elementów.

24. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p licznik liczby

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{\binom{p-1}{k}^2}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest podzielny przez p.

25. Dana jest taka liczba całkowita dodatnia k, że liczby $p=6k+1$, $q=12k+1$ oraz $r=18k+1$ są pierwsze. Niech $n=pqr$. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a liczba a^n-a jest podzielna przez n.

26. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty BCD, CAE, ABF, przy czym

$$\sphericalangle CAE=\sphericalangle FAB, \quad \sphericalangle FBA=\sphericalangle DBC, \quad \sphericalangle DCB=\sphericalangle ECA.$$

Dowieść, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

27. Trójkąt ostrokątny, różnoboczny ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu r. Punkty X, Y leżą wewnątrz kąta AOB i na symetralnej odcinka AB, przy czym

$$\sphericalangle XCA=\sphericalangle YCB.$$

Wykazać, że $OX\cdot OY=r^2$.

28. Punkty D i E leżą na boku AB trójkąta ABC. Punkty X i Y leżą odpowiednio na półprostych CD i CE oraz na zewnątrz trójkąta ABC, przy czym

$$\sphericalangle XAC+\sphericalangle YBC=180^\circ.$$

Wykazać, że wszystkie proste XY, odpowiadające różnym położeniom punktów X i Y, mają punkt wspólny.

$W(x)=8$ **nietrudnych wielomianów**

29. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 2006 dla trzech różnych argumentów całkowitych. Udowodnić, że nie przyjmuje on wartości 2025 dla trzech różnych argumentów całkowitych.

30. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych spełniające równanie

$$W(a^2)-W(a)=W(b^2)-W(b)$$

dla wszystkich liczb a, b spełniających warunek $a+b=1$.

31. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ o następującej własności: jeżeli liczba a^2-b^2 jest wymierna, to liczba $W(a)-W(b)$ jest wymierna.

32. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki

$$x+y+z=3, \qquad xy+yz+zx=-9.$$

Udowodnić, że $-27\leqslant xyz\leqslant 5$.

33. Wykazać, że dla każdego $n\geqslant 2$ wielomian $W(x)=x^n+x^{n-1}+3$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

34. Niech $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P stopnia mniejszego niż n, o współczynnikach całkowitych, posiadające następującą własność: istnieje ciąg liczb całkowitych $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ taki, że $P(x_{k+1}) = P(x_k) + 7$ dla $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

35. Niech n będzie dodatnią liczbą parzystą, a p liczbą pierwszą większą niż n^n. Udowodnić, że wielomian

$$W(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n) + p$$

nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

36. Wyznaczyć wszystkie takie pary (n, r), że $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$ oraz wielomian

$$(x-2)^n - r$$

dzieli się przez $x^2 - 2x + 2$.

Co najwyżej 8 nierówności

37. Liczby dodatnie $a,\ b,\ c,\ d$ spełniają warunek

$$a^{2006} + b^{2006} + c^{2006} + d^{2006} = 2006.$$

Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia $a^{500} b^{501} c^{502} d^{503}$.

38. Liczby dodatnie $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, gdzie $n \geqslant 2$, spełniają warunek

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2^{n-1} a_1.$$

Udowodnić, że $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}} \geqslant n-1.$

39. Liczby rzeczywiste $a,\ b$ spełniają warunek $2b^2 = a(a+b) + 1$. Udowodnić, że

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^{10} + \frac{a^2 + b^8}{b^{10}} > \left(\frac{a}{b}\right)^{9} + \left(\frac{a}{b}\right)^{8}.$$

40. Liczby $a,\ b,\ c$ są długościami boków pewnego trójkąta. Udowodnić, że

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c}.$$

41. Liczby całkowite $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ spełniają warunki

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 60, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant 140, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant 360.$$

Udowodnić, że $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^4 \geqslant 980.$

42. Liczby nieujemne a, b, c spełniają warunek $a^2+b^2+c^2=1$. Udowodnić, że
$$ab^2+bc^2+ca^2 \leqslant \sqrt{a^4+b^4+c^4}.$$

43. Liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots, a_n$, spełniają warunki: $n \geqslant 2$ oraz $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Udowodnić, że
$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n} \geqslant 1.$$
Kiedy zachodzi równość?

44. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $a^2+b^2+c^2=3$. Udowodnić, że
$$(a+bc+c)^2+(b+ca+a)^2+(c+ab+b)^2 \leqslant 27.$$

8 zadań, które powinieneś poznać

45. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n>666$ oraz liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ większych od n zachodzi nierówność
$$\begin{gathered}\big(\log_{x_1}(x_1x_2)+\log_{x_2}(x_1x_2)\big)\cdot\big(\log_{x_2}(x_2x_3)+\log_{x_3}(x_2x_3)\big)\cdot\ldots\\ \ldots\cdot\big(\log_{x_{n-1}}(x_{n-1}x_n)+\log_{x_n}(x_{n-1}x_n)\big) <\\ <\log_5 n\cdot\big(\log_{x_1}(x_1x_2)\cdot\log_{x_2}(x_1x_2)\big)\cdot\big(\log_{x_2}(x_2x_3)\cdot\log_{x_3}(x_2x_3)\big)\cdot\ldots\\ \ldots\cdot\big(\log_{x_{n-1}}(x_{n-1}x_n)\cdot\log_{x_n}(x_{n-1}x_n)\big).\end{gathered}$$

46. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą, a $x_i = \left(\frac{10}{9}\right)^i$ dla $i=1,\ldots,n$. Dowieść, że
$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left|\sqrt[x_i]{x_i} - \sqrt[x_j]{x_j}\right| < \left(\frac{10}{n}\right)^{n^2}.$$

47. Dowieść, że
$$\begin{gathered}(\log 11)^{\log 11}\cdot(\log 12)^{\log 12}\cdot\ldots\cdot(\log 2006)^{\log 2006} <\\ < 6^{666}\cdot 11^{\log\log 11}\cdot 12^{\log\log 12}\cdot\ldots\cdot 2006^{\log\log 2006},\end{gathered}$$
gdzie log oznacza logarytm przy podstawie 10.

48. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 2006$ oraz liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność
$$\prod_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\ 1\leqslant b\leqslant n\\ 1\leqslant c\leqslant n\\ 1\leqslant d\leqslant n\\ 1\leqslant e\leqslant n\\ 1\leqslant f\leqslant n\\ 1\leqslant g\leqslant n\\ 1\leqslant h\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \left|\left(x_a^2x_b^4+x_a^2x_c^2x_d^2+x_a^2x_e^2x_f^2+x_a^2x_g^4\right)^{n/2}-\left(x_hx_i^2+x_hx_j^2\right)^n\right| \leqslant 2^{n^{10}}\cdot\left(16n\sum_{k=1}^{n}x_k^{12}\right)^{n^{11}/4}.$$

49. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$, o podstawach AB i CD, dla których

$$AC=1, \quad BD=\sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABD=30^\circ .$$

Wyznaczyć najmniejszą możliwą sumę długości podstaw tego trapezu.

50. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne CAE i BCD. Punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$\sin\left(\frac{AC\cdot\pi}{BC}\right).$$

51. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki czworościan $ABCD$, w którym krawędzie AB i CD są prostopadłe, $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB$ oraz

$$[ABC]-[ABD]>\frac{AB\cdot CD}{\pi},$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

52. Niech α będzie kątem dwuściennym w czworościanie foremnym, natomiast β kątem dwuściennym w ośmiościanie foremnym. Rozstrzygnąć, czy $\sin^2(\alpha+\beta)$ jest liczbą wymierną.

Zawody drużynowe:

53. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o środku J, dopisany do trójkąta ABC, jest styczny do odcinka AB w punkcie D. Prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do prostej CD przecina proste AJ i BJ odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że $DP=DQ$.

54. Niech a, b będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba b^n+n jest podzielna przez a^n+n. Udowodnić, że $a=b$.

55. Dowieść, że zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 10^{100}\}$ można podzielić na n takich podzbiorów, że żaden nie zawiera trójwyrazowego postępu arytmetycznego oraz n jest liczbą, która nie jest istotnie większa niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

56. Liczby rzeczywiste $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ spełniają warunki

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 60, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant 140, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant 360.$$

Udowodnić, że $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^4 \geqslant C$, gdzie C jest stałą, niezależną od n, która nie jest istotnie mniejsza niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

Pierwszy Mecz Matematyczny:

57. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$3(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}) \leqslant 4\,(a+b+c)\,.$$

58. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4} \leqslant 1.$$

Udowodnić, że $abcd \geqslant 3$.

59. Marek i Jurek grają w następującą grę. Na początku na tablicy napisana jest liczba całkowita dodatnia n. W jednym ruchu gracz odejmuje od napisanej w danym momencie na tablicy liczby jej dzielnik będący jedynką, liczbą pierwszą lub iloczynem dwóch (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych i wynikiem odejmowania zastępuje wcześniejszą liczbę. Pierwszy ruch wykonuje Marek, a następnie gracze wykonują ruchy na przemian. Wygrywa gracz, który na tablicy napisze liczbę zero. Rozstrzygnąć, dla których liczb n Marek może zapewnić sobie wygraną, niezależnie od ruchów Jurka.

60. Rozstrzygnąć, czy zbiór $\{1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, 10^{100}\}$ można podzielić na 10^{25} podzbiorów, z których żaden nie zawiera trójwyrazowego postępu arytmetycznego.

61. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, taką że liczba $\binom{3n}{n}+2$ jest podzielna przez 7 lub wykazać, że taka liczba n nie istnieje.

62. Dane są takie różne liczby pierwsze p, q, że dla pewnej liczby naturalnej n liczba n^2+q jest podzielna przez p. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, k, że $a^2+qb^2=pk$ oraz $k<q$.

63. Udowodnić, że każdy dzielnik pierwszy liczby $4^{3^{666}}+2^{3^{666}}+1$ jest postaci $2\cdot 3^{667}\cdot k+1$.

67. W trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Symetralna odcinka CD przecina prostą AB w punkcie E. Wykazać, że

$$\frac{EA}{EB} = \frac{AC^2}{BC^2}\,.$$

65. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boków BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt M jest środkiem boku AB. Odcinki DE i CM przecinają się w punkcie S. Wykazać, że proste AB oraz IS są prostopadłe.

66. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Niech D, E, F będą odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach BCO, CAO, ABO. Dowieść, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

64. Wykazać, że w 30-kącie foremnym $A_1A_2A_3\ldots A_{30}$ przekątne A_1A_{19}, A_3A_{24} oraz A_8A_{28} przecinają się w jednym punkcie.

Drugi Mecz Matematyczny:

68. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n największy wspólny dzielnik liczb $5^{2^n}+1$, $26^{2^n}+1$, $65^{2^n}+1$ jest postaci $2^{n+2}\cdot k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.

69. W przestrzeni dane są punkty A_1, A_2, …, A_{257}, z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Każde dwa z wybranych punktów połączono odcinkiem koloru kanarkowego, ziębowego, drozdowego, wróblowego lub gawronowego. Dowieść, że istnieją takie $i<j<k<\ell$, że łamana $A_iA_jA_kA_\ell$ jest pomalowana jednym kolorem.

70. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, …, x_n spełniają warunek

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 10n\,.$$

Dowieść, że

$$100\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + 9999\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 101n > 2000\sum_{i=1}^{n} x_i^3\,.$$

71. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Proste AP, BP, CP przecinają boki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Okręgi wpisane w czworokąty

$BFPD$ i $AFPE$ są styczne do odcinków PD i PE odpowiednio w punktach K i L. Udowodnić, że $DK=EL$.

72. Rozstrzygnąć, czy istnieje 2006 kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest postaci a^2+pb^2, gdzie $a,\ b$ są całkowite oraz $p\in\{2,3,5,7\}$.

73. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q, różnych od A i B. Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I\neq F$, to proste IC i IF są prostopadłe.

74. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, taką że liczba $\binom{3n}{n}\cdot\binom{2n}{n}+2$ jest podzielna przez 7 lub wykazać, że taka liczba n nie istnieje.

75. Rozstrzygnąć, czy sześcian o krawędzi 100 można podzielić na prostopadłościany o wymiarach $1\times1\times51$ i $1\times1\times53$.

76. Okrąg o środku O jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie S różnym od O. Prosta przechodząca przez punkt S i prostopadła do prostej OS przecina odcinki BC i DA odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że $ES=FS$.

77. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ i $\sphericalangle BPC=\sphericalangle APD$. Na bokach AB i CD tego czworokąta zbudowano, po jego zewnętrznej stronie trójkąty ABE i CDF, przy czym

$$\sphericalangle BAE=\sphericalangle DAP,\quad \sphericalangle ABE=\sphericalangle CBP,$$
$$\sphericalangle CDF=\sphericalangle ADP,\quad \sphericalangle DCF=\sphericalangle BCP.$$

Wykazać, że punkty E, F, P leżą na jednej prostej.

78. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje ciągłe $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, że dla każdego $x\in(0,\infty)$ spełnione są warunki:

- $f(x)=f(\frac{1}{x})$,
- $f(x^2)=(f(x))^2-2$,
- $f(x^3)=(f(x))^3-3f(x)$.

VI Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne:

1. Danych jest 5 różnych punktów A, B, C, D, E leżących w tej właśnie kolejności na okręgu o promieniu r, przy czym $AC=BD=CE=r$. Rozpatrujemy trójkąt o wierzchołkach będących ortocentrami trójkątów ACD, BCD, BCE. Wykazać, że ten trójkąt jest prostokątny.

2. Przy okrągłym stole siedzi n dzieci. Erika jest najstarszą spośród nich i ma n cukierków. żadne inne dziecko nie ma cukierków. Erika postanawia rozdzielić cukierki według następujących zasad. W każdym ruchu dzieci mające co najmniej dwa cukierki podnoszą rękę. Erika wybiera jedno z nich, po czym wybrane dziecko daje po jednym cukierku każdemu ze swoich sąsiadów. (Zatem w pierwszym ruchu tylko Erika podnosi rękę i daje po jednym cukierku swoim sąsiadom.)

Dla jakich wartości $n\geqslant 3$ można doprowadzić do sytuacji, w której każde dziecko ma dokładnie jeden cukierek?

3. Suma czterech liczb rzeczywistych jest równa 9, a suma ich kwadratów wynosi 21. Wykazać, że liczby te można oznaczyć przez a, b, c, d w taki sposób, aby spełniona była nierówność $ab-cd\geqslant 2$.

4. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $k\geqslant 1$ istnieje dodatnia liczba całkowita n o następującej własności: liczba 2^n posiada w rozwinięciu dziesiętnym blok złożony z dokładnie k kolejnych zer, tzn.

$$2^n=\ldots\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ zer}}b\ldots,$$

gdzie a, b są cyframi różnymi od zera.

5. Wyznaczyć liczbę takich ciągów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb całkowitych, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n spełnione są warunki

$$a_n\neq -1 \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+2}=\frac{a_n+2006}{a_{n+1}+1}.$$

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki pięciokąt wypukły $A_1A_2A_3A_4A_5$, że dla $i=1$, 2, 3, 4, 5 proste A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ nie są równoległe, przecinają się w punkcie B_i oraz punkty B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 leżą na jednej prostej. (Przyjmujemy, że $A_6=A_1$, $A_7=A_2$, $A_8=A_3$.)

Rozwiązania

Zawody indywidualne:

1. W obozie naukowym w Zwardoniu uczestniczy 37 osób. Z niedzielnej kolacji pozostał gar bigosu, który pani Ania schowała do spiżarni. Pan Adam chce zamontować w spiżarni zamki i rozdać każdemu uczestnikowi pewną liczbę kluczy tak, aby

- dowolnych 36 uczestników mogło otworzyć spiżarnię,
- żadnych 35 uczestników nie mogło otworzyć spiżarni.

Ile co najmniej zamków musi zamontować pan Adam?

Rozwiązanie

Skoro żadnych 35 uczestników nie jest w stanie otworzyć spiżarni, to dla dowolnych dwóch osób istnieje zamek, do którego klucze mają co najwyżej te 2 osoby. Ponieważ każde 36 osób może otworzyć spiżarnię, to nie ma zamka, do którego klucz posiada tylko jedna osoba. Zatem najmniejsza ilość zamków jest równa liczbie par osób wśród 37 uczestników obozu, czyli $\binom{37}{2}=666$.

2. Wyznaczyć największy możliwy iloczyn liczb całkowitych dodatnich o sumie równej 2000.

Rozwiązanie

Użycie w iloczynie liczby $n\geqslant 5$ jest nieopłacalne, gdyż zastąpienie jej przez liczby 2 i $n-2$ powoduje zwiększenie iloczynu. Możemy nie używać czynnika równego 4, gdyż można go zastąpić dwiema dwójkami. Użycie jedynki jest również bezcelowe. Jeśli mamy co najmniej 3 dwójki, to lepiej je zastąpić 2 trójkami. Zatem szukany iloczyn składa się z trójek i co najwyżej 2 dwójek. Liczba $2000=666\cdot 3+2$, więc do największego iloczynu musimy wziąć dokładnie jedną dwójkę. Ostatecznie szukany iloczyn wynosi $2\cdot 3^{666}$.

3. Rozstrzygnąć, czy kwadrat o boku 666 można podzielić na prostokąty o wymiarach 15×20 i 14×21.

Rozwiązanie

Pokolorujmy zadany kwadrat w biało-czarną prostokątną szachownicę o polach 2.5×3.5, poczynając od jednego z wierzchołków. Zauważmy, że każdy prostokąt o wymiarach 15×20 lub 14×21 o bokach równoległych do boków kwadratu pokrywa taką samą powierzchnię białą, jak i czarną. Natomiast kwadrat 666×666 nie jest pomalowany taką samą ilością obu kolorów. Dowodzi to, że szukany podział nie jest możliwy.

