Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 29 maja - 12 czerwca 2008

(wydanie pierwsze)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 29 maja - 12 czerwca 2008

Dom wczasowy „Zgoda”, Zwardoń 45A
34-373 Zwardoń
tel. 0-33-864-63-28

Kadra:
Joanna Bogdanowicz
Wojciech Czerwiński
Maciej Gawron
Tomasz Kobos
Michał Krych
Przemysław Mazur
Jakub Onufry Wojtaszczyk

Olimpiada Matematyczna w Internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 29 maja - 12 czerwca 2008 r. w Zwardoniu, w pensjonacie „Zgoda”. Kadrę obozu stanowili: Joanna Bogdanowicz, Wojciech Czerwiński, Maciej Gawron, Tomasz Kobos, Michał Krych, Przemysław Mazur oraz Jakub Onufry Wojtaszczyk.

W dniach 30 i 31 maja oraz 1, 2, 3, 6, 7, 9 i 10 czerwca uczestnicy obozu rozwiązywali zadania indywidualne (przy czym 1 czerwca miały miejsce wyjątkowe zawody indywidualne, z okazji Dnia Dziecka), dnia 8 czerwca odbyły się zawody drużynowe, a 4 i 11 czerwca rozegrane zostały „mecze matematyczne” (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy otrzymywali 4 zadania (jedynie w Dzień Dziecka 8) i mieli na ich rozwiązanie 4,5 godziny. Zawody drużynowe, jak i mecze matematyczne trwały cały dzień. Dla uczestników, którzy rozwiązali już wszystkie zadania przygotowane zostały nieobowiązkowe „zadania nieco trudniejsze niż pozostałe”, za które nie można było otrzymać punktów, lecz nagrodę.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to: 185 punktów, 172 punkty i 165 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie.

Dla uczestników zorganizowane zostały dwie wycieczki: 4 czerwca piesza wycieczka na Wielką Raczę, a 8 czerwca wycieczka pociągiem do Żyliny na Słowacji.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu oraz szkice ich rozwiązań.

Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych Olimpiady Matematycznej znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`.

Kadra obozu Zwardoń 2008

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

Zad.	l. prac na 6p.	l. prac na 5p.	l. prac na 2p.	l. prac na 0p.
1.	15	1	2	3
2.	5	-	-	16
3.	12	-	-	9
4.	5	4	-	12
5.	14	1	-	6
6.	14	2	-	5
7.	-	1	-	20
8.	4	1	1	15
DD1.	20	-	-	1
DD2.	2	-	-	19
DD3.	6	-	-	15
DD4.	12	2	-	7
DD5.	7	-	-	14
DD6.	10	2	1	8
DD7.	16	1	-	4
DD8.	5	-	-	16
9.	17	-	1	3
10.	16	-	-	5
11.	5	-	-	16
12.	1	-	-	20

Zad.	l. prac na 6p.	l. prac na 5p.	l. prac na 2p.	l. prac na 0p.
13.	18	-	-	3
14.	12	2	-	7
15.	3	-	-	18
16.	4	-	3	14
17.	14	1	-	6
18.	12	-	-	9
19.	6	3	-	12
20.	2	-	-	19
21.	8	-	1	12
22.	5	-	-	16
23.	2	-	-	19
24.	2	-	2	17
25.	4	11	-	6
26.	11	4	-	6
27.	3	-	-	18
28.	2	-	-	19
29.	20	-	-	1
30.	7	1	-	13
31.	9	-	-	12
32.	9	1	2	9

Uwaga: Każda praca była oceniana w skali 0, 2, 5, 6 punktów, przy czym zadania z Dnia Dziecka liczone były z wagą $\frac{1}{2}$.

Spis treści

Wstęp 3

Zestawienie ocen 4

Spis treści 5

Treści zadań 7

Zawody indywidualne 7

Dzień Dziecka 11

Zawody drużynowe 12

Pierwszy mecz matematyczny 13

Drugi mecz matematyczny 15

Zadania nieco trudniejsze 16

Rozwiązania 19

Zawody indywidualne 19

Dzień Dziecka 47

Zawody drużynowe 52

Pierwszy mecz matematyczny 59

Drugi mecz matematyczny **71**

Zadania nieco trudniejsze **87**

Regulamin Meczu Matematycznego 110

Treści zadań

Zawody indywidualne:

1. Każdą liczbę naturalną pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją różne liczby naturalne $a, b > n$ takie, że liczby a, b i $a + b$ są jednego koloru.

2. Niech O i I oznaczają odpowiednio środek okręgu opisanego i wpisanego w nierównoboczny trójkąt ABC. Udowodnić, że $\angle AIO \leqslant 90^\circ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2BC \leqslant AB + AC$.

3. Liczbę naturalną n nazywamy *wypasioną*, jeżeli dla każdej liczby pierwszej p dzielącej n liczba p^2 również dzieli n. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele liczb n takich, że n oraz $n + 1$ są wypasione.

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ spełniające dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich x i y warunek

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

5. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (gdzie $n \geqslant 4$) spełniają warunki

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$$

oraz

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n^2.$$

Dowieść, że przynajmniej jedna z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest nie mniejsza niż 2.

6. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$ takie, że wszystkie liczby naturalne mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny.

7. Zabezpieczenie sejfu składa się z trzech kół, z których każde może być ustawione w jednej z ośmiu pozycji. Z powodu uszkodzenia mechanizmu blokującego sejf drzwiczki do sejfu można otworzyć, gdy dowolne dwa koła znajdują się w prawidłowej pozycji. Rozstrzygnij jaka jest najmniejsza liczba prób, która gwarantuje otworzenie sejfu.

8. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt K leży na boku AB, punkt L na boku AC oraz punkty K, O i L są współliniowe. Punkt R jest środkiem odcinka BL, zaś S jest środkiem odcinka CK. Udowodnij, że $\measuredangle BAC = \measuredangle SOR$.

9. Dany jest ostrokątny trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Dwusieczna kąta A przecina bok BC w punkcie V, natomiast D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z A. Okrąg opisany na trójkącie AVD przecina boki AB i CA odpowiednio w punktach F i E. Dowieść, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

10. Szachownicę $2009^{2008} \times 2009^{2008}$ wypełniono liczbami rzeczywistymi o module niewiększym niż 1. Co więcej suma liczb w każdym kwadracie 2×2 jest zerem. Udowodnić, że suma wszystkich liczb na szachownicy nie przekracza 2009^{2008}.

11. Niech C będzie liczbą dodatnią, zaś $a_1, a_2, \ldots$ nieskończonym ciągiem liczb dodatnich spełniającym dla każdego $i = 1, 2, \ldots$ warunek $0 \leqslant a_i \leqslant C$ oraz dla każdych liczb $1 \leqslant i < j$ nierówność $\frac{1}{i+j} \leqslant |a_i - a_j|$. Udowodnić, że $C \geqslant 1$.

12. Niech P będzie unormowanym wielomianem dziesiątego stopnia o współczynnikach całkowitych. Rozstrzygnąć, czy liczby $P(0)$, $P(1)$, $\ldots, P(100)$ mogą dawać parami różne reszty przy dzieleniu przez 101.

13. Wielomian P spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x).$$

Udowodnić, że jeśli P ma pierwiastek rzeczywisty, to jest tożsamościowo równy zero.

14. Niech okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Pewna prosta przechodząca przez B przecina o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Proste styczne do o_1 w C i o_2 w D przecinają się w punkcie M. Proste AM i CD przecinają się w punkcie X. Punkt K jest takim punktem na prostej AC, że proste XK i MC są równoległe. Udowodnić, że prosta KB jest styczna do okręgu o_2.

15. Dane są trzy liczby całkowite a, b, c i liczba pierwsza $p \geqslant 5$. Udowodnić, że jeżeli an^2+bn+c jest kwadratem liczby całkowitej dla $2p-1$ kolejnych wartości n, to $p|b^2-4ac$.

16. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Tablica $n \times n$ jest wypełniona liczbami 0 i 1 w ten sposób, że każdy podzbiór n pól, z których żadne 2 nie leżą w jednej kolumnie ani w jednym wierszu zawiera co najmniej jedno pole z liczbą 1. Dowieść, że istnieje i wierszy i j kolumn, gdzie $i+j \geqslant n+1$, takich, że na przecięciu każdego wiersza i każdej kolumny jest liczba 1.

17. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że suma cyfr liczby 3^n jest nie mniejsza niż suma cyfr liczby 3^{n+1}.

18. Dany jest wielomian stopnia n spełniający zależność $P(i) = 2^i$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Wyznaczyć $P(n+1)$.

19. Na płaszczyźnie dany jest wielokąt W o polu większym od n. Udowodnić, że można tak przesunąć równolegle wielokąt W, że w jego wnętrzu znajdzie się co najmniej $n+1$ punktów kratowych.

20. Niech KL i KN będą stycznymi do okręgu k w punktach L i N. M jest takim punktem, że K, N, M leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Okrąg opisany na trójkącie KLM przecina okrąg k w punkcie P. Punkt Q jest rzutem prostopadłym N na prostą ML. Udowodnić, że $\measuredangle MPQ = 2\measuredangle KML$.

21. Ahmed i Fredek grają w grę na szachownicy $n \times n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Ahmed stawia kółka, a Fredek krzyżyki. Na początku wszystkie pola są puste, tylko w lewym dolnym rogu jest kółko, a w prawym górnym jest krzyżyk. Zaczyna Ahmed. Ruch gracza polega na postawieniu swojego znaczka na wolnym polu sąsiadującym przez krawędź z polem, na którym jest już postawiony jego znaczek. Gdy gracz nie może wykonać ruchu, to traci go. Gra kończy się, gdy żaden z graczy nie może wykonać ruchu. Grę wygrywa ten gracz, który wykonał więcej ruchów. Rozstrzygnij, który z graczy posiada strategię wygrywającą.

22. Dany jest wielomian P stopnia $n \geqslant 2$ o współczynnikach całkowitych dodatnich a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 spełniających warunki: $a_{n-k} = a_k$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $a_n = a_0 = 1$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych a, b takich, że $a|P(b)$ i $b|P(a)$.

23. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a D — punktem styczności tego okręgu z bokiem BC. Okrąg ω jest styczny do prostej BC w punkcie D a do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie T, przy czym A i T leżą po jednej stronie prostej BC. Dowieść, że $\measuredangle ATI = 90°$.

24. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takie, że $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Udowodnić nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n}} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

25. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu A. Na pewnej prostej przechodzącej przez D wybrano takie punkty E i F, różne od D, że $\measuredangle AEB = \measuredangle AFC = 90°$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków BC i EF. Dowieść, że $\measuredangle ANM = 90°$.

26. Dane jest $2n$ parami różnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ oraz tablica $n \times n$. W pole leżące w i-tym wierszu i w j-tej kolumnie tablicy wpisano liczbę $a_i + b_j$. Udowodnić, że jeśli iloczyny liczb we wszystkich kolumnach są równe, to również iloczyny liczb we wszystkich wierszach są równe.

27. W pola tablicy $n \times n$ wpisano wszystkie liczby naturalne od 1 do n^2. Udowodnić, że istnieją dwa pola sąsiadujące krawędzią takie, że wpisane w nie liczby różnią się o co najmniej n.

28. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Udowodnić, że liczba $2^{2^n} + 1$ posiada dzielnik pierwszy, który jest większy niż $2^{n+2}(n+1)$.

29. Liczby dodatnie a, b, x, y spełniają równości $a^2 + x = b^2 + y$ oraz $a + x^2 = b + y^2$, a także nierówność $a + b + x + y < 2$. Dowieść, że $a = b$ oraz $x = y$.

30. Rozstrzygnąć czy istnieją parami względnie pierwsze liczby naturalne $a,\ b,\ c > 1$, dla których zachodzą warunki: $a|2^b + 1$, $b|2^c + 1$, $c|2^a + 1$.

31. Sfery opisana oraz wpisana w czworościan $ABCD$ mają wspólny środek, $AB = CD$ oraz wszystkie ściany tego czworościanu są trójkątami ostrokątnymi. Udowodnić, że środki krawędzi czworościanu $ABCD$ leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy jest on foremny.

32. Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden podział zbioru liczb naturalnych na rozłączne zbiory A i B spełniający warunek: dla dowolnej liczby naturalnej n liczba sposobów zapisania n w postaci $a_i + a_j$, gdzie $a_i, a_j \in A$ i $a_i \neq a_j$ jest równa liczbie sposobów zapisania n w postaci $b_i + b_j$, gdzie $b_i, b_j \in B$ i $b_i \neq b_j$.

Dzień Dziecka:

1. W załączniku do zadań masz aktualną kopię punktacji poszczególnych uczestników obozu. Dla ciągu rzeczywistych liczb $a_1, a_2, \ldots a_8$ *zmodyfikowanym wynikiem* zawodnika nazywamy liczbę $\sum_{i=1}^{8} a_i P_i$, gdzie P_i to liczba punktów, które ten zawodnik zdobył z i–tego zadania. Twoim zadaniem jest tak dobrać wagi a_i, abyś był liderem rankingu zmodyfikowanych wyników ex aequo z jak najmniejszą liczbą innych zawodników.

2. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych a, b takie, że $a^3 = 6b^2 + 2$.

3. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym o polu 1, zaś P dowolnym punktem w jego wnętrzu. Przez D, E, F oznaczamy rzuty prostokątne P odpowiednio na BC, CA i AB. Znajdź najmniejszą możliwą sumę pól trójkątów BDP, CEP i FAP.

4. Mając daną kartkę papieru $A5$ skonstruować (bez użycia cyrkla tudzież linijki) trójkąt równoboczny. Można założyć, że boki kartki $A5$ dzielą się w stosunku $1 : \sqrt{2}$.
Uwaga: Do opisu konstrukcji należy dołączyć skonstruowany trójkąt.

5. Czy z kwadratowej kartki papieru o wymiarach $7,99 \times 7,99$ potrafisz wyciąć 50 kwadratów jednostkowych?

6. Rozstrzygnij, czy istnieje 2008 różnych trójek parami względnie pierwszych liczb naturalnych a, b, c takich, że a^2, b^2 i c^2 tworzą ciąg arytmetyczny.

7. Joszua rzuca monetą n razy, zaś Ahmed $n+1$ razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że Ahmed wyrzuci więcej orłów niż Joszua.

8. Udowodnij, że dla każdego $x \in (0,1)$ i każdych liczb naturalnych m, n zachodzi nierówność

$$(1-x^n)^m + (1-(1-x)^m)^n \geqslant 1.$$

Zawody drużynowe:

1. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ tożsamość

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)).$$

2. Rozstrzygnąć czy istnieje zbiór liczb naturalnych S mocy 2008 taki, że suma elementów dowolnego podzbioru S jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym od 1.

3. Dana jest rodzina T podzbiorów k elementowych zbioru n elementowego S, przy czym $n > 2k$. Każdy $k+1$ elementowy podzbiór S zawiera dokładnie $m \geqslant 1$ zbiorów z rodziny T. Wykazać, że T zawiera wszystkie k elementowe podzbiory S.

4. Dany jest okrąg ω i rozłączne, styczne do niego wewnętrznie, okręgi ω_1, ω_2 o środkach O_1, O_2. Niech A i B będą punktami styczności wspólnej stycznej zewnętrznej ω_1, ω_2 odpowiednio z ω_1 i ω_2. Wspólne styczne wewnętrzne ω_1, ω_2 przecinają ω w punktach C, D, przy czym punkty A, B, C i D leżą po tej samej stronie prostej O_1O_2. Udowodnić, że proste AB i CD są równoległe.

5. Znaleźć figurę $F \subseteq \mathbb{R}^2$ o jak najmniejszym polu, w której da się obrócić odcinek, tzn. istnieje funkcja ciągła $f : [0,1] \times [0,1] \to F$ taka, że $f(0,0) = f(1,1)$ oraz $f(0,1) = f(1,0)$ oraz dla każdych $p, q, t \in [0,1]$ zachodzi $d(f(p,t), f(q,t)) = |p-q|$, gdzie d to metryka euklidesowa w $\mathbb{R}^2$.

Pierwszy mecz matematyczny:

1. *Kulką* będziemy nazywać kulę o promieniu 1. Układ n parami rozłącznych kulek zawartych w kuli K o promieniu R nazywamy *dobrym*, gdy nie da się dołożyć do niego kolejnej kulki (rozłącznej i zawartej w K), zaś *mega–dobrym*, jeśli jest dobry oraz nie istnieje dobry układ o większej liczbie kulek. Dla dwóch mega–dobrych układów X i Y udowodnić, że da się tak ustawić środki kulek z układu X w ciąg $A_1, A_2, \ldots, A_n$, zaś środki kulek z układu Y w ciąg $B_1, B_2, \ldots, B_n$, że dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ długość odcinka A_iB_i nie przekracza 2.

2. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^+$ tożsamość

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

Uwaga: $\mathbb{R}^+$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

3. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi nierówność

$$21ab + 2bc + 8ca \leqslant 12.$$

Znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

4. Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p. Udowodnić, że zachodzi kongruencja

$$\sum_{i=1}^{p-1} 2^i i^{p-2} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^{p-2} \pmod{p}.$$

5. W czworościanie $ABCD$ na krawędziach AB, AC, AD, BC, BD, CD wybrano odpowiednio punkty K, L, M, N, O, P tak, że są one różne od wierzchołków. Udowodnić, że sfery opisane na czworościanach $AKLM$, $BKNO$, $CLNP$ i $DMOP$ przecinają się w jednym punkcie.

6. Ahmed i Fredek zdecydowali się zagrać w grę. Tym razem mają nieskończoną szachownicę, początkowo pustą. Ruch polega na postawieniu swojego znaku (Ahmed gra kółkami, Fredek zaś krzyżykami, Ahmed rusza się pierwszy) na dowolnym pustym polu. Zwycięża gracz, któremu uda się ustawić n swoich znaków w sąsiadujących polach jednego wiersza, kolumny lub skosu. Rozstrzygnąć, czy istnieje takie n, dla którego przy dobrej grze Fredka Ahmed nie zdoła wygrać w skończonej liczbie ruchów.

7. Znaleźć wszystkie wielomiany P takie, że dla każdego x rzeczywistego zachodzi równość

$$P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1.$$

8. Dany jest ciąg wektorów jednostkowych $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Rozstrzygnąć, czy możemy dobrać taki ciąg znaków, że dla każdego k wektor $\sum\limits_{i=1}^{k} \pm v_i$ leży w kole o promieniu 3.

9. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^3+2x+1 = 2^n$ w liczbach naturalnych.

10. Okrąg o środku O jest styczny wewnętrznie do dwóch okręgów w jego wnętrzu w punktach S i T. Okręgi te przecinają się w punktach M i N, przy czym punkt N leży bliżej prostej ST. Udowodnić, że proste OM i MN są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty S, N, T leżą na jednej prostej.

11. Niech a będzie liczbą naturalną większą od 1. Ciąg a_n definiujemy wzorem

$$a_n = a^{n+1} + a^n - 1.$$

Wykazać, że istnieje podciąg ciągu a_n, którego dowolne dwa wyrazy są względnie pierwsze.

12. Symetralne boków AB i BC nierównobocznego trójkąta ABC przecinają boki BC i AB odpowiednio w punktach A_1 i C_1. Dwusieczne kątów A_1AC i C_1CA przecinają się w punkcie B', a punkty A' oraz C' definiujemy analogicznie. Dowieść, że punkty A', B', C' leżą na jednej prostej, która przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Drugi mecz matematyczny:

1. Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ niech A oznacza liczbę sposobów na jaką można zapisać n w postaci sumy liczb całkowitych dodatnich nieparzystych, a B niech oznacza liczbę sposobów na jaką można zapisać n w postaci sumy różnych liczb całkowitych dodatnich (w obu zapisach nie zwracamy uwagi na kolejność występowania składników). Udowodnić, że $A = B$.

2. Niech $k,\ t > 1$ będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Mając daną permutację $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ możemy zamienić w niej dwie liczby miejscami jeśli różnią się o k lub t. Wykazać, że zaczynając od permutacji $(1, 2, ..., n)$ możemy otrzymać każdą permutację zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \geqslant k + t - 1$.

3. Zbiory $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ są podzbiorami zbioru n-elementowego A, przy czym każdy z nich ma co najmniej 2 elementy. Dla każdego dwuelementowego podzbioru A' zbioru A istnieje dokładnie jeden taki A_i, że $A' \subseteq A_i$. Udowodnić, że jeśli $1 \leqslant i, j \leqslant n$ to $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

4. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = 1 \\ 2b^2 - 3c^2 = 1 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$$

5. Niech $a_1, a_2, ..., a_n$ będą różnymi liczbami naturalnymi. Dowieść, że zachodzi nierówność

$$a_1^7 + a_2^7 + ... + a_n^7 + a_1^5 + a_2^5 + ... + a_n^5 \geqslant 2(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3)^2$$

6. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnić, że wielomian $(x^2 + x)^{2^n} + 1$ jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

7. $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, w którym prosta AC jest dwusieczną kąta BAD. Punkt E leży na odcinku CD, a F jest przecięciem BE i AC. Odcinek DF przedłużamy do przecięcia z bokiem BC w punkcie G. Wykazać, że $\measuredangle GAC = \measuredangle EAC$.

8. Dany jest nierozwartokątny trójkąt ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości z A, natomiast I_1 oraz I_2 są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD. Prosta I_1I_2 przecina AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że $AP = AQ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = AC$ lub $\measuredangle A = 90°$.

9. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o jest styczny do odcinków AB i AC odpowiednio w punktach D i E, różnych od B i C. Ten sam okrąg przecina bok BC w punktach K i L. Odcinki AL i DE przecinają się w punkcie P, a przekątne czworokąta $BCED$ przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że punkty $P,\ Q,\ K$ są współliniowe.

10. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną $n > 1$, dla której średnia kwadratowa liczb $1,\ 2, ...,\ n$ jest liczbą całkowitą.

11. Dla danego $h = 2^r$, gdzie $r \geqslant 0$, wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których istnieje $m > 1$ nieparzyste oraz liczba naturalna n taka, że $k | m^h - 1$ oraz $m | n^{\frac{m^h-1}{k}} + 1$.

12. Rozstrzygnąć dla jakich liczb naturalnych a istnieje nieskończenie wiele liczb bezkwadratowych n takich, że $n | a^n - 1$.

Zadania nieco trudniejsze:

1. Wśród n osób niektóre trójki były razem na imprezie. Dla każdych dwóch różnych osób A i B istnieje dokładnie jedna osoba C taka, że A, B i C byli razem na imprezie. Co więcej, jeśli dla sześciu różnych osób A, B, C, X, Y, Z trójki A, B, X, B, C, Y oraz C, A, Z były razem na imprezie, to również X, Y, Z byli razem na imprezie. Znaleźć wszystkie n, dla których taka sytuacja jest możliwa.

2. Niech punkty D, B, C, E leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności i niech punkt A spełnia równości $AB = DB$ oraz $AC = EC$. Poprowadźmy dwusieczne kątów $\angle ABC$ oraz $\angle ACB$ i ich przecięcia z okręgiem opisanym na trójkącie ABC oznaczmy odpowiednio przez K i L, zaś ich przecięcia z przeciwległymi bokami trójkąta ABC odpowiednio przez P i Q. Niech O_1 będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie DBL, zaś O_2 środkiem okręgu opisanego na trójkącie ECK. Przez S oznaczmy punkt przecięcia CO_1 i BO_2. Udowodnić, że $AS \perp PQ$.

3. Dane jest n liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o iloczynie równym 1. Wykazać, że

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.$$

4. W każdym punkcie kratowym płaszczyzny, który ma niedodatnią współrzędną x położono jeden pionek. Dozwolone są ruchy polegające na wybraniu pewnej pary pionków stojących na sąsiadujących w pionie lub poziomie punktach A i B i „zbicie" jednym z nich drugiego, tj. zdjęcie pionka z pola A i przestawienie pionka z pola B na taki punkt C, że A jest środkiem odcinka BC (w punkcie C, na który przestawiamy pionek z punktu B, nie mógł dotychczas stać żaden pionek). Znaleźć największe x, dla którego istnieje skończona sekwencja dozwolonych ruchów, po której pewien pionek znajduje się w punkcie (x, y) (dla pewnego y).

5. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, a n liczbą naturalną. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej m liczba $P(2^m)$ jest n-tą potęgą pewnej liczby naturalnej. Dowieść, że wtedy dla pewnego wielomianu Q o współczynnikach całkowitych zachodzi: $P(x) = (Q(x))^n$.

6. Niech S_1, S_2 będą okręgami przecinającymi się w dwóch różnych punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okrąg S_1 w punkcie C, a okrąg S_2 w punkcie D. Punkty M, N, K leżą odpowiednio na odcinkach CD, BC, BD oraz prosta MN jest równoległa do BD, a prosta MK jest równoległa do BC. Łuki BC okręgu S_1 oraz BD okręgu S_2 zawierają odpowiednio punkty E i F, przy czym prosta EN jest prostopadła do BC, a prosta FK jest prostopadła do BD. Dowieść, że kąt $\angle EMF$ jest prosty.

7. Udowodnić, że istnieje liczba postaci 333333^{333333^n}, gdzie n jest liczbą naturalną, zakończona 333333^{333333} trójkami w zapisie dziesiętnym.

8. Wielomiany W i V nazywamy względnie pierwszymi jeśli nie istnieje wielomian U stopnia dodatniego taki, że $U|W$ i $U|V$. Niech P, Q i R będą względnie pierwszymi wielomianami stopnia dodatniego. Udowodnić, że jeżeli zachodzi

$$\Big(P(x)\Big)^n + \Big(Q(x)\Big)^n = \Big(R(x)\Big)^n,$$

to $n \leqslant 2$.

9. $S_1, S_2, ..., S_{2008}$ są podzbiorami zbioru $\{1, 2, \ldots, 2008\}$, z których każdy ma parzystą liczbę elementów. Dowieść, że dla pewnych liczb $1 \leqslant i < j \leqslant 2008$ zbiór $S_i \cap S_j$ również ma parzystą liczbę elementów.

10. W nierównoramiennym trójkącie ABC punkty M_a, M_b, M_c oznaczają odpowiednio środki boków BC, CA, AB. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a punkty A', B', C' są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z bokami BC, CA, AB. Prosta k jest prostą symetryczną do prostej BC względem prostej AI, a prosta l jest prostą prostopadła do prostej IM_a i przechodzącą przez punkt A'. X_a jest punktem przecięcia prostych k i l, a punkty X_b i X_c definiujemy analogicznie. Wykazać, że punkty X_a, X_b, X_c leżą na jednej prostej, która jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

11. Udowodnić, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leqslant 3$$

12. Na płaszczyźnie dany jest n-kąt wypukły P. Trójkąt utworzony z trzech różnych wierzchołków P nazywamy *dobrym* jeśli wszystkie jego boki mają długość 1. Dowieść, że jest nie więcej niż $\frac{2}{3}n$ dobrych trójkątów.

13. Ciąg (e_n) definiujemy tak: $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, a e_{n+1} jest najmniejszą liczbą, która jeszcze nie wystąpiła w ciągu i $NWD(e_n, e_{n+1}) > 1$. Udowodnić, że dla każdej odpowiednio dużej liczby pierwszej p pierwszym wyrazem ciągu (e_n) podzielnym przez p jest wyraz $2p$.

Rozwiązania

Zawody indywidualne:

1. Każdą liczbę naturalną pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją różne liczby naturalne $a, b > n$ takie, że liczby a, b i $a + b$ są jednego koloru.

Rozwiązanie
Sposób I
Pokażemy najpierw, że istnieją $a, b \geqslant 1$ takie, że a, b i $a + b$ są jednego koloru. Przypuśćmy przeciwnie.

Nazwijmy kolory czerwony i niebieski. Bez straty ogólności załóżmy, że 1 jest niebieskie. Jeśli nie istnieje już żadna inna liczba niebieska, to w oczywisty sposób dostajemy sprzeczność, więc istnieje pewna liczba niebieska - n. Wówczas $n - 1$ oraz $n + 1$ są czerwone. Gdyby 2 było czerwone, to dostalibyśmy w ten sposób czerwoną trójkę $(2, n-1, n+1)$ - zatem 2 jest niebieskie. Skoro 1 i 2 są niebieskie, to 3 jest czerwone.

Analogicznie jak poprzednio wnioskujemy, że istnieje pewna liczba niebieska większa od 4 - niech będzie to n. Wówczas $n - 1$ oraz $n + 2$ są czerwone. Jednak wówczas trójka $3, n - 1, n + 2$ jest czerwona i spełnia założenia zadania. Sprzeczność.

Analogicznie możemy wykazać, że istnieją $a, b \geqslant n + 1$ spełniające założenia zadania, rozpatrując zamiast zbioru $\mathbb{N}$ zbiór $(n + 1)\mathbb{N}$, gdzie $k\mathbb{N} = \{n : n = km, m \in \mathbb{N}\}$.

Sposób II
Przypuśćmy nie wprost, że nie istnieją takie liczby $a, b > n$, że a, b i $a + b$ są jednego koloru. Nazwijmy kolory czerwony i niebieski. Bez straty ogólności niech $n+1$ będzie czerwone. Istnieją co najmniej 2 liczby czerwone większe od $2n + 2$, w przeciwnym wypadku od pewnego momentu wszystkie liczby byłyby niebieskie i teza byłaby spełniona. Niech $a > b$ będą liczbami czerwonymi i niech $b > 2n + 2$. Zatem liczby $b + a, b - (n + 1), (n + 1) + a$ są niebieskie i wszystkie różne. Jednak $(b-(n+1))+((n+1)+a) = b+a$, czyli istnieje niebieska trójka złożona z liczb większych od n. Sprzeczność.

2. Niech O i I oznaczają odpowiednio środek okręgu opisanego i wpisanego w nierównoboczny trójkąt ABC. Udowodnić, że $\angle AIO \leqslant 90^\circ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2BC \leqslant AB + AC$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez T punkt przecięcia dwusiecznej kąta BAC z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Punkt I leży wówczas na boku AT trójkąta AOT i nietrudno zauważyć, że nierówność $AIO \leqslant 90^\circ$ jest równoważna temu, że $TI \leqslant AI$. Powszechnie wiadomo (lub jest to proste ćwiczenie), że $TB = TI = TC$. Z Twierdzenia Ptolemeusza wnioskujemy jednocześnie, że

$$TC \cdot AB + TB \cdot AC = AT \cdot BC$$

czyli też

$$TI \cdot (AB + AC) = (AI + TI) \cdot BC.$$

Dlatego warunek $TI \leqslant AI$ równoważny jest warunkowi

$$TI \cdot (AB + AC) \geqslant 2TI \cdot BC$$

lub po prostu

$$AB + AC \geqslant 2BC$$

i dowód jest zakończony.

3. Liczbę naturalną n nazywamy *wypasioną*, jeżeli dla każdej liczby pierwszej p dzielącej n liczba p^2 również dzieli n. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele liczb n takich, że n oraz $n + 1$ są wypasione.

Rozwiązanie

Sposób I

Tak, istnieje nieskończenie wiele n takich, że n i $n + 1$ są wypasione. Zauważmy, że iloczyn dwóch liczb wypasionych jest liczbą wypasioną oraz, że kwadraty liczb naturalnych również są wypasione. Załóżmy więc, że n i $n + 1$ są wypasione. Wówczas wypasiona jest też liczba $4n(n + 1)$. Jednocześnie $4n(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$, a więc ta liczba także jest wypasiona. Oznacza to, że mając daną parę kolejnych liczb naturalnych, które są wypasione możemy wygenerować parę większych, gdyż jasne jest, że $n < 4n(n+1)$. Aby zakończyć rozwiązanie wystarczy zauważyć, iż liczby 8 oraz 9 są wypasione.

Sposób II

Równanie Pella $a^2 - 8b^2 = 1$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych. Dla każdego takiego rozwiązania możemy przyjąć $n+1 = a^2$, wtedy $n = 8b^2$ i oczywiście obie te liczby są wypasione, czyli znaleźliśmy nieskończenie wiele liczb n spełniających żądany warunek.

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ spełniające dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich x i y warunek

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy $C = f(1)+1$. Podstawiając $x = y = 1$ otrzymujemy $f(C) = C$. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej k zachodzą równości $f(kC) = kC$ oraz $f(kC+1) = kC + f(1)$.

Początek indukcji: istotnie $f(C) = C$; podstawiając $x = 1$, $y = C$ otrzymujemy $f(1+C) = f(1) + C$.

Krok indukcyjny:

podstawiając $x = 1$ oraz $y = kC$ otrzymujemy $f(1+kC) = f(1) + kC$.

Podstawiając $x = 1$, $y = kC + 1$ otrzymujemy

$$f((k+1)C) = f(1 + kC + f(1)) = f(1 + f(kC+1)) = \\ = f(1) + kC + 1 = (k+1)C.$$

Teza indukcji została udowodniona.

Pokażemy teraz, że $f(1) = 1$. Można to zrobić na różne sposoby. Zauważmy, że funkcja f jest różnowartościowa, gdyż jeśli $f(a) = f(b)$, to

$$xf(x) + a = f(x^2 + f(a)) = f(x^2 + f(b)) = xf(x) + b\,,$$

więc $a = b$.

Podstawiając $x = C$, $y = 1$ mamy

$$f(C^2 + f(1)) = Cf(C) + 1 = C^2 + 1.$$

Dla $x = C^2 + f(1)$, $y = 1$ dostajemy

$$f((C^2 + f(1))^2 + f(1)) = (C^2 + f(1))(C^2 + 1) + 1.$$

Podobnie podstawiając $x = C^2 + 1$, $y = 1$ mamy

$$f((C^2 + 1)^2 + f(1)) = (C^2 + 1)(C^2 + f(1)) + 1,$$

czyli z różnowartościowości otrzymujemy

$$(C^2 + f(1))^2 + f(1) = (C^2 + 1)^2 + f(1),$$

a co za tym idzie $f(1) = 1$.

Zatem $C = 2$ i przedstawiony wyżej dowód indukcyjny pokazuje, że musi zachodzić $f(n) = n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}^+$.
Sprawdzamy, że faktycznie $f(n) = n$ spełnia warunki zadania, gdyż $f(x^2 + f(y)) = x^2 + y = x \cdot x + y = xf(x) + y$.

zatem jest to jedyne rozwiązanie zadania.

5. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (gdzie $n \geqslant 4$) spełniają warunki

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$$

oraz

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n^2.$$

Dowieść, że przynajmniej jedna z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest nie mniejsza niż 2.

Rozwiązanie

Sposób I

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że $a_i < 2$ dla wszystkich $i = 1, 2 \ldots, n$. Zauważmy najpierw, że jeżeli rozsuwamy liczby tak, by ich suma się nie zmieniała, to suma kwadratów rośnie. Formalnie, niech $a > b$, $x > 0$. Wówczas

$$(a + x)^2 + (b - x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2x^2 + 2x(a - b) > a^2 + b^2.$$

Jeżeli więc rozsuniemy liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tak, że wszystkie oprócz jednej będą równe 2, a ta ostatnia wyniesie $a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (n-1) \cdot 2$, to suma kwadratów wzrośnie, czyli

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 < (n-1) \cdot 2^2 + \Big(a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (n-1) \cdot 2\Big)^2.$$

Jednak $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$, czyli

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 < (n-1) \cdot 2^2 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (n-1) \cdot 2)^2$$

$$\leqslant 4(n-1)+(n-2)^2 = 4n-4+n^2-4n+4 = n^2,$$

gdzie nierówność bierze się z tego, że

$$a_1+a_2+\ldots+a_n-2(n-1) \geqslant n-2(n-1) \geqslant -(n-2)$$

oraz

$$a_1+a_2+\ldots+a_n-2(n-1) < 2n-2(n-1) = 2 \leqslant 4-2 \leqslant n-2.$$

Jednak z założeń zadania wynika, że $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant n^2$, czyli dostajemy sprzeczność z założeniem, że $a_i < 2$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sposób II

Po pomnożeniu pierwszej nierówności przez $n-4$ ($n \geqslant 4$) i dodaniu drugiej otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+(n-4)a_i) \geqslant 2n^2-4n.$$

Przekształcając dostajemy

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-2)(a_i+(n-2)) \geqslant 0.$$

Dla pewnego i mamy więc $(a_i-2)(a_i+(n-2)) \geqslant 0$, czyli $a_i \geqslant 2$ lub $a_i \leqslant 2-n$. Jeżeli zachodzi pierwsza z nierówności, to otrzymujemy tezę. W drugim przypadku mamy $2-n \geqslant a_i$, bez straty ogólności załóżmy $i=1$. Wówczas dodając nierówność $2-n \geqslant a_1$ do pierwszej nierówności z treści zadania i skracając otrzymujemy

$$\sum_{i=2}^{n}(a_i-2) \geqslant 0,$$

co implikuje $a_i \geqslant 2$ dla pewnego i, czyli tezę.

6. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n \geqslant 2$, że wszystkie liczby naturalne mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie

Wszystkie liczby n spełniające zadane warunki to liczby pierwsze, potęgi dwójki oraz liczba 6. Istotnie, załóżmy, że wszystkie liczby naturalne

mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy r. Jeśli $r = 1$, to n nie ma żadnych dzielników większych od 1, a zatem n jest liczbą pierwszą. Jeśli $r = 2$, to n nie ma dzielników pierwszych nieparzystych, a ma parzyste, czyli jest potęgą dwójki.
Przyjmijmy więc, że $r \geqslant 3$. Jeśli n nie jest parzyste, to wśród liczb względnie pierwszych z n są 1 i 2, więc $r = 1$, wbrew założeniu, zatem n jest liczbą parzystą. Jeśli n jest potęgą liczby 2, to wśród liczb względnie pierwszych z n są 1 i 3 i wobec tego $r = 2$. Niech $n = 2^a b$, gdzie $b > 1$ jest nieparzyste i $a \geqslant 1$. Nietrudno zauważyć, że liczby $b-2, b+2$ są mniejsze niż n oraz względnie pierwsze z n, czyli należą do ciągu arytmetycznego. Ponieważ $r > 2$, więc $r = 4$. Pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego jest liczba 1, więc następny to 5. Wobec tego $3|n$. Jeśli $n > 6$, to $n \geqslant 12$. Wypisując jednak trzy pierwsze wyrazy naszego ciągu: $1, 5, 9$ otrzymujemy sprzeczność. Bez trudu sprawdzamy, że $n = 6$ również spełnia warunki zadania.

7. Zabezpieczenie sejfu składa się z trzech kół, z których każde może być ustawione w jednej z ośmiu pozycji. Z powodu uszkodzenia mechanizmu blokującego sejf drzwiczki do sejfu można otworzyć, gdy dowolne dwa koła znajdują się w prawidłowej pozycji. Rozstrzygnij jaka jest najmniejsza liczba prób, która gwarantuje otworzenie sejfu.

Rozwiązanie

Odpowiedź: 32.

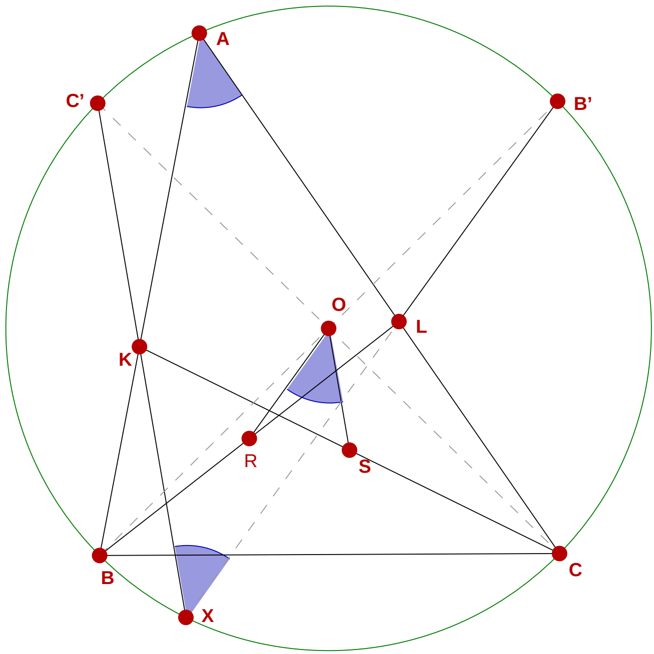
Oznaczmy pozycje numerami 0, 1, ..., 7. Prawidłowy kod składa się z trzech cyfr; co najmniej dwie z nich są w zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$ lub $\{4, 5, 6, 7\}$. Sprawdzamy wobec tego trójki (a, b, c), gdzie $4|a + b + c$ oraz wszystkie trzy liczby należą do jednego z dwóch wspomnianych zbiorów. Takich trójek jest 32: wybieramy jeden z dwóch zbiorów, liczbę a na cztery sposoby i liczbę b na cztery sposoby; każdy taki układ daje nam jedną trójkę (a, b, c). Takie postępowanie gwarantuje nam otworzenie sejfu; wybieramy pozycje, na których liczby z otwierającego układu są w jednym zbiorze i ustalamy tam prawidłowe cyfry - wtedy na pozostałej da się tak dobrać cyfrę tak, by otrzymana trójka była sprawdzana.
Przypuśćmy teraz, że uda się otworzyć sejf w co najwyżej 31 sprawdzeniach. Wtedy istnieje takie a, że sprawdzamy co najwyżej 3 trójki postaci (a, b, c). Bez straty ogólności przyjmijmy, że sprawdzamy trójki (0,0,0),

(0,1,1) i (0,2,2). Gdyby sejf otwierała trójka $(0, b, c)$, gdzie $3 \leqslant b, c$, to aby go otworzyć, musimy sprawdzić trójkę (a, b, c), gdzie $a > 0$. Daje to 25 trójek do sprawdzenia; razem z poprzednimi trzema 28 (zauważmy, że gdybyśmy sprawdzili mniej niż 3 trójki postaci $(0, b, c)$ lub zestaw trójek istotnie inny niż (0,0,0), (0,1,1), (0,2,2) to na tym etapie mielibyśmy już $5 \cdot 6 + 3$, $6 \cdot 6 + 2$, $7 \cdot 7 + 1$ lub 8·8 sprawdzeń - sprzeczność). Do tej pory nie otworzyliśmy sejfu, jeśli otwiera go jedna z trójek: (1,0,1), (1,0,2), (2,0,1), (2,0,2), (3,1,0), (3,2,0), (4,1,0), (4,2,0). Jednak do sprawdzenia pierwszych czterech możliwości potrzeba dwóch trójek i do ostatnich czterech też dwóch, przy czym są to zbiory rozłączne (bo trójka z pierwszych czterech i trójka z ostatnich czterech różnią się na wszystkich trzech miejscach), razem 32 — sprzeczność.

8. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt K leży na boku AB, punkt L na boku AC oraz punkty K, O i L są współliniowe. Punkt R jest środkiem odcinka BL, zaś S jest środkiem odcinka CK. Udowodnij, że $\measuredangle BAC = \measuredangle SOR$.

Rozwiązanie

Niech B', C' oznaczają punkty symetryczne do punktów B, C względem punktu O. Z twierdzenia Talesa mamy $SO || KC'$ i $OR || B'L$. Ponadto jeśli X jest punktem przecięcia prostej KC' i okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C, to z twierdzenia Pascala dla sześciokąta $ABB'XC'C$ wynika, że punkty K, O oraz przecięcie $B'X$ z AC leża na jednej prostej. Oznacza to, że proste KO, AC i $B'X$ przecinają się w jednym punkcie, czyli L leży na prostej $B'X$. Wobec tego $\measuredangle SOR = \measuredangle C'XB'$. Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że łuki BC i $B'C'$ są równej długości, więc $\measuredangle BAC = \measuredangle C'XB'$



9. Dany jest ostrokątny trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Dwusieczna kąta A przecina bok BC w punkcie V, natomiast D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z A. Okrąg opisany na trójkącie AVD przecina boki AB i CA odpowiednio w punktach F i E. Dowieść, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

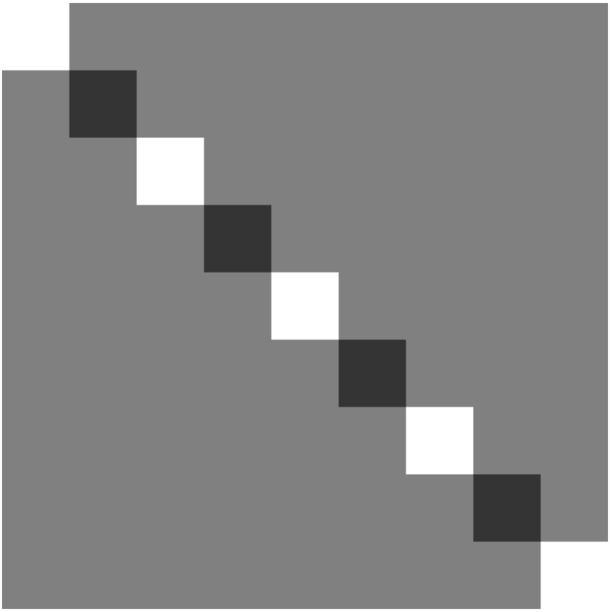
Ponieważ $AD \perp VD$, więc AV jest średnicą okręgu. Wobec tego $AE \perp VE$ oraz $AF \perp VF$. W połączeniu z równością $\measuredangle EAV = \measuredangle FAV$ daje to $AE = AF$ oraz $VE = VF$. Mamy w takim razie:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{CE}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{VE \cdot \operatorname{ctg} \measuredangle C}{VF \cdot \operatorname{ctg} \measuredangle B} \cdot \frac{AD \cdot \operatorname{ctg} \measuredangle B}{AD \cdot \operatorname{ctg} \measuredangle C} = 1,$$

co w połączeniu z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Cevy daje tezę.

10. Szachownicę $2009^{2008} \times 2009^{2008}$ wypełniono liczbami rzeczywistymi o module nie większym niż 1. Co więcej suma liczb w każdym kwadracie 2×2 jest zerem. Udowodnić, że suma wszystkich liczb na szachownicy nie przekracza 2009^{2008}.

Rozwiązanie



Kolorujemy szachownicę w odpowiedni sposób — schemat pokazany na rysunku. Lewe dolne „schody" składają się z pewnej liczby kwadratów 2×2, czyli suma liczb na ich polach wynosi 0. Również prawe górne „schody" posiadają tę właściwość. Z pól całej planszy wszystkie pola zostały pokolorowane dokładnie raz oprócz pól na przekątnej. Oznaczmy przez B sumę liczb na białych polach, przez C sumę liczb na polach pokolorowanych 2 razy, przez S sumę liczb na całej szachownicy, przez L sumę liczb na lewych schodach, a przez P na prawych. Niech b to liczba pól białych, a c czarnych. Zauważmy, że wówczas

$S = L + P - C + B = 0 + 0 + B - C = B - C < b + c = 2009^{2008}$,

czyli tym samym teza została wykazana.

11. Niech C będzie liczbą dodatnią, zaś $a_1, a_2, \ldots$ takim nieskończonym ciągiem liczb dodatnich, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots$ spełniona jest nierówność $0 \leqslant a_i \leqslant C$ a dla każdych liczb $1 \leqslant i < j$ nierówność $\frac{1}{i+j} \leqslant |a_i - a_j|$. Udowodnić, że $C \geqslant 1$.

Rozwiązanie

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną, a $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ taką permutacją ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, że $a_{k_1} < a_{k_2} < \ldots < a_{k_n}$. Zachodzą nierówności:

$$C \geqslant a_{k_n} - a_{k_1} = \sum_{i=1}^{n-1} |a_{k_{i+1}} - a_{k_i}| \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_{i+1} + k_i} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(n-1)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} (k_{i+1} + k_i)} > \frac{(n-1)^2}{2 \sum\limits_{i=1}^{n} k_i} = \frac{(n-1)^2}{n(n+1)} > 1 - \frac{3}{n+1},$$

gdzie druga nierówność wynika z nierówności Cauchy'ego-Schwarza dla liczb $\sqrt{k_1 + k_2}, \ldots, \sqrt{k_{n-1} + k_n}$ oraz $\frac{1}{\sqrt{k_1+k_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{k_{n-1}+k_n}}$. Ponieważ dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność $C > 1 - \frac{3}{n+1}$, więc $C \geqslant 1$.

12. Niech P będzie wielomianem dziesiątego stopnia o współczynnikach całkowitych, w którym współczynnik przy x^{10} jest równy 1. Rozstrzygnąć, czy liczby $P(0)$, $P(1)$, $\ldots$, $P(100)$ mogą dawać parami różne reszty przy dzieleniu przez 101.

Rozwiązanie

Odpowiedź jest negatywna. Udowodnimy najpierw następujący lemat:

Lemat. *Niech $p \neq 2$ będzie liczbą pierwszą, natomiast k liczbą naturalną niepodzielną przez $p-1$. Wówczas $p | 1^k + 2^k + ... + (p-1)^k$.*

Wiadomo, że istnieje taka reszta g z dzielenia przez p, że liczby ze zbioru $\{g^0, g^1, g^2, \ldots g^{p-2}\}$ dają wszystkie możliwe niezerowe reszty z dzielenia przez p[1]. Wówczas $g^k \not\equiv 1 \pmod{p}$, gdyż $p-1$ nie dzieli k. Zauważmy, że liczby $g, 2g, ..., (p-1)g$ dają wszystkie możliwe niezerowe reszty z dzielenia przez p i każda reszta pojawia się dokładnie raz. Zatem

$$g^k + (2g)^k + ...((p-1)g)^k \equiv 1^k + 2^k + ... + (p-1)^k \pmod{p},$$

[1] Dla $p = 101$ taką liczbą jest np. 2, tzn. że dzieląc przez 101 liczby $1 = 2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{99}$ otrzymamy liczby $1, 2, \ldots, 100$ w pewnej kolejności. Taka liczba g nazywana jest generatorem grupy multyplikatywnej reszt modulo p.

a stąd
$$(g^k-1)(1^k+2^k+...+(p-1)^k)\equiv 0 \pmod p.$$
Ponieważ pierwszy czynnik jest niepodzielny przez p podzielny musi być drugi i dowód lematu jest zakończony.
Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje wielomian $P(x)$ stopnia 10, dla którego liczby $P(0), P(1), \ldots, P(100)$ dają różne reszty przy dzieleniu przez 101. Nietrudno wówczas zauważyć, że $P(P(x))$ jest wielomianem stopnia 100 i liczby $P(P(0))$, $P(P(1))$, $\ldots, P(P(100))$ też dają różne reszty przy dzieleniu przez 101. Mamy więc
$$P(P(0))+P(P(1))+\ldots+P(P(100))\equiv 0+1+\ldots+100\equiv 0 \pmod{101}.$$
Z drugiej jednak strony niech $P(P(x))=x^{100}+a_{99}x^{99}+\ldots+a_1x+a_0$. Wtedy
$$P(P(0))+P(P(1))+\ldots+P(P(100))\equiv$$
$$\equiv(0^{100}+1^{100}+\ldots 100^{100})+a_{99}(0^{99}+1^{99}+\ldots 100^{99})$$
$$+\ldots+a_1(0^1+1^1+\ldots 100^1)+101a_0\equiv 100 \pmod{101},$$
gdyż na mocy lematu przy każdym współczynniku a_i jest liczba podzielna przez 101, a resztę z dzielenia sumy $0^{100}+1^{100}+...+100^{100}$ stosując małe twierdzenie Fermata. Oczywiście $100\not\equiv 0 \pmod{101}$ i uzyskana sprzeczność kończy dowód.

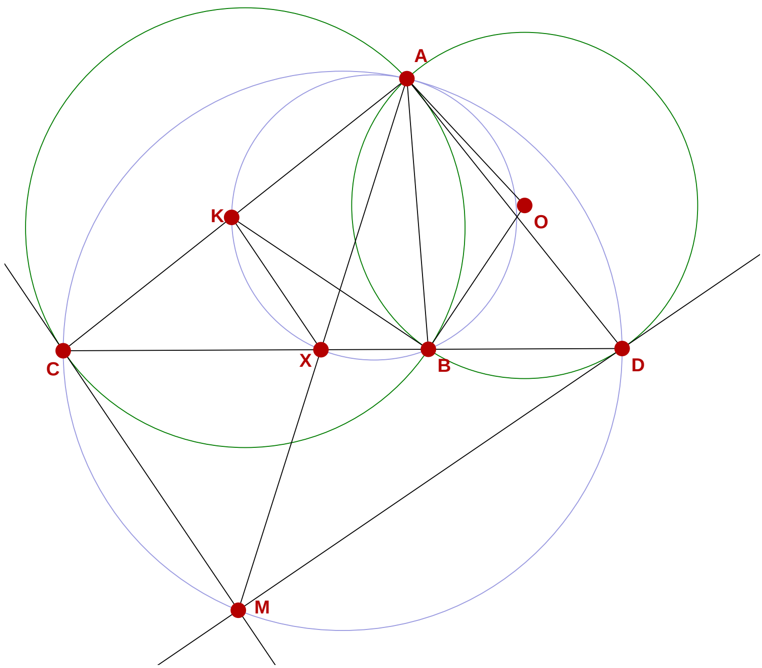
13. Wielomian P spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość
$$P(x)P(2x^2)=P(2x^3+x).$$
Udowodnić, że jeśli P ma pierwiastek rzeczywisty, to jest tożsamościowo równy zero.

Rozwiązanie
Przypuśćmy przeciwnie i oznaczmy przez x_0 pierwiastek P o największej wartości bezwzględnej. Mamy wówczas
$$P(2x_0^3+x_0)=P(2x_0^2)P(x_0)=P(2x_0^2)\cdot 0=0.$$
Zatem $2x_0^3+x_0$ jest również pierwiastkiem P. Co więcej, jeżeli $x_0\neq 0$, to $|2x_0^3+x_0|>|x_0|$, gdyż znak x_0^3 jest taki sam co x_0. Wobec tego jedynym pierwiastkiem P jest 0, czyli $P(x)=x^nQ(x)$ oraz $Q(0)\neq 0$. Zatem
$$x^n(2x^2)^nQ(x)Q(2x^2)=(2x^{3n}+x^n)Q(2x^3+x).$$

Liczba 0 jest $3n$–krotnym pierwiastkiem wielomianu znajdującego się po lewej stronie równości i n–krotnym prawej strony. Wobec tego $n = 3n$, czyli $n = 0$, co przeczy temu, że P jest niezerowym wielomianem.