4. Dany jest czworokąt wypukły $A_1B_1C_1D_1$. Punkty A_2, A_3, A_4, …, A_9 leżą w tej właśnie kolejności na boku A_1B_1 i dzielą go na 9 równych części, punkty C_2,

C_3, C_4, ..., C_9 leżą w tej właśnie kolejności na boku C_1D_1 i dzielą go na 9 równych części, punkty B_2, B_3, B_4, ..., B_{37} leżą w tej właśnie kolejności na boku B_1C_1 i dzielą go na 37 równych części, a punkty D_2, D_3, D_4, ..., D_{37} leżą w tej właśnie kolejności na boku D_1A_1 i dzielą go na 37 równych części. Niech $\mathcal{Q}$ będzie czworokątem wypukłym, ograniczonym przez proste A_5C_6, A_6C_5, $B_{19}D_{20}$, $B_{20}D_{19}$. Niech $\mathcal{R}$ będzie czworokątem, którego wierzchołkami są środki boków czworokąta $\mathcal{Q}$. Wykazać, że pole czworokąta $\mathcal{R}$ jest 666 razy mniejsze od pola czworokąta $A_1B_1C_1D_1$.

Rozwiązanie

Lemat 1

Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta $ABCD$, przy czym

$$\frac{AK}{BK}=\frac{CM}{DM}=\alpha, \qquad \frac{BL}{CL}=\frac{DN}{AN}=\beta.$$

Proste KM i LN przecinają się w punkcie P. Wówczas

$$\frac{KP}{PM}=\beta, \qquad \frac{LP}{PN}=\alpha.$$

Dowód lematu

W wierzchołkach A, B, C, D umieszczamy odpowiednio masy $\alpha\beta$, β, 1, α. Teza natychmiast wynika z faktu, że punkt P jest środkiem ciężkości odcinków KM i LN.

Lemat 2

W czworokącie przeciwległe boki podzielone są na n równych części (n nieparzyste). Proste łączące odpowiednie punkty dzielą ten czworokąt. Wówczas pole środkowego czworokąta jest n razy mniejsze od pola wyjściowego czworokąta.

Dowód lematu

Podzielmy nasze czworokąty przekątnymi tak, aby żadne dwie przekątne nie miały wspólnego wierzchołka. Zauważmy, że pola trójkątów powstałych z tego podziału i mających podstawy na jednym z boków czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Analogicznie pola pozostałych trójkątów tworzą ciąg arytmetyczny. Zatem pola czworokątów danych w zadaniu tworzą ciąg arytmetyczny, stąd teza.

Oznaczmy pole czworokąta $\mathcal{R}$ przez R. Pole czworokąta Q jest równe $2R$. Wówczas z lematów 1 i 2 wynika, że pole czworokąta $A_5A_6C_5C_6$ jest równe $74R$, Stosując po raz drugi lematy 1 i 2 dostajemy, że pole czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ jest równe $9\cdot 74R=666R$.

5. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n, gdzie $n \geqslant 1$, spełniają warunki

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{x_k+1} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad x_k > -1, \ \ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Udowodnić, że $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant n.$

Rozwiązanie

Dla $a > -1$ mamy

$$\frac{a^2}{a+1} \geqslant \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}$$

(równość dla $a=1$). Stąd

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_k+1} \geqslant \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{4}n$$

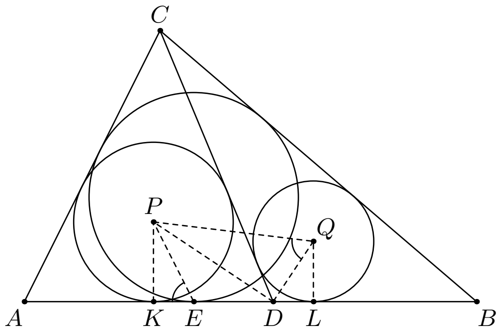
i teza.

6. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Okręgi o środkach P i Q są wpisane odpowiednio w trójkąty ACD i BCD. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie E. Udowodnić, że punkty D, E, P i Q leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez K i L odpowiednio punkty styczności okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD z prostą AB (rys. 1). Wówczas

$$\begin{aligned} KE = AE - AK &= \tfrac{1}{2}(AB+AC-BC) - \tfrac{1}{2}(AD+AC-CD) = \\ &= \tfrac{1}{2}(BD+CD-BC) = DL\,. \end{aligned}$$



rys. 1

Ponadto zauważmy, że $\sphericalangle PDQ = 90°$. Stąd $\sphericalangle KPD = 90° - \sphericalangle KDP = \sphericalangle LDQ$, co oznacza, że trójkąty prostokątne KPD i LDQ są podobne. Zatem

$$\frac{DQ}{PD} = \frac{DL}{PK} = \frac{KE}{PK}\,.$$

Z równości tej wynika, że trójkąty prostokątne KPE i DPQ są podobne. Stąd ostatecznie uzyskujemy $\sphericalangle PEK = \sphericalangle PQD$, a to oznacza, że na czworokącie o wierzchołkach P, Q, D, E można opisać okrąg.

7. Dany jest czworościan $A_1A_2A_3A_4$. Część wspólna środkowej czworościanu poprowadzonej z wierzchołka A_i i kuli wpisanej w ten czworościan jest odcinkiem długości s_i dla $i=1,\dots,4$. Wiadomo, że $s_1=s_2=s_3=s_4$. Czy stąd wynika, że czworościan $A_1A_2A_3A_4$ jest foremny?

Rozwiązanie

Odp: Nie. Niech $A_1B_1A_2B_2B_3A_3B_4A_4$ będzie prostopadłościanem nie będącym sześcianem. Wówczas środek ciężkości oraz środek kuli wpisanej czworościanu $A_1A_2A_3A_4$ pokrywają się ze środkiem prostopadłościanu. Zatem odcinki s_i są średnicami kuli wpisanej w ten czworościan, a więc są równe.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie x, y, z spełniające równanie

$$3^x = 4^y + 5^z.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że $4^y+5^z \equiv 1 \pmod 4$. Natomiast $3^x \equiv 1 \pmod 4$ tylko wtedy, gdy x jest liczbą parzystą. Mamy więc $(3^{\frac{x}{2}})^2-(2^y)^2=5^z$, czyli $(3^{\frac{x}{2}}-2^y)(3^{\frac{x}{2}}+2^y)=5^z$. Gdyby oba czynniki w tym iloczynie były podzielne przez 5, to ich suma równa $2\cdot 3^{\frac{x}{2}}$ też musiałaby być podzielna przez 5, co nie jest możliwe. Zatem $3^{\frac{x}{2}}-2^y=1$. Rozpatrując reszty modulo 4 otrzymujemy, że $y=1$ lub $\frac{x}{2}$ jest podzielne przez 2. Dla $y=1$ dostajemy rozwiązanie $(2,1,1)$. Natomiast w drugim przypadku dostajemy $(3^{\frac{x}{4}})^2-1=2^y$, czyli $(3^{\frac{x}{4}}-1)(3^{\frac{x}{4}}+1)=2^y$. Więc liczby $3^{\frac{x}{4}}-1$ i $3^{\frac{x}{4}}+1$ są potęgami dwójki, których różnica wynosi 2. Jedynymi takimi liczbami są 2 i 4. Otrzymujemy stąd $x=4$ i $y=3$. Dla takich liczb nie istnieje z spełniające wyjściowe równanie. Zatem jedynym rozwiązaniem jest trójka $(2,1,1)$.

9. W urnie znajduje się n kul ponumerowanych liczbami $1,2,\dots,n$. Losujemy liczbę k ze zbioru $\{0,1,2,\dots,n\}$, a następnie losujemy bez zwracania k kul z urny. Niech P_n będzie prawdopodobieństwem, że wylosowano wszystkie 4 liczby $1,2,3,4$, a nie wylosowano ani liczby 5, ani liczby 6. Rozstrzygnąć, która z liczb P_{41}, P_{61} jest większa.

Rozwiązanie

Dołóżmy do urny kulę z numerem 0. Wówczas opisany proces losowania jest równoważny losowaniu z urny kul do momentu wylosowania kuli z numerem 0. Zatem P_n nie zależy od liczby kul w urnie.

10. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite nieujemne $n < 2501$, dla których liczba $n^{11} - 2$ jest podzielna przez 2501.

Rozwiązanie

Ponieważ $2501 = 41 \cdot 61$, to dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $n^{121} - n$ jest podzielna przez 2501. Skoro $n \equiv \left(n^{11}\right)^{11} \pmod{2501}$, to w szczególności z warunku $n^{11} \equiv 2 \pmod{2501}$ wynika, że $n \equiv \left(n^{11}\right)^{11} \equiv 2^{11} = 2048 \pmod{2501}$. Zatem warunki zadania może spełniać jedynie liczba 2048 i tak jest w istocie, ponieważ

$$2048^{11} = \left(2^{11}\right)^{11} \equiv 2 \pmod{2501}.$$

11. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AD i BC czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym

$$\frac{AK}{KD} = \frac{CL}{LB}.$$

Prosta KL przecina odcinki AC i BD odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że

$$\frac{KP}{QL} = \frac{[ACD]}{[BCD]},$$

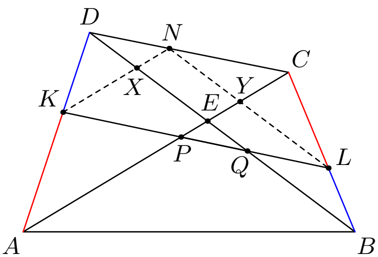
gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Rozwiązanie

Niech N będzie takim punktem leżącym na odcinku CD, że

$$\frac{CN}{ND} = \frac{CL}{LB}.$$

Wówczas z danej w treści zadania równości proporcji wynika, że $NL \parallel BD$ oraz $KN \parallel AC$ (rys. 2). Niech $X = BD \cap KN$ oraz $Y = AC \cap LN$.



rys. 2

Korzystając z twierdzenia Talesa uzyskujemy

$$\frac{KP}{KL} = \frac{NY}{NL} = \frac{DE}{BD} = \frac{[ECD]}{[BCD]} \quad \text{i analogicznie} \quad \frac{QL}{KL} = \frac{[ECD]}{[ACD]}.$$

Dzieląc stronami uzyskane zależności dostajemy tezę.

12. Wykazać, że w czworościanie równościennym ortocentra ścian oraz spodki wysokości tego czworościanu leżą na jednej sferze.

Rozwiązanie

Niech $ABCD$ będzie danym czworościanem równościennym oraz niech A', B', C', D' będą wierzchołkami prostopadłościanu $\mathcal{P}$ o przekątnych AA', BB', CC', DD', dopisanego do danego czworościanu. Oznaczmy ponadto przez O – środek prostopadłościanu $\mathcal{P}$. Na omówieniu wykazaliśmy, że punkt O jest także środkiem sfer wpisanej i opisanej na czworościanie $ABCD$.

Ponieważ kąt trójścienny przy wierzchołku A' w czworościanie $A'BCD$ jest prosty, więc rzut prostokątny H_A wierzchołka A' na płaszczyznę BCD pokrywa się z ortocentrum trójkąta BCD. Ponadto rzut prostokątny O_A punktu O na płaszczyznę BCD pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD.

Oznaczmy przez K_A rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę BCD. Skoro $AO=OA'$, to $H_AO_A=O_AK_A=p$. Stąd

$$OH_A=OK_A=\sqrt{r^2+p^2}\,.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla pozostałych trzech ścian czworościanu stwierdzamy, że odległość punktu O od pozostałych sześciu rozpatywaynych punktów również wynosi $\sqrt{r^2+p^2}$. (Ściany czworościanu $ABCD$ są przystające więc wielkość p dla wszystkich czterech ścian jest jednakowa.) Stąd wniosek, że rozpatrywanych osiem punktów leży na sferze o środku O i promieniu $\sqrt{a^2+p^2}$.

13. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a\sqrt{b^2-bc+c^2}\;+\;c\sqrt{a^2-ab+b^2}\;\geqslant\;b\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

Rozwiązanie

Rozważmy czworokąt $ABCD$ taki, że $AB=a$, $BC=c$, $BD=b$ oraz $\sphericalangle ABD=$ $=\sphericalangle DBC=60^\circ$. Wówczas, na mocy twierdzenia cosinusów mamy

$$AC=\sqrt{a^2+ac+c^2},\; CD=\sqrt{b^2-bc+c^2},\; DA=\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

i dowodzona przez nas nierówność jest równoważna nierówności Ptolemeusza

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA\geqslant AC\cdot BD.$$

14. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Wyznaczyć największą liczbę naturalną m o następującej własności: Istnieją takie podzbiory S_1, S_2, S_3, ..., S_m ustalonego n-elementowego zbioru S, że dla dowolnych wskaźników $i,j,k,l \in \{1,2,\ldots,m\}$ zbiór $S_i \cup S_j \cup S_k \cup S_l$ ma najwyżej $n-2$ elementów.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolny $(n-2)$-elementowy podzbiór T zbioru S. Zauważmy, że jeśli S_1, S_2, ..., S_m $(m=2^{n-2})$ będą wszystkimi podzbiorami zbioru T, to postulowany warunek będzie oczywiście spełniony. Wobec tego $m \geqslant 2^{n-2}$.

Z kolei przypuśćmy, iż zbiory S_1, S_2, ..., S_m spełniają warunki zadania. Niech A będzie podzbiorem zbioru S o najmniejszej możliwej liczbie elementów, mającym następującą własność: dla dowolnych wskaźników $i,j \in \{1,2,\ldots,m\}$ zbiór A *nie zawiera się* w zbiorze $S_i \cup S_j$.

Połóżmy $B = S \setminus A$ i weźmy pod uwagę następujące rodziny zbiorów:

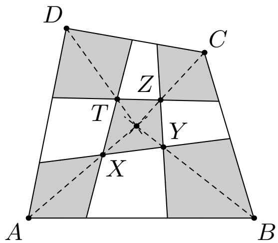
$$\mathcal{A} = \{A \cap S_i : i=1,2,\ldots,m\}, \qquad \mathcal{B} = \{B \cap S_i : i=1,2,\ldots,m\}.$$

Wykażemy, że rodzina $\mathcal{A}$ nie może jednocześnie zawierać pewnego zbioru i jego dopełnienia do zbioru A. Przypuśćmy bowiem przeciwnie, iż $X \in \mathcal{A}$ oraz $A \setminus X \in \mathcal{A}$. Wówczas $X = A \cap S_k$, $A \setminus X = A \cap S_l$ dla pewnych wskaźników k, l, skąd wynika $A \subseteq S_k \cup S_l$ wbrew określeniu zbioru A. Udowodniliśmy tym samym, że $\mathcal{A}$ zawiera najwyżej połowę podzbiorów zbioru A, zatem $|\mathcal{A}| \leqslant 2^{|A|-1}$.

Z drugiej strony, rodzina $\mathcal{B}$ również ma własność: jeżeli $X \in \mathcal{B}$, to $B \setminus X \notin \mathcal{B}$. Gdyby bowiem oba te należenia były prawdziwe, to podobnie jak poprzednio otrzymalibyśmy $B \subseteq S_k \cap S_l$ dla pewnych wskaźników k, l. Z drugiej strony na mocy określenia zbioru A istnieją takie wskaźniki i, j, że zbiór $S_i \cup S_j$ ma $|A|-1$ elementów wspólnych ze zbiorem A. Wtedy zbiór $S_i \cup S_j \cup S_k \cup S_l$ ma przynajmniej $|B|+|A|-1 = n-1$ elementów, co przeczy warunkom zadania.

Doszliśmy w ten sposób do wniosku, iż $|\mathcal{B}| \leqslant 2^{|B|-1}$. Ponieważ zaś $A \cup B = S$ i $A \cap B = \emptyset$, więc znajomość zbiorów $A \cap S_i \in \mathcal{A}$ oraz $B \cap S_i \in \mathcal{B}$ pozwala jednoznacznie odtworzyć zbiór S_i. Skutkiem tego $m \leqslant |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leqslant 2^{|A|-1} \cdot 2^{|B|-1} = 2^{n-2}$.

15. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na dziewięć czworokątów wypukłych, jak pokazano na rysunku. Wykazać, że jeśli w zacieniowane czworokąty można wpisać okręgi, to proste AX, BY, CZ, DT przecinają się w jednym punkcie.

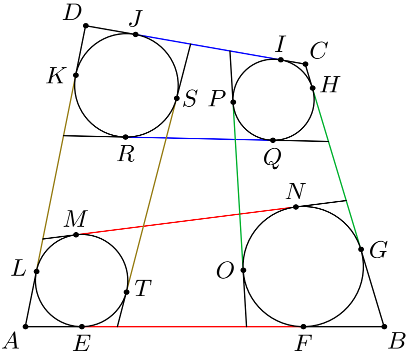


Rozwiązanie

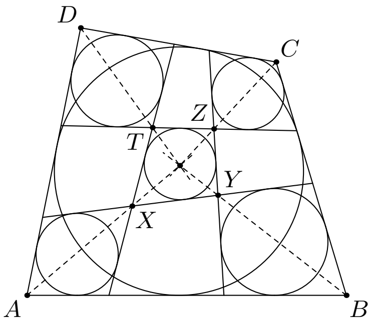
Wykażemy najpierw, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Oznaczmy punkty styczności okręgów wpisanych w narożne czworokąty z bokami tych czworokątów tak, jak pokazano na rysunku 3.

Ponieważ w czworokąt $XYZT$ można wpisać okrąg, więc $MN+RQ=ST+OP$, czyli $EF+IJ=HG+KL$. Z ostatniej równości wynika, że $AB+CD=BC+DA$, a to oznacza, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Niech o_A będzie okręgiem przechodzącym przez punkty E, T, M, L, a o_1, o_2, okręgami wpisanymi odpowiednio w czworokąty $ABCD$ i $XYZT$ (rys. 4). Rozpatrzmy jednokładność j_1 o skali dodatniej przeprowadzającą okrąg o_1 na okrąg o_A oraz jednokładność j_2 o skali ujemnej przeprowadzającą okrąg o_A na okrąg o_2. Środkami tych jednokładności są odpowiednio punkty A i X. Zatem jednokładność j o skali ujemnej przeprowadzająca okrąg o_1 na okrąg o_2 jest równa $j_2 \circ j_1$ i jej środek leży na prostej AX.



rys. 3



rys. 4

Analogicznie dowodzimy, że proste BY, CZ, DT zawierają środek jednokładności j, skąd dostajemy tezę.

16. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite dodatnie n, że dla dowolnej liczby całkowitej a, jeśli $a^2 \equiv 1 \pmod{n}$, to $a \equiv \pm 1 \pmod{n}$.