14. Niech okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Pewna prosta przechodząca przez B przecina o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Proste styczne do o_1 w C i o_2 w D przecinają się w punkcie M. Proste AM i CD przecinają się w punkcie X. Punkt K jest takim punktem na prostej AC, że proste XK i MC są równoległe. Udowodnić, że prosta KB jest styczna do okręgu o_2.

Rozwiązanie



Ponieważ $\measuredangle BAC = \measuredangle BCM = \measuredangle KXC$, więc czworokąt $ABXK$ jest wpisany w okrąg. Mamy również $\measuredangle ACM = 180° - \measuredangle ABC = \measuredangle ABD = 180° - \measuredangle ADM$, więc czworokąt $ACMD$ też jest wpisany w okrąg. Oznaczmy przez O środek okręgu o_2. Zachodzą równości:

$$\measuredangle ABK = \measuredangle AXK = \measuredangle AMC = \measuredangle ADC = \\ = \measuredangle ADB = \frac{1}{2}\measuredangle AOB = 90^\circ - \measuredangle ABO,$$

czyli $\measuredangle KBO = \measuredangle ABO + \measuredangle ABK = 90^\circ$, więc mamy tezę.

15. Dane są trzy liczby całkowite a, b, c i liczba pierwsza $p \geqslant 5$. Udowodnić, że jeżeli $an^2 + bn + c$ jest kwadratem liczby całkowitej dla $2p-1$ kolejnych wartości n, to $p | b^2 - 4ac$.

Rozwiązanie

Niech $f(n) = an^2 + bn + c$ oraz niech k, $k+1$, $\ldots$, $k+2p-2$ będą $2p-1$ kolejnymi liczbami naturalnymi, dla których f przyjmuje wartości będące kwadratami liczb całkowitych.

Zacznijmy od zbadania dla jakich $x, y \in \mathbb{Z}$ zachodzi $f(x) \equiv f(y) \pmod{p}$. Pytamy więc kiedy spełniona jest kongruencja

$$ax^2 + bx + c \equiv ay^2 + by + c \pmod{p},$$

lub równoważnie

$$(x-y)(ax+ay) + b(x-y) \equiv 0 \pmod{p},$$

czyli

$$(x-y)(a(x+y)+b) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wynika stąd, że $f(x) \equiv f(y) \pmod{p}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x \equiv y \pmod{p}$ lub

$$ay \equiv -ax - b \pmod{p}. \tag{1}$$

Nietrudno zauważyć, że jeśli $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, to przy danym x istnieje dokładnie jedno rozwiązanie kongruencji (1) mod p. W szczególności nie istnieją liczby całkowite x, y, z dające parami różne reszty z dzielenia przez p, dla których $f(x) \equiv f(y) \equiv f(z) \pmod{p}$. Jeśli natomiast $a \equiv 0 \pmod{p}$, to owa kongruencja ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy również $b \equiv 0 \pmod{p}$.

Jak wiadomo wszystkich niezerowych reszt kwadratowych modulo p jest dokładnie $\frac{p-1}{2}$. Z treści zadania wynika natychmiast, że reszty dzielenia liczb $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p-1)$ są niezerowymi resztami kwadratowymi modulo p lub są podzielne przez p. Zauważmy jednak, że tych liczb jest p, a możliwych reszt $\frac{p+1}{2}$, skąd wynika, że pewna reszta jest przyjmowana co najmniej 2 razy. W szczególności jeśli $p|a$, to $p|b$, gdyż kongruencja (1) ma rozwiązanie. Ale wówczas $p|b^2 - 4ac$, czyli teza jest spełniona. Załóżmy więc, że $a \not\equiv 0 \pmod{p}$. Jasne jest też, że któraś z wartości $f(k), \ldots, f(k+p-1)$ musi być podzielna przez p, gdyż inaczej pewna reszta kwadratowa byłaby przyjmowana 3 razy, co jak zauważyliśmy wcześniej, jest niemożliwe.

Załóżmy najpierw, że istnieją dwie liczby $k \leqslant t < s \leqslant k+p-1$, dla których $p|f(t)$ oraz $p|f(s)$. Z faktu $t \leqslant k+p-2$ wynika, że $t+p \leqslant k+2p-2$, a więc $f(t+p)$ również jest kwadratem i jasne jest, że $p|f(t+p)$. Liczby podzielne przez liczbę pierwszą p: $f(t)$, $f(t+p)$ są kwadratami liczb naturalnych, a więc są również podzielne przez p^2. Mamy więc

$$p^2|f(t+p)-f(t) = a(t+p)^2+b(t+p)+c-(at^2+bt+c) = 2atp+ap^2+bp,$$

skąd wynika, że $p|2at+b$. Czyli

$$p|4af(t) = (2at+b)^2 - (b^2-4ac),$$

czyli też $p|b^2-4ac$ i w tym przypadku zadanie jest rozwiązane.

Załóżmy teraz, że wśród liczb $k, k+1, \ldots, k+p-1$ jest dokładnie jedna liczba t, dla której $p|f(t)$. Jeśli jednak weźmiemy z tych liczb taką liczbę s, która jest rozwiązaniem kongruencji (1) przy ustalonym $x = t$, to wówczas $p|f(s)$. Musi być zatem $s \equiv t \pmod{p}$, czyli wstawiając do kongruencji (1) $x = y = t$ dostajemy

$$p|2at+b,$$

co w połączeniu z $p|f(t)$ daje, jak widzieliśmy wcześniej, $p|b^2-4ac$, co kończy dowód.

16. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Tablica $n \times n$ jest wypełniona liczbami 0 i 1 w ten sposób, że każdy podzbiór n pól, z których żadne 2 nie leżą w jednej kolumnie ani w jednym wierszu zawiera co najmniej jedno pole z liczbą 1. Dowieść, że można wybrać i wierszy i j kolumn w taki sposób, że $i+j \geqslant n+1$ oraz że na przecięciu każdego wybranego wiersza i każdej wybranej kolumny jest liczba 1.

Rozwiązanie
Do rozwiązania tego zadania zastosujemy twierdzenie Halla (tu zapisane

w terminologii chłopców i dziewczynek)

Twierdzenie Halla
Na tańcach jest n chłopców i pewna liczba dziewczynek. Mówimy, że spełniony jest warunek Halla, jeżeli dla każdej grupy k chłopców, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$ istnieje przynajmniej k takich dziewczynek, że któryś z tych chłopców ją zna. Jeżeli spełniony jest warunek Halla, to wówczas każdemu chłopcu możemy przydzielić do pary dziewczynkę, którą zna.

Musimy teraz jedynie wykonać pracę typową dla zadań na twierdzenie Halla, czyli zinterpretować co jest chłopcem, co jest dziewczynka i co jest znajomością. W tym przypadku niech chłopcy to będą wiersze, dziewczynki to kolumny (bądź odwrotnie). Powiemy, że wiersz i kolumna znają się, jeżeli pole na ich przecięciu zawiera 0.
Warunek, że dla dowolnego podzbioru n pól z różnych wierszy i różnych kolumn na którymś z nich znajduje się 1 oznacza, że dla dowolnego sparowania wszystkich chłopców ze wszystkimi dziewczynkami któraś para będzie złożona z nieznajomych.

Teza zadania mówi, że uda się wybrać i wierszy (chłopców) oraz $j \geqslant n + 1 - i$ kolumn (dziewczynek) tak, że żadna z tych kolumn nie jest znana przez żaden wiersz. Innymi słowy teza zadania mówi, że istnieje pewna i-elementowa grupa chłopców, która zna jedynie co najwyżej $n - (n + 1 - i) = i - 1$ dziewczynek. Jest to więc dokładnie zaprzeczenie warunku Halla.
Zatem zadanie jest jedynie przeformułowaniem twierdzenia Halla, mówi ono, że z zaprzeczenia tezy tego twierdzenia wynika zaprzeczenia założenia, czyli dysponując twierdzeniem Halla wykazaliśmy tezę zadania.

17. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że suma cyfr liczby 3^n jest nie mniejsza niż suma cyfr liczby 3^{n+1}.

Rozwiązanie
Udowodnimy tezę zadania nie wprost. Oznaczmy przez $S(n)$ sumę cyfr liczby n. Przypuśćmy, że tylko dla skończenie wielu liczby naturalnych n zachodzi $S(3^n) \geqslant S(3^{n+1})$. Wówczas istnieje taka liczba $k > 2$, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant k$ zachodzi $S(3^{n+1}) > S(3^n)$. Zauważmy jednak, że jeśli $n \geqslant 2$, to $9 \mid 3^n$, a co za tym idzie $9 \mid S(3^n)$. Zatem skoro

$S(3^{n+1}) > S(3^n)$, to $S(3^{n+1}) \geqslant 9 + S(3^n)$. Zatem $S(3^n) \geqslant 9(n-k) + +S(3^k) = 9(n-k+1)$. Jednak liczba $3^{2n} = 9^n < 10^n$ ma co najwyżej n cyfr, a co za tym idzie $S(3^{2n}) \leqslant 9n$. A zatem $9n \geqslant S(3^{2n}) \geqslant 9(2n-k+1)$, co dla dowolnego $n \geqslant k$ nie jest prawdą. Sprzeczność.

18. Dany jest wielomian P stopnia n spełniający zależność $P(i) = 2^i$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Wyznaczyć $P(n+1)$.

Rozwiązanie

Sposób I

Przez P_n oznaczmy wielomian stopnia co najwyżej n i dla $i = 0, 1, \ldots, n$ spełniający własność z treści zadania. Niech $Q_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x)$. Wówczas $Q_n(i) = P_n(i+1) - P_n(i) = 2^{i+1} - 2^i = 2^i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Co więcej, Q_n jest wielomianem stopnia co najwyżej $n-1$, gdyż współczynniki przy najwyższej potędze P_n redukują się. Ponieważ istnieje tylko jeden wielomian stopnia co najwyżej $n-1$ o ustalonych wartościach w n punktach, to $Q_n = P_{n-1}$.

Udowodnimy teraz przez indukcję, że $P_n(n+1) = 2^{n+1} - 1$. Dla $n = 0$ wielomian P_0 jest wielomianem stopnia 0 takim, że $P_0(0) = 1$, czyli $P_0(x) = 1$, a co za tym idzie istotnie $P_0(1) = 1 = 2^1 - 1$.

Załóżmy teraz, że $P_n(n+1) = 2^{n+1} - 1$. Przypomnijmy, że dla dowolnego n zachodzi $Q_n = P_{n-1}$, a zatem $P_n = Q_{n+1}$. Wynika z tego, że

$$2^{n+1} - 1 = P_n(n+1) = Q_{n+1}(n+1) =$$

$$= P_{n+1}(n+2) - P_{n+1}(n+1) = P_{n+1}(n+2) - 2^{n+1},$$

czyli $P_{n+1}(n+2) = 2^{n+2} - 1$. Tym samym wykazany został krok indukcyjny.

Odpowiedź $P(n+1) = 2^{n+1} - 1$.

Sposób II

Można skorzystać ze wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, który podaje w sposób jawny wielomian stopnia co najwyżej n o ustalonych wartościach w $n+1$ punktach. Jeśli wartościami wielomianu W w punktach $x_0, \ldots, x_n$

są odpowiednio liczby $a_0, \ldots, a_n$, to zachodzi równość[2]

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Korzystając ze wzoru Lagrange'a otrzymujemy równości

$$P(n+1) = \sum_{i=0}^{n} 2^i \prod_{j \neq i} \frac{n+1-j}{i-j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{\prod\limits_{j \neq i} (n+1-j)}{\prod\limits_{j \neq i} (i-j)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{(n+1)!}{(n+1-i)i!(n-i)!(-1)^{n-i}} = \sum_{i=0}^{n} 2^i (-1)^{n-i} \binom{n+1}{i}$$

$$= -\sum_{i=0}^{n+1} 2^i (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} + 2^{n+1} \binom{n+1}{n+1}$$

$$= -(2-1)^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

19. Na płaszczyźnie dany jest wielokąt W o polu większym od n. Udowodnić, że można tak przesunąć równolegle wielokąt W, że w jego wnętrzu znajdzie się co najmniej $n+1$ punktów kratowych.

Rozwiązanie

Niech S będzie zbiorem wszystkich kwadratów jednostkowych K o wierzchołkach w punktach kratowych, przecinających wielokąt W. Suma pól części $K \cap W$ jest równa polu W, więc jest większa niż n. Zatem jeżeli przesuniemy wszystkie części $K \cap W$ w jedno miejsce otrzymując figury $(K \cap W)'$, to z zasady szufladkowej Dirichleta w wersji polowej wynika, że istnieje punkt, który znajduje się wewnątrz co najmniej $n+1$ figur $(K \cap W)'$. Oznaczmy go przez $A = (a_1, a_2)$, gdzie $0 < a_1, a_2 < 1$. Zatem wśród punktów postaci $(k + a_1, l + a_2)$, gdzie $k, l \in \mathbb{Z}$ przynajmniej $n+1$ należy do wnętrza wielokąta W. Zatem jeśli W przesuniemy o wektor $\vec{v} = (-a_1, -a_2)$, to przynajmniej $n+1$ z takich punktów postaci (k, l), że $k, l \in \mathbb{Z}$, czyli punktów kratowych, znajdzie się w (przesuniętym) wielokącie W.

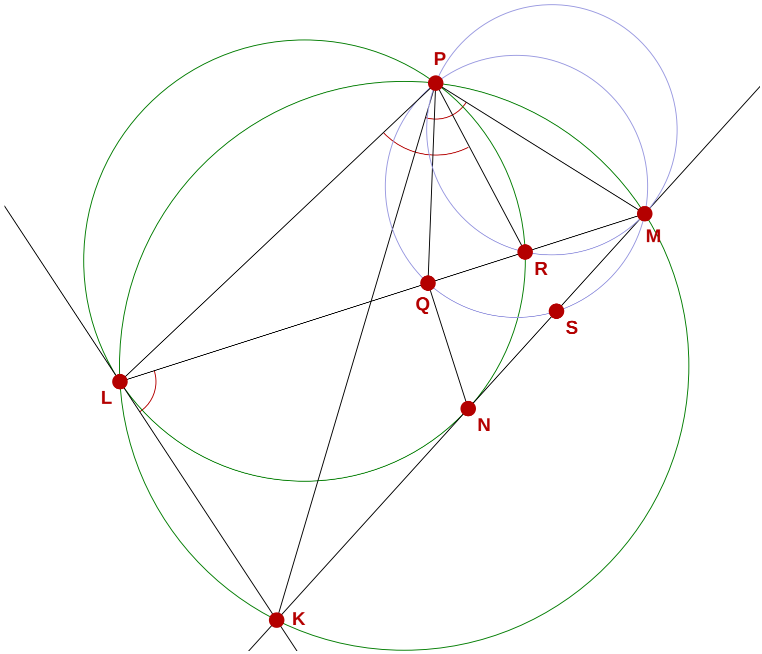
[2] Bardzo łatwa do sprawdzenia. Nieco trudniej jest sprawdzić, że jest to **jedyny** wielomian, który w punktach $x_0, \ldots, x_n$ przyjmuje wartości $a_0, \ldots, a_n$.

20. Niech KL i KN będą stycznymi do okręgu k w punktach L i N. M jest takim punktem, że K, N, M leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Okrąg opisany na trójkącie KLM przecina okrąg k w punkcie P. Punkt Q jest rzutem prostopadłym N na prostą ML. Udowodnić, że $\measuredangle MPQ = 2\measuredangle KML$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez R drugi punkt przecięcia okręgu k z prostą LM. Zachodzą równości:

$$\measuredangle MPK = \measuredangle MLK = \measuredangle RLK = \measuredangle RPL.$$



W takim razie $\measuredangle MPR = \measuredangle KPL = \measuredangle KML$. Wobec tej równości okrąg przechodzący przez punkty M, P, R jest styczny do prostej KM. Oznaczmy przez S punkt wspólny prostych PR i MN. Prosta PR jest osią potęgową okręgu k i okręgu opisanego na trójkącie MPR. Wobec tego $SN \cdot SN = SP \cdot SR = SM \cdot SM$, więc S jest środkiem odcinka MN. Wobec tego S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym MQR, zatem trójkąt MSQ jest równoramienny, czyli

$$\measuredangle MQS = \measuredangle QMS = \measuredangle LMK = \measuredangle MPR = \measuredangle MPS,$$
więc punkty $M,\ P,\ Q,\ S$ leżą na okręgu. W takim razie:

$$\measuredangle MPQ = \measuredangle MPS + \measuredangle SPQ = \measuredangle MQS + \measuredangle SMQ = 2\measuredangle SMQ = 2\measuredangle KML.$$

21. Ahmed i Fredek grają w grę na szachownicy $n \times n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Ahmed stawia kółka, a Fredek krzyżyki. Na początku wszystkie pola są puste, tylko w lewym dolnym rogu jest kółko, a w prawym górnym jest krzyżyk. Zaczyna Ahmed. Ruch gracza polega na postawieniu swojego znaczka na wolnym polu sąsiadującym przez krawędź z polem, na którym jest już postawiony jego znaczek. Gdy gracz nie może wykonać ruchu, to traci go. Gra kończy się, gdy żaden z graczy nie może wykonać ruchu. Grę wygrywa ten gracz, który wykonał więcej ruchów. Rozstrzygnij, który z graczy posiada strategię wygrywającą.

Rozwiązanie
Ponieważ gra jest skończona i każda rozgrywka kończy się wygraną któregoś z graczy, to istnieje gracz posiadający strategię wygrywającą. Udowodnimy, że taką strategię posiada gracz zaczynający, Ahmed, będzie to dowód niekonstruktywny.
Przypuśćmy, nie wprost, że strategię wygrywającą posiada Fredek. Wskażemy teraz strategię dla Ahmeda, którą grając przeciw Fredkowi może z nim wygrać. Zauważy na początek, że własny znak nigdy nie przeszkadza graczowi w realizowaniu jakiejkolwiek strategii. Ahmed stawia na początek kółko gdziekolwiek. Następnie stawia się w sytuacji drugiego gracza, zapomina o postawionym kółku i gra wygrywającą strategią drugiego gracza. Jeżeli strategia ta każe postawić kółko w tym miejscu, gdzie stoi pierwsze kółko, to, ponieważ kółko już tam jest, to Ahmed stawia kółko w dowolnym innym miejscu (i zapomina o nim). W ten sposób pokazaliśmy, że Ahmed, kopiując strategię drugiego gracza może wygrać, czyli doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że Fredek ma strategię wygrywającą.
Zatem strategię wygrywającą posiada Ahmed.

22. Dany jest wielomian P stopnia $n \geqslant 2$ o współczynnikach całkowitych dodatnich $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0$ spełniających warunki: $a_{n-k} = a_k$ dla każdego $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ oraz $a_n = a_0 = 1$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych a, b takich, że $a|P(b)$ i $b|P(a)$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $(a, b) = (P(1), 1)$ spełnia warunki zadania oraz $P(1) > 1$. Przypuśćmy, że para (a, b), $a > b$ spełnia warunki zadania. Pokażemy, że wówczas para $(a, \frac{P(a)}{b})$ również spełnia warunki zadania, a co więcej $\frac{P(a)}{b} > a > b$. Jeżeli to udowodnimy, to teza zadania zostanie pokazana, gdyż z dowolnej pary da się stworzyć inną spełniającą warunki zadania i to dodatkowo o większej sumie.

Oczywiście $\frac{P(a)}{b} \mid P(a)$.

Aby pokazać, że $b \mid P(\frac{P(a)}{b})$ zauważmy najpierw, że skoro $a_0 = 1$, to $P(a) = ak + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Wobec tego

$$P\Big(\frac{P(a)}{b}\Big) = P(\tfrac{ak+1}{b}) = a_n \frac{(ak+1)^n}{b^n} + a_{n-1}\frac{(ak+1)^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{ak+1}{b} + a_0 =$$
$$= C + a_n\Big(\frac{1}{b}\Big)^n + a_{n-1}\Big(\frac{1}{b}\Big)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{1}{b} + a_0,$$

gdzie C jest liczbą wymierną. Można napisać $C = \frac{as}{t}$, gdzie $s, t \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze oraz $t \mid b^n$. Wynika to stąd, że C jest sumą składników postaci $a_m \frac{\binom{m}{l}(ak)^l}{b^m}$ dla $l \geqslant 1$ oraz z tego, że a i b są względnie pierwsze, bowiem $b \mid P(a) = ak + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Dzięki temu również a i t są względnie pierwsze.

Mamy teraz

$$P\Big(\frac{P(a)}{b}\Big) = C + a_n\Big(\frac{1}{b}\Big)^n + a_{n-1}\Big(\frac{1}{b}\Big)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{1}{b} + a_0 =$$
$$= \frac{as}{t} + \frac{a_n + a_{n-1}b + \ldots + a_1 b^{n-1} + a_0 b^n}{b^n} = \frac{as}{t} + \frac{P(b)}{b^n} = \frac{a\tilde{s} + P(b)}{b^n}$$

gdzie druga równość wynika z tego, że $a_{n-k} = a_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$, $\tilde{s} = s \cdot \frac{b^n}{t}$. Ponieważ $a \mid P(b)$, więc $a \mid a\tilde{s} + P(b)$, a ponieważ liczby a i b^n są względnie pierwsze, więc $a \mid P(\frac{P(a)}{b})$. Wykazaliśmy, że para $(a, \frac{P(a)}{b})$ spełnia założenia zadania.

Ponieważ stopień P jest nie mniejszy niż 2 oraz jego współczynniki są całkowite dodatnie, to $\frac{P(a)}{b} > \frac{P(a)}{a} > a > b$, co pokazuje, że faktycznie suma pary się zwiększyła oraz, że wyrazy w parze są różne.

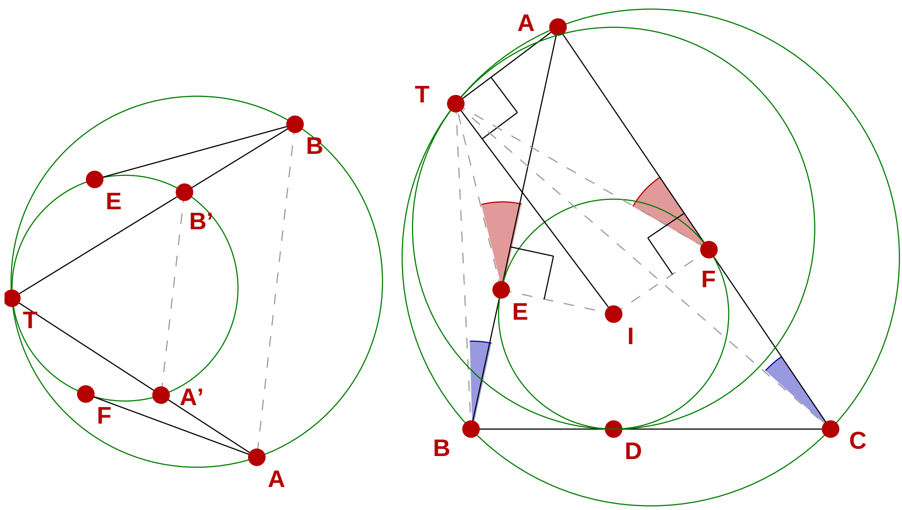
23. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a D — punktem styczności tego okręgu z bokiem BC. Okrąg ω jest styczny do prostej BC w punkcie D a do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie T, przy czym punkty A i T leżą po jednej stronie prostej BC.

Dowieść, że $\measuredangle ATI = 90°$.

Rozwiązanie
Udowodnimy następujący lemat:

Lemat. *Okrąg o znajduje się we wnętrzu okręgu O i jest do niego styczny wewnętrznie w punkcie T. Punkty A i B, różne od punktu T, leżą na okręgu O, a proste AK i BL są styczne do okręgu o odpowiednio w punktach K i L. Wówczas $\frac{TA}{TB} = \frac{AK}{BL}$.*

Oznaczmy przez A', B' drugie punkty przecięcia z okręgiem o odpowiednio prostych TA, TB. Punkt T jest środkiem jednokładności przekształcającej okrąg o na O, w której punkt A' przechodzi na A, a punkt B' przechodzi na B. Zatem proste $A'B'$ oraz AB są równoległe, a więc na mocy Tw. Talesa otrzymujemy $\frac{TA}{TB} = \frac{AA'}{BB'}$.
Natomiast z potęgi punktu względem okręgu o dostajemy równości $AA' \cdot AT = AK^2$, $BB' \cdot BT = BL^2$. Po pomnożeniu wszystkich trzech równości stronami otrzymujemy tezę lematu.



Niech E, F oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego odpowiednio z bokami AB, AC. Z udowodnionego powyżej lematu oraz równości

$BE = BD$ i $CF = CD$ dostajemy

$$\frac{BT}{CT} = \frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CF}.$$

Jednocześnie $\angle EBT = \angle ABT = \angle ACT = \angle FCT$, a zatem trójkąty EBT oraz FCT są podobne. Wynika stąd, że $\angle AET = \angle AFT$, czyli punkty A, E, I, F, T leżą na jednym okręgu o średnicy AI i oczywiście $\angle ATI = 90°$.

24. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takie, że $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Udowodnić nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n}} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Rozwiązanie

Niech $0 = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n = \frac{\pi}{2}$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\sin\alpha_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$. Wtedy $x_i = \sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Nierówność przyjmuje postać:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin\alpha_{i+1} - \sin\alpha_i}{\sqrt{1+\sin\alpha_i} \cdot \sqrt{1-\sin\alpha_i}} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Udowodnimy nierówność mocniejszą:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin\alpha_{i+1} - \sin\alpha_i}{\cos\alpha_i} < \frac{\pi}{2}.$$

Mamy:

$$\frac{\sin\alpha_{i+1} - \sin\alpha_i}{\cos\alpha_i} = \frac{2\sin\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\alpha_i} =$$

$$= (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \cdot \frac{\sin\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}{\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\alpha_i} < (\alpha_{i+1} - \alpha_i),$$

bo dla $x > 0$ zachodzi nierówność $\sin x < x$ oraz $\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2} > \alpha_i \geqslant 0$, więc $\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2} < \cos\alpha_i$. W takim razie

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin\alpha_{i+1} - \sin\alpha_i}{\cos\alpha_i} < \alpha_n - \alpha_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Ponadto $(2,2)^2 = 4,84 < 5$, czyli $1 + \sqrt{5} > 3,2 > \pi$, co kończy dowód.

25. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu A. Na pewnej prostej przechodzącej przez D wybrano takie punkty E i F, różne od D, że $\measuredangle AEB = \measuredangle AFC = 90^\circ$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków BC i EF. Dowieść, że $\measuredangle ANM = 90^\circ$.

Rozwiązanie

Skoro $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB = 90^\circ$, to punkty $A,\ D,\ B,\ E$ leżą na jednym okręgu o średnicy AB. Analogicznie punkty $A,\ D,\ C,\ F$ leżą na jednym okręgu o średnicy AC. Stąd $\measuredangle AEF = \measuredangle ABC$ oraz $\measuredangle AFE = \measuredangle ACB$ jako kąty oparte na tych samych łukach,[3] czyli trójkąty ABC i AEF są podobne. W takim razie $\frac{AN}{AM} = \frac{AE}{AB}$ oraz $\measuredangle MAN = \measuredangle EAB$, co daje podobieństwo trójkątów MAN i BAE i tym samym kończy dowód.

26. Dane jest $2n$ parami różnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ oraz tablica $n \times n$. W pole leżące w i-tym wierszu i w j-tej kolumnie tablicy wpisano liczbę $a_i + b_j$. Udowodnić, że jeśli iloczyny liczb we wszystkich kolumnach są równe, to również iloczyny liczb we wszystkich wierszach są równe.

Rozwiązanie

Równość iloczynów liczb w kolumnach znaczy dokładnie, że wyrażenia postaci

$$(b_j + a_1) \cdot (b_j + a_2) \cdot \ldots \cdot (b_j + a_n)$$

są równe dla dowolnego $1 \leqslant j \leqslant n$. Niech

$$P(x) = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n).$$

Wówczas $P(b_1) = P(b_2) = \ldots = P(b_n) = C$ dla pewnego $C \in \mathbb{R}$. Wielomian $P(x) - C$ jest n tego stopnia, zeruje się w liczbach $b_1, b_2, \ldots, b_n$, współczynnik przy x^n jest równy 1, a więc jest postaci

$$P(x) - C = (x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n).$$

Dla każdego x zachodzi równość

$$(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n) - C = (x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n)\,.$$

---

[3] jeśli np. D leży między E i F – nieco inaczej, gdy E leży między D i F

Jeśli $x = -a_j$ dla pewnego $1 \leqslant j \leqslant n$, to:
$$-C = (-a_j - b_1)(-a_j - b_2)\dots(-a_j - b_n) = \\ = (-1)^n(a_j + b_1)(a_j + b_2)\dots(a_j + b_n),$$
czyli
$$(a_j + b_1)(a_j + b_2)\dots(a_j + b_n) = (-1)^{n+1}C.$$
Ostatnia równość oznacza dokładnie to, że iloczyny liczb w każdym wierszu są równe i wynoszą $(-1)^{n+1}C$.

27. W pola tablicy $n \times n$ wpisano wszystkie liczby naturalne od 1 do n^2. Udowodnić, że istnieją dwa pola sąsiadujące krawędzią takie, że wpisane w nie liczby różnią się o co najmniej n.

Rozwiązanie
Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że dla dowolnych dwóch sąsiadujących pól wpisane w nie liczby różnią się o co najwyżej $n - 1$.
Zdefiniujmy zbiory $A_k = \{1, 2, \dots, k\}$, $B_k = \{k + 1, \dots, k + n - 1\}$, $C_k = \{k + n, \dots, n^2\}$ dla $k = 1, 2, \dots, n^2 - n$. Zauważmy, że dla dowolnego k pole, w które wpisano liczbę ze zbioru A_k nie może sąsiadować z polem, w które wpisano liczbę ze zbioru C_k, zbiór B_k jest więc zbiorem „granicznym” dla zbiorów A_k i C_k.
Ponieważ B_k składa się z $n - 1 < n$ liczb, więc dla dowolnego k musi istnieć wiersz i kolumna, w które wpisano liczby ze zbioru A_k lub ze zbioru C_k. Dla $k = 1$ należą one do C_k, dla $k = n^2 - n$ do A_k. Niech m będzie najmniejszym indeksem takim, że liczby z A_m wypełniają cały wiersz i całą kolumnę. Wówczas liczby z C_{m-1} wypełniają cały wiersz i całą kolumnę. Zatem są co najmniej dwa pola, na których są liczby z $A_m \cap C_{m-1}$, co jest niemożliwe, gdyż $A_m \cap C_{m-1} = \emptyset$. Sprzeczność.

28. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Udowodnić, że liczba $2^{2^n} + 1$ ma dzielnik pierwszy, który jest większy niż $2^{n+2}(n + 1)$.

Rozwiązanie
Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $2^{2^n} + 1$, a k —. najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, dla której $2^k \equiv 1 \pmod p$. Ponieważ $2^{2^n} \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod p$, więc k nie dzieli 2^n, ale jednocześnie $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod p$, czyli k dzieli 2^{n+1}. Stąd $k = 2^{n+1}$. Z Małego Twierdzenia Fermata wiadomo również, że $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, a stąd wniosku-

jemy, iż $k|p-1$, czyli $2^{n+1}|p-1$.
Niech $2^{2^n}+1 = p_1p_2\dots p_m$ będzie rozkładem liczby $2^{2^n}+1$ na niekoniecznie różne czynniki pierwsze. Na mocy powyższej obserwacji dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$ istnieje k_i takie, że $p_i = 2^{n+1}k_i + 1$. Wystarczy, że wykażemy, że dla pewnego i zachodzi $k_i \geqslant 2(n+1)$.
Najpierw oszacujemy m od góry. Zauważmy, że
$2^{2^n}+1 = p_1p_2\dots p_m = (2^{n+1}k_1+1)(2^{n+1}k_2+1)\dots(2^{n+1}k_m+1) \geqslant$
$\geqslant 2^{(n+1)m}+1,$
zatem $m \leqslant \frac{2^n}{n+1}$.
Oszacujemy teraz sumę $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ z dołu. Ponieważ $n \geqslant 3$, więc — jak można łatwo wykazać — $2^n \geqslant 2n+2$. Mamy również

$$1 \equiv 2^{2^n}+1 \equiv (2^{n+1}k_1+1)(2^{n+1}k_2+1)\dots(2^{n+1}k_m+1)$$

$$\equiv 2^{n+1}(k_1+k_2+\ldots+k_m)+1 \pmod{2^{2n+2}},$$

trzecia kongruencja bierze się stąd, że po otworzeniu nawiasów wszystkie składniki z wyjątkiem jednego, równego 1^m, są podzielne przez 2^{2n+2}, zatem $2^{n+1}|k_1+k_2+\ldots k_m$, czyli w szczególności $k_1+k_2+\ldots+k_m \geqslant 2^{n+1}$. Niech k_i będzie maksymalną spośród liczb $k_1, k_2, \dots, k_m$. Wówczas

$$2^{n+1} \leqslant k_1+k_2+\ldots+k_m \leqslant mk_i \leqslant \frac{2^n}{n+1}k_i$$

skąd wynika, że $k_i \geqslant 2(n+1)$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

29. Liczby dodatnie $a,\ b,\ x,\ y$ spełniają równości $a^2+x = b^2+y$ oraz $a+x^2 = b+y^2$, a także nierówność $a+b+x+y < 2$. Dowieść, że $a = b$ oraz $x = y$.

Rozwiązanie
Mamy:

$$a-b = y^2-x^2 = (y-x)(y+x) = (a^2-b^2)(x+y) = (a-b)(a+b)(x+y)$$

oraz

$$(a+b)(x+y) \leqslant \left(\frac{a+b+x+y}{2}\right)^2 < 1,$$

więc $a-b = 0$, zatem również $x-y = b^2-a^2 = 0$.

30. Rozstrzygnąć czy istnieją parami względnie pierwsze liczby naturalne $a,\ b,\ c > 1$, dla których zachodzą warunki: $a|2^b+1$, $b|2^c+1$, $c|2^a+1$.

Rozwiązanie

Takie liczby nie istnieją. Załóżmy przeciwnie i przyjmijmy przy tym, że spośród wszystkich trójek liczb, które spełniają dane warunki trójka (a,b,c) ma najmniejszą sumę. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że a jest najmniejszą spośród liczb a,b,c. Oczywiście $a>2$. Niech k najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, dla której $2^k \equiv 1 \pmod a$. Wiadomo, iż $2^b \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod a$ oraz $2^{2b} \equiv 1 \pmod a$, czyli $k \not| b$ i $k|2b$. Oznacza to, że $k=2l$ gdzie $l|b$. Pokażemy teraz, że trójka (a,l,c) również spełnia żądane warunki. W tym celu zauważmy, że $a|2^l+1$. Rzeczywiście, $k=2l$ jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której $a|2^{2l}-1=(2^l-1)(2^l+1)$. Jeśli liczby a i 2^l-1 miałyby jakiś wspólny dzielnik pierwszy p, to wtedy też $p|2^b-1$, gdyż $l|b$. Jednocześnie $a|2^b+1$, więc $p|2^b+1$. Wobec tego że $p|(2^b+1)-(2^b-1)=2$, a to jest niemożliwe. Zatem liczby a i 2^l-1 są względnie pierwsze i $a|2^l+1$. Jasne jest teraz, że $l \neq 1$, bowiem w przeciwnym razie $a=3$ oraz $c|9$ co jest sprzeczne z warunkami zadania. Ponadto l, jako dzielnik liczby b, jest względnie pierwsze z a i c oraz $l|2^c+1$. A więc rzeczywiście trójka (a,l,c) spełnia warunki dane w zadaniu. Jednak $l<2l \leqslant \phi(a)<a$, a stąd

$$a+l+c<a+a+c<a+b+c$$

co stoi w sprzeczności z założeniem o minimalności sumy trójki (a,b,c).

31. Sfery opisana oraz wpisana w czworościan $ABCD$ mają wspólny środek, $AB=CD$ oraz wszystkie ściany tego czworościanu są trójkątami ostrokątnymi. Udowodnić, że środki krawędzi czworościanu $ABCD$ leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy jest on foremny.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez S wspólny środek kuli opisanej i wpisanej w czworościan $ABCD$, przez R i r odpowiednio promienie tych kul, zaś przez S_A, S_B, S_C, S_D rzuty S odpowiednio na ściany BCD, ACD, ABD i ABC. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $AS_D^2=R^2-r^2=BS_D^2=CS_D^2$, czyli punkt S_D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Analogicznie punkty S_A, S_B i S_C są również środkami okręgów opisanych na odpowiednich ścianach. Promienie wszystkich tych okręgów są równe i wynoszą $\sqrt{R^2 - r^2}$.

Ponieważ ściany są trójkątami ostrokątnymi, więc środki okręgów opisanych leżą wewnątrz tych ścian. Zauważmy, że promień okręgu opisanego na trójkącie oraz długości dwóch kolejnych boków jednoznacznie determinują trójkąt. Pokażemy, że ściany ABC oraz BCD są przystające. Promienie okręgów opisanych na obu ścianach są równe, zaś bokom AB i BC w trójkącie ABC odpowiadają w trójkącie BCD boki CD i BC, o tych samych długościach. Analogicznie wykazujemy przystawanie pozostałych ścian wnioskując, że wszystkie ściany czworościanu $ABCD$ są przystające.

Dowolny czworościan można wpisać w równoległościan tak, by przeciwległe krawędzie czworościanu były przekątnymi przeciwległych ścian równoległościanu. Jeżeli czworościan ten ma przystające ściany, to równoległościan jest prostopadłościanem, gdy zaś jest foremny, to prostopadłościan ten jest sześcianem. W tym momencie teza zadania sprowadza się do stwierdzenia, że środki ścian prostopadłościanu leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy prostopadłościan ten jest sześcianem — a to jest oczywiste.

32. Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden podział zbioru liczb naturalnych na rozłączne zbiory A i B spełniający warunek: dla dowolnej liczby naturalnej n liczba sposobów zapisania n w postaci $a_i + a_j$, gdzie $a_i, a_j \in A$ i $a_i \neq a_j$ jest równa liczbie sposobów zapisania n w postaci $b_i + b_j$, gdzie $b_i, b_j \in B$ i $b_i \neq b_j$.

Rozwiązanie

Rozważmy funkcje tworzące:

$$A(x) = \sum_{n \in A} x^n, \quad B(x) = \sum_{n \in B} x^n.$$

Mnożąc $A(x) = \sum_{n \in A} x^n$ przez siebie i porządkując wg. potęg zmiennej x otrzymujemy $\sum_n a(n)x^n$, gdzie przez $a(n)$ oznaczyliśmy liczbę przedstawień wykładnika n w postaci $a_i + a_j$, gdzie $a_i, a_j \in A$ (być może $a_i = a_j$). Wobec tego w sumie $(A(x))^2 - A(x^2)$ jednomian x^n występuje ze współczynnikiem równym liczbie przedstawień wykładnika n w postaci sumy **różnych** elementów zbioru A. Podobnie w sumie $= (B(x))^2 - B(x^2)$ jednomian x^n występuje ze współczynnikiem równym liczbie przedstawień wykładnika n w postaci sumy **różnych** elementów zbioru B. Prawdziwa jest też równość

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Mamy w takim razie:

$$A(x) - B(x) = \frac{(A(x))^2 - (B(x))^2}{A(x) + B(x)} = (1-x)(A(x^2) - B(x^2))$$

i przez indukcję:

$$A(x) - B(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x^{2^k}) \cdot (A(x^{2^n}) - B(x^{2^n})).$$

Wszystkie równości mają sens, gdy $|x| < 1$. W tej sytuacji $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2^n} = 0$ i wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} A(x^{2^n}) = A(0)$. W taki sam sposób uzasadniamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} B(x^{2^n}) = 0$. Z tych równości wynika, że

$$A(x) - B(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - x^{2^k}) \cdot (A(0) - B(0))\,.$$

Przypuśćmy, że $0 \in A$. Wtedy $A(0) = 1$ i $B(0) = 0$. W tej sytuacji:

$$A(x) - B(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - x^{2^k})\,.$$

Znając sumę $A(x) + B(x)$ i różnicę $A(x) - B(x)$ obliczamy

$$A(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x} + \prod_{k=0}^{\infty} (1 - x^{2^k})\Big),\ B(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x} - \prod_{k=0}^{\infty} (1 - x^{2^k})\Big)$$

powyższe równości są spełnione, a więc istotnie definiują one jedyny podział zbioru liczb naturalnych spełniający zadane warunki. Można sprawdzić, że: $A = \{a:\ a \text{ ma parzystą liczbę jedynek w zapisie dwójkowym}\}$, $B = \mathbb{N} \setminus A$.

Dzień Dziecka:

1. W załączniku do zadań masz aktualną kopię punktacji poszczególnych uczestników obozu. Dla ciągu rzeczywistych liczb $a_1, a_2, \ldots a_8$ *zmodyfikowanym wynikiem* zawodnika nazywamy liczbę $\sum_{i=1}^{8} a_i P_i$, gdzie P_i to liczba punktów, które ten zawodnik zdobył z i–tego zadania. Twoim zadaniem jest tak dobrać wagi a_i, abyś był liderem rankingu zmodyfikowanych wyników ex aequo z jak najmniejszą liczbą innych zawodników.

Rozwiązanie

Zastąpimy w treści zadania liczbę 8 przez liczbę n, aby uogólnić sytuację. Punktacja zawodnika jest punktem $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jeśli np. $n = 2$, a zawodników jest 21, to mamy do czynienia z płaszczyzną, czyli z $\mathbb{R}^2$, na której wybrano 21 punktów. Chcemy poprowadzić $(n-1)$–wymiarową płaszczyznę Π (hiperpłaszczyznę) o równaniu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ip_i$$

tak, aby wszystkie punkty przestrzeni $\mathbb{R}^n$ odpowiadające wynikom zawodników leżały po jednej jej stronie lub na niej, przy czym na niej ma być ich jak najmniej (w przypadku $n = 2$ chodzi o taką prostą na płaszczyźnie, że wszystkie punkty–wyniki leżą po jej jednej stronie, a na samej prostej leży tylko „nasz” wynik, a jeśli to niemożliwe, to jak najmniej innych). Dokładniej, jeśli punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ jest wynikiem pewnego zawodnika, to ma być spełniona nierówność

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_ip_i,$$

punkt $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ to „nasz” wynik.

Zauważmy, że jeżeli

$$p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p^{(i)}, \text{ gdzie } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \text{ i } \lambda_i > 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k \qquad (*)$$

i punkty–wyniki $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ leżą po jednej stronie płaszczyzny Π, to muszą leżeć na niej, bo $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_j p_j^{(i)}) = \sum_{i=1}^{k}(\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_j p_j)$ i gdyby jeden ze składników po lewej stronie był mniejszy niż po prawej, to inny musiałby być większy — sprzeczność. Zauważmy, że warunek (*) oznacza, że p leży wewnątrz otoczki wypukłej zbioru $\{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)}\}$.

Przypuśćmy teraz, że tak nie jest i bez straty ogólności przyjmijmy $p = 0$. Wtedy p leży na brzegu otoczki wypukłej $\{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)}\}$ — pewnego wielościanu m-wymiarowego, gdzie $m \leqslant n$. W takim razie leży na jakiejś ścianie $(m-1)$-wymiarowej. Wiadomo, że cały wielościan leży po jednej stronie hiperpłaszczyzny wyznaczonej przez tę ścianę. Na razie zakładamy, że $m = n$ (w przypadku $n = 2$ oznacza to, że, wyniki nie leżą na jednej prostej). Ta hiperpłaszczyzna opisana jest równaniem $< a, x >:= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$. Ograniczyliśmy zbiór rozważanych punktów do leżących na tej ścianie.

Zejdźmy wymiar niżej, na tę hiperpłaszczyznę o równaniu $\langle a, x\rangle = 0$. Powtarzamy rozumowanie, jeżeli jesteśmy w l wymiarach i 0 jest na brzegu otoczki wypukłej, to jest na ścianie $(l-1)$–wymiarowej; weźmy bardzo mały wektor e leżący w tej płaszczyźnie l-wymiarowej i prostopadły do płaszczyzny $(l-1)$-wymiarowej i nie należący do tej ściany i podstawmy $a := a+e$. To spowoduje, że hiperpłaszczyzna $(n-1)$-wymiarowa lekko się obróci, wyleci z niej ta ściana l-wymiarowa, a pozostanie ta $(l-1)$-wymiarowa. wektor e może być tak krótki, by wielościan w dalszym ciągu leżał po jednej stronie hiperpłaszczyzny. W końcu dojdziemy do momentu, gdy 0 będzie wewnątrz otoczki wypukłej jakichś punktów w l wymiarach (być może $l = 0$) i wtedy to postępowanie się kończy, bo 0 jest postaci (*).

Pozostaje skomentować przypadki ekstremalne. Otóż może się zdarzyć, że wszystkie punkty leżą w pewnej przestrzeni m–wymiarowej, gdzie $m < n$. Wówczas zaczynamy od przestrzeni m–wymiarowej zawierającej wszystkie punkty–wyniki, a dopiero później zmniejszany wymiar.

Może się również zdarzyć, że $n-1$–wymiarowej płaszczyzny opisanej w rozwiązaniu zadania nie ma. Wtedy wszystkie wagi muszą być równe 0, gdyż 0 jest postaci $(*)$ (dowód jak powyżej). Podamy przykład. Niech $n = 2, p^{(1)} = (2, 2), p^{(2)} = (6, 2), p^{(3)} = (5, 5), p^{(4)} = (5, 6)$. Punkt $p^{(3)}$ leży wewnątrz trójkąta o wierzchołkach $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(4)}$, więc jeśli największą z liczb $2a_1 + 2a_2$, $2a_1 + 6a_2$, $5a_1 + 5a_2$, $5a_1 + 6a_2$ ma być $5a_1 + 5a_2$, to musimy przyjąć $a_1 = 0 = a_2$.

Uwaga

Zbiegiem okoliczności każdy uczestnik mógł uczynić siebie samodzielnym liderem, oprócz dwóch, którzy prowadzili ex aequo, bo mieli taką samą liczbę punktów za każde zadanie.

2. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych a, b takie, że $a^3 = 6b^2 + 2$.

Rozwiązanie

Mamy $a^3 = 6b^2 + 2 = (1 + b)^3 + (1 - b)^3$. Z wielkiego twierdzenia Fermata wynika, że $a = 0$, $b+1 = 0$ lub $b-1 = 0$. W takim razie pary spełniające to równanie to $(2, -1)$ i $(2, 1)$.

3. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym o polu 1, zaś P dowolnym punktem w jego wnętrzu. Przez D, E, F oznaczamy rzuty prostokątne P odpowiednio na BC, CA i AB. Znajdź najmniejszą możliwą sumę pól trójkątów BDP, CEP i FAP.

Rozwiązanie
Zamalujmy trójkąty BDP, CEP i FAP oraz dorysujmy proste przechodzące przez P i równoległe do prostych AB, AC, BC. Dzielą one trójkąt na trzy równoległoboki i trzy trójkąty równoboczne. Każda z tych figur jest zamalowana w połowie, skąd widać, że również połowa trójkąta ABC została zamalowana. Stąd najmniejsza (i największa) możliwa wartość sumy pól trójkątów BDP, CEP i FAP wynosi $\frac{1}{2}$.

4. Mając daną kartkę papieru $A5$ skonstruować (bez użycia cyrkla tudzież linijki) trójkąt równoboczny. Można założyć, że boki kartki $A5$ dzielą się w stosunku $1 : \sqrt{2}$.
Uwaga: Do opisu konstrukcji należy dołączyć skonstruowany trójkąt.

Rozwiązanie
Niech $ABCD$ będzie kartką $A5$, przy czym $AB < BC$.

1. Składamy kartkę wzdłuż symetralnej odcinka AB.

2. Zginamy kartkę tak, aby punkt A wypadł na tej symetralnej a zgięcie przechodziło przez punkt B.

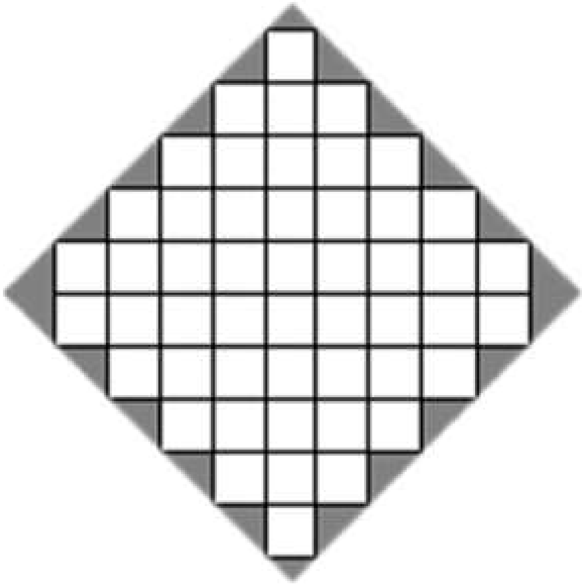
3. Zginamy kartkę wzdłuż prostej, na której znajdują się teraz punkty A i B.

4. Rozkładamy kartkę.

Zauważmy, że dokonaliśmy trysekcji kąta ABC. Analogicznie dokonujemy trysekcji kąta BAD i wtedy dwa z otrzymanych zgięć tworzą wraz z odcinkiem AB brzeg trójkąta równobocznego. Zaginając niepotrzebne fragmenty kartki "do środka"dostajemy trójkąt równoboczny.

5. Czy z kwadratowej kartki papieru o wymiarach $7,99 \times 7,99$ potrafisz wyciąć 50 kwadratów jednostkowych?

Rozwiązanie
Tak. Bok dużego kwadratu ma długość $\frac{11}{\sqrt{2}}$, czyli mniej niż 7,99, długość jego przekątnej – siłą rzeczy – równa jest 11.



6. Rozstrzygnij, czy istnieje 2008 różnych takich trójek liczb naturalnych parami względnie pierwszych a, b, c takich, że liczby a^2, b^2 i c^2 tworzą ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie
Tak, istnieje nieskończenie wiele trójek o tej własności. Liczby a^2, b^2, c^2 tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$, czyli gdy $2b^2 - c^2 = a^2$. Przyjmijmy $a = 1$ i $b_1 = c_1 = 1$. Liczby a^2, b_1^2, c_1^2 tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 0. Niech $b_{n+1} = 3b_n + 2c_n$ i jednocześnie $c_{n+1} = 4b_n + 3c_n$. Mamy teraz $2b_{n+1}^2 - c_{n+1}^2 = 2b_n^2 - c_n^2$, zatem dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi równość $2b_n^2 - c_n^2 = 1$. Z niej wynika, że liczby $1, b, c$ są parami względnie pierwsze i że ich kwadraty tworzą ciąg arytmetyczny. Jest oczywiste, że oba ciągi (b_n) i (c_n) są ściśle rosnące, zatem poszukiwanych trójek jest nieskończenie wiele.

Uwaga. Rozwiązanie jest motywowane teorią równania Pella, ale na pomysł rozważania, tak zdefiniowanych ciągów (b_n) i (c_n) można wpaść samodzielnie.

7. Joszua rzuca monetą n razy, zaś Ahmed $n+1$ razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że Ahmed wyrzuci więcej orłów niż Joszua.

Rozwiązanie
Zauważmy, że skoro Ahmed rzucał monetą $n+1$ razy, a Joszua n razy, to Ahmed wyrzucił albo więcej orłów albo więcej reszek niż Joszua. Jednocześnie - nie mógł wyrzucić zarówno więcej reszek jak i orłów niż Joszua, gdyż wówczas rzucałby przynajmniej o dwa rzuty więcej. Zatem dokładnie jeden z dwóch wyników (orły lub reszki) został wyrzucony przez Ahmeda więcej razy niż przez Joszue. Ponieważ orły i reszki są symetryczne, to prawdopodobieństwo, że Ahmed wyrzucił więcej orłów niż Joszua wynosi $\frac{1}{2}$.

8. Udowodnij, że dla każdego $x \in (0,1)$ i każdych liczb naturalnych m, n zachodzi nierówność

$$(1-x^n)^m + (1-(1-x)^m)^n \geqslant 1.$$

Rozwiązanie
Wykażemy tę nierówność poprzez interpretację kombinatoryczną. Przeprowadźmy następujący eksperyment probabilistyczny. Niech w tablicy liczb o n wierszach i m kolumnach dla każdego pola prawdopodobieństwo, że liczba w tym polu to 0 wynosi x, a że liczba w tym polu to 1 wynosi $1-x$. Poszczególne losowania są niezależne.
Obliczmy prawdopodobieństwo, że w każdym wierszu występuje choć jedno 0. W konkretnym wierszu prawdopodobieństwo tego, że wystąpią same jedynki wynosi $(1-x)^m$. Zatem chociaż jedno zero wystąpi z prawdopodobieństwem $1-(1-x)^m$, a co za tym idzie prawdopodobieństwo, że w każdym wierszu będzie choć jedno 0 wynosi dokładnie $(1-(1-x)^m)^n$. Obliczmy teraz prawdopodobieństwo, że w każdej kolumnie jest chociaż jedna 1. Prawdopodobieństwo wystąpienia samych zer w poszczególnej kolumnie wynosi x^n, a więc choć jedna jedynka będzie z prawdopodobieństwem $1-x^n$. Zatem będzie tak w każdej kolumnie w prawdopodobieństwem $(1-x^n)^m$.