Rozwiązanie

Mamy znaleźć wszystkie takie liczby n, że z podzielności iloczynu $(a-1)(a+1)$ przez n wynika podzielność jednego z czynników przez n.

Przypuśćmy, że $n=km$, gdzie liczby całkowite dodatnie k, m są względnie pierwsze i większe od 2. Istnieje wtedy taka liczba całkowita a, że $a \equiv -1 \pmod{k}$ oraz $a \equiv 1 \pmod{m}$. Wówczas liczba $a-1$ jest podzielna przez m i niepodzielna przez k, natomiast liczba $a+1$ jest podzielna przez k i niepodzielna przez m. Wobec tego liczba n nie może spełniać warunków zadania.

Pozostają więc następujące możliwości: (i) $n=p^t$, (ii) $n=2p^t$ (w obu tych przypadkach zakładamy, że p jest nieparzystą liczbą pierwszą i $t \geqslant 1$), (iii) $n=2^t$ $(t \geqslant 0)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie liczby postaci (i) i (ii) mają żądaną własność, natomiast liczby postaci (iii) mają ją wtedy i tylko wtedy, gdy $t \leqslant 2$.

17. Wielomian $W(x)$ stopnia 2005 o współczynnikach rzeczywistych spełnia warunek $W(k)=\frac{k^2}{k+1}$ dla $k=0,1,2,\ldots,2005$. Rozstrzygnąć, czy z tego wynika, że $W(2006)$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie

Rozważmy wielomian $V(x)=W(x)-x+1$. Wówczas otrzymujemy $V(k)=\frac{1}{k+1}$ dla $k=0,1,2,\ldots,2005$.

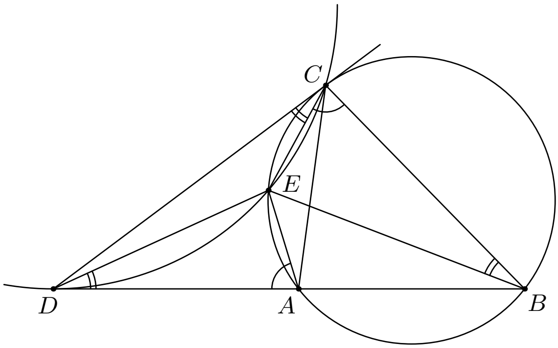
Wielomian $(x+1)V(x)$ jest wielomianem stopnia 2006 przyjmującym wartość 1 dla $x=0,1,2,\ldots,2005$ oraz wartość 0 dla $x=-1$, zatem dla $x=2006$ także przyjmuje wartość 0. Stąd otrzymujemy $W(2006)=2005$.

18. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o_1. Styczna do tego okręgu w punkcie C przecina prostą AB w punkcie D. Okrąg o_2, styczny do prostej AB w punkcie D, przechodzi przez punkt C i przecina okrąg o_1 w różnych punktach C i E. Wykazać, że

$$\frac{EA}{EB}=\frac{AC^3}{BC^3}\,.$$

Rozwiązanie

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $AC<BC$ (rys. 5).



rys. 5

Z twierdzenia Ptolemeusza zastosowanego do czworokąta $ABCE$ dostajemy

$$AC\cdot EB=EC\cdot AB+EA\cdot BC,\quad \text{czyli}\quad \frac{EB}{EA}=\frac{BC}{AC}+\frac{EC\cdot AB}{EA\cdot AC}\,.$$

Musimy więc udowodnić, że

$$\frac{BC}{AC}+\frac{EC\cdot AB}{EA\cdot AC}=\frac{BC^3}{AC^3}\,,$$

czyli, że

(1) $$1+\frac{EC\cdot AB}{EA\cdot BC}=\frac{BC^2}{AC^2}\,.$$

Z podobieństwa trójkątów ACD i CBD mamy

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{[CBD]}{[ACD]} = 1 + \frac{AB}{AD}\,.$$

Równość (1) przybiera więc postać

$$\frac{EC \cdot AB}{EA \cdot BC} = \frac{AB}{AD}\,,$$

a więc musimy udowodnić, że

$$\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AD}\,.$$

Ostatnia zależność wynika bezpośrednio z podobieństwa trójkątów ADE i CBE.

19. Rozstrzygnąć, czy układ równań

$$\left\{\begin{array}{r} a+b+c+d+e+f=6 \\ ab+bc+cd+de+ef+fa=7 \\ ad+be+cf=2 \\ abc+bcd+cde+def+efa+fab=7 \\ ace+bdf=1 \end{array}\right.$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f.

Rozwiązanie

Dodając równania drugie i trzecie otrzymujemy

$$(a+c+e)(b+d+f)=9\,,$$

skąd wobec równania pierwszego

$$a+c+e=b+d+f=3\,.$$

Podobnie dodanie równań czwartego i piątego daje

$$(a+d)(b+e)(c+f)=8\,,$$

co w połączeniu z równaniem pierwszym prowadzi do

$$a+d=b+e=c+f=2\,.$$

Kładąc $a=1+x$ oraz $c=1+y$ otrzymujemy $e=1-x-y$, $d=1-x$, $f=1-y$ oraz $b=1+x+y$.

Wówczas równanie $ad+be+cf=2$ sprowadza się do $x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}$. Równanie $ace+bdf=1$ również sprowadza się do tego samego równania.

Rozwiązanie zadania otrzymamy przyjmując na przykład $x=y=1/\sqrt{6}$.

20. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których licznik liczby

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^{155}}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest podzielny przez p^2.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu użyjemy rozszerzenia kongruencji na liczby wymierne.

Dla liczby pierwszej nieparzystej p mamy

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^{155}} = \sum_{n=1}^{(p-1)/2} \frac{(p-n)^{155}+n^{155}}{n^{155}(p-n)^{155}} \equiv \sum_{n=1}^{(p-1)/2} \frac{155pn^{154}}{n^{155}(p-n)^{155}} \pmod{p^2} .$$

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia tych p, dla których

$$155 \sum_{n=1}^{(p-1)/2} \frac{n^{154}}{n^{155}(p-n)^{155}} \equiv 0 \pmod{p} ,$$

co jest równoważne

$$155 \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^{156}} \equiv 0 \pmod{p} .$$

Powyższa zależność jest spełniona dla liczb pierwszych p, dla których p jest dzielnikiem liczby 155 lub $p-1$ nie jest dzielnikiem liczby 156.

Zatem warunki zadania są spełnione przez wszystkie liczby pierwsze oprócz liczb 2, 3, 7, 13, 53, 79, 157.

8 zadań, które powinieneś już znać

21. Dowieść, że wśród dowolnych 18 osób istnieją cztery, z których każde dwie się znają lub cztery, z których żadne dwie się nie znają.

Rozwiązanie

Zauważmy, że wśród dowolnych 6 osób znajdują się trzy, które się znają lub trzy, które się nie znają.

Udowodnimy, że wśród 9 osób są trzy, które się znają lub cztery, które się nie znają. Weźmy pewną osobę. Jeśli ona zna cztery osoby, to albo żadne dwie się nie znają (i jest OK) albo któreś dwie się znają (i też jest OK). Jeśli jest 6 osób, których nie zna, to są wśród nich trzy, które się znają lub trzy, które się nie znają (w obu przypadkach jest OK). Pozostała ewentualność – każda osoba zna dokładnie trzy inne, prowadzi do sprzeczności, gdyż sumaryczna liczba znajomości musi być liczbą parzystą.

Wybierzmy jedną z 18 osób. Musi ona znać albo nie znać przynajmniej dziewięć innych osób. Korzystając z wcześniejszego twierdzenia dostajemy tezę.

22. Dany jest 1000-wyrazowy ciąg różnych liczb rzeczywistych. Dowieść, że z tego ciągu można wybrać 28-wyrazowy podciąg rosnący lub 38-wyrazowy podciąg malejący.

Rozwiązanie

Każdemu elementowi x przypisujemy parę (r_x, m_x), gdzie r_x to długość najdłuższego ciągu rosnącego, zaczynającego się w x, a m_x – długość najdłuższego ciągu malejącego, zaczynającego się w x. Zauważmy, że dla różnych elementów x, y (y występuje w tym ciągu po x) te pary są różne, ponieważ jeśli $x > y$, to $m_x > m_y$, a jeśli $x < y$, to $r_x > r_y$. Skoro mamy $1000 = 37 \cdot 27 + 1$ elementów, to istnieje taki x, że $r_x \geqslant 28$ lub $m_x \geqslant 38$.

23. W Multilotku losuje się 20 różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 80\}$. Dowieść, że po każdym losowaniu, z wylosowanych liczb można wybrać dwa niepuste rozłączne podzbiory o takiej samej sumie kwadratów elementów.

Rozwiązanie

Każdemu z $2^{20} = 1048576$ podzbiorów wylosowanych liczb przypisujemy sumę kwadratów elementów, która nie przekracza $20 \cdot 80^2 = 128000$. Zatem pewne dwa podzbiory mają przypisaną taką samą liczbę. Po usunięciu z tych podzbiorów takich samych elementów otrzymujemy szukane dwa rozłączne podzbiory.

24. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p licznik liczby

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{p-1}{k}^2}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest podzielny przez p.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\frac{1}{\binom{p-1}{k}^2} = \left(\frac{k!(p-1-k)!}{(p-1)!}\right)^2 = \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1-k)}{(p-1)!}\right)^2 \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{(p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot (p-k) \cdot (-1)^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1-k)}{(p-1)!}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(p-1)!}{(p-1)!}\right)^2 = 1 \pmod{p}.$$

Zatem $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{p-1}{k}^2} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} 1 = p \equiv 0 \pmod{p}$.

25. Dana jest taka liczba całkowita dodatnia k, że liczby $p=6k+1$, $q=12k+1$ oraz $r=18k+1$ są pierwsze. Niech $n=pqr$. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a liczba a^n-a jest podzielna przez n.

Rozwiązanie

Wystarczy udowodnić, że dla dowolnej liczby a i dla każdej z liczb p, q, r liczba a^n-a jest przez nią podzielna. Jeśli a jest podzielna przez p, q lub r, to a^n-a też. Jeśli nie jest podzielna np. przez p, to z małego twierdzenia Fermata mamy, że liczba $a^{p-1}-1$ jest podzielna przez p, a skoro najmniejsza wspólna wielokrotność liczb $p-1$, $q-1$, $r-1$ jest równa $36k$ i $n-1=pqr-1=(6k+1)(12k+1)(18k+1)-1$ jest podzielne przez $36k$, to liczba $a^{n-1}-1$ jest podzielna przez p. Analogicznie pokazujemy dla liczb q i r.

26. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty BCD, CAE, ABF, przy czym

$$\sphericalangle CAE = \sphericalangle FAB\,, \quad \sphericalangle FBA = \sphericalangle DBC\,, \quad \sphericalangle DCB = \sphericalangle ECA\,.$$

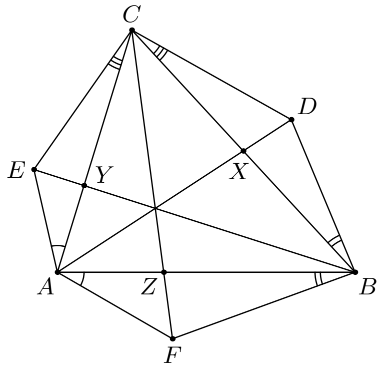
Dowieść, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez X, Y, Z odpowiednio punkty przecięcia par prostych AD i BC; BE i CA; CF i AB (rys. 6) oraz niech

$$\sphericalangle CAF = \sphericalangle EAB = \alpha\,, \quad \sphericalangle FBC = \sphericalangle DBA = \beta\,, \quad \sphericalangle DCA = \sphericalangle ECB = \gamma\,.$$



rys. 6

Oznaczając przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$ oraz korzystając z twierdzenia Cevy otrzymujemy

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA} = \frac{[ACF]}{[BCF]}\cdot\frac{[ABD]}{[ACD]}\cdot\frac{[BEC]}{[BEA]} =$$

$$=\frac{AC\cdot AF\cdot\sin\alpha}{BC\cdot BF\cdot\sin\beta}\cdot\frac{AB\cdot BD\cdot\sin\beta}{AE\cdot CD\cdot\sin\gamma}\cdot\frac{BC\cdot CE\cdot\sin\gamma}{AB\cdot AE\cdot\sin\alpha}=$$
$$=\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1,$$
gdzie ostatnia równość wynika bezpośrednio z twierdzenia sinusów oraz danych w treści zadania równości kątów.

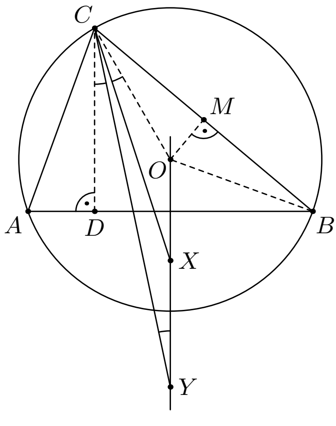
Sposób II

Na mocy trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy zastosowanego dla trójkąta ABC i punktu D otrzymujemy
$$\frac{\sin\sphericalangle BAD}{\sin\sphericalangle DAC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle ACD}{\sin\sphericalangle DCB}\cdot\frac{\sin\sphericalangle CBD}{\sin\sphericalangle DBA}=1\,.$$
Piszemy analogiczne równości dla punktów E i F, po czym mnożymy uzyskane nierówności stronami. W efekcie uzyskujemy
$$\frac{\sin\sphericalangle BAD}{\sin\sphericalangle DAC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle ACF}{\sin\sphericalangle FCB}\cdot\frac{\sin\sphericalangle CBE}{\sin\sphericalangle EBA}=1\,,$$
co oznacza, proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

27. Trójkąt ostrokątny, różnoboczny ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu r. Punkty X, Y leżą wewnątrz kąta AOB i na symetralnej odcinka AB, przy czym
$$\sphericalangle XCA=\sphericalangle YCB.$$
Wykazać, że $OX\cdot OY=r^2$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez D rzut prostokątny punktu C na prostą AB oraz niech M będzie środkiem boku BC. Wówczas
$$\sphericalangle DAC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle BOC=\sphericalangle COM\,,$$
skąd uzyskujemy $\sphericalangle ACD=\sphericalangle OCM$. Z zależności tej oraz z danej w treści zadania równości kątów otrzymujemy $\sphericalangle OCX=\sphericalangle DCY=\sphericalangle OYC$. Stąd wynika, że trójkąty OCX i OYC są podobne, a zatem
$$OX\cdot OY=OC^2=r^2\,.$$



rys. 7

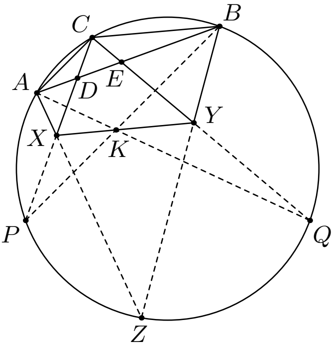
28. Punkty D i E leżą na boku AB trójkąta ABC. Punkty X i Y leżą odpowiednio na półprostych CD i CE oraz na zewnątrz trójkąta ABC, przy czym

$$\sphericalangle XAC + \sphericalangle YBC = 180^\circ \,.$$

Wykazać, że wszystkie proste XY, odpowiadające różnym położeniom punktów X i Y, mają punkt wspólny.

Rozwiązanie

Niech okrąg o, opisany na trójkącie ABC, przecina proste CD i CE odpowiednio w punktach P i Q oraz niech $K = AQ \cap BP$ (rys. 8). Wykażemy, że wszystkie proste XY przechodzą przez punkt K.



rys. 8

Niech $Z = AX \cap BY$. Wówczas z danej w treści zadania równości wynika, że punkt Z leży na okręgu o. Stosując twierdzenie Pascala dla „sześciokąta” $AZBPCQ$ uzyskujemy tezę.

$W(x) = 8$ nietrudnych wielomianów

29. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 2006 dla trzech różnych argumentów całkowitych. Udowodnić, że nie przyjmuje on wartości 2025 dla trzech różnych argumentów całkowitych.

Rozwiązanie

Wielomian $W - 2006$ ma trzy pierwiastki całkowite $a < b < c$, zatem

$$W(x) = (x-a)(x-b)(x-c)V(x) + 2006$$

dla pewnego wielomianu V o współczynnikach całkowitych. Teza sprowadza się do stwierdzenia, że równanie

$$2025 = (x-a)(x-b)(x-c)V(x) + 2006,$$

czyli

$$(x-a)(x-b)(x-c)V(x) = 19,$$

nie ma trzech różnych rozwiązań całkowitych. To zaś jest jasne: mamy $x-a>x-b>$ $>x-c$ i dopuszczalne są tylko dwa rozkłady:
$19\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-1)=19$ oraz $1\cdot(-1)\cdot(-19)\cdot 1=19$.

30. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych spełniające równanie

$$W(a^2)-W(a)=W(b^2)-W(b)$$

dla wszystkich liczb a, b spełniających warunek $a+b=1$.

Rozwiązanie

Łatwo sprawdzić, że dowolny wielomian stopnia 1 jest rozwiązaniem. Przypuśćmy teraz, że pewien wielomian stopnia $n>1$ spełnia warunki zadania. Wówczas

$$W(x^2)-W((1-x)^2)=W(x)-W(1-x)$$

i widzimy, że współczynnik przy x^{n-1} jest niezerowy po lewej stronie i zerowy po prawej stronie. Sprzeczność.

31. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ o następującej własności: jeżeli liczba a^2-b^2 jest wymierna, to liczba $W(a)-W(b)$ jest wymierna.

Rozwiązanie

Wielomiany postaci $W(x)=ax^2+b$ dla a wymiernego i b rzeczywistego spełniają warunki zadania. Udowodnimy, że są to wszystkie rozwiązania.

Mamy $x^2-(-x)^2=0$, a więc $W(x)-W(-x)$ jest liczbą wymierną dla każdego x. To oznacza, iż wszystkie współczynniki przy nieparzystych potęgach x muszą być równe 0 (istotnie, w przeciwnym razie wielomian $P(x)=W(x)-W(-x)$ miałby dodatni stopień, a więc przyjmowałby wartości niewymierne). Zatem $W(x)=V(x^2)$ dla pewnego wielomianu V stopnia $n\geqslant 1$.