Zauważmy, że przynajmniej jedno z tych dwóch zdarzeń wystąpi. Będzie tak ponieważ jeżeli nie w każdym wierszu wystąpi zero, to w pewnym wierszu będą same jedynki, a co za tym idzie jedynka będzie w każdej kolumnie.
Zatem
$$(1-x^n)^m + (1-(1-x)^m)^n \geqslant 1.$$

Uwaga O innych rozwiązaniach tego zadania można przeczytać w sprawozdaniu z XLV Olimpiady Matematycznej, zad. 10 z zawodów pierwszego stopnia.

Zawody drużynowe:

1. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ tożsamość
$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)).$$

Rozwiązanie
Podstawmy najpierw $x = f(z)$. Wówczas otrzymujemy
$$f(f(z) - f(y)) = f(f(z)) + f(z)f(y) + f(f(y)).$$
Zauważmy, że prawa strona równości jest symetryczna ze względu na y i z, czyli lewa również. Na mocy tego mamy
$$f(f(z) - f(y)) = f(f(y) - f(z)).$$
Znaczy to, że dla każdego x takiego, że istnieją a i b spełniające $x = f(a) - f(b)$ zachodzi $f(x) = f(-x)$. Zauważmy teraz, że funkcja stale równa 0 spełnia warunki zadania. Od tego momentu będziemy zakładać, że f nie jest stale równa 0. Pokażemy, że przy tym założeniu dla dowolnego x istnieją a i b takie, że $x = f(a) - f(b)$. Niech y będzie takie, że $f(y) \neq 0$. Mamy
$$f(f(y)) + xf(y) = f(x - f(y)) - f(x).$$
Skoro $f(y) \neq 0$ to lewa strona jest wielomianem pierwszego stopnia zmiennej x, czyli wybierając odpowiednio x otrzymujemy z lewej strony

dowolną liczbę rzeczywistą. Prawa strona jest postaci $f(a)-f(b)$. Zatem dla dowolnego x zachodzi $f(x)=f(-x)$.

Podstawmy teraz do równości z treści zadania $x=0$. Otrzymujemy

$$f(-f(y))=f(0)+f(f(y)).$$

Ponieważ $f(-f(y))=f(f(y))$, to mamy $f(0)=0$.

Podstawiając $x=f(y)$ otrzymujemy

$$0=2f(f(y))+f(y)^2,$$

czyli

$$f(f(y))=-\frac{f(y)^2}{2}.$$

Podstawiając jeszcze raz do głównego równania $x=f(z)$ i korzystając z otrzymanej równości mamy

$$f(f(z)-f(y))=f(f(z))+f(z)f(y)+f(f(y))$$

$$=-\frac{f(z)^2}{2}+f(z)f(y)-\frac{f(y)^2}{2}=-\frac{1}{2}\Big((f(z)-f(y))\Big)^2.$$

Ponieważ jak wiemy dowolna liczba rzeczywista da się przedstawić w postaci $f(a)-f(b)$, to dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$ otrzymujemy $f(x)=-\frac{x^2}{2}$.

Po sprawdzeniu, że $f(x)=-\frac{x^2}{2}$ w istocie spełnia wyjściowe równanie otrzymujemy 2 rozwiązania, opisane wyżej oraz $f(x)=0$.

2. Rozstrzygnąć czy istnieje zbiór liczb naturalnych S mocy 2008 taki, że suma elementów dowolnego niepustego podzbioru S jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym od 1.

Rozwiązanie

Tak, istnieje taki zbiór. Udowodnimy indukcyjnie, że istnieje zbiór S_k o wskazanej własności oraz mocy k.

Dla ułatwienia oznaczeń *dobrym* nazwiemy podzbiór T pewnego zbioru X o ile suma elementów podzbioru T jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym od 1.

Zbiór S_1 oczywiście istnieje, może być na przykład równy $\{4\}$.

Przypuśćmy, że istnieje zbiór S_k o zadanej własności, wykażemy, że istnieje zbiór S_{k+1}. Dodajmy teraz do zbioru S_k nową, $k+1$-szą liczbę o wartości b, niech $U_1 = S_k \cup \{b\}$. Niektóre z podzbiorów zbioru U_1 mogą nie być dobre. Będziemy je sukcesywnie naprawiać tworząc zbiory U_i dla $i = 1, 2, \ldots$, gdzie U_{n+1} będzie powstawał z U_n poprzez pomnożenie wszystkich elementów przez odpowiednią liczbę. Załóżmy, że zbiór U_n ma t podzbiorów dobrych i ich sumy są liczb naturalnych o wykładnikach odpowiednio $m_1, \ldots, m_t$. Niech pewien podzbiór W zbioru U_n nie będzie dobry i suma jego elementów wynosi c. Wówczas mnożymy wszystkie elementy U_n przez $c^{NWW(m_1,\ldots,m_t)}$. Wszystkie dobre podzbiory U_n nadal pozostały dobre, a zbiór o sumie c ma teraz sumę $c^{NWW(m_1,\ldots,m_t)+1}$, czyli jest dobry. Określamy więc zbiór U_{n+1}, który ma o jeden więcej dobry podzbiór następująco: $U_{n+1} = \{a \cdot c^{NWW(m_1,\ldots,m_t)} : a \in U_n\}$. Gdy wszystkie podzbiory pewnego zbioru U_m są dobre, to kończymy ten proces. W ten sposób po skończonej ilości kroków otrzymamy zbiór $S_{k+1} = U_m$ dla pewnego m, którego wszystkie podzbiory są dobre.

Kładąc $S = S_{2008}$ otrzymujemy poszukiwany zbiór.

3. Dana jest rodzina T podzbiorów k elementowych zbioru n elementowego S, przy czym $n > 2k$. Każdy $k+1$ elementowy podzbiór S zawiera dokładnie $m \geqslant 1$ zbiorów z rodziny T. Wykazać, że T zawiera wszystkie k elementowe podzbiory S.

Rozwiązanie

Policzymy na dwa różne sposoby ilość par (U, V) gdzie $U \in T$ i V jest $k+1$-elementowym podzbiorem S zawierającym U. Z jednej strony, jeśli wybierzemy V na jeden z $\binom{n}{k+1}$ sposobów, to z warunków zadania wynika, że zbiór U możemy dobrać na m sposobów, czyli par powyższej postaci jest $m\binom{n}{k+1}$. A z drugiej strony, jeśli wybierzemy najpierw zbiór U, to zbiór V możemy wybrać na $n-k$ sposobów, gdyż musimy do niego dołączyć dokładnie jeden element z tych, które nie należą do U. Dostajemy więc $(n-k)|T|$ par powyższej postaci. Otrzymujemy równość

$$(n-k)|T| = m\binom{n}{k+1} \quad \text{tzn.} \quad |T| = \frac{m}{n-k}\binom{n}{k+1} = \frac{m}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Policzymy następnie, na dwa różne sposoby, ilość trójek (U, V, W) gdzie U jest $(k+1)$–elementowym podzbiorem S, a V, W są różnymi zbiorami rodziny T, które są zawarte w U. Podobnie jak poprzednio zbiór U możemy wybrać na $\binom{n}{k+1}$ sposobów, zbiór V na m, a zbiór W na $m-1$. A zatem liczba takich trójek to

$$m(m-1)\binom{n}{k+1} = \frac{m(m-1)(n-k)(n-k+1)}{k(k+1)}\binom{n}{k-1}.$$

Zauważmy jednak, że dla dowolnej takiej trójki zbiór $V \cap W$ ma dokładnie $k-1$ elementów, gdyż gdyby miał ich mniej te zbiory nie mogłyby się jednocześnie zawierać w $k+1$–elementowym zbiorze U. Ilość takich trójek możemy więc zliczać rozpoczynając od wybrania zbioru $V \cap W$. Dla $(k-1)$–elementowego podzbioru J zbioru S niech s_J oznacza liczbę zbiorów w T, które go zawierają. Wówczas istnieje dokładnie $s_J(s_J-1)$ trójek powyższej postaci, dla których $J = V \cap W$ (gdyż wybór V i W wyznacza U). Dostajemy zatem

$$\frac{m(m-1)(n-k)(n-k+1)}{k(k+1)}\binom{n}{k-1} = \sum_{|J|=k-1} s_J(s_J-1).$$

Każdy zbiór z rodziny T zawiera w sobie dokładnie k różnych podzbiorów $k-1$ elementowych. Mamy więc

$$\sum_{|J|=k-1} s_J = k|T| = \frac{mk}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{m(n-k+1)}{k+1}\binom{n}{k-1}.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną a kwadratową wynika, że

$$\sum_{|J|=k-1} s_J^2 \geqslant \frac{\left(\sum_{|J|=k-1} s_J\right)^2}{\binom{n}{k-1}}.$$

Łącząc tą nierówność z poprzednimi zależnościami otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{m(m-1)(n-k)(n-k+1)}{k(k+1)}\binom{n}{k-1} &= \sum_{|J|=k-1} s_J^2 - s_J \\
&\geqslant \frac{\left(\sum_{|J|=k-1} s_J\right)^2}{\binom{n}{k-1}} - \sum_{|J|=k-1} s_J \\
&= \frac{m^2(n-k+1)^2}{(k+1)^2}\binom{n}{k-1} - \frac{m(n-k+1)}{k+1}\binom{n}{k-1},
\end{aligned}$$

lub po prostu

$$\frac{(m-1)(n-k)}{k} \geqslant \frac{m(n-k+1)}{k+1} - 1.$$

Ta nierówność jest jednak równoważna nierówności

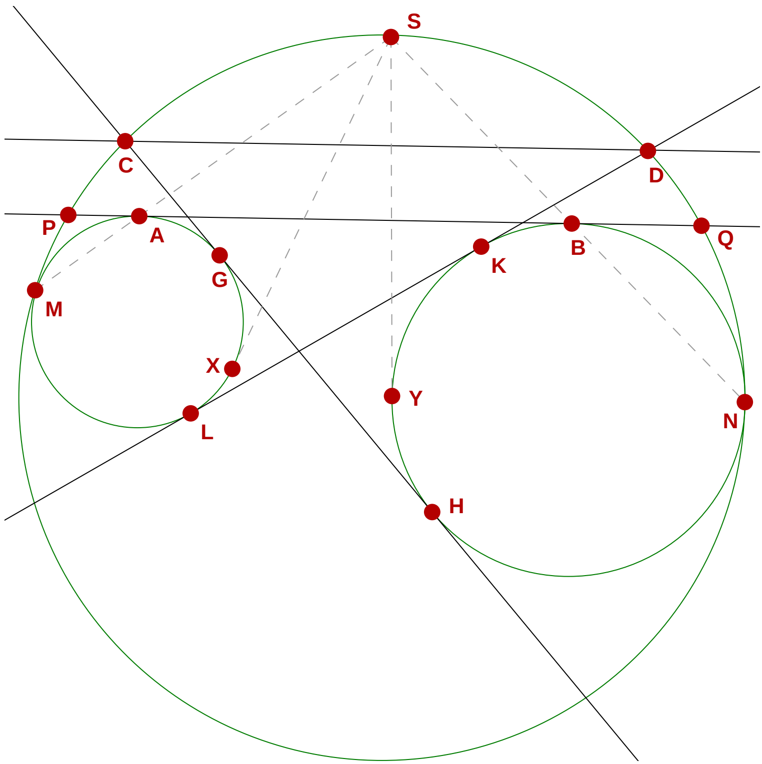
$$m(n-2k) \geqslant (k+1)(n-2k),$$

a ponieważ $n > 2k$ jest też $m \geqslant k+1$, czyli po prostu $m = k+1$. Oznacza to, że dla dowolnego $k+1$-elementowego podzbioru zbioru S każdy jego k-elementowy podzbiór należy do T, a więc jasne jest, że do T należy każdy k-elementowy podzbiór zbioru S i dowód jest zakończony.

4. Dany jest okrąg ω i rozłączne, styczne do niego wewnętrznie, okręgi ω_1, ω_2 o środkach O_1, O_2. Niech A i B będą punktami styczności wspólnej stycznej zewnętrznej ω_1, ω_2 odpowiednio z ω_1 i ω_2. Wspólne styczne wewnętrzne ω_1, ω_2 przecinają ω w punktach C, D, przy czym punkty A, B, C i D leżą po tej samej stronie prostej O_1O_2. Udowodnić, że proste AB i CD są równoległe.

Rozwiązanie

Niech M i N będą odpowiednio punktami styczności ω_1 i ω_2 z ω, a przez P, Q oznaczmy przecięcie prostej AB z ω. Środek łuku PQ zawierającego punkty C i D oznaczmy przez S. Aby wykazać równoległość prostych AB i CD wystarczy udowodnić równość $SC = SD$.



Zauważmy, że punkty M, A, S są współliniowe, gdyż jednokładność przekształcająca ω_1 w ω ma środek w M oraz przenosi punkt A na punkt, w którym styczna do okręgu ω jest równoległa do stycznej do okręgu ω_1 w punkcie A, czyli do prostej AB, czyli na punkt S. Analogicznie, współliniowe są punkty N, B, S. Zauważmy też, że punkty M, A, B, N leżą na jednym okręgu. Rzeczywiście, styczna do okręgu ω w punkcie S jest równoległa do prostej AB, a zatem kąt między ową styczną, a prostą MA ma tą samą miarę co kąt SAB. Z drugiej jednak strony, ten sam kąt mą tą samą miarę co kąt $\angle MNS$, a zatem punkty M, A, B, N leżą na jednym okręgu, który oznaczymy symbolem $\tilde{\omega}$.

Z punktu S poprowadźmy styczne SX, SY odpowiednio do okręgów ω_1, ω_2. Zauważmy, że z twierdzenia o potędze punktu względem okręgów ω_1, $\tilde{\omega}$ i ω_2 otrzymujemy równości

$$SX^2 = SA \cdot SM = SB \cdot SN = SY^2,$$

a zatem $SX = SY$.

Niech G i H będą punktami styczności wspólnej stycznej okręgów ω_1, ω_2 wyznaczającej punkt C. Analogicznie niech L, K będą punktami styczności wspólnej stycznej okręgów ω_1, ω_2 wyznaczającej punkt D.

Na mocy lematu użytego w rozwiązaniu zadania 23 z zawodów indywidualnych prawdziwe są zależności

$$\frac{MS}{SX} = \frac{MC}{CG} = \frac{MD}{DL}.$$

Jednocześnie, z twierdzenia Ptolemeusza otrzymujemy

$$MS \cdot CD = MD \cdot SC + MC \cdot SD.$$

Po podzieleniu obu stron tej równości przez $\frac{MC}{CG}$ dostajemy

$$SX \cdot CD = DL \cdot SC + CG \cdot SD.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie względem punktu N dostajemy również

$$SY \cdot CD = CH \cdot SD + DK \cdot SC.$$

A ponieważ $SX = SY$ mamy

$$DL \cdot SC + CG \cdot SD = CH \cdot SD + DK \cdot SC,$$

czyli

$$SC \cdot (DL - DK) = SD \cdot (CH - CG)$$

lub po prostu

$$SC \cdot KL = SD \cdot GH.$$

Nietrudno jednak zauważyć, że $GH = KL$, a zatem $SC = SD$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

5. Znaleźć figurę $F \subseteq \mathbb{R}^2$ o jak najmniejszym polu, w której da się obrócić o 180° odcinek, tzn. istnieje funkcja ciągła $f : [0,1]\times[0,1] \to F$ taka, że $f(0,0) = f(1,1)$ oraz $f(0,1) = f(1,0)$ oraz dla każdych $p, q, t \in [0,1]$ zachodzi $d(f(p,t), f(q,t)) = |p - q|$, gdzie $d(A,B)$ oznacza odległość euklidesową punktów A i B.
Wyjasnienie: punkt $p \in [0,1]$ znajduje się po czasie $t \in [0,1]$ w położeniu $f(p,t)$, zatem $f(0,0)$ oznacza położenie początkowe punktu 0, a

$f(0,1)$ położenie końcowe tego punktu, natomiast $f(1,0)$ oznacza położenie początkowe punktu 1, zaś punkt $f(1,1)$ — jego położenie końcowe.

Rozwiązanie
Dla dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje figura F o polu nie większym od ε i spełniająca warunki zadania.

Z uwagi na długość pełnego rozwiązania wymyślonego przez Abrama Samoilovitcha Besicovitcha nie zamieszczamy go tutaj. Można je znaleźć w książce I.M.Jagłoma i W.G.Bołtiańskiego „Figury wypukłe” wydanej w Warszawie w 1955 roku przez PWN (tłumaczenie książki wydanej w 1951 roku w Moskwie i Leningradzie), zadania 71 i 72, str 67, bądź też na stronie `http://www.jstor.org/pss/2317619` na której to podany artykuł jest niestety dostępny nie zawsze bezpłatnie; także Besicovitch, Abram (1963). "The Kakeya Problem". American Mathematical Monthly vol. 70, 1963, pp. 697-706 pismo dostępne w bibliotekach uniwersyteckich; również Frederick Cunningham, Jr., The Kakeya Problem for Simply Connected and for Star-shaped Sets, American Mathematical Monthly, vol. 78, 1971, pp. 114-129.

Pierwszy mecz matematyczny:

1. *Kulką* będziemy nazywać kulę o promieniu 1. Układ n parami rozłącznych kulek zawartych w kuli K o promieniu R nazywamy *dobrym*, gdy nie da się dołożyć do niego kolejnej kulki (rozłącznej i zawartej w K), zaś *mega–dobrym*, jeśli jest dobry oraz nie istnieje dobry układ o większej liczbie kulek. Dla dwóch mega–dobrych układów X i Y udowodnić, że da się tak ustawić środki kulek z układu X w ciąg $A_1, A_2, \ldots, A_n$, zaś środki kulek z układu Y w ciąg $B_1, B_2, \ldots, B_n$, że dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ długość odcinka A_iB_i nie przekracza 2.

Rozwiązanie
Będziemy chcieli skorzystać z twierdzenia Halla (patrz rozwiązanie zadania 16). Kulki ze zbioru X będą chłopcami, a kulki ze zbioru Y - dziewczętami. Dziewczynka i chłopiec znają się, jeżeli się przecinają, a więc jeśli odległość ich środków nie przekracza 2. Teza twierdzenia Halla jest równoważna tezie zadania. Chcemy sprawdzić, czy spełniony jest wa-

runek Halla. Weźmy zatem k kulek ze zbioru X. Niech l będzie liczbą kulek ze zbioru Y, które przecinają którąś z nich. Rozważmy układ Z tych k kulek z X i pozostałych $n-l$ kulek z Y. Ten układ jest dobry, bo dobre są układy X i Y oraz kulki z X nie przecinają kulek z Y. Z definicji układu mega–dobrego mamy $n-l+k=|Z|\leqslant|X|=n$, czyli $k\leqslant l$. Warunek Halla zachodzi, zachodzi więc zatem i teza zadania.

Uwaga

Przez pomyłkę na obozie zadanie zostało podane z błędną treścią. Układ był *mega–dobry*, gdy był dobry i minimalny, a długość każdego z odcinków A_iB_i miała nie przekraczać 4. Wnikliwy Czytelnik z pewnością spróbuje przeprowadzić dowód analogiczny do powyższego, dostrzec w nim błąd, a także uzupełnić go, czego ani autor zadania ani pozostali członkowie kadry nie byli w stanie zrobić.

2. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ spełniające dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}^+$ tożsamość

$$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y).$$

Uwaga: $\mathbb{R}^+$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Rozwiązanie

Pokażemy najpierw, że dla każdego $u>0$ zachodzi $f(u)>u$. Gdyby dla pewnego p prawdą było $f(p)<p$, to mielibyśmy

$$f(p)=f\Big(p-f(p)+f(p)\Big)=f\Big(p-f(p)+p\Big)+f(p),$$

z czego jednak wynika, że $0<f\Big(p-f(p)+p\Big)=0$. Podobnie zakładając, że $f(p)=p$ dla pewnego $p>0$ otrzymujemy

$$f(2p)=f(\Big(p+f(p)\Big)=f(p+p)+f(p),$$

zatem $0<f(p)=0$.

Dalej zakładamy, że $u,x>0$. Mamy $f\Big(u-x+f(x)\Big)=f(u-x+x)+f(x)=f(u)+f(x)$. Wynika stąd, że zachodzi równość

$$\frac{f(u-x+f(x))-f(u)}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}\,.$$

Wykażemy, że wartość wyrażenia $\frac{f(x)}{f(x)-x}$ nie zależy od $x>0$. Załóżmy, że tak nie jest i że dla pewnej liczby $y>0$ zachodzi nierówność

$$\tfrac{f(y)}{f(y)-y} < \tfrac{f(x)}{f(x)-x}.$$
Niech $0 < a < x$ i $0 < a < y$. Jeśli $u \geqslant a$, to $f(u) > u \geqslant a$. Za pomocą łatwej indukcji dowodzimy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant$ zachodzi wzór $f\Big(a + n(f(x) - x)\Big) = f(a) + nf(x)$.
Jeśli $t > 0$, to $\lfloor t \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą z półprostej $(-\infty, t]$. Mamy wtedy:
$f\Big(a + t(f(x) - x)\Big) = f\Big(a + (t - \lfloor t \rfloor)(f(x) - x) + \lfloor t \rfloor(f(x) - x)\Big) =$
$= f\Big(a+(t-\lfloor t \rfloor)(f(x)-x)+\Big)+\lfloor t \rfloor f(x) > a+\lfloor t \rfloor f(x) > a+(t-1)f(x) =$
$=a - f(x) + tf(x)$.
Niech $u > 0$, niech $t = \frac{u}{f(x)-x}$. Wtedy, na mocy poprzednio uzyskanej nierówności:
$$f(a+u) = f\Big(a+t(f(x)-x)\Big) > a-f(x)+\tfrac{u}{f(x)-x}f(x) = a-f(x)+\tfrac{f(x)}{f(x)-x}u.$$
Niech $k > 0$ oznacza liczbę całkowitą i niech $u = f(y) - y$. Stosując poprzednio otrzymana nierówność k–krotnie otrzymujemy:
$$f(a) + kf(y) = f\Big(a + k(f(y) - y)\Big) > a - f(x) + k\tfrac{f(x)}{f(x)-x}\Big(f(y) - y\Big).$$
Z tej nierówności po łatwym przekształceniu otrzymujemy
$$\tfrac{f(y)}{f(y)-y} > \tfrac{a-f(x)-f(a)}{k(f(y)-y)} + \tfrac{f(x)}{f(x)-x}.$$
To jednak jest możliwe jedynie dla
$$k < \frac{\frac{f(x)+f(a)-a}{f(y)-y}}{\frac{f(x)}{f(x)-x} - \frac{f(y)}{f(y)-y}}\ .$$
W ten sposób wykazaliśmy, że nie jest możliwe, by $\frac{f(x)}{f(x)-x} > \frac{f(y)}{f(y)-y}$. Ponieważ liczby x i y pełnią w tych rozważaniach takie same role, więc nie jest też możliwe, by $\frac{f(x)}{f(x)-x} < \frac{f(y)}{f(y)-y}$, a to oznacza, że $\frac{f(x)}{f(x)-x} = \frac{f(y)}{f(y)-y}$.

Niech $C = \frac{f(x)}{f(x)-x}$. W tej sytuacji $f(x) = \frac{C}{C-1}x$. Niech $D = \frac{C}{C-1}$, czyli $f(x) = Dx$ dla wszystkich $x > 0$ i pewnej liczby D.

Podstawiając do równania wyjściowego otrzymujemy
$$Dx + D^2y = Dx + Dy + Dy,$$
z czego wynika, że $D = 2$ lub $D = 0$, jednak $D = 0$ wykluczamy, gdyż $f(x) > 0$ dla każdego $x > 0$.

Na sprawdzeniu, że funkcja $f(x) = 2x$ istotnie spełnia warunki zadania kończymy rozwiązanie.

3. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi

nierówność
$$21ab + 2bc + 8ca \leqslant 12.$$
Znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia
$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

Rozwiązanie

Niech $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{2}{b}$, $z = \frac{3}{c}$. Wówczas liczby x, y, z są również dodatnie oraz łatwo sprawdzić, że nierówność dana w założenia zadaniach przepisuję się jako $2xyz \geqslant 2x + 4y + 7z$, chcemy zaś znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia $x + y + z$.

Z nierówności $z(2xy-7) \geqslant 2x+4y$ wynika, że $2xy > 7$ oraz $z \geqslant \frac{2x+4y}{2xy-7}$.

Z powyższego oszacowania a następnie z nierówności między średnią a geometryczną
$$x + y + z \geqslant x + y + \frac{2x + 4y}{2xy - 7} =$$
$$= x + \frac{11}{2x} + \left(\frac{2xy - 7}{2x}\right) + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7} \geqslant x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}.$$

Zachodzi też nierówność $2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \geqslant \frac{3+\frac{7}{x}}{2}$. Rzeczywiście, po podniesieniu do kwadratu i dokonaniu przekształceń widzimy, że nierówność jest równoważna nierówności $7(1 - \frac{3}{x})^2 \geqslant 0$. Otrzymujemy więc
$$x + y + z \geqslant \frac{3}{2} + x + \frac{9}{x} \geqslant \frac{15}{2}.$$

Równość zachodzi dla $x = 3, y = \frac{5}{2}, z = 2$. A więc szukana wartość wynosi $\frac{15}{2}$ i jest osiągana dla $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{5}$ oraz $c = \frac{3}{2}$.

4. Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p. Udowodnić, że zachodzi kongruencja
$$\sum_{i=1}^{p-1} 2^i i^{p-2} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^{p-2} \pmod{p.}$$

Rozwiązanie

Dla wygody w rozwiązaniu będziemy operować na ułamkach modulo p, tzn. mówimy, że jeśli $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz b, d są niepodzielne przez p, to $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac \equiv bd \pmod{p}$. Nietrudno sprawdzić, że wówczas każdej liczbie wymiernej o mianowniku niepodzielnym przez p odpowiada dokładnie jedna reszta modulo p. A więc używając tej notacji możemy napisać $i^{p-2} \equiv \frac{1}{i} \pmod{p}$ dla $0 < i < p$, gdyż z Małego Twierdzenia Fermata $i^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Wykorzystamy dwa fakty. Po pierwsze, przy ustalonym j zachodzi równość

$$\sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} = \binom{n+1}{j+1}.$$

Można ją dowieść indukcyjnie korzystając z tego, że: $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}$. Po drugie

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Istotnie, wystarczy zauważyć, że $\frac{1}{i} + \frac{1}{p-i} \equiv 0 \pmod{p}$, a więc można połączyć składniki sumy w takie pary, których sumy będą podzielne przez p.

Zauważmy, że

$$\sum_{i=1}^{p-1} 2^i i^{p-2} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(1+1)^i}{i} = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{\binom{i}{j}}{i} = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j}^{p-1} \frac{\binom{i}{j}}{i} = \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=j}^{p-1} \frac{\binom{i}{j}}{i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=j}^{p-1} \frac{\frac{i!}{j!(i-j)!}}{i} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \sum_{i=j}^{p-1} \binom{i-1}{j-1} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \binom{p-1}{j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-j)}{j!} \equiv \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \frac{(-1)^j j!}{j!} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(-1)^j}{j} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}-1} \frac{1}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{2j} \equiv 2 \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{2j} = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{i} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^{p-2} \pmod{p},$$

co należało wykazać.

5. W czworościanie $ABCD$ na krawędziach AB, AC, AD, BC, BD, CD wybrano odpowiednio punkty K, L, M, N, O, P różne od wierzchołków. Udowodnić, że sfery opisane na czworościanach $AKLM$, $BKNO$, $CLNP$ i $DMOP$ przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Lemat

Na bokach YZ, ZX, XY trójkąta XYZ wybrano punkty U, V, W. Wówczas okręgi opisane na trójkątach XVW, YUW, ZUV przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

Niech S będzie drugim punktem przecięcia okręgów XVW i YUW. Przypuśćmy, że S leży wewnątrz trójkąta XYZ (pozostałe przypadki rozpatrujemy analogicznie). Zachodzą równości:

$$\measuredangle USV = 360° - \measuredangle USW - \measuredangle VSW = \measuredangle UYW + \measuredangle VXW = 180° - \measuredangle UZV,$$

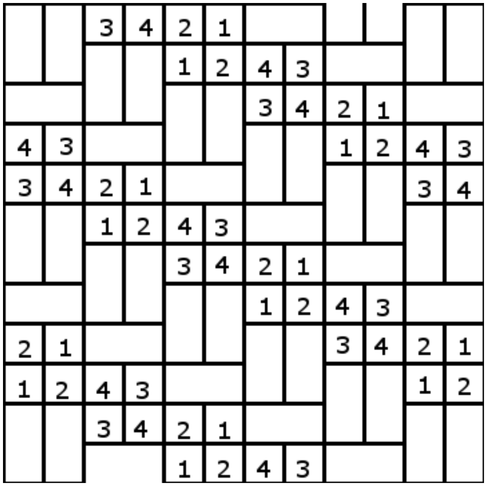
czyli punkty S, U, Z, V leżą na jednym okręgu. ■

Rozważmy teraz inwersję względem sfery o środku w punkcie A, o dowolnym promieniu. Sfera $AKLM$ przechodzi przez środek inwersji A, więc przejdzie na płaszczyznę $K'L'M'$, a pozostałe trzy sfery na sfery. Mamy pokazać, że te cztery figury przecinają się w jednym punkcie. Z lematu wynika, że sfery $AKLM$, $BKNO$, $CLNP$ i płaszczyzna AKL przecinają się w jednym punkcie. W takim razie płaszczyzny $AK'L'$, $K'L'M'$ oraz sfery $B'K'N'O'$, $C'L'N'P'$ przecinają się w jednym punkcie, czyli sfery $B'K'N'O'$, $C'L'N'P'$ i prosta $K'L'$ przecinają się w jednym punkcie. Analogicznie pozostałe pary sfer mają niepuste przecięcia z pozostałymi bokami trójkąta $K'L'M'$. W takim razie na płaszczyźnie $K'L'M'$ mamy taką konfigurację jak w lemacie - stąd teza.

6. Ahmed i Fredek zdecydowali się zagrać w grę. Tym razem mają nieskończoną szachownicę, początkowo pustą. Ruch polega na postawieniu swojego znaku (Ahmed gra kółkami, Fredek zaś krzyżykami, Ahmed rusza się pierwszy) na dowolnym pustym polu. Zwycięża gracz, któremu uda się ustawić n swoich znaków w sąsiadujących polach jednego wiersza, kolumny lub skosu. Rozstrzygnąć, czy istnieje takie n, dla którego przy dobrej grze Fredka Ahmed nie zdoła wygrać w skończonej liczbie ruchów.

Rozwiązanie

Istnieje takie n, że Fredek będzie posiadał strategię blokującą wygraną Fredka. Wskażemy tę strategię. Pola na szachownicy będą połączone w pary, gdy Ahmed postawi swój znak na jednym z tych pól, Fredek stawia swój znak na drugim z nich.



Podział na pary pól jest wskazany na rysunku. Pola umieszczone w jednym „dominie” oraz sąsiadujące ze sobą rogiem i posiadające ten sam numer znajdują się w jednej parze.

Zauważmy, że dla $n = 11$ dowolna linia, pozioma, pionowa lub ukośna przechodzi przez oba pola pewnej pary, zatem wskazany podział dostarcza Fredkowi strategii blokującej Ahmeda dla $n = 11$.

7. Znaleźć wszystkie wielomiany P takie, że dla każdego x rzeczywistego zachodzi równość

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1.$$

Rozwiązanie

Niech W będzie dowolnym wielomianem. Określamy ciąg wielomianów $W^{(0)}(x) = x, W^{(n+1)}(x) = W\Big(W^{(n)}(x)\Big)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Rozwiązaniem zadania są wielomiany P spełniające

$$P(x) = Q(\ldots Q(x)\ldots) = Q^{(n)}(x),$$

gdzie $Q(x) = x^2 + 1$.

Najpierw wykażemy, że takie wielomiany spełniają równanie dane w treści. Udowodnimy to przez indukcję. Dla $n = 0$ mamy $P(x) = x$, który istotnie spełnia równanie. Załóżmy, że $Q^{(n)}(x^2+1) = \left(Q^{(n)}(x)\right)^2 + 1$. Wtedy

$$Q^{(n+1)}(x^2+1) = Q\left(Q^{(n)}(x^2+1)\right) = \left(Q^{(n)}(x^2+1)\right)^2 + 1 =$$
$$= \left((Q^{(n)}(x))^2+1\right)^2 + 1 = \left(Q(Q^{(n)}(x))\right)^2 + 1 = \left(Q^{(n+1)}(x)\right)^2 + 1.$$

Udowodnimy teraz, że jedynie wielomiany postaci $Q^{(n)}(x)$ spełniają warunki zadania. Wykażemy, że z tego, że $P(x)$ spełnia równanie, wynika, że albo $P(x) = x$ dla wszystkich x, albo istnieje taki wielomian R spełniający warunki zadania, że $P(x) = R(x^2+1)$ dla wszystkich x. Oznaczać to będzie, że rozważane wyżej wielomiany $Q^{(n)}$ są jedynymi, które spełniają warunki zadania.

Niech P będzie takim wielomianem, że $P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1$. Aby $P(x) = R(x^2+1)$ dla pewnego wielomianu R wystarczy pokazać, że jedyne niezerowe współczynniki P to współczynniki przy potęgach parzystych. Zauważmy, że $P(x^2+1) - 1$ ma współczynniki niezerowe jedynie przy potęgach parzystych, więc $(P(x))^2$ również musi mieć niezerowe współczynniki jedynie przy potęgach parzystych. Gdyby $P(x)$ miał niezerowy współczynnik przy pewnej potędze parzystej oraz przy pewnej potędze nieparzystej, to $(P(x))^2$ miałby niezerowy współczynnik przy pewnej potędze nieparzystej. Oznaczmy bowiem przez M_0 maksymalną potęgę parzystą, przy której P ma niezerowy współczynnik, a przez M_1 maksymalną potęgę nieparzystą. Wówczas w wielomianie $(P(x))^2$ współczynnik przy $x^{M_0+M_1}$ jest niezerowy.

Możliwa jest więc jedna z dwu sytuacji: w wielomianie P niezerowe współczynniki pojawiają się jedynie przy potęgach parzystych albo jedynie przy potęgach nieparzystych. W pierwszym przypadku istnienie takiego wielomianu R, że $P(x) = R(x^2+1)$ jest oczywiste (dzielimy z resztą). Wykażemy, że w drugim przypadku $P(x) = x$.

Jeśli P ma współczynniki niezerowe jedynie przy potęgach nieparzystych, to w szczególności wyraz wolny jest równy 0, czyli $P(0) = 0$. Przypuśćmy, że $P(x) \not\equiv x$. Wówczas $P(x) - x$ ma skończenie wiele pierwiastków, czyli w szczególności istnieje skończenie wiele takich y, że $P(y) = y$. Niech y_0 będzie największą taką liczbą, że $P(y) = y$, w szczególności więc $y_0 \geqslant 0$. Jednak wówczas $P(y_0^2+1) = (P(y_0))^2 + 1 = y_0^2 + 1$, czyli również

y_0^2+1 spełnia $P(y)=y$, jednak $y_0^2+1>y_0$, gdyż równanie $y_0^2-y_0+1$ nie ma pierwiastków w $\mathbb{R}$. Przeczy to założeniu: $P(x)\not\equiv x$.

Tym samym wykazaliśmy, że jedyne wielomiany spełniające równanie to $P(x)=Q^{(n)}(x)$.

8. Dany jest ciąg wektorów jednostkowych $v_1,v_2,\ldots,v_n$ na płaszczyźnie. Rozstrzygnąć, czy można dobrać taki ciąg znaków, że dla każdego $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ długość wektora $\sum\limits_{i=1}^{k}\pm v_i$ nie jest większa niż 3.

Rozwiązanie

Tak, można dobrać taki ciąg znaków. Oznaczmy $w_i=\varepsilon_{2i-1}v_{2i-1}+\varepsilon_{2i}v_{2i}$, gdzie $\varepsilon_{2i-1},\varepsilon_{2i}\in\{-1,1\}$. Zauważmy, że cztery możliwe wektory w_i w zależności od wyborów ε_{2i-1} i ε_{2i} tworzą czwórkę, którą można tak uporządkować, że kąt pomiędzy dwoma kolejnymi wektorami jest prosty (jeśli v_{2i-1} i v_{2i} są współliniowe, to dwie z czterech możliwych sum są równe $\vec{0}$, wektor zerowy jest prostopadły do dowolnego wektora).

Zatem będąc w dowolnym punkcie $A_k=\sum\limits_{i=1}^{2k}\varepsilon_i v_i$ można wybrać takie znaki ε_{2k+1} oraz ε_{2k+2}, aby wektor w_{k+1} tworzył z wektorem $\overrightarrow{A_k0}$ kąt nie mniejszy niż $135°$. Wybieramy więc wszystkie znaki ε_i, tak, by spełniony był ten właśnie warunek dla dowolnego k.

Pokażemy, że wówczas dla dowolnego m suma $\sum\limits_{i=1}^{m}w_i=\sum\limits_{i=1}^{2m}\varepsilon_i v_i$ leży w kole o promieniu 2.

Wykażemy to przez indukcję. $w_0=0$ spełnia tezę. Niech $\sum\limits_{i=1}^{m-1}w_i$ leży w kole o promieniu 2. Zauważmy, że długość wektora w_m jest nie większa od 2 (jako suma dwóch wektorów o długości 1), jednocześnie tworzy on z $\sum\limits_{i=1}^{m-1}w_i$ kąt nie większy niż $135°$. Zatem suma $\sum\limits_{i=1}^{m}w_i$ również leży w kole o promieniu 2.

Mamy

$$\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i v_i=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}w_i+\varepsilon_k v_k,$$

gdzie pierwszy składnik sumy leży w kole o promieniu 2, a drugi ma długość nie większą niż 1, czyli dla dowolnego k suma $\sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i v_i$ leży w kole o promieniu 3.

9. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^3+2x+1=2^n$ w liczbach naturalnych.

Rozwiązanie
Zaczniemy od zdefiniowania symbolu Legendre'a i podania kilku jego własności, z których skorzystamy w rozwiązaniu. Dowody można znaleźć na stronach internetowych oraz w książkach poświęconych teorii liczb, np. w „*Elementach teorii liczb*" Iwana Winogradowa, PWN, Warszawa 1954. Jeśli $a \in \mathbb{Z}$, p jest liczbą pierwszą, to symbol Legendre'a $(\frac{a}{p})$ definiujemy tak: $(\frac{a}{p}) = 0$ jeśli $p|a$, $(\frac{a}{p}) = 1$ jeśli istnieje taka liczba całkowita r, że $a \equiv r^2 \not\equiv 0(\text{mod p})$ oraz $(\frac{a}{p}) = -1$ w przeciwnym wypadku. Jeśli $(\frac{a}{p}) = 1$, to mówimy, że a jest resztą kwadratową modulo p, a jeśli $(\frac{a}{p}) = -1$, to a nazywamy nieresztą kwadratową modulo p. Dla przykładu -1 jest resztą kwadratową modulo 5, bo $-1 \equiv 2^2(\text{mod } 5)$; -1 nie jest natomiast resztą kwadratową modulo 7, bo resztami kwadratowymi modulo 7 są liczby 1, $2^2 = 4$ i $2 = 3^2 - 7$, a -1 do żadnej z nich -1 nie przystaje modulo 7.

Wiadomo, że $(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p}) \cdot (\frac{b}{p})$, również $(\frac{a}{p}) \equiv a^{(p-1)/2}(\text{mod p})$, w szczególności a jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{(p-1)/2} \equiv 1(\text{mod p})$. Na koniec jeszcze dwie równości: $(\frac{-1}{p}) = (-1)^{(p-1)/2}$, $(\frac{2}{p}) = (-1)^{(p^2-1)/8}$.

Jasne jest, że dla $n = 1$ równanie nie ma rozwiązań, a dla $n = 2$ jedynym rozwiązaniem jest $x = 1$.

Przyjmijmy więc, że $n \geqslant 3$. Jeśli x jest liczbą parzystą, to liczba $x^3 + 2x + 1$ jest nieparzysta, więc nie dzieli się przez 8. Jeśli x jest liczbą nieparzystą, to $x-1$ i $x+1$ są **kolejnymi liczbami parzystymi**, więc ich iloczyn dzieli się przez 8, zatem liczba $x^3+2x+1 = x(x-1)(x+1)+3x+1$ dzieli się przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy $3x + 1$ ma tę własność, czyli gdy $x \equiv 5 \pmod 8$. Ponieważ iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 3, więc lewa strona danego równania daje resztę 1 z dzielenia przez 3, więc prawa też, zatem $n = 2k$ dla pewnego k naturalnego, a ponieważ $n \geqslant 3$, więc $n \geqslant 4$. Po dodaniu 2 do obu stron równania przybiera ono postać

$$(x+1)(x^2-x+3) = 2^n+2 = (2^k)^2+2.$$

Jeśli $x \equiv 5 \pmod 8$, to $x^2-x+3 = (x-5)(x+4)+16+7 \equiv 7 \pmod 8$. Jeśli wszystkie dzielniki pierwsze liczby x^2-x+3 byłyby postaci $8k+1$ lub $8k+3$, to liczba x^2-x+3 również byłaby tej postaci, a jest postaci $8k+7$. Ma więc ona czynnik pierwszy p postaci $8k+5$ lub $8k+7$. Wówczas również $(2^k)^2 \equiv -2 \pmod p$, co oznacza, że liczba -2 jest resztą kwadratową mod p, czyli $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$. Ale jeśli p jest postaci $8k+5$, to

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} \cdot (-1)^{(p^2-1)/8} = 1 \cdot (-1) = -1,$$

a jeśli jest postaci $8k+7$

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} \cdot (-1)^{(p^2-1)/8} = (-1) \cdot 1 = -1$$

czyli znów sprzeczność. Jedynym rozwiązaniem jest więc $x=1$, $n=2$.

10. Okrąg o środku O jest styczny wewnętrznie do dwóch okręgów w jego wnętrzu w punktach S i T. Okręgi te przecinają się w punktach M i N, przy czym punkt N leży bliżej prostej ST. Udowodnić, że proste OM i MN są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty S, N, T leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Poprowadźmy styczne do dużego okręgu w punktach S i T i oznaczmy przez P punkt ich przecięcia. Zauważmy, że punkty P, S, O, T leżą na okręgu o średnicy OP. Potęgi punktu P względem małych okręgów są równe, więc P leży na prostej MN. Prawdziwy jest ciąg równoważności:

Proste OM i MN są prostopadłe $\iff$ punkty O, M, P, S, T leżą na jednym okręgu (o średnicy OP) $\iff \measuredangle SMN + \measuredangle TMN + \measuredangle SPT = 180^\circ \iff \measuredangle NSP + \measuredangle NTP + \measuredangle SPT = 180^\circ \iff$ punkty S, N, T leżą na jednej prostej.

11. Niech a będzie liczbą naturalną większą od 1. Ciąg a_n definiujemy wzorem

$$a_n = a^{n+1} + a^n - 1.$$

Wykazać, że istnieje podciąg ciągu a_n, którego dowolne dwa wyrazy są względnie pierwsze.

Rozwiązanie
Skonstruujemy ciąg (b_n), będący podciągiem ciągu (a_n), o wyrazach parami względnie pierwszych. Przyjmijmy $b_1 = a_1$ i załóżmy, że wybraliśmy już k wyrazów ciągu b_n. Niech $p_1, p_2, \dots, p_l$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi, które dzielą którąś z liczb $b_1, b_2, \dots, b_k$.
Weźmy $b_{k+1} = a_{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_l-1)}$ i ustalmy $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Naturalnie liczba b_{k+1} jest większa niż wszystkie wcześniej wybrane wyrazy ciągu b_n. Jasne też jest, że skoro p_i dzieli pewien wyraz ciągu a_n, to nie dzieli liczby a. Z Małego Twierdzenia Fermata:

$$b_{k+1} = a_{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_l-1)} = a^{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_l-1)+1} + a^{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_l-1)} - 1$$
$$\equiv a + 1 - 1 \equiv a \pmod{p_i}.$$

Wyraz b_{k+1} jest więc niepodzielny przez żadną z liczb p_i, czyli jest względnie pierwszy z wszystkimi poprzednimi wyrazami ciągu b_n.

12. Symetralne boków AB i BC nierównobocznego trójkąta ABC przecinają boki BC i AB odpowiednio w punktach A_1 i C_1. Dwusieczne kątów A_1AC i C_1CA przecinają się w punkcie B', a punkty A' oraz C' definiujemy analogicznie. Dowieść, że punkty A', B', C' leżą na jednej prostej, która przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie
Proste AA_1 i BA_1 są symetryczne względem symetralnej odcinka AB. Prosta AA_1 przechodzi więc przez punkt C_2 symetryczny do punktu C względem tej symetralnej.Punkt C_2 leży na okregu opisanym na trójkącie ABC. Dwusieczna kąta A_1AC przechodzi zatem przez środek C_3 łuku CC_2, który jest jednocześnie środkiem jednego z łuków AB. Oznaczmy przez C_4 środek drugiego łuku AB, zaś punkty A_3, A_4 zdefiniujmy analogicznie. Oczywiście proste AA_4 i CC_4 są dwusiecznymi kątów wewnętrznych trójkąta. Zastosujmy teraz twierdzenie Pascala (zob. poniżej) dla sześciokąta $AA_4A_3CC_4C_3$. Wynika zeń, że środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC, środek O okręgu opisanego nań oraz B' leżą na jednej pro-

stej. Ponieważ trójkąt ABC jest nierównoboczny, więc $I \neq O$ i punkty A', B', C' leża na prostej IO.

Twierdzenie Pascala Załóżmy, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 leżą na okręgu. Niech K będzie punktem wspólnym prostych A_1A_2 i A_4A_5, L — prostych A_2A_3 i A_5A_6, M — prostych A_3A_4 i A_6A_1. Punkty K, L, M leżą na jednej prostej.

Jeśli dwie pary spośród wymienionych par prostych składają się z prostych równoległych, to trzecia para też składa się z prostych równoległych.

Jeśli proste w jednej z wymienionych par prostych są równoległe, a w dwu pozostałych parach są nierównoległe, to prosta przechodząca przez ich punkty przecięcia jest równoległa do prostych w parze składającej się z równoległych prostych.

Drugi mecz matematyczny:

1. Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ niech A oznacza liczbę sposobów na jaką można zapisać n w postaci sumy liczb całkowitych dodatnich nieparzystych, a B niech oznacza liczbę sposobów na jaką można zapisać n w postaci sumy różnych liczb całkowitych dodatnich (w obu zapisach nie zwracamy uwagi na kolejność występowania składników). Udowodnić, że $A = B$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że A jest współczynnikiem przy x^n w wyrażeniu:

$$A(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x^{(2k+1)j} = (1 + x + x^2 + \cdots) \cdot (1 + x^3 + x^6 + \cdots) \cdot \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \cdots) \cdot \ldots .$$

Analogicznie określamy:

$$B(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k).$$

Teraz wystarczy pokazać, że $A(x) = B(x)$. Ale:

$$A(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{(2k+1)}} = \frac{\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2k})}{\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2k}}{1 - x^k} = B(x).$$

Uwaga

Można uniknąć kłopotów związanych z działaniami nieskończonymi i przyjąć np. $A(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^{a(k)}-1} x^{(2k+1)j}$, gdzie $a(k) = \lfloor \log_2 \frac{n}{2k+1} \rfloor + 1$ i $B(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 + x^k)$.
Dodajmy, że nie jest to konieczne. Rozpatrywane tu nieskończone sumy mają sens wtedy, gdy $|x| < 1$. Odpowiednie twierdzenia można znaleźć w wielu podręcznikach rachunku różniczkowego i całkowego, np. w podręczniku G.M.Fichtenholca „*Rachunek różniczkowy i całkowy*" używanym od kilkudziesięciu lat na wydziałach matematyki, albo też w wielu cieńszych książkach o tym tytule, można też znaleźć odpowiednie teksty na stronach internetowych. Dodajmy jeszcze, że sumy i iloczyny nieskończone nie są zdefiniowane zawsze, a jeśli nawet są, to i tak miewają nie oczekiwane własności, np. $2(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots) = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$, więc suma $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$ jest dwukrotnie mniejsza niż suma $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$, chociaż w obydwu występują te same składniki: odwrotności liczb całkowitych nieparzystych ze znakiem + oraz odwrotności liczb całkowitych nieparzystych ze znakiem −. Przyczyną jest to, że zmiana kolejności składników w przypadku nieskończenie wielu składników może (choć nie musi) zmieniać wartość sumy. Jednak w przypadku gdy suma wartości bezwzględnych jest skończona, to zmiana kolejności składników nie ma wpływu na wartość sumy, a tak jest w naszym przypadku, gdy $|x| < 1$. Podobnie jest w przypadku iloczynów nieskończenie wielu składników.

Warto też dodać, że istnieniem nieskończonych sum i iloczynów w tym zadaniu można się nie wcale nie przejmować. Można rachować na tzw. szeregach formalnych. Działania definiowane się w sposób naturalny, sprawdza się, że mają potrzebne własności. Oczywiście takie postępowanie daleko wykracza poza programy szkolne, więc również poza metody oczekiwane od uczestników olimpiad matematycznych.

2. Niech $k,\ t > 1$ będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Mając daną permutację $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ możemy zamienić w niej dwie liczby miejscami, jeśli różnią się o k lub t. Wykazać, że zaczynając od permutacji $(1, 2, ..., n)$ możemy otrzymać każdą permutację zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \geqslant k + t - 1$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy najpierw, że $1 < n < k + t - 1$.Rozważmy graf o n wierzchołkach odpowiadającym liczbom $1, \dots, n$. Parę wierzchołków łączymy krawędzią, jeśli da się zamienić miejscami odpowiadające im liczby, czyli jeśli wartość bezwzględna tych liczb jest równa k albo t. Krawędzi odpowiadających różnicy k jest $\max\{n - k, 0\}$, a odpowiadających różnicy t jest $\max\{n - t, 0\}$. Wobec tego wszystkich krawędzi w opisanym grafie jest nie więcej niż $n-k+n-t = n+n-(k+t) < n-1$. Wynika stąd, że istnieją co najmniej jeden taki wierzchołek p, że idąc po krawędziach nie da się przejść od 1 do q, a to oznacza, że nie da się zamienić w dozwolony sposób liczb 1 i p niezależnie od liczby przestawień.

Załóżmy teraz, że $n = k + t - 1$. Ponieważ liczby k i t są względnie pierwsze, więc również liczby k i $n + 1 = k + t$ są względnie pierwsze. Podobnie t i $n + 1$. Stąd wynika, że reszty $r_1, r_2, \dots, r_n$ z dzielenia liczb k, $2k$, $3k$,..., nk przez $n + 1$ są parami różne i różne od 0, bo jeśli liczba $lk - mk = (l - m)k$ dzieli się przez $n + 1$, to również liczba $l - m$ dzieli się przez $n + 1$, a to jest niemożliwe gdy $1 \leqslant m < l \leqslant n$. Wobec tego $r_1, r_2, \dots, r_n$ jest pewną permutacją ciągu $1, 2, \dots, n$. Zauważmy jeszcze, że wartość bezwzględna różnicy dwu kolejnych liczb w ciągu $r_1, r_2, \dots, r_n$ jest równa k lub t, wobec tego dwie kolejne liczby ciągu $r_1, r_2, \dots, r_n$ można zamieniać miejscami. Pokażemy, że przestawiając liczby w dozwolony sposób możemy uzyskać dowolną permutację liczb $1, 2, \dots, n$. Załóżmy, że w docelowej permutacji liczba r_1 ma znaleźć się w miejscu r_l. Zamieniamy kolejno r_l z r_{l-1}, następnie r_{l-1} (stojące w nowym miejscu) z r_{l-2}, itd., w końcu r_1 z r_2. Jest jasne, że w wyniku tych przestawień r_1 trafiło na swoje, czyli l–te, miejsce. Teraz można powtórzyć tę procedurę w odniesieniu do liczby r_2 (nie ruszając już r_1!) i umieścić ją na jej docelowym miejscu. Prosta indukcja kończy dowód tego, że w tym przypadku dowolna permutacja jest osiągalna.

Załóżmy teraz, że $n > k + t - 1$ i skorzystajmy z indukcji matematycznej. Jeżeli n znajduje się w swym docelowym miejscu, to wystarczy przestawiać liczby $(1, 2, \dots, n-1)$, co jest możliwe na mocy założenia indukcyjnego. Jeżeli nie, to najpierw przestawiamy liczby $(1, 2, \dots, n - 1)$ tak, aby tam gdzie ma być n znalazło się $n - k$. Następnie zamieniamy te dwie liczby i wtedy n jest już na swoim miejscu, więc pozostaje poprzestawiać liczby $1, 2 \dots n - 1$, co umiemy zrobić.

3. Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są podzbiorami zbioru n-elementowego A, przy czym każdy z nich ma co najmniej 2 elementy. Dla każdego dwuelementowego podzbioru A' zbioru A istnieje dokładnie jeden taki A_i, że $A' \subseteq A_i$. Udowodnić, że jeśli $1 \leqslant i, j \leqslant n$ to $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Rozwiązanie

W poniższym rozwiązaniu przyjmujemy, że $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$, w szczególności $\binom{1}{2} = 0$.