Liczba $x^2-(\sqrt{x^2+1})^2=-1$ jest wymierna, a więc dla każdego x liczba $Q(x)=$ $=V(x^2)-V(x^2+1)$ jest wymierna. Ale jeśli $n\geqslant 2$, to Q jest wielomianem stopnia $2n-1\geqslant 1$, co przeczy warunkom zadania.

32. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki

$$x+y+z=3, \qquad xy+yz+zx=-9.$$

Udowodnić, że $-27\leqslant xyz\leqslant 5$.

Rozwiązanie

Oznaczmy $A=xyz$. Rozpatrzmy wielomian

$$W(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-3t^2-9t-xyz.$$

Mamy $W'(t)=3(t^2-2t-3)=3(t+1)(t-3)$. Skoro wielomian W ma trzy pierwiastki, to $W(-1)\geqslant 0$, $W(3)\leqslant 0$, co jest równoważne nierównościom $xyz\leqslant 5$ oraz $xyz\geqslant -27$.

33. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 2$ wielomian $W(x) = x^n + x^{n-1} + 3$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Przypuśćmy wbrew tezie, iż istnieje rozkład $W(x) = P(x)Q(x)$. Bez straty ogólności można przyjąć, że współczynniki przy najwyższej potędze w wielomianach P i Q są równe 1:

$$P(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Porównując współczynniki wolne mamy, iż $a_0 b_0 = 3$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że a_0 dzieli się przez 3 oraz b_0 jest równe ± 1. Porównując współczynniki przy x^m, $1 \leqslant m \leqslant n-2$ mamy

$$a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \ldots + a_{m-1} b_1 + a_m b_0 = 0,$$

skąd indukcyjnie wynika, iż liczby $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-2}$ są podzielne przez 3. Porównując współczynniki przy $n-1$ dostajemy

$$a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \ldots + a_{n-2} b_1 + a_{n-1} b_0 = 1,$$

skąd wynika, że $a_{n-1} \neq 0$, zatem P jest co najmniej stopnia $n-1$. Ale Q jest stopnia co najmniej 1, stąd P jest dokładnie stopnia $n-1$ oraz Q jest dokładnie stopnia 1. Oznacza to, iż W ma pierwiastek całkowity. Jak łatwo sprawdzić, nie ma to miejsca.

34. Niech $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P stopnia mniejszego niż n, o współczynnikach całkowitych, posiadające następującą własność: istnieje ciąg liczb całkowitych $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ taki, że $P(x_{k+1}) = P(x_k) + 7$ dla $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

Rozwiązanie

Dla $a,\ b$ całkowitych mamy $a - b | P(a) - P(b)$, zatem

$$x_{k+1} - x_k | 7, \quad k = 1, 2,\ \ldots,\ n-1,$$

$$x_{k+2} - x_k | 14, \quad k = 1, 2,\ \ldots,\ n-2.$$

Wynika stąd, że $x_{k+1} - x_k = 1$ dla wszystkich k bądź $x_{k+1} - x_k = 7$ dla wszystkich k. W pierwszym przypadku mamy

$$P(x_{k+1}) - 7x_{k+1} = P(x_k) - 7x_k =: a, \quad k = 1, 2, \ldots,\ n-1,$$

czyli wielomian $Q(x) = P(x) - 7x - a$ stopnia mniejszego niż n ma n pierwiastków. Stąd $Q = 0$ i $P(x) = 7x + a$. W drugim przypadku mamy

$$P(x_{k+1}) - x_{k+1} = P(x_k) - x_k =: b, \quad k = 1, 2, \ldots,\ n-1,$$

czyli wielomian $R(x) = P(x) - x - b$ stopnia mniejszego niż n ma n pierwiastków. Stąd $R = 0$ i $P(x) = x + b$.

Jak łatwo sprawdzić, wielomiany $P(x)=7x+a$ oraz $P(x)=x+b$ (a, b całkowite) spełniają warunki zadania. Są to jedyne rozwiązania.

35. Niech n będzie dodatnią liczbą parzystą, a p liczbą pierwszą większą niż n^n. Udowodnić, że wielomian

$$W(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-n)+p$$

nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że taki rozkład istnieje:

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n)+p=P(x)Q(x).$$

Zauważmy, że lewa strona jest dodatnia dla każdego x; dla $x<0$ bądź $x>n$ jest to oczywiste, a dla $x\in[0,n]$ szacujemy

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n)+p\geqslant -n^n+p\geqslant 0.$$

Wynika stąd, że wielomiany P i Q przyjmują wartości tego samego znaku. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że przyjmują one wyłącznie wartości dodatnie.

Dla $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ mamy $P(k)Q(k)=p$, skąd wynika, że $P(k)=1$ i $Q(k)=p$ lub $P(k)=p$, $Q(k)=1$. Zatem wielomian $P(x)+Q(x)-p-1$, stopnia mniejszego niż n, ma pierwiastki $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ - stąd jest wielomianem zerowym - sprzeczność, gdyż wielomiany P i Q miały przyjmować wyłącznie wartości dodatnie.

36. Wyznaczyć wszystkie takie pary (n,r), że $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{R}$ oraz wielomian

$$(x-2)^n-r$$

dzieli się przez x^2-2x+2.

Rozwiązanie

Pierwiastkami wielomianu x^2-2x+2 są $1\pm i$, stąd wystarczy, aby $1+i$ było pierwiastkiem wielomianu $(x-2)^n-r$ (wówczas $1-i$, jako liczba sprzężona do $1+i$, także jest pierwiastkiem). Musi więc być $(i-1)^n=r$, czyli $(\cos 3\pi/4+i\sin 3\pi/4)^n=$ $=r2^{-n/2}$, skąd na mocy wzoru de Moivre'a,

$$\cos\frac{3n\pi}{4}=r2^{-n/2},\quad \sin\frac{3n\pi}{4}=0.$$

Z drugiego równania wnioskujemy, iż n dzieli się przez 4: $n=4k$, a wówczas na mocy pierwszego równania, $r=(-4)^k$. Zatem rozwiązaniem zadania są wszystkie pary $(4k,(-4)^k)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$.

37. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$a^{2006}+b^{2006}+c^{2006}+d^{2006}=2006.$$

Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia $a^{500}b^{501}c^{502}d^{503}$.

Rozwiązanie

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, dostajemy

$$1=\frac{a^{2006}+b^{2006}+c^{2006}+d^{2006}}{2006}=$$

$$=\frac{500\cdot\left(\frac{a^{2006}}{500}\right)+501\cdot\left(\frac{b^{2006}}{501}\right)+502\cdot\left(\frac{c^{2006}}{502}\right)+503\cdot\left(\frac{d^{2006}}{500}\right)}{2006}\geqslant$$

$$\geqslant a^{500}b^{501}c^{502}d^{503}\cdot 500^{-500/2006}501^{-501/2006}502^{-502/2006}503^{-503/2006},$$

przy czym oczywiście może zajść równość. Stąd największą możliwą wartością rozważanego wyrażenia jest

$$500^{500/2006}501^{501/2006}502^{502/2006}503^{503/2006}.$$

38. Liczby dodatnie $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, gdzie $n\geqslant 2$, spełniają warunek

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=2^{n-1}a_1.$$

Udowodnić, że $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}\geqslant n-1.$

Rozwiązanie

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}=\sum_{k=2}^{n}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}-(n-1)\geqslant$$

$$\geqslant(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a_1}}-(n-1)=n-1.$$

39. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $2b^2 = a(a+b)+1$. Udowodnić, że

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^{10} + \frac{a^2+b^8}{b^{10}} > \left(\frac{a}{b}\right)^9 + \left(\frac{a}{b}\right)^8.$$

Rozwiązanie

Wystarczy udowodnić silniejszą nierówność

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^{10} + \frac{1}{b^2} > \left(\frac{a}{b}\right)^9 + \left(\frac{a}{b}\right)^8.$$

Jest ona równoważna nierównościom

$$2a^{10} + b^8 > a^9 b + a^8 b^2,$$

$$2a^{10} + b^8(2b^2 - a(a+b)) > a^9 b + a^8 b^2,$$

$$2a^{10} + 2b^{10} > a^9 b + a^8 b^2 + a^2 b^8 + ab^9.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż ciągi $(a^8,\ b^8)$, $(a^2,\ b^2)$ są jednomonotoniczne, oraz ciągi $(a^9,\ b^9)$, $(|a|,\ |b|)$ są jednomonotoniczne.

40. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Udowodnić, że

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c}.$$

Rozwiązanie

Istnieją takie liczby dodatnie x, y, z, że

$$a = x+y,\ b = y+z,\ c = z+x.$$

Podstawiając, dostajemy równoważną nierówność

$$\text{(1)} \qquad \frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geqslant \frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{z+x} + \frac{2z}{x+y}.$$

Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną mamy

$$\frac{2x}{y+z} = \frac{2}{y/x + z/x} \leqslant \frac{x/y + x/z}{2},$$

$$\frac{2y}{z+x} = \frac{2}{z/y + x/y} \leqslant \frac{y/z + y/x}{2},$$

$$\frac{2z}{x+y} = \frac{2}{x/z + y/z} \leqslant \frac{z/x + z/y}{2}.$$

Dodając stronami powyższe trzy nierówności dostajemy żądaną nierówność (1).

41. Liczby całkowite $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ spełniają warunki

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 60, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant 140, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant 360.$$

Udowodnić, że $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^4 \geqslant 980.$

Rozwiązanie

Dla liczby całkowitej a mamy

$$a^4 - 6a^3 + 11a^2 - 6a = a(a-1)(a-2)(a-3) \geqslant 0.$$

Stąd

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^4 \geqslant 6\sum_{k=1}^{n} a_k^3 - 11\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 980.$$

42. Liczby nieujemne $a,\ b,\ c$ spełniają warunek $a^2+b^2+c^2=1$. Udowodnić, że

$$ab^2+bc^2+ca^2 \leqslant \sqrt{a^4+b^4+c^4}.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Równoważnie możemy zapisać nierówność w postaci

$$a^2\cdot\sqrt{\frac{b^4}{a^2}}+b^2\cdot\sqrt{\frac{c^4}{b^2}}+c^2\cdot\sqrt{\frac{a^4}{c^2}} \leqslant \sqrt{a^2\cdot\frac{b^4}{a^2}+b^2\cdot\frac{c^4}{b^2}+c^2\cdot\frac{a^4}{c^2}}.$$

Jest to nierówność Jensena dla funkcji wklęsłej $f(x)=\sqrt{x}$, punktów próbnych b^4/a^2, c^4/b^2, a^4/c^2 i odpowiadających im wag $a^2,\ b^2,\ c^2$.

Sposób II

Nierówność w zadaniu jest równoważna

$$ab^2+bc^2+ca^2 \leqslant \sqrt{(a^4+b^4+c^4)(a^2+b^2+c^2)},$$

czyli po obustronnym podniesieniu do kwadratu i uproszczeniu,

$$2ab^3c^2+2bc^3a^2+2ca^3b^2 \leqslant a^6+b^6+c^6+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2.$$

Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$2ab^3c^2 \leqslant b^6+c^4a^2,$$
$$2bc^3a^2 \leqslant c^6+a^4b^2,$$
$$2ca^3b^2 \leqslant a^6+b^4c^2.$$

Dodając powyższe trzy nierówności stronami dostajemy dowodzoną nierówność.

43. Liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots, a_n$, spełniają warunki: $n \geqslant 2$ oraz $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \geqslant 1.$$

Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie

Zastosujemy indukcję. Dla $n=2$ mamy równość. Przypuśćmy, że nierówność zachodzi dla pewnego naturalnego $n \geqslant 2$. Weźmy dowolne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ o iloczynie 1 i zastosujmy tę nierówność dla liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n a_{n+1}$. Otrzymujemy

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_{n-1}} + \frac{1}{1+a_n a_{n+1}} \geqslant 1.$$

Wobec tego, aby otrzymać żądaną nierówność dla $n+1$, wystarczy tylko udowodnić, iż

$$\frac{1}{1+a_n} + \frac{1}{1+a_{n+1}} \geqslant \frac{1}{1+a_n a_{n+1}},$$

co jest równoważne oczywistej nierówności

$$\frac{a_n a_{n+1}(a_n + a_{n+1} + 1) + 1}{(a+1)(b+1)(ab+1)} \geqslant 0.$$

Co więcej, widać, że powyższa nierówność jest ostra. Tak więc równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $n=2$.

44. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $a^2+b^2+c^2=3$. Udowodnić, że

$$(a+bc+c)^2 + (b+ca+a)^2 + (c+ab+b)^2 \leqslant 27.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Mamy, na mocy nierówności Schwarza,

$$(a+bc+c)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(b^2+2) = 3b^2+6,$$
$$(b+ca+a)^2 \leqslant (b^2+c^2+a^2)(c^2+2) = 3c^2+6,$$
$$(c+ab+b)^2 \leqslant (c^2+a^2+b^2)(a^2+2) = 3a^2+6.$$

Dodając te nierówności stronami i ponownie uwzględniając warunek $a^2+b^2+c^2=3$ dostajemy tezę.

Sposób II

Nierówność dana w zadaniu jest rownoważna nierówności

$$2(a^2+b^2+c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 6abc + 2(ab+bc+ca) + 2(bc^2+ca^2+ab^2) \leqslant 27.$$

Mamy

$$2(a^2+b^2+c^2)=6,$$

$$2(ab+bc+ca)\leqslant 2(a^2+b^2+c^2)=6,$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\leqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}=3.$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$6abc+2(bc^2+ca^2+ab^2)\leqslant 12,$$

czyli

$$3abc+bc^2+ca^2+ab^2\leqslant 6.$$

Zauważmy, że $a+b+c\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}=3$, stąd

$$6\geqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)=\frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2).$$

Wystarczy zatem wykazać, że

$$\frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)\geqslant 3abc+bc^2+ca^2+ab^2,$$

lub

$$2(a^3+b^3+c^3)+2(a^2b+b^2c+c^2a)\geqslant 9abc+bc^2+ca^2+ab^2.$$

Ostatnia nierówność wynika z dwóch łatwych do sprawdzenia nierówności

$$a^3+b^3+c^3\geqslant bc^2+ca^2+ab^2,$$

$$a^3+b^3+c^3+2(a^2b+b^2c+c^2a)\geqslant 9abc.$$

8 zadań, które powinieneś poznać

45. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n>666$ oraz liczb rzeczywistych $x_1,x_2,\ldots,x_n$ większych od n zachodzi nierówność

$$\left(\log_{x_1}(x_1x_2)+\log_{x_2}(x_1x_2)\right)\cdot\left(\log_{x_2}(x_2x_3)+\log_{x_3}(x_2x_3)\right)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot\left(\log_{x_{n-1}}(x_{n-1}x_n)+\log_{x_n}(x_{n-1}x_n)\right)<$$

$$<\log_5 n\cdot\left(\log_{x_1}(x_1x_2)\cdot\log_{x_2}(x_1x_2)\right)\cdot\left(\log_{x_2}(x_2x_3)\cdot\log_{x_3}(x_2x_3)\right)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot\left(\log_{x_{n-1}}(x_{n-1}x_n)\cdot\log_{x_n}(x_{n-1}x_n)\right).$$

Rozwiązanie

Teza zadania wynika z tożsamości

$$\log_a(ab)+\log_b(ab)=\log_a(ab)\cdot\log_b(ab)$$

dla $a,b\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

46. Niech $n\geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą, a $x_i=\left(\frac{10}{9}\right)^i$ dla $i=1,\ldots,n$. Dowieść, że

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|\sqrt[x_i]{x_i}-\sqrt[x_j]{x_j}\right|<\left(\frac{10}{n}\right)^{n^2}.$$

Rozwiązanie

Dla $x>1$ mamy $x<2^x$.

Zatem $1<\sqrt[x]{x}<2$, skąd wynika, że każdy czynnik iloczynu po lewej stronie dowodzonej nierówności jest mniejszy od 1. To kończy dowód nierówności dla $n<10$.

Ponadto

$$\sqrt[x_9]{x_9}=\sqrt[x_{10}]{x_{10}},$$

co natychmiast dowodzi nierówności dla $n\geqslant 10$.

47. Dowieść, że

$$(\log 11)^{\log 11}\cdot(\log 12)^{\log 12}\cdot\ldots\cdot(\log 2006)^{\log 2006}<$$
$$<6^{666}\cdot 11^{\log\log 11}\cdot 12^{\log\log 12}\cdot\ldots\cdot 2006^{\log\log 2006},$$

gdzie log oznacza logarytm przy podstawie 10.

Rozwiązanie

Teza zadania wynika z tożsamości

$$(\log n)^{\log n}=n^{\log\log n}$$

dla $n>1$.

48. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 2006$ oraz liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\prod_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\1\leqslant b\leqslant n\\1\leqslant c\leqslant n\\1\leqslant d\leqslant n\\1\leqslant e\leqslant n\\1\leqslant f\leqslant n\\1\leqslant g\leqslant n\\1\leqslant h\leqslant n\\1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \left|\left(x_a^2x_b^4+x_a^2x_c^2x_d^2+x_a^2x_e^2x_f^2+x_a^2x_g^4\right)^{n/2}-\left(x_hx_i^2+x_hx_j^2\right)^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n^{10}} \cdot \left(16n\sum_{k=1}^{n} x_k^{12}\right)^{n^{11}/4}.$$

Rozwiązanie
Oczywiście

$$x_a^2x_b^4+x_a^2x_c^2x_d^2+x_a^2x_e^2x_f^2+x_a^2x_g^4 \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} x_k^6,$$

$$\left(x_hx_i^2+x_hx_j^2\right)^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} x_k^6,$$

zatem

$$\left(x_a^2x_b^4+x_a^2x_c^2x_d^2+x_a^2x_e^2x_f^2+x_a^2x_g^4\right)^{n/2} \leqslant \left(4\sum_{k=1}^{n} x_k^6\right)^{n/2},$$

$$\left(x_hx_i^2+x_hx_j^2\right)^n \leqslant \left(4\sum_{k=1}^{n} x_k^6\right)^{n/2}.$$

Wobec tego

$$\left|\left(x_a^2x_b^4+x_a^2x_c^2x_d^2+x_a^2x_e^2x_f^2+x_a^2x_g^4\right)^{n/2}-\left(x_hx_i^2+x_hx_j^2\right)^n\right| \leqslant 2\left(4\sum_{k=1}^{n} x_k^6\right)^{n/2}.$$

Z nierówności między średnimi potęgowymi otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^6\right)^{1/6} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{12}\right)^{1/12},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^6 \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{12}\right)^{1/2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^6 \leqslant \left(n\sum_{k=1}^{n} x_k^{12}\right)^{1/2},$$

skąd ostatecznie

$$\text{LEWA} \leqslant \left(2\left(4\sum_{k=1}^{n} x_k^6\right)^{n/2}\right)^{n^{10}} \leqslant \left(2\left(16n\sum_{k=1}^{n} x_k^{12}\right)^{n/4}\right)^{n^{10}} = \text{PRAWA}.$$

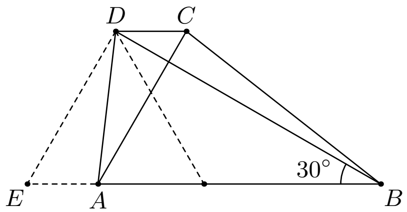
49. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$, o podstawach AB i CD, dla których

$$AC=1, \quad BD=\sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABD=30^\circ.$$

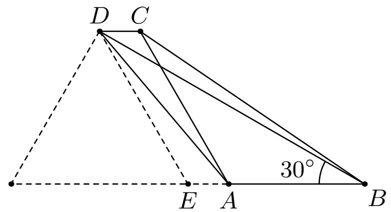
Wyznaczyć najmniejszą możliwą sumę długości podstaw tego trapezu.

Rozwiązanie

Niech E będzie takim punktem, że czworokąt $ACDE$ jest równoległobokiem. Wtedy zadanie sprowadza się do wyznaczenia najmniejszej długości boku EB w trójkącie BDE spełniającym warunki $\sphericalangle ABD=30^\circ$, $BD=\sqrt{3}$ oraz $ED=1$.



rys. 9



rys. 10

Nietrudno dostrzec, że istnieją *dwa* trójkąty EBD, w których zachodzą powyższe zależności: w jednym z tych trójkątów mamy $EB=2$ (rys. 9), a w drugim $EB=1$ (rys. 10). Zatem najmniejsza możliwa wartość sumy $AB+CD$ wynosi 1.

50. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne CAE i BCD. Punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$\sin\left(\frac{AC\cdot\pi}{BC}\right).$$

Rozwiązanie

Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, w którym $\sphericalangle ACB=120^\circ$. Wówczas punkty A, B, D, E są wierzchołkami trapezu równoramiennego, a więc leżą na jednym okręgu. Stąd wynika, że iloraz AC/BC może przyjąć każdą wartość będącą liczbą rzeczywistą dodatnią.

Uwaga: Zakładając dodatkowo, że $\sphericalangle ACB\neq 120^\circ$ (co można niechcący przyjąć sugerując się zbyt mocno własnym rysunkiem) nietrudno wykazać, że $AC=BC$, czyli $AC/BC=1$.

51. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki czworościan $ABCD$, w którym krawędzie AB i CD są prostopadłe, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ oraz

$$[ABC]-[ABD] > \frac{AB \cdot CD}{\pi},$$

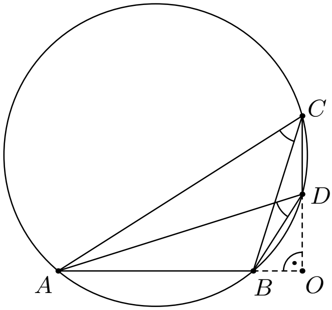
gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

Rozwiązanie

Taki czworościan istnieje.

Na rysunku 11 czworokąt $ABD'C$ jest wpisany w okrąg, a proste CD' i AB są prostopadłe.

Niech $O = CD' \cap AB$. Rozpatrzmy płaszczyznę p prostopadłą do prostej AB i przechodzącą przez punkt O. Ponadto niech o będzie okręgiem o środku O zawierającym punkt D' oraz leżącym w płaszczyźnie p.



rys. 11

Wówczas dla dowolnego punktu D leżącego na okręgu o mamy $AB \perp CD$ oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Ponadto istnieje taki punkt D leżący na okręgu o na tyle blisko punktu D', że $CD < \frac{\pi}{2} \cdot CD'$. Wtedy

$$[ABC]-[ABD] = [ABC]-[ABD'] = \frac{AB \cdot CD'}{2} > \frac{AB \cdot CD}{\pi}.$$

Zatem skonstuowany czworościan $ABCD$ spełnia postulowane warunki.

Uwaga: Zakładając dodatkowo, że kąty ABC i BAC są ostre (co można niechcący przyjąć w rozwiązaniu sugerując się zbyt mocno własnym rysunkiem) nietrudno wykazać, że trójkąty ABC i ABD są przystające. Wtedy oczywiście rozpatrywany czworościan nie istnieje.

52. Niech α będzie kątem dwuściennym w czworościanie foremnym, natomiast β kątem dwuściennym w ośmiościanie foremnym. Rozstrzygnąć, czy $\sin^2(\alpha+\beta)$ jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie

Niech $ABCDS$ będzie ostrosłupem prawidłowym czworokątnym o wierzchołku S i wszystkich krawędziach równej długości. Niech ponadto T będzie takim punktem, że $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ST}$. Wtedy czworościan $BCST$ jest foremny (ma wszystkie krawędzie równej długości), a przy tym punkty A, B, S, T leżą w jednej płaszczyźnie. Stąd bezpośrednio uzyskujemy $\alpha+\beta=180°$.

Zawody drużynowe:

53. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o środku J, dopisany do trójkąta ABC, jest styczny do odcinka AB w punkcie D. Prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do prostej CD przecina proste AJ i BJ odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że $DP=DQ$.

Rozwiązanie

Niech punkty X, Y będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AB i BC (rys. 12). Podobnie, niech punkty Z, T będą rzutami prostokątnymi punktu Q odpowiednio na proste AB i AC. Oznaczmy:

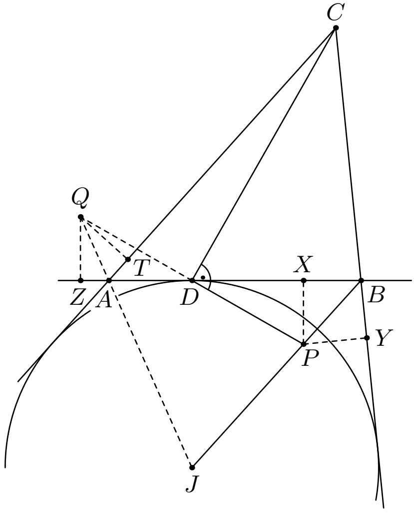
$$x=DX\,,\quad y=CY\,,\quad z=DZ\,,\quad t=CT\,.$$

Wtedy $x+y=BD+BC=AC+AD=z+t$ oraz

$$x^2-z^2=PD^2-QD^2+QZ^2-PX^2=PC^2-CQ^2+QT^2-PY^2=y^2-t^2\,,$$

czyli $x^2-y^2=z^2-t^2$. Z usykanych zależności wnioskujemy, że $x=z$ oraz $y=t$.

A zatem trójkąty prostokątne DXP i DZQ są przystające, skąd wnioskujemy, że $PD=QD$.



rys. 12

54. Niech a, b będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba b^n+n jest podzielna przez a^n+n. Udowodnić, że $a=b$.

Rozwiązanie

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą i połóżmy $n=(a+1)(p-1)+1$. Mamy wówczas $n\equiv 1 \pmod{p-1}$, skąd na mocy małego twierdzenia Fermata otrzymujemy $a^n\equiv a \pmod p$, $b^n\equiv b \pmod p$. Ponadto $n\equiv -(a+1)+1\equiv -a \pmod p$. Otrzymujemy stąd, iż $a^n+n\equiv 0 \pmod p$, więc z uwagi na warunki zadania prawdziwa jest zależność $b^n+n\equiv 0 \pmod p$. Skutkiem tego

$$b\equiv b^n\equiv -n\equiv -(a+1)(p-1)-1\equiv a \pmod p.$$

To dowodzi, że $b-a$ jest podzielne przez każdą liczbę pierwszą, skąd wynika teza.

55. Dowieść, że zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 10^{100}\}$ można podzielić na n takich podzbiorów, że żaden nie zawiera trójwyrazowego postępu arytmetycznego oraz n jest liczbą, która nie jest istotnie większa niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

Rozwiązanie

56. Liczby rzeczywiste $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ spełniają warunki

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 60, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant 140, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant 360.$$

Udowodnić, że $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^4 \geqslant C$, gdzie C jest stałą, niezależną od n, która nie jest istotnie mniejsza niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

Rozwiązanie

Pierwszy Mecz Matematyczny:

57. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$3(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc})\leqslant 4\,(a+b+c)\,.$$

Rozwiązanie

Dana nierówność jest równoważna nierówności

$$3\sqrt{ab}+3\sqrt[3]{abc}\leqslant a+4b+4c.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\frac{1}{4}a+b+4c\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}a\cdot b\cdot 4c}=3\sqrt[3]{abc},$$

$$\frac{3}{4}a+3b\geqslant 3\cdot 2\sqrt{\frac{a}{4}\cdot b}=3\sqrt{ab}.$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy dowodzoną nierówność.

58. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}\leqslant 1.$$

Udowodnić, że $abcd\geqslant 3$.

Rozwiązanie

Sposób I

Nierówność dana w zadaniu jest równoważna nierówności

$$a^4b^4c^4d^4\geqslant 3^4.$$

Wykonujemy podstawienie

$$x=\frac{1}{1+a^4},\ y=\frac{1}{1+b^4},\ z=\frac{1}{1+c^4},\ t=\frac{1}{1+d^4}.$$

Liczby x, y, z, t spełniają warunek $x+y+z+t\leqslant 1$, a nierówność przyjmuje postać

$$\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-y}{y}\cdot\frac{1-z}{z}\cdot\frac{1-t}{t}\geqslant 3^4,$$

czyli $$(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)\geqslant 3^4xyzt.$$

Na mocy naszego warunku lewa strona powyższej nierówności jest nie mniejsza niż

$$(x+y+z)(y+z+t)(z+t+x)(t+x+y).$$

Wystarczy zatem wykazać, że

$$(x+y+z)(y+z+t)(z+t+x)(t+x+y)\geqslant 3^4xyzt,$$

ale to jest prawda na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną.

Sposób II:

Wykonujemy podstawienie

$$a^2=\operatorname{tg}\alpha,\ b^2=\operatorname{tg}\beta,\ c^2=\operatorname{tg}\gamma,\ d^2=\operatorname{tg}\delta,\quad \text{gdzie}\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Wówczas warunek dany w zadaniu przyjmuje postać

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta\leqslant 1.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\geqslant\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta\geqslant 3(\cos\beta\cos\gamma\cos\delta)^{\frac{2}{3}}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\sin^2\beta\geqslant 3(\cos\gamma\cos\delta\cos\alpha)^{\frac{2}{3}},\sin^2\gamma\geqslant 3(\cos\delta\cos\alpha\cos\beta)^{\frac{2}{3}},\sin^2\delta\geqslant 3(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^{\frac{2}{3}}.$$

Mnożąc stronami te cztery nierówności dostajemy tezę.

59. Marek i Jurek grają w następującą grę. Na początku na tablicy napisana jest liczba całkowita dodatnia n. W jednym ruchu gracz odejmuje od napisanej w danym momencie na tablicy liczby jej dzielnik będący jedynką, liczbą pierwszą lub iloczynem dwóch (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych i wynikiem odejmowania zastępuje wcześniejszą liczbę. Pierwszy ruch wykonuje Marek, a następnie gracze wykonują ruchy na przemian. Wygrywa gracz, który na tablicy napisze liczbę zero. Rozstrzygnąć, dla których liczb n Marek może zapewnić sobie wygraną, niezależnie od ruchów Jurka.

Rozwiązanie

Strategia wygrywająca w grze polega na podawaniu przeciwnikowi liczb podzielnych przez 8.

Jeżeli na tablicy napisana jest liczba podzielna przez 8, to nie można wykonać ruchu prowadzącego do innej liczby podzielnej przez 8, gdyż to wymagałoby odjęcia liczby podzielnej przez 8, co nie jest zgodne z regułami gry.

Z kolei w przypadku, gdy napisana na tablicy liczba nie jest podzielna przez 8, zawsze możemy wykonać ruch prowadzący do liczby podzielnej przez 8:

- Jeżeli napisana na tablicy liczba przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1, odejmujemy od niej 1.
- Jeżeli napisana na tablicy liczba przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2, odejmujemy od niej 2.
- Jeżeli napisana na tablicy liczba przy dzieleniu przez 8 daje resztę 4, odejmujemy od niej 4.
- Jeżeli napisana na tablicy liczba przy dzieleniu przez 8 daje resztę 6, to jest ona postaci $2\cdot(4k+3)$. Liczba postaci $4k+3$ nie może być iloczynem liczb pierwszych postaci $4m+1$, ma więc dzielnik pierwszy p postaci $4m+3$. Od liczby napisanej na tablicy odejmujemy wówczas $2p$.
- Jeżeli napisana na tablicy liczba jest postaci $8k+3$, to ma ona dzielnik postaci $8m+3$ będący liczbą pierwszą lub iloczynem dwóch liczb pierwszych. Istotnie, jeśli liczba postaci $8k+3$ nie ma dzielnika pierwszego postaci $8m+3$, to ma dzielnik pierwszy postaci $8m+5$ oraz dzielnik pierwszy postaci $8m+7$.
- Analogicznie postępujemy w przypadku, gdy napisana na tablicy liczba jest postaci $8k+5$ lub $8k+7$.

Zatem Marek może zapewnić sobie wygraną, gdy liczba n nie jest podzielna przez 8.

60. Rozstrzygnąć, czy zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 10^{100}\}$ można podzielić na 10^{25} podzbiorów, z których żaden nie zawiera trójwyrazowego postępu arytmetycznego.

Rozwiązanie

Każda liczba ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10^{100}\}$ zapisuje się jednoznacznie w postaci

$$1+\sum_{i=0}^{9}\left(a_i+5\cdot 10^9 d_i\right)\cdot 10^{10i}, \tag{1}$$

gdzie $0\leqslant a_i<5\cdot 10^9$ oraz $d_i\in\{0,1\}$.

Niech dla $d_0,d_1,\ldots,d_9\in\{0,1\}$ oraz $0\leqslant S<10^{21}$ zbiór $Z_{d_0d_1\ldots d_9}(S)$ będzie zbiorem wszystkich liczb postaci (1), dla których $a_0^2+a_1^2+\ldots+a_9^2=S$.

Wykażemy, że żaden ze zbiorów $Z_{d_0d_1\ldots d_9}(S)$ nie zawiera trójwyrazowego postępu arytmetycznego.

Załóżmy, że liczby

$$1+\sum_{i=0}^{9}\left(a_i+5\cdot 10^9 d_i\right)\cdot 10^{10i},\ 1+\sum_{i=0}^{9}\left(b_i+5\cdot 10^9 d_i\right)\cdot 10^{10i},\ 1+\sum_{i=0}^{9}\left(c_i+5\cdot 10^9 d_i\right)\cdot 10^{10i}$$

tworzą postęp arytmetyczny. Wówczas dla $i=0,1,\ldots,9$ liczby a_i, b_i, c_i tworzą postęp arytmetyczny. Zatem $b_i^2\leqslant\left(a_i^2+c_i^2\right)/2$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i=b_i=c_i$. Jeżeli przy tym

$$a_0^2+a_1^2+\ldots+a_9^2=b_0^2+b_1^2+\ldots+b_9^2=c_0^2+c_1^2+\ldots+c_9^2\,,$$

to $a_i=b_i=c_i$ dla $i=0,1,\ldots,9$.

61. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, taką że liczba $\binom{3n}{n}+2$ jest podzielna przez 7 lub wykazać, że taka liczba n nie istnieje.

Rozwiązanie

Warunki zadania spełnia $n=4$.

62. Dane są takie różne liczby pierwsze p, q, że dla pewnej liczby naturalnej n liczba n^2+q jest podzielna przez p. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, k, że $a^2+qb^2=pk$ oraz $k<q$.

Rozwiązanie

Niech n będzie taką liczbą naturalną, że liczba n^2+q jest podzielna przez p. Rozważmy zbiór reszt z dzielenia przez p liczb postaci mn, gdzie $0\leqslant m<\sqrt{p}$. Liczb tych jest $\left[\sqrt{p}\right]+1$, zatem wśród nich istnieją dwie, m_1n oraz m_2n, których różnica *modulo* p jest mniejsza od $\sqrt{p}$. Niech $b=|m_1-m_2|<\sqrt{p}$ oraz niech $a\equiv\pm bn \pmod p$ i $0<a<\sqrt{p}$. Wtedy $a^2+qb^2\equiv 0 \pmod p$ oraz $a^2+qb^2<(q+1)p$. Zatem $a^2+qb^2=pk$, gdzie $k\leqslant q$. Gdyby jednak $k=q$, to liczba a byłaby podzielna przez q i mielibyśmy $b^2+q(a/q)^2=p$.

63. Udowodnić, że każdy dzielnik pierwszy liczby $4^{3^{666}}+2^{3^{666}}+1$ jest postaci $2\cdot 3^{667}\cdot k+1$.

Rozwiązanie

Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $4^{3^{666}}+2^{3^{666}}+1$. Wówczas

$$2^{3^{667}}=(2^{3^{666}}-1)(4^{3^{666}}+2^{3^{666}}+1)+1\equiv 1 \pmod{p}\ ,$$

a przy tym

$$2^{3^{666}}\not\equiv 1 \pmod{p}\ ,$$

gdyż z $2^{3^{666}}\equiv 1 \pmod{p}$ wynika, że $4^{3^{666}}+2^{3^{666}}+1\equiv 3 \pmod{p}$, a tymczasem $p\neq 3$.