Niech $A = \{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$. Przyjmijmy, że $n_i = |A_i|$ oraz niech d_i oznacza ilość podzbiorów A_j (przy $1 \leqslant j \leqslant n$), dla których $x_i \in A_j$. Zauważmy na początek, że z treści zadania wynika równość

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n_i}{2} = \binom{n}{2}, \tag{2}$$

gdyż obie strony tej równości odpowiadają liczbie dwuelementowych podzbiorów zbioru A. Jasna jest też równość

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} n_i. \tag{3}$$

Ponieważ każdy dwuelementowy podzbiór zbioru A jest zawarty w dokładnie jednym zbiorze A_i, więc dla $1 \leqslant i < j \leqslant n$ zachodzi $|A_i \cap A_j| \leqslant 1$. Chcemy pokazać, że dla wszystkich par i, j powyższa nierówność jest równością. Innymi słowy wystarczy wykazać, że

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}.$$

Zwróćmy jednak uwagę, że skoro element x_k należy do d_k zbiorów A_i, to należy do dokładnie $\binom{d_k}{2}$ przecięć postaci $A_i \cap A_j$. Zachodzi więc równość

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j|.$$

Trzeba zatem dowieść, że

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \binom{n}{2}.$$

Ze względu na równości $\binom{x}{2} = \frac{x^2-x}{2}$ oraz (2) i (3) musimy udowodnić, iż

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} n_i^2. \tag{4}$$

Dla ustalonego x_i rozważmy dowolny zbiór $A_j = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n_j}\}$ taki, że $x_i \notin A_j$. Wówczas wszystkie 2-elementowe zbiory $\{x_i, y_1\}$, $\{x_i, y_2\}$, $\ldots$, $\{x_i, y_{n_j}\}$ zawierają się w różnych zbiorach A_t, bowiem elementy y_k i y_l nie mogą oba należeć do innego zbioru niż A_j. Oznacza to, że x_i należy do co najmniej n_j różnych zbiorów A_t, tzn. $d_i \geqslant n_j$, o ile tylko $x_i \notin A_j$. Nietrudno sprawdzić, że z powyższej nierówności wynika też nierówność

$$\frac{d_i}{n-d_i} \geqslant \frac{n_j}{n-n_j}.$$

Zauważmy, że jest dokładnie $n - d_i$ zbiorów A_t, do których nie należy x_i oraz dokładnie $n - n_j$ elementów x_i, które nie należą do zbioru A_j. A zatem

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:x_i \notin A_j} \frac{d_i}{n-d_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:x_i \notin A_j} \frac{n_j}{n-n_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:x_i \notin A_j} \frac{n_j}{n-n_j} = \sum_{j=1}^{n} n_j\,.$$

Ze względu na równość (2) we wszystkich powyższych nierównościach zachodzi równość. Wynika stąd, że jeśli $x_i \notin A_j$, to $d_i = n_j$. Mamy więc

$$\sum_{i=1}^{n} (n-d_i)d_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:x_i \notin A_j} d_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:x_i \notin A_j} n_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:x_i \notin A_j} n_j = \sum_{j=1}^{n} (n-n_j)n_j,$$

a stąd oraz z równości (2) wynika natychmiast równość (3) i kończy to rozwiązanie zadania.

4. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = 1 \\ 2b^2 - 3c^2 = 1 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Sposób 1.

Z dwóch pierwszych równań wynika, że $a^2 = 2b^2 + 1$ i $c^2 = \frac{1}{3}(2b^2 - 1)$. Z trzeciego otrzymujemy:
$0 = (1-ac)^2 - b^2(a+c)^2 = 1 - 2ac + \frac{1}{3}(2b^2-1)(2b^2+1) - b^2(\frac{8}{3}b^2 + \frac{2}{3}) - 2acb^2 =$

$= \frac{1}{3}\Big((2b^2-1)(2b^2+1) - 8b^4 - 2b^2 + 3\Big) - 2ac(1+b^2) =$
$= \frac{1}{3}\Big((2b^2-1)(2b^2+1) - (2b^2-1)(4b^2+3)\Big) - 2ac(1+b^2) =$
$= \frac{1}{3}(2b^2-1)(2b^2+1-4b^2-3) - 2ac(1+b^2) = -\frac{2}{3}(1+b^2)(2b^2-1+3ac)$.
Stad mamy $(2b^2-1)^2 = 9a^2c^2 = 3(2b^2+1)(2b^2-1)$, więc

$$0 = (2b^2-1)(2b^2-1-6b^2-3) = (2b^2-1)(-4b^2-4)\,.$$

Wobec tego $b^2 = \frac{1}{2}$, zatem $a^2 = 2$ i $c^2 = 0$. Z trzeciego równania otrzymujemy $ab = 1$, zatem albo $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $c = 0$, albo $a = -\sqrt{2}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $c = 0$.

Sposób 2.

Z dwóch pierwszych równań wynika natychmiast, że $a \neq 0 \neq b$. Ponadto, jeśli $c = 0$, to $|a| = \sqrt{2}$ oraz $|b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. By trzecie równanie było spełnione potrzeba i wystarcza aby a i b były tego samego znaku. Udowodnimy, że trójki $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ są jedynymi rozwiązaniami danego układu.

Załóżmy więc, że istnieje trójka (a, b, c) spełniająca dany układ, dla której $abc \neq 0$. Możemy przyjąć, że co najmniej dwie z liczb a, b, c są dodatnie, gdyż jeśli trójka (a, b, c) jest rozwiązaniem danego układu, to jest nim również $(-a, -b, -c)$.

Podstawmy

$$a = \operatorname{ctg}\alpha, \quad b = \operatorname{ctg}\beta, \quad c = \operatorname{ctg}\gamma,$$

gdzie $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Patrząc na trzecie równanie widzimy, że $a + b \neq 0$, gdyż w przeciwnym razie $ab = 0$, co wykluczyliśmy na początku. A zatem możemy wyliczyć $c = \frac{1-ab}{a+b}$. Korzystając ze wzoru na kotangens sumy dostajemy

$$\operatorname{ctg}\gamma = c = \frac{1-ab}{a+b} = \frac{1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} = -\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \operatorname{ctg}(\pi-(\alpha+\beta)).$$

A zatem mamy $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$ lub $\gamma = 2\pi - (\alpha+\beta)$. Ale co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są dodatnie co oznacza, że co najmniej dwa kąty z α, β, γ są mniejsze niż $\frac{\pi}{2}$. Czyli

$$\alpha+\beta+\gamma < \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\pi < 2\pi.$$

Czyli zachodzi pierwsza z równości i $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

Zauważmy, że z danych równań wynikają równości

$$a^2+1 = 2(b^2+1) = 3(c^2+1)$$

co, po wykorzystaniu tego, że $\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$, sprowadza się do

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{2}{\sin^2\beta} = \frac{3}{\sin^2\gamma}.$$

Wszystkie sinusy występujące w powyższym wyrażeniu są dodatnie, więc po prostu

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\gamma}.$$

Ponieważ $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ oraz $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ istnieje trójkąt ABC o kątach α, β, γ. Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkąta ABC i połączonego z powyższą równością otrzymujemy, że jego boki na przeciwko kątów α, β, γ są odpowiednio długości $k, \sqrt{2}k, \sqrt{3}k$, gdzie $k > 0$ jest pewną liczbą rzeczywistą. Ale wówczas trójkąt ABC jest prostokątny i $\gamma = \frac{\pi}{2}$, a więc $c = 0$. To jest jednak sprzeczność z przyjętym założeniem, a zatem trójki wypisane na początku stanowią jedyne rozwiązanie danego układu.

5. Niech $a_1, a_2, ..., a_n$ będą różnymi liczbami naturalnymi. Dowieść, że zachodzi nierówność

$$a_1^7+a_2^7+...+a_n^7+a_1^5+a_2^5+...+a_n^5 \geqslant 2(a_1^3+a_2^3+...+a_n^3)^2$$

Rozwiązanie

Będziemy rozumować indukcyjnie. Dla $n = 1$ nasza nierówność wygląda tak $a_1^7 + a_1^5 \geqslant 2a_1^6$. Jej prawdziwość wynika wprost z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną.

Załóżmy więc, że nierówność zachodzi dla $n = k$ i udowodnijmy ją dla $n = k+1$. Ze względu na symetrię bez straty ogólności możemy założyć, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < a_{k+1}$. Ponieważ $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ są różnymi liczbami naturalnymi zachodzi nierówność

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3 \leqslant 1^3 + 2^3 + \ldots + (a_{k+1} - 1)^3 = \frac{a_{k+1}^2(a_{k+1} - 1)^2}{4},$$

z której wprost wynika, że

$$4a_{k+1}^3(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3) \leqslant a_{k+1}^5(a_{k+1} - 1)^2 = a_{k+1}^7 + a_{k+1}^5 - 2a_{k+1}^6,$$

czyli

$$a_{k+1}^7 + a_{k+1}^5 \geqslant 4a_{k+1}^3(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3) + 2a_{k+1}^6.$$

Z założenia indukcyjnego wiemy też, że

$$a_1^7 + a_2^7 + \ldots + a_k^7 + a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_k^5 \geqslant 2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3)^2.$$

Łącząc te dwie nierówności dostajemy

$$a_1^7 + a_2^7 + \ldots + a_{k+1}^7 + a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_{k+1}^5 \geqslant 2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3)^2$$

$$+4a_{k+1}^3(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3) + 2a_{k+1}^6 = 2(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_k^3 + a_{k+1}^3)^2,$$

co kończy dowód indukcyjny.

6. Niech n będzie liczbą naturalną. Dowieść, że wielomian $(x^2+x)^{2^n}+1$ nie jest iloczynem niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Będziemy korzystali z własności wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{Z}_2$, gdzie $\mathbb{Z}_2$ oznacza zbiór reszt z dzielenia przez 2, czyli $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Wszystkie działania arytmetyczne będą rozpatrywane modulo 2, co oznacza, że każdą liczbę całkowitą będziemy zastępować resztą z dzielenia jej przez 2. Argumentami rozpatrywanych wielomianów będą wyłącznie elementy

$\mathbb{Z}_2$. Mówimy, że dwa wielomiany o współczynnikach z $\mathbb{Z}_2$ są równe, jeśli równe są odpowiednie współczynniki (zakładamy oczywiście, że współczynnik wiodący to 1). Większość własności tak rozumianych wielomianów jest analogiczna do tych dla zwykłych wielomianów nad $\mathbb{Z}$. W szczególności np. prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na iloczyn wielomianów nierozkładalnych. Trochę trzeba uważać, bo wielomian x^2+1 jest nierozkładalny w zbiorze wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, tym bardziej jest nierozkładalny w zbiorze wielomianów o współczynnikach całkowitych, ale $x^2+1 = (x+1)(x+1)$ w zbiorze wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{Z}_2$. Nieprawdą jest też, że jeśli dwa wielomiany przyjmują te same wartości w tych samych punktach, to są równe, np. wielomian $x^2 - x$ w $\mathbb{Z}_2$ przyjmuje te same wartości co wielomian 0. Każdemu wielomianowi $P(x)$ o współczynnikach całkowitych odpowiada pewien wielomian w $\mathbb{Z}_2$, który powstaje przez zastąpienie współczynników P resztami z dzielenia ich przez 2. Dla uproszczenia będziemy pisać $P(x) =_2 Q(x)$, jeśli P i Q mają ten sam wielomian zredukowany.

Zauważmy na początek, że jeśli $0 < k < 2^n$, to $\binom{2^n}{k}$ jest liczbą parzystą. Mamy bowiem

$$\binom{2^n}{k} = \frac{2^n}{k} \cdot \frac{2^n-1}{1} \cdot \frac{2^n-2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2^n-(k-1)}{k-1}.$$

Liczby $1, 2, \ldots, k-1$ nie są podzielne przez 2^k, a zatem najwyższa potęga liczby 2 dzieląca $2^i - i$ jest taka sama jak liczby i. Oznacza to, że ułamek $\frac{2^i-i}{i}$ zapisany w postaci nieskracalnej ma licznik i mianownik niepodzielny przez 2. A z kolei licznik ułamka $\frac{2^n}{k}$ zapisanego w postaci nieskracalnej jest podzielny przez 2, co świadczy o tym, że $2|\binom{2^n}{k}$.

Niech $F(x) = (x^2+x)^{2^n} + 1$ i załóżmy, że $F(x) = G(x) \cdot H(x)$ dla pewnych niestałych wielomianów $G(x), H(x)$ o współczynnikach całkowitych. Ze wzoru dwumianowego Newtona i powyżej udowodnionego faktu wynika, że $(x^2+x)^{2^n}$ po zredukowaniu modulo 2 odpowiada wielomianowi $x^{2^{n+1}} + x^{2^n}$, a więc $F(x)$ po zredukowaniu odpowiada wielomianowi $x^{2^{n+1}} + x^{2^n} + 1$. W taki sam sposób dowodzimy, że ten sam wielomian odpowiada wielomianowi $(x^2+x+1)^{2^n}$. Wobec tego $F(x) =_2 (x^2+x+1)^{2^n}$. Zauważmy jednak, że wielomian x^2+x+1 nie ma pierwiastka w $\mathbb{Z}_2$, a więc jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}_2$, gdyż jest stopnia 2. A skoro

$$F(x) = G(x) \cdot H(x) =_2 (x^2 + x + 1)^{2^n},$$

to $G(x) =_2 (x^2 + x + 1)^k$ i $H(x) =_2 (x^2 + x + 1)^{2^n - k}$ dla pewnego $0 \leqslant k \leqslant 2^n$. Zwróćmy uwagę, że musi być nawet $0 < k < 2^n$, gdyż inaczej wielomian H lub odpowiednio wielomian G byłby co najmniej stopnia 2^{n+1}, czyli tego stopnia co F, a to nie jest możliwe bo G, H nie są stałe. Istnieją więc takie wielomiany $U(x), V(x)$ o współczynnikach całkowitych, że

$G(x) = (x^2 + x + 1)^k + 2U(x)$ i $H(x) = (x^2 + x + 1)^{2^n - k} + +2V(x)$. Mamy zatem

$$(x^2 + x)^{2^n} + 1 = \Big((x^2 + x + 1)^k + 2U(x)\Big)\Big((x^2 + x + 1)^{2^n - k} + 2V(x)\Big).$$

Niech ω oznacza liczbę zespoloną będącą pierwiastkiem wielomianu $x^2 + x + 1$ (czyli jest to pierwiastek trzeciego stopnia z jedności, np. $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, gdzie $i^2 = -1$). Łatwo zauważyć, że wówczas $U(\omega)$ jest liczbą zespoloną postaci $u_1 + u_2\omega$ gdzie $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$. Wynika to z faktu, że $\omega^2 = -\omega - 1$, a więc jeśli ω występuje w większej potędze niż 1 to możemy ją zredukować. Analogicznie $V(\omega) = v_1 + v_2\omega$ dla $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$. Podstawiając więc $x = \omega$ do powyższej równości dostajemy

$$(-1)^{2^n} + 1 = 4(u_1 + u_2\omega)(v_1 + v_2\omega) = 4\Big(u_1v_1 - u_2v_2 + \omega(u_1v_2 + u_2v_1 - u_2v_2)\Big).$$

Po przyrównaniu części rzeczywistych i urojonych, $u_1v_1 - u_2v_2 = \frac{1}{2}$. To nie jest możliwe, więc nie istnieje rozkład $F(x)$ na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

7. $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, w którym prosta AC jest dwusieczną kąta BAD. Punkt E leży na odcinku CD, a F jest przecięciem BE i AC. Odcinek DF przedłużamy do przecięcia z bokiem BC w punkcie G. Wykazać, że $\measuredangle GAC = \measuredangle EAC$.

Rozwiązanie

Bez straty ogólności przyjmijmy $AB \leqslant AD$. Niech punkty D', E' będą obrazami punktów D, E w symetrii względem prostej AC. Wiadomo, że punkty A, B, D' są współliniowe; należy pokazać, że punkty A, G, E' również. Niech x, y, z będą takimi liczbami rzeczywistymi nieujemnymi, że $\frac{x}{z} = \frac{D'B}{BA}$ oraz $\frac{y}{z} = \frac{DE}{EC}$. Umieśćmy w punkcie A masę x, w punkcie C masę y, a w punktach D i D' masę z. Widać, że środkiem masy punktów A i D' jest punkt B, a punktów C i D - punkt E. Wobec tego środek masy czwórki punktów leży na prostej BE. Ponadto środki mas par punktów A, C oraz D, D' leżą na prostej AC, więc leży tam też środek masy całej czwórki. Wobec tego środkiem masy czwórki A, C, D, D' jest punkt F. W takim razie środek masy punktów A, C, D' leży na prostej DF. Musi też leżeć na prostej BC, bo B jest środkiem masy A i D'. W takim razie środkiem masy trójki A, C, D' jest punkt G. Ale środkiem masy C i D' jest E', więc punkty A, G, E' są współliniowe.

8. Dany jest nierozwartokątny trójkąt ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A, natomiast I_1 oraz I_2 są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD. Prosta I_1I_2 przecina AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że $AP = AQ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = AC$ lub $\measuredangle A = 90°$.

Rozwiązanie

Jasne jest, że jeśli $AB = AC$, to $AP = AQ$. Załóżmy więc najpierw, że $\angle A = 90°$.

Niech P' i Q' będą takimi punktami odpowiednio na bokach AB i AC, że $AP' = AQ' = AD$. Wówczas $\angle AP'Q' = \angle AQ'P' = 45°$. Niech I_1' i I_2' oznaczają odpowiednio przecięcia dwusiecznych kątów $\angle BAD$ i $\angle CAD$ z prostą $P'Q'$. Wtedy z cechy *bok-kąt-bok* wynika przystawanie trójkątów $AP'I_1'$ do ADI_1' oraz $AQ'I_2'$ do ADI_2'. Wobec tego mamy $\angle ADI_1' = \angle ADI_2' = 45°$. Punkt I_1' leży więc na dwusiecznej kąta $\angle BDA$, a I_2' — na dwusiecznej kąta $\angle CDA$. Wynika stąd, że punkty I_1' i I_2' są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABD i ACD, a zatem $I_1' = I_1$ oraz $I_2' = I_2$. A to oznacza, że $P' = P$ oraz $Q' = Q$, czyli $AP = AQ$.

Załóżmy teraz, że $AP = AQ$. Niech D' będzie takim punktem półprostej AD, że $AD' = AP = AQ$. Przyjmijmy, że $D \neq D'$. Trójkąt API_1 jest przystający do trójkąta $AD'I_1$ a trójkąt AQI_2 jest przystający do $AD'I_2$, czyli w szczególności

$$\angle AD'I_1 = \angle API_1 = \angle AQI_2 = \angle AD'I_2.$$

A zatem mamy $\angle I_1D'D = \angle I_2D'D$. Wiemy również, że $\angle I_1DD' =$

$\angle I_2DD'$ — oba te kąty mają miarę 45°, jeśli D' leży na odcinku AD oraz 135°, jeśli D' leży poza. Trójkąty są $I_1D'D$ i $I_2D'D$ są więc przystające. A zatem przystające są też trójkąty $AD'I_1$ oraz $AD'I_2$. Stąd mamy

$$\angle BAD = 2\angle I_1AD' = 2\angle I_2AD' = \angle CAD,$$

i wobec tego $AB = AC$.

Przyjmijmy teraz, że $D = D'$. Wówczas

$$\angle API_1 = \angle ADI_1 = \angle ADI_2 = \angle AQI_2 = 45^\circ,$$

czyli $\angle A = 90^\circ$, co kończy dowód.

9. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o jest styczny do odcinków AB i AC odpowiednio w punktach D i E, różnych od B i C. Ten sam okrąg przecina bok BC w punktach K i L. Odcinki AL i DE przecinają się w punkcie P, a przekątne czworokąta $BCED$ przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że punkty $P,\ Q,\ K$ są współliniowe.

Rozwiązanie

Z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu wynikają równości $BD^2 = BK \cdot BL$ oraz $CE^2 = CK \cdot CL$. Załóżmy najpierw, że $AB \neq AC$. Niech T będzie punktem przecięcia prostych BC i DE. Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta ABC i prostej DE oraz z równości $EA = DA$ mamy $\frac{TB}{TC} = \frac{BD}{CE}$. Niech K' będzie punktem wspólnym prostych BC i PQ. Ponieważ rzut środkowy zachowuje dwustosunek, więc mamy

$$\frac{TB \cdot LC}{TC \cdot LB} \overset{\text{rzut}}{\underset{\text{z punktu A}}{=\!=\!=}} \frac{TD \cdot PE}{TE \cdot PD} \overset{\text{rzut}}{\underset{\text{z punktu Q}}{=\!=\!=}} \frac{TC \cdot K'B}{TB \cdot K'C},$$

czyli

$$\frac{K'B}{K'C} = \frac{TB^2 \cdot LC}{TC^2 \cdot LB} = \frac{BD^2}{LB} \cdot \frac{LC}{CE^2} = \frac{KB}{KC}.$$

W takim razie $K = K'$.

Jeżeli natomiast $AB = AC$, to $BC || DE$, $BK = CL$, oraz $BL = CK$. Z twierdzenia Talesa otrzymujemy:

$$\frac{K'B}{K'C} = \frac{PE}{PD} = \frac{LC}{LB} = \frac{KB}{KC},$$

czyli znowu $K = K'$.

10. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną $n > 1$, dla której średnia kwadratowa liczb $1,\ 2, ...,\ n$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie
Jako, że $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ nasze zadanie sprowadza się do znalezienia najmniejszej liczby naturalnej $n > 1$, dla której istnieje $m \in \mathbb{N}$ spełniające równanie

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} = m^2.$$

Po pomnożeniu obu stron równania przez 48 i zwinięciu w kwadraty powyższe równanie przyjmuje postać

$$(4n+3)^2 - 3(4m)^2 = 1.$$

Szukamy więc najmniejszego rozwiązania równania Pella $x^2 - 3y^2 = 1$, dla którego $x > 7$, $x \equiv 3 \pmod 4$ oraz $4|y$. Rozwiązaniem minimalnym tego równania jest para $(x_0, y_0) = (2, 1)$, pozostałe otrzymujemy z wzorów rekurencyjnych $x_{k+1} = 2x_k + 3y_k$, $y_{k+1} = x_k + 2y_k$. Obliczamy ręcznie kolejne pary: $(7, 4)$, $(26, 15)$, $(97, 56)$, $(362, 209)$, $(1351, 780)$. Ostatnia z wypisanych par spełnia żądane warunki, a więc $n = 337$ jest rozwiązaniem zadania.

11. Dla danego $h = 2^r$, gdzie $r \geqslant 0$ jest liczbą całkowitą, wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których istnieje liczba nieparzysta $m > 1$ oraz taka liczba naturalna n, że $k|m^h - 1$ oraz $m|n^{\frac{m^h-1}{k}} + 1$.

Rozwiązanie
Udowodnimy, że rozwiązaniem zadania są wszystkie liczby k, dla których $2^{r+1}|k$. Pokażemy najpierw, że jest to warunek konieczny.

Załóżmy, że jeśli liczba 2^j dzieli k, to $j \leqslant r$ i że istnieją: liczba nieparzysta $m > 1$ oraz liczba n, które spełniają warunki dane w treści zadania. Niech 2^t oznacza najwyższą potęgę liczby 2 dzielącą $m - 1$. Zauważmy, że $m^h - 1 = m^{2^r} - 1 = (m^{2^{r-1}-1})(m^{2^{r-1}} + 1) = \ldots = (m-1)(m+1)(m^2+1)\ldots(m^{2^{r-1}} + 1)$, a ponieważ m jest nieparzyste każda z liczb $m+1, m^2+1, \ldots, m^{2^{r-1}} + 1$ dzieli się przez 2. Wynika stąd, że $2^{t+r}|m^h-1$. A zatem mamy również $2^t|\frac{m^h-1}{k}$. Spośród wszystkich dzielników pierwszych liczby m wybierzmy ten dzielnik p, dla którego potęga liczby 2 dzieląca $p-1$ jest najmniejsza i oznaczmy jej wykładnik przez s. Jasne jest, że $t \geqslant s$. Zachodzi też kongruencja

$$n^{\frac{m^h-1}{k}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Zauważmy jednak, że $\frac{m^h-1}{2^s k}$ jest liczbą całkowitą, więc po podniesieniu obu stron kongruencji do potęgi $\frac{p-1}{2^s}$ i skorzystaniu z małego twierdzenia Fermata dostajemy

$$(n^{\frac{m^h-1}{k}})^{\frac{p-1}{2^s}} = (n^{\frac{m^h-1}{2^s k}})^{p-1} \equiv 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2^s}} = -1 \pmod{p},$$

a to jest niemożliwe. Zatem rzeczywiście podzielność $2^{r+1}|k$ jest warunkiem koniecznym. Wykażemy teraz, że jest to warunek wystarczający.

Niech $k = 2^a b$, gdzie b jest nieparzyste oraz $a \geqslant r+1$. W pierwszej kolejności rozpatrzymy przypadek $a > r+1$.

Załóżmy najpierw, że $a \geqslant r+2$ i przyjmijmy $m = 2^{a-r}b+1$. Podobnie jak wcześniej, rozkładamy wyrażenie $m^{2^r}-1$ na czynniki: $m^{2^r}-1 = (m-1)(m+1)(m^2+1)\ldots(m^{2^{r-1}}+1)$. Ponieważ $m \equiv 1 \pmod{4}$ każdy z nawiasów, począwszy od drugiego, zawiera liczbę podzielną przez 2, ale nie przez 4. Zatem 2 dzieli liczbę m^h-1 dokładnie w $a-r+r=a$–tej potędze. Również $b|m^h-1$, gdyż $b|m-1$. Wynika stąd, że $\frac{m^h-1}{k}$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Wystarczy więc przyjąć $n = m-1$, gdyż wtedy

$$(m-1)^{\frac{m^h-1}{k}} + 1 \equiv (-1)^{\frac{m^h-1}{k}} + 1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Niech teraz $a = r+1$. Zauważmy, że nie możemy powtórzyć rozumowania z poprzedniego przypadku, gdyż jeśli przyjęlibyśmy $m = 2b+1$, to liczba $m+1$ dzieliła by się przez 4. Tym razem weźmy więc $m = 4b^2+1$. Wówczas tak jak poprzednio możemy sprawdzić, że liczba 2 dzieli m^h-1 w dokładnie $r+2$-tej potędze. Jasne jest też, że $b|m-1$. A zatem $\frac{m^h-1}{k} = 2c$, gdzie c jest liczbą całkowitą nieparzystą. Przyjmując $n = 2b$ dostajemy

$$n^{\frac{m^h-1}{k}} + 1 = (2b)^{2c} + 1 = (4b^2)^c + 1 \equiv (-1)^c + 1 \equiv 0 \pmod{m},$$

a więc tak dobrane n spełnia podzielność $m|n^{\frac{m^h-1}{k}}+1$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

12. Rozstrzygnąć dla jakich liczb naturalnych a istnieje nieskończenie wiele takich liczb bezkwadratowych n (tj. niepodzielnych przez kwadrat liczby całkowitej > 1), że $n|a^n-1$.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że jeśli tylko $a \neq 2, 3$ to spełniony jest warunek dany w zadaniu.

W tym celu wykażemy najpierw, że $a = 2$ i $a = 3$ nie są rozwiązaniami zadania, gdyż jasne jest że $a = 1$ spełnia dany warunek.