Zatem najmniejszym wykładnikiem dodatnim w, dla którego $2^w\equiv 1 \pmod{p}$ jest $w=3^{667}$. Z drugiej strony na podstawie małego twierdzenia Fermata mamy $2^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$. Stąd wynika, że liczba $p-1$ jest podzielna przez 3^{667}, a ponieważ dodatkowo jest ona parzysta, otrzymujemy

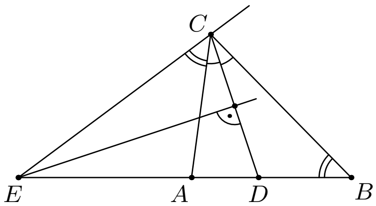
$$p=2\cdot 3^{667}\cdot k+1$$

dla pewnej liczby całkowitej k.

67. W trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Symetralna odcinka CD przecina prostą AB w punkcie E. Wykazać, że

$$\frac{EA}{EB}=\frac{AC^2}{BC^2}\,.$$

Rozwiązanie



rys. 13

Z równości $\sphericalangle ECD=\sphericalangle EDC$ oraz $\sphericalangle ACD=\sphericalangle DCA$ uzyskujemy $\sphericalangle ECA=\sphericalangle EBC$. Stąd wynika, że trójkąty ECA i EBC są podobne, a liczba AC/BC jest ich skalą podobieństwa. Zatem oznaczając przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ uzyskujemy

$$\frac{EA}{EB}=\frac{[ECA]}{[EBC]}=\frac{AC^2}{BC^2}\,.$$

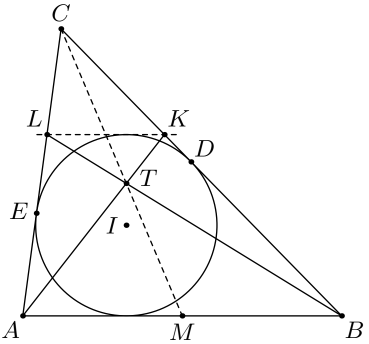
65. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boków BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt M jest środkiem boku AB. Odcinki DE i CM przecinają się w punkcie S. Wykazać, że proste AB oraz IS są prostopadłe.

Rozwiązanie

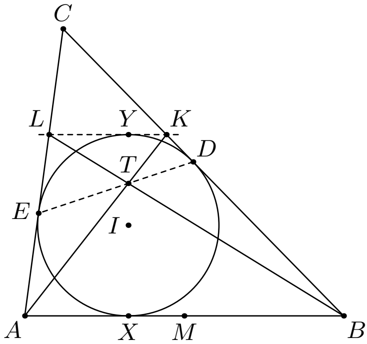
Poprowadźmy prostą k równoległą do prostej AB (i różną od prostej AB) styczną do okręgu o wpisanego w trójkąt ABC (rys. 14). Przyjmijmy, że prosta k przecina odcinki BC i AC odpowiednio w punktach K i L. Niech ponadto X i Y będą punktami styczności okręgu o odpowiednio z prostymi AB i KL. Wreszcie niech T będzie punktem przecięcia prostych AK i BL.

Wykażemy, że punkty S i T pokrywają się.

Ponieważ proste AB i KL są równoległe, a punkt M jest środkiem boku AB, więc punkt T leży na odcinku CM. Jednocześnie stosując twierdzenie Brianchona dla czworokąta $ABKL$ widzimy, że punkt T należy również do prostej DE (rys. 15). Stąd $S=T$.



rys. 14



rys. 15

Wykorzystując raz jeszcze twierdzenie Brianchona dla czworokąta $ABKL$ stwierdzamy, że punkt S leży na odcinku XY. Odcinek ten jest średnicą okręgu o, a więc należy do niego punkt I. Stąd ostatecznie otrzymujemy $IS \perp AB$.

66. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Niech D, E, F będą odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach BCO, CAO, ABO. Dowieść, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Mamy:

$$\sphericalangle FDB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ODB = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ODC = \sphericalangle EDC\,,$$

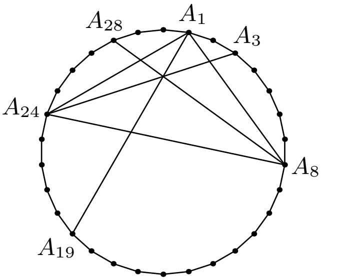
i analogicznie $\sphericalangle DEC = \sphericalangle FEA$ oraz $\sphericalangle EFA = \sphericalangle DFB$. Stąd na mocy zadania 26 z działu „8 zadań, które powinieneś już znać” uzyskujemy tezę.

64. Wykazać, że w 30-kącie foremnym $A_1A_2A_3\ldots A_{30}$ przekątne A_1A_{19}, A_3A_{24} oraz A_8A_{28} przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Skorzystamy z trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy dla trójkąta $A_1A_8A_{24}$ oraz z zależności

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{oraz} \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$



rys. 16

Niech $\alpha = 6^\circ$. Wówczas

$$\frac{\sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha \cdot \sin 11\alpha}{\sin 3\alpha \cdot \sin 5\alpha \cdot \sin 5\alpha} = \frac{4\sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}{\sin 3\alpha} =$$
$$= \frac{2\sin 2\alpha \cdot \sin 8\alpha}{\sin 3\alpha} =$$
$$= \frac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{\sin 3\alpha} =$$
$$= \frac{\cos 36^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 18^\circ} = \frac{(\sqrt{5}+1)-2}{\sqrt{5}-1} = 1.$$

Drugi Mecz Matematyczny:

68. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n największy wspólny dzielnik liczb $5^{2^n}+1$, $26^{2^n}+1$, $65^{2^n}+1$ jest postaci $2^{n+2}\cdot k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla $n=1$ największy wspólny dzielnik danych w zadaniu liczb jest równy 1, możemy więc przyjąć w dalszej części rozumowania, że $n \geqslant 2$.

Niech p będzie dowolnym wspólnym dzielnikiem pierwszym danych w zadaniu liczb. Wówczas

$$5^{2^n} \equiv -1 \pmod{p},$$

$$26^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$$

oraz

$$65^{2^n} \equiv -1 \pmod{p},$$

skąd wobec równości $2 = 5\cdot 26/65$ otrzymujemy

$$2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Zatem najmniejszym wykładnikiem dodatnim w, dla którego $2^w \equiv 1 \pmod{p}$ jest $w = 2^{n+1}$, skąd wynika, że liczba $p-1$ jest podzielna przez 2^{n+1}. W konsekwencji liczba $p-1$ jest podzielna przez 8. Tak więc 2 jest resztą kwadratową *modulo* p, a to implikuje, że liczba $p-1$ jest podzielna przez 2^{n+2}.

Uwaga

Można podejrzewać, że być może największy wspólny dzielnik liczb danych w zadaniu jest zawsze równy 1. Jednak dla $n=125$ wszystkie trzy liczby są podzielne przez

$$5\cdot 2^{127}+1=850705917302346158658436518579420528641\,.$$

69. W przestrzeni dane są punkty A_1, A_2, ..., A_{257}, z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Każde dwa z wybranych punktów połączono odcinkiem koloru kanarkowego, ziębowego, drozdowego, wróblowego lub gawronowego. Dowieść, że istnieją takie $i<j<k<\ell$, że łamana $A_iA_jA_kA_\ell$ jest pomalowana jednym kolorem.

Rozwiązanie

Każdemu punktowi A_i przypisujemy piątkę liczb (k_i,z_i,d_i,w_i,g_i), długości najdłuższych jednokolorowych łamanych o rosnących indeksach wierzchołków, zaczynających się w A_i. Zauważmy, że dla różnych elementów $i<j$ te piątki są różne. Skoro mamy $257>3^5$, to istnieje takie i, że wśród liczb k_i,z_i,d_i,w_i,g_i występuje liczba większa od 3.

70. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n spełniają warunek

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=10n\,.$$

Dowieść, że

$$100\sum_{i=1}^{n} x_i^4+9999\sum_{i=1}^{n} x_i^2+101n>2000\sum_{i=1}^{n} x_i^3\,.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\left(10x^2-100x-\frac{1}{20}\right)^2\geqslant 0\,,$$

czyli

$$100x^4-2000x^3+9999x^2+10x+\frac{1}{400}\geqslant 0\,.$$

Zatem

$$100\sum_{i=1}^{n} x_i^4-2000\sum_{i=1}^{n} x_i^3+9999\sum_{i=1}^{n} x_i^2+10\sum_{i=1}^{n} x_i+\frac{n}{400}\geqslant 0\,,$$

co po uporządkowaniu daje

$$100\sum_{i=1}^{n} x_i^4+9999\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\left(100+\frac{1}{400}\right)n\geqslant 2000\sum_{i=1}^{n} x_i^3\,.$$

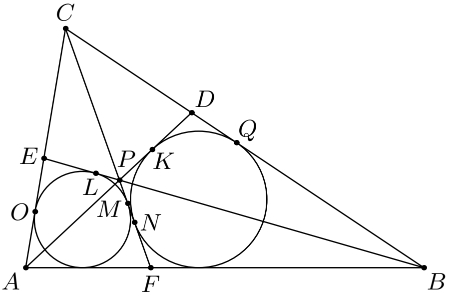
71. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Proste AP, BP, CP przecinają boki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Okręgi wpisane w czworokąty $BFPD$ i $AFPE$ są styczne do odcinków PD i PE odpowiednio w punktach K i L. Udowodnić, że $DK = EL$.

Rozwiązanie

Ponieważ w czworokąty $AFPE$ i $BFPD$ można wpisać okręgi, więc

$$AC + BP = AB + CP = BC + AP.$$

Z równości tej wynika, że w czworokąt $CDPE$ można wpisać okrąg, skąd uzyskujemy $CD + PE = CE + PD$.



rys. 17

Oznaczmy punkty styczności okręgów wpisanych w czworokąty $AFPE$ i $BFPD$ z bokami tych czworokątów, jak pokazano na rysunku 17. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $AC \leqslant BC$. Wówczas

$$(CD+DK)-(CE+EL) = CN-CO = MN = PK-PL = (PD-DK)-(PE-EL),$$

skąd uwzględniając równość $CD + PE = CE + PD$ otrzymujemy tezę.

72. Rozstrzygnąć, czy istnieje 2006 kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest postaci $a^2 + pb^2$, gdzie a, b są całkowite oraz $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia Dirichleta w każdym rosnącym postępie arytmetycznym liczb naturalnych o różnicy względnie pierwszej z początkowym wyrazem istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. W szczególności istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $840n + 173$.

Wykorzystując prawo wzajemności reszt kwadratowych ustalamy, że dla dowolnej liczby pierwszej q postaci $840n + 173$, liczby -2, -3, -5, -7 są nieresztami kwadratowymi *modulo* q.

Jeżeli $-p$ jest nieresztą kwadratową *modulo* q, to liczba $a^2 + pb^2$ może dzielić się przez q tylko wtedy, gdy obie liczby a, b są podzielne przez q. Wynika stąd, że każda liczba postaci $a^2 + pb^2$ jest albo niepodzielna przez przez q, albo podzielna przez q^2.

Niech teraz $q_0, q_1, \ldots, q_{2005}$ będą różnymi liczbami pierwszymi, dla których liczby -2, -3, -5, -7 są nieresztami kwadratowymi. Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje taka liczba naturalna n, że

$$n+i \equiv q_i \pmod{q_i^2}$$

dla $i=0,1,\ldots,2005$.

Wówczas liczby $n, n+1, n+2, \ldots, n+2005$ spełniają warunki zadania.

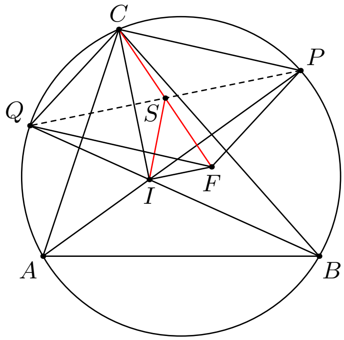
73. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q, różnych od A i B. Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to proste IC i IF są prostopadłe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\sphericalangle ICQ = \sphericalangle ICA + \sphericalangle ACQ = \sphericalangle ICB + \sphericalangle ABQ = \sphericalangle ICB + \sphericalangle IBC = \sphericalangle CIQ\,,$$

skąd otrzymujemy $CQ = IQ$ (rys. 18). Analogicznie dostajemy $CP = IP$. Wobec tego punkty C oraz I są symetryczne względem prostej PQ.



rys. 18

Oznaczmy przez S punkt przecięcia przekątnych CF i PQ równoległoboku $PCQF$. Wówczas $SF = SC = SI$. Stąd wynika, że punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ICF, a więc $\sphericalangle CIF = 90°$.

74. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, taką że liczba $\binom{3n}{n}\cdot\binom{2n}{n}+2$ jest podzielna przez 7 lub wykazać, że taka liczba n nie istnieje.

Rozwiązanie

Jeżeli p jest liczbą pierwszą oraz

$$m = c_k p^k + c_{k-1} p^{k-1} + \ldots + c_1 p + c_0$$

oraz

$$n = d_k p^k + d_{k-1} p^{k-1} + \ldots + d_1 p + d_0\,,$$

gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_k, d_0, d_1, \ldots, d_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, to

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{c_k}{d_k} \cdot \binom{c_{k-1}}{d_{k-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{c_1}{d_1} \cdot \binom{c_0}{d_0} \pmod{p}\,.$$

W szczególności

$$\binom{m}{n} \not\equiv 0 \pmod{p}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \geqslant d_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, k$. Zatem

$$\binom{3n}{n}\binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod{7}$$

tylko wtedy, gdy n ma w zapisie siódemkowym tylko cyfry 0, 1 i 2. Wówczas

$$\binom{3n}{n}\binom{2n}{n} \equiv (-1)^j \pmod{7}\,,$$

gdzie j jest liczbą jedynek i dwójek w zapisie siódemkowym liczby n.

Stąd wynika, że liczba n o żądanych własnościach nie istnieje.

75. Rozstrzygnąć, czy sześcian o krawędzi 100 można podzielić na prostopadłościany o wymiarach $1\times1\times51$ i $1\times1\times53$.

Rozwiązanie

Podzielmy sześcian na milion sześcianów o krawędzi 1. Położenie każdego sześcianu podziału możemy opisać przy pomocy trójki współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 100\}$.

Niech

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 49 \\ 1/2 & \text{dla } 50 \leqslant n \leqslant 51 \\ (-1)^{n+1} & \text{dla } 52 \leqslant n \leqslant 100 \end{cases}$$

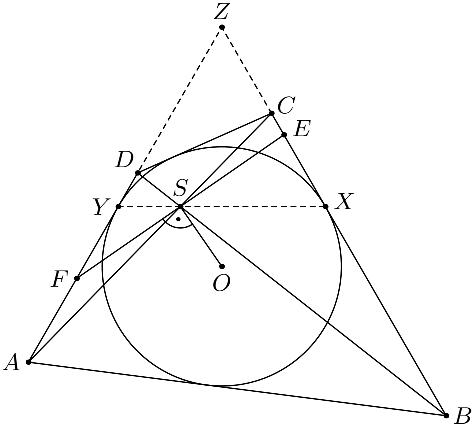
Wpiszmy w sześcian o współrzędnych (x, y, z) liczbę $a_x a_y a_z$.

Wówczas każdy prostopadłościan o wymiarach $1\times1\times51$ lub $1\times1\times53$ pokrywa sześciany o sumie liczb 0, podczas gdy suma wszystkich liczb wpisanych w sześciany podziału jest równa 1.

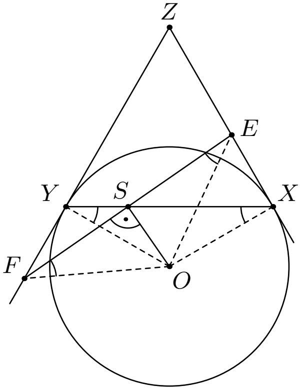
76. Okrąg o środku O jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie S różnym od O. Prosta przechodząca przez punkt S i prostopadła do prostej OS przecina odcinki BC i DA odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że $ES = FS$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X, Y odpowiednio punkty styczności okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$ z bokami BC, DA (rys. 19). Wówczas na mocy twierdzenia Brianchona punkt S leży na odcinku XY.



rys. 19



rys. 20

Zauważmy dalej, że skoro $\sphericalangle FYO = \sphericalangle FSO = 90°$, to punkty F, O, S, Y leżą na jednym okręgu (rys. 20). Analogicznie punkty X, O, S, E leżą na jednym okręgu. Stąd $\sphericalangle OSE = \sphericalangle OYX = \sphericalangle OXY = \sphericalangle OEF$, co oznacza, że trójkąt OEF jest równoramienny. Wobec tego $ES = FS$.

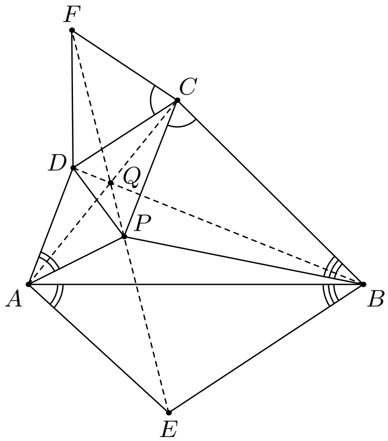
77. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ i $\sphericalangle BPC = \sphericalangle APD$. Na bokach AB i CD tego czworokąta zbudowano, po jego zewnętrznej stronie trójkąty ABE i CDF, przy czym

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAP, \quad \sphericalangle ABE = \sphericalangle CBP,$$
$$\sphericalangle CDF = \sphericalangle ADP, \quad \sphericalangle DCF = \sphericalangle BCP.$$

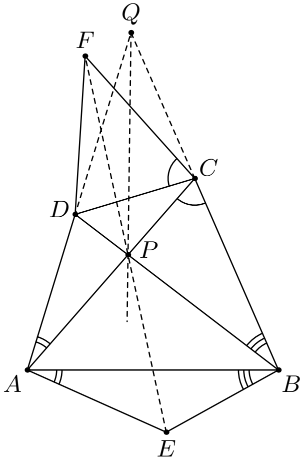
Wykazać, że punkty E, F, P leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez Q punkt przecięcia przekątnych AC i BD (rys. 21). Jeśli $P \neq Q$, to na mocy zadania 26, z działu „8 zadań, które powinieneś już znać”, punkty E i F leżą na prostej PQ.



rys. 21



rys. 22

Przyjmijmy więc, że $P = Q$ oraz niech proste BC i AD przecinają się w punkcie Q (rys. 22). Wówczas punkty Q i E są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABP. Zatem prosta EP jest symetryczna do prostej PQ względem dwusiecznej kąta APB.

Analogicznie, punkty Q i F są izogonalnie sprzężone w trójkącie CDP, skąd wynika, że prosta FP jest symetryczna do prostej PQ względem dwusiecznej kąta APB. Stąd proste EP i FP pokrywają się, a zatem punkty E, F, P leżą na jednej prostej.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy $P = Q$ oraz $BC \parallel AD$. Wtedy mamy $\sphericalangle EAP + \sphericalangle EBP = 180^\circ$. Zatem punkty A, E, B, F leżą na jednym okręgu. Analogicznie punkty C, F, D, P leżą na jednym okręgu. Wobec tego

$$\sphericalangle EPB = \sphericalangle AEB = \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle FCD = \sphericalangle FPD,$$

skąd wynika, że punkty E, P, F leżą na jednej prostej.

78. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje ciągłe $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, że dla każdego $x\in(0,\infty)$ spełnione są warunki:

- $f(x)=f(\frac{1}{x})$,
- $f(x^2)=(f(x))^2-2$,
- $f(x^3)=(f(x))^3-3f(x)$.

Rozwiązanie

Wstawiając $x=1$ w drugim warunku dostajemy $f(1)=(f(1))^2-2$, skąd $f(1)=2$ bądź $f(1)=-1$. Wstawiając $x=1$ w trzecim warunku widzimy, iż równość $f(1)=-1$ nie może mieć miejsca. Zatem $f(1)=2$.

Udowodnimy teraz, że f przyjmuje wartości w przedziale $[2,\infty)$. Przypuśćmy, iż dla pewnego $x\neq 1$ mamy $f(x)<2$. Bez straty ogólności możemy przyjąć $x<1$. Dla dowolnego całkowitego nieujemnego n mamy, na mocy drugiego warunku,

$$f(x^{2^{n+1}})=(f(x^{2^n}))^2-2=[f(x^{2^n})-2]\cdot[f(x^{2^n})+1]+f(x^{2^n})<f(x^{2^n}),$$

skąd wynika, iż ciąg $(f(x^{2^n}))$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ jest malejącym ciągiem liczb dodatnich mniejszych od 2. Jest on zbieżny do pewnej liczby $g<2$, która spełnia warunek $g=g^2-2$. Zatem $g=-1$ i dla dostatecznie dużych n mamy $f(x^{2^n})<0$, co przeczy warunkom zadania. Tak więc $f(x)\geqslant 2$ dla wszystkich dodatnich x.

Mamy $f(2)\geqslant 2$, a więc istnieje liczba nieujemna α taka, że $f(2)=2^\alpha+2^{-\alpha}$. Wykażemy, że dla dowolnej liczby dodatniej x mamy

$$f(x)=x^\alpha+x^{-\alpha}. \tag{1}$$

Jeśli liczba x spełnia równanie (1), to na mocy warunków zadania, x^2, x^3 oraz $\sqrt{x}$ także; istotnie,

$$f(x^2)=(x^\alpha+x^{-\alpha})^2-2=x^{2\alpha}+x^{-2\alpha},$$

$$f(x^3)=(x^\alpha+x^{-\alpha})^3-3(x^\alpha+x^{-\alpha})=x^{3\alpha}+x^{-3\alpha}.$$

Ponadto,

$$f(x)=x^\alpha+x^{-\alpha}=(f(\sqrt{x}))^2-2,$$

skąd

$$(f(\sqrt{x}))^2=((\sqrt{x})^\alpha+(\sqrt{x})^{-\alpha})^2,$$

co w połączeniu z faktem, iż f przyjmuje wartości dodatnie, daje

$$f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^\alpha+(\sqrt{x})^{-\alpha}.$$

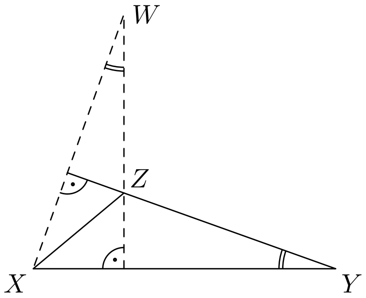
Tak więc równość (1) zachodzi dla wszystkich liczb postaci $2^{2^n\cdot 3^m}$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą, a m jest dowolną liczbą całkowitą nieujemną. Wystarczy już tylko zauważyć, że dla dowolnej liczby dodatniej $x\geqslant 2$ istnieje ciąg liczb tej postaci, zbieżny do x. Na mocy ciągłości funkcji f wnioskujemy, iż równość (1) zachodzi dla dowolnej liczby dodatniej $x\geqslant 2$, co w połączeniu z pierwszym warunkiem w treści zadania daje, iż (1) zachodzi dla dowolnego x dodatniego.

VI Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne:

1. Danych jest 5 różnych punktów A, B, C, D, E leżących w tej właśnie kolejności na okręgu o promieniu r, przy czym $AC=BD=CE=r$. Rozpatrujemy trójkąt o wierzchołkach będących ortocentrami trójkątów ACD, BCD, BCE. Wykazać, że ten trójkąt jest prostokątny.

Rozwiązanie

W każdym trójkącie rozwartokątnym XYZ o kącie rozwartym Z i ortocentrum W, kąty XYZ oraz XWZ są równe. Ponadto, Y oraz W leżą po różnych stronach prostej XZ (rys. 23).



rys. 23

Niech P, Q, R będą ortocentrami trójkątów ACD, BCD, BCE, odpowiednio. Udowodnimy, że $\sphericalangle PQR=90^\circ$. Trójkąty ACD, BCD, BCE są rozwarte (o kątach rozwartych przy wierzchołku C), a zatem P, Q, R leżą na przedłużeniach wysokości opuszczonych z punktu C na odpowiednie boki. Jest jasne, że odcinek CQ leży „pomiędzy" odcinkami CP i CR, tzn. wewnątrz kąta PCR. Wobec tego $\sphericalangle PQR= =\sphericalangle RQC+\sphericalangle PQC$ (rys. 24).

Na mocy uwag poczynionych na wstępie, punkty Q, R leżą po tej samej stronie prostej BC oraz

$$\sphericalangle BEC=\sphericalangle BRC \quad \text{i} \quad \sphericalangle BDC=\sphericalangle BQC.$$

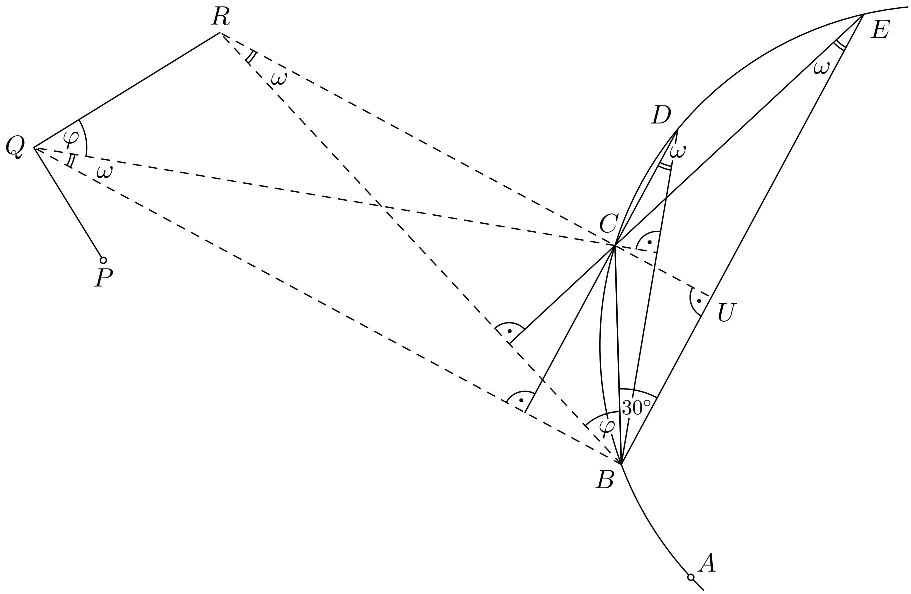
Kąty BEC i BDC są równe, gdyż są oparte na tym samym łuku BC. Zatem $\sphericalangle BRC=\sphericalangle BQC=\omega$ i na czworokącie $BCRQ$ można opisać okrąg. Zatem $\sphericalangle RQC= =\sphericalangle RBC=\phi$. Ponadto, równość $EC=r$ implikuje, iż $\sphericalangle EBC=30^\circ$. Niech U będzie spodkiem wysokości w trójkącie BEC, opuszczonej z punktu C. Obliczając kąty w trójkącie prostokątnym BUR dostajemy

$$\omega+\phi+30^\circ+90^\circ=180^\circ, \quad \text{czyli} \quad \sphericalangle RQC=\phi=60^\circ-\omega=60^\circ-\sphericalangle BDC.$$

W analogiczny sposób otrzymujemy związek $\sphericalangle PQC=60^\circ-\sphericalangle DBC$. Wobec tego mamy (korzystając z faktu, iż suma kątów w trójkącie BCD wynosi 180°)

$$\sphericalangle PQR=\sphericalangle RQC+\sphericalangle PQC=120^\circ-(\sphericalangle BDC+\sphericalangle DBC)=\sphericalangle BCD-60^\circ.$$

Ale $BD=r$, co pociąga za sobą $\sphericalangle BCD=150^\circ$. Korzystając z powyższej równości dostajemy tezę.



rys. 24

2. Przy okrągłym stole siedzi n dzieci. Erika jest najstarszą spośród nich i ma n cukierków. żadne inne dziecko nie ma cukierków. Erika postanawia rozdzielić cukierki według następujących zasad. W każdym ruchu dzieci mające co najmniej dwa cukierki podnoszą rękę. Erika wybiera jedno z nich, po czym wybrane dziecko daje po jednym cukierku każdemu ze swoich sąsiadów. (Zatem w pierwszym ruchu tylko Erika podnosi rękę i daje po jednym cukierku swoim sąsiadom.)

Dla jakich wartości $n\geqslant 3$ można doprowadzić do sytuacji, w której każde dziecko ma dokładnie jeden cukierek?

Rozwiązanie

Najpierw udowodnimy, że dla parzystych n nie można rozdzielić cukierków tak, aby każde dziecko miało po jednym cukierku. Ponumerujmy siedzenia zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara tak, by Erika siedziałą na krześle z numerem 0. Każdemu cukierkowi przypisujemy numer krzesła jego właściciela i niech S będzie sumą wszystkich liczb przypisanych wszystkim cukierkom. Zobaczmy teraz, co stanie się z liczbą S po jednym ruchu. Jeśli Erika wybierze dziecko siedzące na krześle o numerze k, $1\leqslant k\leqslant n-2$, to liczba S nie zmieni się. Jeśli wybrane zostanie dziecko siedzące na krześle o numerze $n-1$, liczba S zmniejszy się o n, natomiast w przypadku gdy

Erika wybierze siebie samą, liczba S wzrośnie o n. Ponieważ w sytuacji początkowej mamy $S=0$, to po dowolnej liczbie ruchów liczba S będzie podzielna przez n. Ale w sytuacji, gdy każde dziecko ma jeden cukierek, mamy

$$S=0+1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

co, w przypadku gdy n jest liczbą parzystą, nie dzieli się przez n.

Udowodnimy indukcyjnie, że dla n nieparzystych, $n=2k+1$, można doprowadzić do sytuacji, w której każde dziecko ma jeden cukierek. Ściślej, wykażemy, że dla każdego $i=0,\ 1,\ \ldots,\ k$ możemy tak rozdzielić cukierki, by Erika miała ich $n-2i$, a ponadto i dzieci siedzących na lewo oraz i dzieci siedzących na prawo od niej miało po jednym cukierku. Przypadek $i=0$ odpowiada sytuacji początkowej, $i=1$ - sytuacji po pierwszym ruchu, a $i=k$ - sytuacji, do której chcemy doprowadzić.

Załóżmy, że dla $i=m$, $1\leqslant m<k$, rozdzielono cukierki zgodnie z powyższym opisem. Wykonujemy teraz następujący ciąg ruchów (liczby stojące w ciągu odpowiadają liczbie cukierków będących w posiadaniu Eriki oraz dzieci siedzących na prawo od niej. Dodatkowo przyjmujemy, iż jeśli w danym ruchu dziecko siedzące na krześle o numerze $l\in\{1,2,\ldots,k-1\}$ (wyznaczonym przez podkreślenie) dzieli się cukierkami, to w następnym ruchu to samo robi dziecko siedzące na krześle o numerze $n-l$).

$$\underline{n-2m},\underbrace{1,\ldots,1}_{m},0,\ldots \rightarrow n-2m-2,\underline{2},\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1},0,\ldots \rightarrow n-2m,0,\underline{2},\underbrace{1,\ldots,1}_{m-2},0,\ldots \rightarrow$$
$$\rightarrow n-2m,1,0,\underline{2},\underbrace{1,\ldots,1}_{m-3},0,\ldots \rightarrow n-2m,1,1,0,\underline{2},\underbrace{1,\ldots,1}_{m-4},0,\ldots \rightarrow \ldots \rightarrow$$
$$\rightarrow n-2m,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-2},0,\underline{2},0,\ldots \rightarrow n-2m,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1},0,1,0,\ldots.$$

Aby uzyskać teraz sytuację odpowiadającą przypadkowi $i=m+1$, należy dać cukierek dziecku siedzącemu na krześle z numerem m. Wykonując analogiczny ciąg ruchów jak wyżej, mamy

$$\underline{n-2m},\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1},0,1,0,\ldots \rightarrow \ldots \rightarrow \quad n-2m,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-2},0,1,1,0,\ldots \rightarrow \quad \ldots$$
$$\rightarrow n-2m,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-3},0,1,1,1,0,\ldots \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow \quad n-2m,0,\underbrace{1,\ldots,1}_{m},0,\ldots \rightarrow$$
$$\rightarrow n-2m-2,\underbrace{1,\ldots,1}_{m+1},0,\ldots.$$

3. Suma czterech liczb rzeczywistych jest równa 9, a suma ich kwadratów wynosi 21. Wykazać, że liczby te można oznaczyć przez a, b, c, d w taki sposób, aby spełniona była nierówność $ab-cd\geqslant 2$.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy dane liczby przez $p,\ q,\ r,\ s$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $p\geqslant q\geqslant r\geqslant s$.

Rozważmy najpierw przypadek $p+q\geqslant 5$. Wówczas mamy

$$p^2+q^2+2pq\geqslant 25=4+(p^2+q^2+r^2+s^2)\geqslant 4+p^2+q^2+2rs,$$

co jest równoważne nierówności $pq-rs\geqslant 2$.

Przypuśćmy teraz, że $p+q<5$. Zatem

$$4<r+s\leqslant p+q<5. \tag{1}$$

Zauważmy, że

$$(pq+rs)+(pr+qs)+(ps+qr)=\frac{(p+q+r+s)^2-(p^2+q^2+r^2+s^2)}{2}=30.$$

Ponadto,

$$pq+rs\geqslant pr+qs\geqslant ps+qr,$$

gdyż $(p-s)(q-r)\geqslant 0$ oraz $(p-q)(r-s)\geqslant 0$.

Z powyższych związków wynika, iż $pq+rs\geqslant 10$.
Na mocy (1) mamy $0\leqslant (p+q)-(r+s)<1$, skąd

$$(p+q)^2-2(p+q)(r+s)+(r+s)^2<1.$$

Dodając do powyższej nierówności stronami równość

$$(p+q)^2+2(p+q)(r+s)+(r+s)^2=9^2$$

otrzymujemy $\qquad (p+q)^2+(r+s)^2<41.$

Zatem

$$41=21+2\cdot 10\leqslant (p^2+q^2+r^2+s^2)+2(pq+rs)=(p+q)^2+(r+s)^2<41,$$

sprzeczność.

Sposób II

Przyjmując oznaczenia $p,\ q,\ r,\ s$ jak wyżej, mamy

$$\frac{p+q}{2}=\frac{9}{4}+e_1,\qquad \frac{r+s}{2}=\frac{9}{4}-e_1$$

dla pewnego $e_1\geqslant 0$. Zatem

$$p=\frac{9}{4}+e_1+e_2,\ q=\frac{9}{4}+e_1-e_2,\ r=\frac{9}{4}-e_1+e_3,\ s=\frac{9}{4}-e_1-e_3$$

dla pewnych $e_2,\ e_3\geqslant 0$.

Na mocy warunku $q \geqslant r$ dostajemy

$$e_1 - e_2 \geqslant -e_1 + e_3, \quad \text{czyli} \quad e_2 + e_3 \leqslant 2e_1.$$

Ponieważ

$$21 = (p^2+q^2)+(r^2+s^2) = 2\cdot\left(\frac{9}{4}+e_1\right)^2 + 2e_2^2 + 2\cdot\left(\frac{9}{4}-e_1\right)^2 + 2e_3^2 =$$

$$= 4\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 4e_1^2 + 2e_2^2 + 2e_3^2 = 20 + \frac{1}{4} + 2\cdot(2e_1^2 + e_2^2 + e_3^2),$$

wnioskujemy, iż liczby e_1, e_2, e_3 spełniają równość

$$2e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = \frac{3}{8}. \tag{2}$$

Łącząc powyższy związek z nierównościami $e_2+e_3 \leqslant 2e_1$, $e_2^2+e_3^2 \leqslant (e_2+e_3)^2$ otrzymujemy

$$\frac{3}{8} \leqslant 2e_1^2 + (e_2+e_3)^2 \leqslant 2e_1^2 + 4e_1^2 = 6e_1^2.$$

Zatem $e_1^2 \geqslant 1/16$, czyli $e_1 \geqslant 1/4$. Wobec tego

$$pq - rs = \left(\frac{9}{4}+e_1\right)^2 - e_2^2 - \left(\frac{9}{4}-e_1\right)^2 + e_3^2 = 9e_1 - e_2^2 + e_3^2.$$

Korzystając z (2), mamy więc

$$pq - rs = 9e_1 - \left(\frac{3}{8} - 2e_1^2 - e_3^2\right) + e_3^2 = 9e_1 + 2e_1^2 - \frac{3}{8} + 2e_3^2 \geqslant 9\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{16} - \frac{3}{8} = 2,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

4. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ istnieje dodatnia liczba całkowita n o następującej własności: liczba 2^n posiada w rozwinięciu dziesiętnym blok złożony z dokładnie k kolejnych zer, tzn.

$$2^n = \ldots\underbrace{00\ldots0}_{k\ \text{zer}}b\ldots,$$

gdzie a, b są cyframi różnymi od zera.

Rozwiązanie

Najpierw wykażemy, że wśród liczb będących potęgami liczby 2 można znaleźć liczby posiadające dowolnie długie ciągi zer w swoim rozwinięciu dziesiętnym. Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią k. Aby liczba 2^n miała *co najmniej* k zer w swoim rozwinięciu, musi być postaci $y\cdot 10^{m+k}+z$, gdzie y i z są dodatnimi liczbami całkowitymi i z ma co najwyżej m cyfr, tzn. $z < 10^m$. Zatem wystarczy wyznaczyć n, m o takiej własności, że 2^n, przy dzieleniu przez 10^{m+k}, daje resztę mniejszą niż 10^m. Na mocy twierdzenia Eulera, dla każdej liczby całkowitej dodatniej t mamy

$$2^{\phi(5^t)} \equiv 1 \pmod{5^t}.$$

Mnożąc obustronnie przez 2^t dostajemy

$$2^{t+\phi(5^t)} \equiv 2^t \pmod{5^t}, \quad \text{zatem} \quad 2^{t+\phi(5^t)} = y\cdot 10^t + 2^t$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej y. Weźmy $n = t+\phi(5^t)$ i $m = t-k$; wystarczy teraz przyjąć np. $t = 2k$, aby był spełniony warunek $2^t < 10^{t-k}$. Wobec tego, liczba

$$2^{2k+\phi(5^{2k})} = y\cdot 10^{2k} + 2^{2k}$$

posiada ciąg co najmniej k zer w swoim rozwinięciu.

Rozważmy teraz potęgę liczby 2 mającą ciąg dokładnie r zer w swoim rozwinięciu, $r \geqslant k$, i spójrzmy, co się stanie z tym ciągiem, jeśli tę liczbę pomnożymy przez 2. Mamy

$$2^n = \underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{00\ldots 0}_{r\text{ zer}}\underbrace{b\ldots}_{z} = y\cdot 10^{r+s} + z.$$

Wówczas $2^{n+1} = 2y\cdot 10^{r+s} + 2z$. Liczba $2z$ ma albo tę samą liczbę cyfr, co z, albo jedną cyfrę więcej. Zatem „po prawej stronie” ciąg zer albo się nie zmienia, albo jedno zero zostaje „ucięte”. Po „lewej stronie”, ciąg zer może tylko się zwiększyć i ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy y dzieli się przez 5. Podsumowując, po pomnożeniu przez 2 ciąg zer albo jest krótszy o jedno zero, albo posiada tę samą liczbę zer, albo wydłuża się.

Weźmy teraz liczbę 2^n skonstruowaną powyżej i zacznijmy ją mnożyć przez kolejne potęgi 2. Gdyby wśród otrzymanych liczb nie było żadnej mającej ciąg dokładnie k zer w swoim rozwinięciu, to wszystkie te liczby musiałyby mieć ciągi co najmniej $k+1$ zer w swoim rozwinięciu. To jest jednak niemożliwe: niech α będzie taką nieujemną liczbą całkowitą, że $5^\alpha | y$ i $5^{\alpha+1} \nmid y$. Jeśli pomnożymy α razy liczbę 2^n przez 2, wówczas następne mnożenia przez 2 nie będą już wydłużać „lewej strony” ciągu zer, natomiast przynajmniej co czwarte z nich będzie skracać (o 1) „prawą stronę”. Kończy to dowód.

5. Wyznaczyć liczbę takich ciągów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb całkowitych, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n spełnione są warunki

$$a_n \neq -1 \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+2} = \frac{a_n + 2006}{a_{n+1}+1}.$$

Rozwiązanie

Mamy

$$\begin{aligned} a_3(a_2+1) &= a_1 + 2006,\\ a_4(a_3+1) &= a_2 + 2006,\\ a_5(a_4+1) &= a_3 + 2006,\\ &\ldots \end{aligned}$$

Odejmując kolejne równości stronami dostajemy

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_3-a_1&=(a_3+1)(a_4-a_2),\\ a_4-a_2&=(a_4+1)(a_5-a_3),\\ a_5-a_3&=(a_5+1)(a_6-a_4),\\ &\ldots. \end{aligned}$$

Na mocy warunków zadania, wszystkie liczby postaci a_n+1 są różne od zera. Przypuśćmy, że $a_3-a_1\neq 0$. Wówczas $a_4-a_2\neq 0$, $a_5-a_3\neq 0$, ... i na mocy (1),

$$(2)\qquad 0<|a_{n+3}-a_{n+1}|=|a_{n+2}-a_n|\cdot\frac{1}{|a_{n+2}+1|}\leqslant|a_{n+2}-a_n|$$

dla $n\geqslant 1$. Otrzymujemy więc nierosnący ciąg liczb dodatnich

$$|a_3-a_1|\geqslant|a_4-a_2|\geqslant|a_5-a_3|\geqslant\ldots.$$

Ciąg ten musi więc być stały od pewnego miejsca: istnieją takie liczby całkowite dodatnie N, d, że $|a_{n+2}-a_n|=d$ dla $n\geqslant N$. Na mocy (2) dostajemy stąd $|a_{n+2}+1|=1$, a zatem $a_n\in\{0,-2\}$ dla $n\geqslant N+2$. Ale z definicji

$$a_{N+4}=\frac{a_{N+2}+2006}{a_{N+3}+1},$$

skąd a_{N+4} jest równe jednej z czterech liczb

$$\frac{0+2006}{0+1}=2006,\quad \frac{0+2006}{-2+1}=-2006,\quad \frac{-2+2006}{0+1}=2004,\quad \frac{-2+2006}{-2+1}=-2004,$$

sprzeczność. Wobec tego przypadek $a_3-a_1\neq 0$ nie może mieć miejsca.

Załóżmy więc, że $a_3-a_1=0$. Mamy $a_4-a_2=0$, $a_5-a_3=0$, ..., czyli

$$(3)\qquad a_1=a_3=a_5=\ldots \quad\text{oraz}\quad a_2=a_4=a_6=\ldots,$$

wobec tego ciąg (a_n) ma wyrazy całkowite o ile a_1 i a_2 są całkowite. Dalej, na mocy warunków zadania, mamy

$$a_1=\frac{a_1+2006}{a_2+1},\quad\text{czyli}\quad a_1a_2=2006=2\cdot 17\cdot 59.$$

Biorąc pod uwagę fakt, iż $a_1,\ a_2\neq -1$, dostajemy 14 rozwiązań:

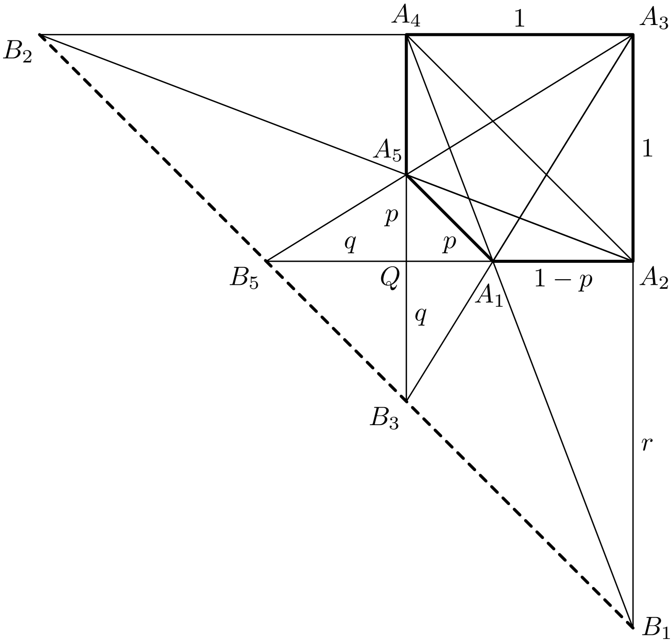
$$a_1\in\{1,\ \pm2,\ \pm17,\ \pm34,\ \pm59,\ \pm118,\ \pm1003,\ 2006\}\quad\text{i}\quad a_2=\frac{2006}{a_1}.$$

Jak łatwo sprawdzić, każdy ciąg zadany powyższym związkiem oraz równościami (3) spełnia warunki zadania. Wobec tego szukana liczba w zadaniu wynosi 14.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki pięciokąt wypukły $A_1A_2A_3A_4A_5$, że dla $i=1$, 2, 3, 4, 5 proste A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ nie są równoległe, przecinają się w punkcie B_i oraz punkty B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 leżą na jednej prostej. (Przyjmujemy, że $A_6=A_1$, $A_7=A_2$, $A_8=A_3$.)

Rozwiązanie

Taki pięciokąt istnieje. Najpierw rozwiążemy nieco prostszy problem - znajdziemy pięciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5$, dla którego cztery spośród punktów B_i (skonstruowanych jak w treści zadania) są współliniowe. Niech A_2, A_3, A_4 będą wierzchołkami kwadratu $QA_2A_3A_4$ o boku 1. Niech A_1, A_5 będą takimi punktami leżącymi na bokach QA_2 i QA_4, że $QA_1=QA_5=p$ (rys. 25).



rys. 25

Z symetrii mamy $B_1B_2||B_3B_5$. Zauważmy, że gdy $p\to 0$, tzn. gdy A_1 i A_5 są blisko Q, prosta B_3B_5 jest bliżej punktu Q niż prosta B_1B_2. Z drugiej strony, gdy $p\to 1$, punkty A_1, A_5 są blisko A_2, A_4, odpowiednio, i prosta A_1B_2 jest bliżej Q (bądź nawet po drugiej stronie punktu Q) niż prosta B_3B_5. Możemy więc się spodziewać, że przy odpowiednim doborze parametru p obie te proste się pokryją, a zatem punkty B_1, B_2, B_3, B_5 będą współliniowe. Wyznaczymy wartość tego parametru.

Niech $B_5Q = B_3Q = q$ i $B_1A_2 = r$. Na mocy podobieństwa trójkątów B_5QA_5 i $B_5A_2A_3$ dostajemy

$$\frac{q}{p} = \frac{q+1}{1}, \quad \text{czyli} \qquad q = \frac{p}{1-p}.$$

Podobieństwo trójkątów $B_1A_2A_1$, $B_1A_3A_4$ pociąga za sobą

$$\frac{r}{1-p} = \frac{r+1}{1}, \quad \text{czyli} \qquad r = \frac{1-p}{p}.$$

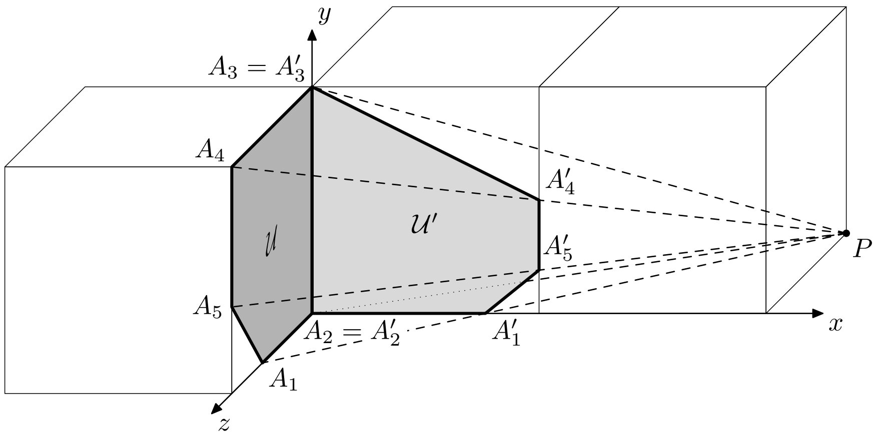
Aby punkt B_1 leżał na prostej B_3B_5 wystarczy, by trójkąty B_5QB_3 i $B_5A_2B_1$ były podobne. Ma to miejsce, gdy

$$\frac{q}{q} = \frac{q+1}{r}, \quad \text{czyli} \qquad q+1 = r.$$

W połączeniu z poprzednimi równościami dostajemy, iż B_1 leży na prostej B_3B_5, gdy

$$\frac{p}{1-p} + 1 = \frac{1-p}{p},$$

czyli, równoważnie, $p^2 - 3p + 1 = 0$. Jedynym rozwiązaniem tego równania, należącym do przedziału $(0,1)$ jest $p = (3-\sqrt{5})/2$. Dla tej wartości parametru p punkty B_1, B_3, B_5, B_2 leżą na jednej prostej, która jest, dodatkowo, równoległa do prostych A_1A_5 i A_2A_4. W pewnym sensie te trzy proste przecinają się „w nieskończoności" w „punkcie" B_4 i wszystkie punkty B_i są współliniowe. Aby skonstruować pięciokąt spełniający warunki zadania wystarczy znaleźć odpowiednie przekształcenie, które przeprowadza „punkt w nieskończoności" na pewien punkt (i zachowuje wszystkie odpowiednie własności, np. przekształca proste na proste, itp.). Takim przekształceniem będzie odpowiedni rzut.



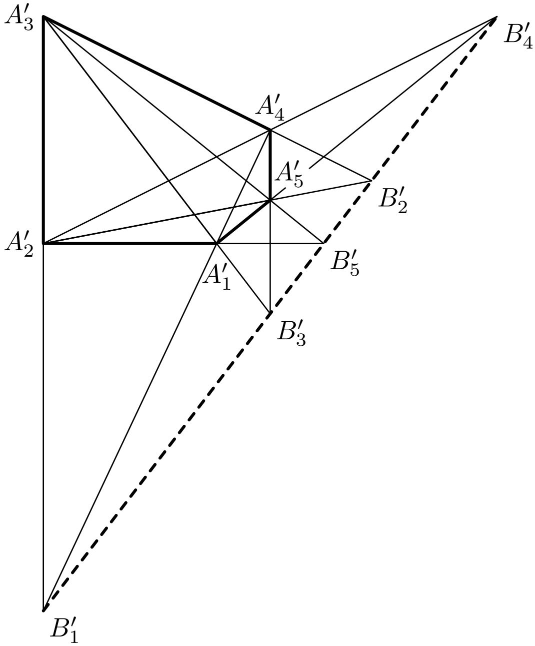
rys. 26

Rozważmy układ współrzędnych w przestrzeni. Pięciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5 = \mathcal{U}$ można zanurzyć w płaszczyźnie $\mathcal{O}_{yz}$ tak, aby A_2 pokrył się z początkiem układu współrzędnych oraz punkty A_1, A_3 leżały na dodatnich półosiach z, y, odpowiednio (rys. 26).

Niech $P = (2, 0, -1)$ będzie środkiem rzutu. Każda prosta PA_i przecina płaszczyznę $\mathcal{O}_{xy}$ w pewnym punkcie A'_i. Otrzymujemy więc pięciokąt $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5 = \mathcal{U}'$. Na mocy własności rozważanego rzutu, pięciokąt $\mathcal{U}'$ spełnia warunki zadania. Można to także sprawdzić rachunkowo, wyznaczając współrzędne punktów A'_i na płaszczyźnie $\mathcal{O}_{xy}$:

$$A'_1 = (3-\sqrt{5}, 0), \quad A'_2 = (0,0), \quad A'_3 = (1,0), \quad A'_4 = (1, \frac{1}{2}), \quad A'_5 = (1, \frac{3-\sqrt{5}}{4}).$$

Następnie łatwo wyznaczyć współrzędne punktów B_i i sprawdzić, iż leżą one na jednej prostej (rys. 27).



rys. 27

Uwaga: Zadanie można rozwiązać bez odwoływania się do pięciokąta o tej własności, że cztery spośród punktów B_i są współliniowe. Można wziąć pięciokąt foremny, dla którego proste A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ są równoległe, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, i przekształcić go przez odpowiedni rzut: wszystkie punkty B'_i będą leżeć w zbiorze niemającym przeciwobrazu przy tym przekształceniu. Tym zbiorem jest jednak prosta.

Regulamin Meczu Matematycznego

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy.

3. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

4. Podczas rozgrywki ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania rozwiązania jednego z zadań. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą.

5. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie.

6. Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie, Kapitan drużyny **wywołującej** wyznacza zawodnika drużyny wywołanej do zreferowania rozwiązania przy tablicy. Rozwiązannie to jest oceniane przez Jury.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny **zakończył referowanie zadania** nie mniej razy niż on. Oznacza to w szczególności, że zawodnik odwołany może zostać wyznaczony do kolejnego zadania. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny wywołanej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Kapitan drużyny referującej prosi wówczas drużynę przeciwną o wyznaczenie nowego referującego. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu. Jeżeli do referowania wyznaczono kapitana, wskazuje on swego zastępcę.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania wynosi **10 minut**. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, może poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieje na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że zakończył referowanie, drużyna przeciwna zgłasza zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli Jury uznaje rozwiązanie za poprawne, punktuje je od 5 do 10 punktów. Jury może przyznać drużynie wywołującej te punkty, które zostały odjęte drużynie rozwiązującej, jeżeli usterki rozwiązania zostały przez tę drużynę zauważone.

13. Jeżeli Jury nie uznaje rozwiązania za poprawne, żadna drużyna nie otrzymuje punktów, chyba że drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie. Wtedy ma ona prawo do przedstawienia własnego rozwiązania na zasadach i przy punktacjiokreślonych w punktach **6–12**.

14. Jeżeli drużyna wywołana nie przyjmie zadania, rozwiązuje je drużyna wywołująca zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–12**. Jeśli jednak nie przedstawi ona poprawnego rozwiązania, otrzyma –10 (minus dziesięć) punktów.

15. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo dwa zadania.

17. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

notatki

notatki

Spis treści