Załóżmy, że $n|2^n-1$ i $n > 1$. Weźmy najmniejszy dzielnik pierwszy p liczby n. Wówczas $p|2^n-1$. Niech k oznacza rząd liczby 2 modulo p, tzn. najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, dla której $2^k \equiv 1 \pmod{p}$. Wtedy $k|n$, bo $2^n \equiv 1 \pmod{p}$. Również $k|p-1$, gdyż $p|2^{p-1}-1$ — małe twierdzenia Fermata. Ale $2 \not| k$ i skoro $k|p-1$, to $k < p-1$ i jeżeli $k \neq 1$, to n ma dzielnik pierwszy mniejszy niż p, co stoi w sprzeczności z założeniem o minimalności p. Jeśli $k = 1$ to $p|2^1-1 = 1$, co przeczy temu, że $p > 1$. A więc $n = 1$ jest jedyną liczbą naturalną, dla której $n|2^n-1$ i jasne jest, że $a = 2$ nie spełnia danego warunku.

Załóżmy, że dla pewnej liczby bezkwadratowej $n > 2$ zachodzi $n|3^n-1$. Wybierzmy najmniejszy dzielnik pierwszy p liczby n, który jest większy niż 2 (taki dzielnik pierwszy istnieje, bo $n > 2$ i n jest niepodzielne przez 4). Wówczas $p|3^n-1$. Podobnie jak poprzednio k oznacza rząd liczby 3 modulo p. Wtedy $k|n$ oraz $k|p-1$, czyli $k < p$. Musi zachodzić jedna z równości: $k = 1$ lub $k = 2$, gdyż z założenia o minimalności p wynika, że k nie ma dzielników pierwszych większych od 2 i mniejszych od p, a jednocześnie k nie jest podzielne przez 4 (bo n nie jest). W pierwszym przypadku mamy $p|3^1-1 = 2$, a w drugim $p|3^2-1 = 8$, czyli w obu przypadkach $p = 2$, sprzeczność. Skąd wynika, że $a = 3$ również nie jest rozwiązaniem zadania.

Załóżmy teraz, że $a \geqslant 4$ i skonstruujmy indukcyjnie ciąg $p_1, p_2, p_3, \ldots$ różnych liczb pierwszych takich, że $p_1p_2\ldots p_i|a^{p_1p_2\ldots p_i}-1$ dla $i \in \mathbb{N}$. Przyjmijmy $p_1 = p$, gdzie p jest dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $a-1 > 1$ i załóżmy, że mamy k liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$, które spełniają napisaną wcześniej podzielność dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Wystarczy pokazać, że liczba $a^{p_1p_2\dots p_k}-1$ ma dzielnik pierwszy p różny od $p_1, p_2, \dots p_k$. Wówczas będzie można przyjąć $p_{k+1}=p$ i wspomniana podzielność zajdzie również dla $i=k+1$, a więc indukcyjna konstrukcja naszego ciągu zostanie zakończona.

Przyjmijmy $A=a^{p_1p_2\dots p_{k-1}}$ (gdy $k=1$ przyjmujemy $A=a$) oraz niech $M=\frac{A^{p_k}-1}{A-1}=A^{p_k-1}+A^{p_k-2}+\ldots+A+1$. Jasne jest, że M jest liczbą naturalną większą od 1, która dzieli $a^{p_1p_2\dots p_k}-1$. Zauważmy, że jeśli $l=1,2,\dots,k-1$, to p_l nie dzieli M. Rzeczywiście, wiadomo, że $p_l|a^{p_1p_2\dots p_l}-1$, a więc również $p_l|A-1$. Czyli

$$M=A^{p_k-1}+A^{p_k-2}+\ldots+A+1\equiv 1+1+\ldots+1\equiv p_k \pmod{p_l},$$

co dowodzi, że $p_l \not| M$.

Zaczniemy od przypadku $p_k=2$. Jeśli $k=1$, to liczba a^2-1 ma pewien dzielnik pierwszy nieparzysty p, gdyż jak nietrudno sprawdzić, $a^2-1=(a-1)(a+1)$ jest potęgą liczby 2 wtedy i tylko wtedy, gdy $a=3$. W tym wypadku wystarczy więc przyjąć $p_{k+1}=p_2=p$.
Załóżmy więc, że $k>1$. Ponieważ liczby $p_1, p_2, \dots, p_k$ są różne i $p_k=2$, to liczba $p_1p_2\dots p_{k-1}$ jest **nieparzysta**. Możemy teraz rozłożyć

$$K=A+1=a^{p_1\dots p_{k-1}}+1=(a+1)(a^{p_1\dots p_{k-1}-1}-a^{p_1\dots p_{k-1}-2}+\ldots-a+1).$$

i ponieważ $k>1$ nietrudno sprawdzić, że liczba w drugim nawiasie jest większa niż 1. Ponadto, liczba w drugim nawiasie jest nieparzysta, bo w tym nawiasie występuje suma $p_1p_2\dots p_{k-1}$ składników, z których ostatni, czyli 1, jest nieparzysty, a wszystkie poprzednie mają taką samą parzystość jak a, więc ich suma jest parzysta. A zatem K ma pewien **nieparzysty** dzielnik pierwszy p, który na mocy powyższych rozważań jest różny od $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ i oczywiście od $p_k=2$. Podobnie jak poprzednio możemy zatem przyjąć $p_{k+1}=p$.

Załóżmy więc, że $p_k\neq 2$. Udowodnimy, że w takim wypadku p_k^2 nie dzieli M. Z małego twierdzenia Fermata i z założenia indukcyjnego wynika, że

$$A\equiv A^{p_k}\equiv a^{p_1p_2\dots p_k}\equiv 1 \pmod{p_k},$$

a zatem $p_k|A-1$ i możemy napisać $A=tp_k+1$, gdzie $t\in\mathbb{Z}$. Wykorzystamy teraz wzór dwumianowy Newtona. Zauważmy, że

$$M=\frac{A^{p_k}-1}{A-1}=\frac{(tp_k+1)^{p_k}-1}{tp_k}$$

$$= \frac{(tp_k)^{p_k} + \ldots + \binom{p_k}{2}(tp_k)^2 + \binom{p_k}{1}tp_k + 1 - 1}{tp_k}$$

$$= (tp_k)^{p_k-1} + \ldots + \frac{p_k - 1}{2}t(p_k)^2 + p_k \equiv p_k \pmod{p_k^2},$$

gdyż $p_k > 2$, czyli $\frac{p_k-1}{2}$ jest liczbą całkowitą.

Pokazaliśmy więc, że liczba M nie dzieli się przez żadną z liczb $p_1, \ldots,$ p_{k-1} oraz przez liczbę p_k wyłącznie w pierwszej potędze. Zauważmy, że $M \geqslant a^{p_k-1} > p_k$ — drugą nierówność można łatwo pokazać indukcyjnie dla $a \geqslant 4$ i $p_k > 2$. Wynika stąd, że M ma pewien dzielnik pierwszy p nie będący żadną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Ponieważ $M | a^{p_1 p_2 \cdots p_k} - 1$, wystarczy przyjąć $p_{k+1} = p$. Rozwiązanie zadania jest zakończone.

Zadania nieco trudniejsze:

1. Wśród n osób niektóre trójki były razem na imprezie. Dla każdych dwóch różnych osób A i B istnieje dokładnie jedna osoba C taka, że A, B i C byli razem na imprezie. Co więcej, jeśli dla sześciu różnych osób A, B, C, X, Y, Z trójki A, B, X, B, C, Y oraz C, A, Z były razem na imprezie, to również X, Y, Z byli razem na imprezie. Znaleźć wszystkie n, dla których taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

Wykażemy, że $n = 2^k - 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}^+$. Najpierw pokażemy, że dla $n = 2^k - 1$ sytuacja opisana w zadaniu jest faktycznie możliwa. Zdefiniujmy operację xor (bitowy) oznaczaną przez ^ dla liczb od 0 do $2^k - 1$. Jeśli $a = \langle c_k, c_{k-1} \ldots, c_0 \rangle_2$ oraz $b = \langle d_k, d_{k-1}, \ldots, d_0 \rangle_2$ to przedstawienia a i b w systemie dwójkowym, to $a\hat{\ }b = \langle e_k, e_{k-1} \ldots, e_0 \rangle_2$, gdzie $e_i = (c_i + d_i) \pmod 2$. Zauważmy teraz, że jeśli osoby $x_1, \ldots, x_{2^k-1}$ spotykały się tak, że na jednej imprezie byli razem x_a, x_b oraz $x_{a\hat{\ }b}$ dla dowolnych a i b, to warunki zadania są spełnione. Po pierwsze ^ jest przemienny oraz łączny, czyli $a\hat{\ }(a\hat{\ }b) = b$, więc faktycznie jeśli x_a i x_b byli z $x_{a\hat{\ }b}$, to x_a i $x_{a\hat{\ }b}$ byli z x_b oraz x_b i $x_{a\wedge b}$ byli z x_a. Drugi warunek jest również spełniony, gdyż jeśli $x = a\hat{\ }b$, $y = b\hat{\ }c$, $z = c\hat{\ }a$, to $x\hat{\ }y = a\hat{\ }b\hat{\ }b\hat{\ }c = a\hat{\ }c = z$.

Należy teraz jeszcze wykazać, że dla $n \neq 2^k - 1$ opisana sytuacja nie jest możliwa. Zauważmy, że sytuację z zadania możemy zinterpretować jako działanie na zbiorze osób. Niech X to zbiór możliwych osób. Zdefiniujemy tak działanie $\oplus$: $X \times X \to X$, że jeśli $a, b \in X$ i $a \neq b$, to przez $a \oplus b$ oznaczamy osobę, z którą a oraz b spotkały się na imprezie. Ponieważ istnieje dokładnie jedna taka osoba, to jest to dobrze zdefiniowane działanie. Z treści zadania wynika, że dla dowolnych $a, b, c \in X$, parami różnych $\oplus$ spełnia:

1.1 $a \oplus b = b \oplus a$

1.2 $(a \oplus b) \oplus a = b$

1.3 jeśli $a \oplus b = x$, $b \oplus c = y$ oraz $c \oplus a = z$, to $x \oplus y = z$

Zauważmy, że trzeci warunek daje łączność $\oplus$, gdyż dla dowolnych a, c, x można dobrać takie b, y, z, żeby zachodził punkt trzeci (definiujemy $b = a \oplus x$, $z = c \oplus a$, $y = (a \oplus x) \oplus c$). Wówczas spełnione jest:

$$x \oplus (a \oplus c) = x \oplus z = y = b \oplus c = (x \oplus a) \oplus c.$$

Zatem działanie na dowolnych parami różnych elementach z X jest przemienne i łączne.

Działanie $\oplus$ będziemy nazywać dodawaniem. Problemem jest to, że nie można dodać dwóch takich samych elementów. Aby ominąć problem dołączymy dodatkowy element, zwany 0. Przyjmujemy, że dla dowolnego $a \in X \cup \{0\}$ zachodzą równości: $0 = a \oplus a$ oraz $0 \oplus a = a \oplus 0 = a$. Bez trudu można wykazać, że wówczas dla dowolnych elementów $a, b, c \in X \cup \{0\}$ zachodzą warunki:

1.4 $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

1.5 $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$

1.6 dla dowolnego a istnieje b (element przeciwny do a), takie że $a \oplus b = b \oplus a = 0$ (w naszym wypadku $a = b$)

Zbiór z działaniem spełniającym warunki **1.4**, **1.5** i **1.6** nazywany jest w matematyce grupą, a jeśli dodatkowo spełniony jest warunek **1.1** — grupą przemienną albo abelową. W naszej grupie dowolny element dodany do siebie daje 0, czyli $a \oplus a = 0$, w języku grup mówimy, że dowolny element ma rząd równy 2. W ogólności rząd elementu x jest to minimalne n takie, że x dodany n razy do siebie daje element neutralny, czyli 0.

Do wykazania, że w naszym wypadku $n = 2^k - 1$ wystarczy pokazać, że rozważana grupa musi mieć 2^k elementów (bo dołączyliśmy 0), liczbę elementów grupy nazywamy jej rzędem. Pokażemy, że gdyby rząd naszej grupy nie był równy 2^k, to istniałby w niej element o rzędzie różnym od 2. Sprawę tę załatwi lemat.

Lemat Jeżeli grupa ma rząd kp, gdzie $k \in \mathbb{N}$, a p jest liczbą pierwszą, to istnieje w tej grupie element rzędu p.

Dowód (lematu) Rozważmy wszystkie p–tki $(x_1, \ldots, x_p)$ takie, że $x_1 \oplus \ldots \oplus x_p = 0$. Jest ich $(kp)^{p-1}$, bo pierwsze $p-1$ elementów wybieramy dowolnie, a ostatni jest elementem przeciwnym do $(x_1 \oplus \ldots \oplus x_{p-1})$.

Ponadto liczba takich p–tek, że $x_1 = \ldots = x_p$ jest również podzielna przez p, gdyż liczba pozostałych jest podzielna przez p (możemy je wówczas przesuwać cyklicznie, więc podzielimy je na grupy takie, że każda p-tka może powstać z każdej innej; grupy te są wielkości p).

Jednak $0 \oplus \ldots \oplus 0 = 0$, czyli liczba pozostałych p-tek o równych składnikach jest niepodzielna przez p, a co za tym idzie różna od 0. Zatem istnieje takie $a \neq 0$, że $a \oplus \ldots \oplus a = 0$. Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc $\underbrace{a \oplus \ldots \oplus a}_{k \text{ składników}} \neq 0$ dla każdego naturalnego $k \in (0, p)$, innymi słowy istnieje element a rzędu p. ∎

2. Niech punkty D, B, C, E leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności i niech punkt A spełnia równości $AB = DB$ oraz $AC = EC$. Poprowadźmy dwusieczne kątów $\measuredangle ABC$ oraz $\measuredangle ACB$ i ich przecięcia z okręgiem opisanym na trójkącie ABC oznaczmy odpowiednio przez K i L, zaś ich przecięcia z przeciwległymi bokami trójkąta ABC odpowiednio przez P i Q. Niech O_1 będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie DBL, zaś O_2 środkiem okręgu opisanego na trójkącie ECK. Przez S oznaczmy punkt przecięcia CO_1 i BO_2. Udowodnić, że $AS \perp PQ$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez R złożenie inwersji o środku B i promieniu $\sqrt{BA \cdot BC}$ z symetrią względem prostej BK. Z twierdzenia o dwusiecznej $R(E) = P$. Oczywiście $R(C) = A$. Ponadto $\measuredangle BAP = \measuredangle BAC = \measuredangle BKC$ oraz

$\measuredangle ABP = \measuredangle KBC$, czyli trójkąty ABP i KBC są podobne, a stąd $R(K) = Q$. W takim razie okrąg opisany na trójkącie ECK przechodzi na okrąg opisany na trójkącie PAQ. Stąd wniosek, że proste BO_2 i BO są izogonalne względem kąta $\measuredangle ABC$ (czyli symetryczne względem dwusiecznej tego kąta), gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie APQ (bo środek okręgu, środek jego obrazu w inwersji i środek tej inwersji leża na jednej prostej). Analogicznie CO_1 i CO są izogonalne względem kąta $\measuredangle ACB$, a więc punkty S i O są izogonalne względem trójkąta ABC (S powstaje jest przecięciem prostych symetrycznych do prostych AO, BO, CO względem dwusiecznych odpowiednich kątów, tzn. kątów: $\measuredangle BAC$, $\measuredangle CBA$ i $\measuredangle ACB$), czyli proste AS i AO są izogonalne względem kąta $\measuredangle BAC$. Wobec tego $\measuredangle SAP = \measuredangle OAQ = 90^\circ - \measuredangle APQ$ i mamy tezę.

3. Dane jest n liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o iloczynie równym 1. Wykazać, że

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i - x_j)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.$$

Rozwiązanie

Daną nierówność możemy przekształcić do równoważnej postaci

$$n \geqslant -(n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2.$$

Dowodzimy powyższą nierówność indukcyjnie. Dla $n = 2$ obie strony nierówności są równe. Załóżmy więc, że nierówność jest prawdziwa dla $n-1$ i wykażemy ją dla n. Niech

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -(n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - n.$$

Chcemy udowodnić, że $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że x_1 jest najmniejszą z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Przyjmijmy wówczas $G = \sqrt[n-1]{x_2 x_3 \ldots x_n}$. Udowodnimy nierówność $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f(x_1, G, G, \ldots, G)$. Łatwo zauważyć, że jest ona równoważna nierówności

$$(n-1)\sum_{k=2}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=2}^{n} x_k\right)^2 \geqslant 2x_1\left(\sum_{k=2}^{n} x_k - (n-1)G\right).$$

Ponieważ x_1 jest najmniejsza, więc $x_1 \leqslant G$. Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną wynika też, że $\sum_{k=2}^{n} x_k \geqslant (n-1)G$. Wystarczy więc wykazać, że

$$(n-1)\sum_{k=2}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=2}^{n} x_k\right)^2 \geqslant 2G\left(\sum_{k=2}^{n} x_k - (n-1)G\right),$$

gdyż x_1 zastąpiliśmy liczbą $G \geqslant x_1$, a wyrażenie w nawiasie jest nieujemne.

Niech $y_k = \frac{x_k}{G}$ dla $k = 2, 3, \ldots, n$. Wówczas iloczyn liczb y_k jest równy 1, a nierówność po podzieleniu obu stron przez G^2 wygląda tak:

$$(n-1)\sum_{k=2}^{n} y_k^2 - \left(\sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2 \geqslant 2\left(\sum_{k=2}^{n} y_k - (n-1)\right).$$

Z założenia indukcyjnego wiadomo, że

$$(n-2)\sum_{k=2}^{n} y_k^2 + (n-1) \geqslant \left(\sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2.$$

Wystarczy więc pokazać, że zachodzi

$$\sum_{k=2}^{n} y_k^2 + n - 1 \geqslant \sum_{k=2}^{n} 2y_k,$$

czyli

$$\sum_{k=2}^{n} (y_k - 1)^2 \geqslant 0,$$

a to jest jasne.

Wykazaliśmy więc, że $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f(x_1, G, G, \ldots, G)$. Aby dokończyć krok indukcyjny wystarczy pokazać, że $f(x_1, G, G, \ldots, G) \leqslant 0$. Ale ponieważ $x_1 = \frac{1}{G^{n-1}}$ ostatnia nierówność sprowadza się do

$$(n-1)\left((n-1)G^2 + \frac{1}{G^{2(n-1)}}\right) + n \geqslant \left((n-1)G + \frac{1}{G^{n-1}}\right)^2$$

lub po prostu

$$\frac{n-2}{G^{2n-2}} + n \geqslant \frac{2n-2}{G^{n-2}},$$

co jest natychmiastowym wnioskiem z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb $2n-2$ liczb $\frac{1}{G}, \frac{1}{G}, \ldots, \frac{1}{G}, 1, 1, \ldots, 1$. Dowód kroku indukcyjnego został zakończony, a więc zadanie jest rozwiązane.

4. W każdym punkcie kratowym płaszczyzny, który ma niedodatnią współrzędną x położono jeden pionek. Dozwolone są ruchy polegające na wybraniu pewnej pary pionków stojących na sąsiadujących w pionie lub poziomie punktach A i B i „zbicie" jednym z nich drugiego, tj. zdjęcie pionka z pola A i przestawienie pionka z pola B na taki punkt C, że A jest środkiem odcinka BC (w punkcie C, na który przestawiamy pionek z punktu B, nie mógł dotychczas stać żaden pionek). Znaleźć największe x, dla którego istnieje skończona sekwencja dozwolonych ruchów, po której pewien pionek znajduje się w punkcie (x, y) (dla pewnego y).

Rozwiązanie

Pokażemy, że istnieje sekwencja ruchów doprowadzająca pionek na pole $(4, 0)$ oraz, że dla dowolnego x nie istnieje sekwencja ruchów doprowadzająca pionek na pole $(5, x)$.

W dalszym ciągu zapisa $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \to (x_3, y_3)$ będzie oznaczać, że pionek z pola o współrzędnych (x_1, y_1) zbija pionek z pola (x_2, y_2) i zajmuje pole (x_3, y_3). Sekwencja doprowadzająca do pionka na polu $(4, 0)$ to:

$(-1, -1), (0, -1) \to (1, -1)$
$(-1, -2), (0, -2) \to (1, -2)$
$(1, -2), (1, -1) \to (1, 0)$
$(0, 0), (1, 0) \to (2, 0)$
$(0, 2), (0, 1) \to (0, 0)$
$(-1, 0), (0, 0) \to (1, 0)$
$(1, 0), (2, 0) \to (3, 0)$
$(-3, -1), (-2, -1) \to (-1, -1)$
$(-3, -2), (-2, -2) \to (-1, -2)$
$(-1, -2), (-1, -1) \to (-1, 0)$
$(-2, 0), (-1, 0) \to (0, 0)$

$(-1,2),(-1,1) \to (-1,0)$
$(-1,0),(0,0) \to (1,0)$
$(-4,0),(-3,0) \to (-2,0)$
$(-3,2),(-3,1) \to (-3,0)$
$(-3,0),(-2,0) \to (-1,0)$
$(-2,2),(-2,1) \to (-2,0)$
$(-2,0),(-1,0) \to (0,0)$
$(0,0),(1,0) \to (2,0)$
$(2,0),(3,0) \to (4,0)$

Należy teraz wykazać, że do pola postaci $(5,x)$ nie da się dojść. Udowodnimy to nie wprost. Przypuśćmy, że to nieprawda. Bez straty ogólności możemy założyć, że można postawić pionek na polu $(5,0)$. Przypiszmy każdemu polu na szachownicy liczbę: polu (x,y) przypiszemy liczbę $\varphi^{d(x,y)}$, gdzie $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $d(x,y) = |x-5|+|y|$ (mówimy, że $d(x,y)$ jest równa odległości (x,y) w metryce miejskiej od $(5,0)$). Liczba φ to dodatni pierwiastek równania $x^2+x=1$. Udowodnimy zaraz, że na początku suma liczb na polach, na których stoją pionki wynosi 1. Zauważmy, że po ruchu suma liczb na polach opionkowanych nie zwiększy się, gdyż jeżeli pionek zbijający i pionek zbijany stały na polach, którym przypisaliśmy liczby φ^k oraz φ^{k+1}, to nowy pionek stoi na polu, któremu przypisaliśmy liczbę φ^{k-1} lub mniejszą, bo jego odległość od pola $(5,0)$ wynosi co najmniej $k-1$ i $0<\varphi<1$. Mamy wówczas $\varphi^{k+1}+\varphi^k=\varphi^{k-1}$, więc suma liczb na polach opionkowanych się zachowuje. Może się oczywiście zdarzyć, że suma liczb na tych polach się zmniejszy, gdyż ruch będzie nie w kierunku $(5,0)$. Czyli reasumując suma liczb na polach opionkowanych jest półniezmiennikiem. Zauważmy, że gdy na polu $(5,0)$ stoi pionek, to dodaje on do sumy liczb na opionkowanych polach liczbę $\varphi^0=1$. Po wykazaniu, że na starcie suma liczb na opionkowanych polach wynosi 1 pokażemy, że wszystkie muszą być wykorzystane do umieszczenia pionka na $(5,0)$, a tego w skończonej ilości ruchów nie można zrobić. Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że suma liczb na polach (x,y), gdzie $y \leqslant 0$ wynosi 1.

Obliczmy najpierw sumę liczb w kolumnie o pierwszej współrzędnej

k. Oznaczmy ją przez S_k.

$$S_k = \sum_{i=5-k}^{\infty} \varphi^i + \sum_{i=6-k}^{\infty} \varphi^i = \varphi^{5-k}\frac{1}{1-\varphi} + \varphi^{6-k}\frac{1}{1-\varphi}.$$

Przez S oznaczmy szukaną sumę. Wówczas, biorąc pod uwagę równość $\varphi^2 + \varphi = 1$, otrzymujemy

$$S = \sum_{k=-\infty}^{0} S_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{5+k}\frac{1}{1-\varphi} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{6+k}\frac{1}{1-\varphi} = \Big(\frac{1}{1-\varphi}\Big)^2(\varphi^5 + \varphi^6)$$
$$= \frac{1}{(\varphi^2)^2}\cdot\varphi^4 = 1\,.$$

5. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, a n liczbą naturalną. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej m liczba $P(2^m)$ jest n-tą potęgą pewnej liczby naturalnej. Udowodnić, że wówczas $P(x) = (Q(x))^n$ dla pewnego wielomianu Q o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu wykorzystamy 4 lematy. Zaczniemy od wypowiedzenia znanego lematu Gaussa.

Lemat (Gauss)**.** *Jeśli $F(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, $G(x)$ i $H(x)$ są wielomianami o współczynnikach wymiernych oraz $F(x) = G(x)\cdot H(x)$, to istnieje taka liczba wymierna q, że $qG(x)$ i $\frac{1}{q}H(x)$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych (w szczególności F jest rozkładalny na iloczyn wielomianów o współczynnikach całkowitych).*

Udowodnimy teraz

Lemat (1)**.** *Jeśli $F(x)$ jest takim wielomianem o współczynnikach zespolonych, że jego współczynnik wiodący jest liczbą całkowitą (czyli też rzeczywistą) a współczynniki wielomianu $(F(x))^k$ są wymierne (czyli też rzeczywiste) dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_+$, to współczynniki F są liczbami wymiernymi (czyli też rzeczywistymi). Co więcej, jeśli dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ współczynniki wielomianu $(F(x))^k$ są całkowite, to również współczynniki F są liczbami całkowitymi.*

Dowód. Przez $\mathbb{Z}[x]$ oznaczamy, jak zwykle, zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych. Analogicznie symbole $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ oznaczają odpowiednio zbiory wszystkich wielomianów o współczynnikach, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych.

Na początku udowodnimy pierwszą część lematu, czyli pokażemy, że współczynniki wielomianu F są rzeczywiste wymierne przy założeniu, że współczynniki wielomianu $(F(x))^k$ są wymierne dla pewnego $k \geqslant 1$. Niech

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ oraz}$$
$$(F(x))^k = b_{kn}x^{kn} + b_{kn-1}x^{kn-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Z założenia $a_n \in \mathbb{Q}$. Przyjmijmy więc, że współczynniki $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-l}$ są wymierne i pokażmy, że o ile tylko $l < n$, to również $a_{n-l-1} \in \mathbb{Q}$. Zobaczmy jak wygląda współczynnik b_{kn-l-1} w zależności od współczynników wielomianu F. Po wymnożeniu wszystkich nawiasów nietrudno zauważyć, że $b_{kn-l-1} = a_{n-l-1} \cdot a_n^{k-1} + S$ gdzie S to suma pewnych iloczynów, w których występują wyłącznie potęgi liczb $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-l}$. Jednak na mocy założenia indukcyjnego te liczby są wymierne, a więc S również jest wymierne. Ponieważ wymierne są także liczby a_n oraz b_{kn-l-1} stwierdzamy, że wymierna jest też liczba a_{n-l-1} co pokazuje, że współczynniki wielomianu $F(x)$ są wymierne.

Załóżmy teraz, że $(F(x))^k$ ma współczynniki całkowite i pokażmy, że F również ma współczynniki całkowite. Z dowodu poprzedniej części lematu wiemy już, że F ma współczynniki wymierne. Jeśli $k = 1$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $k > 1$ i zapiszmy $(F(x))^k = F(x) \cdot (F(x))^{k-1}$. Wielomian $(F(x))^k$ o współczynnikach całkowitych zapisaliśmy jako iloczyn wielomianów o współczynnikach wymiernych, a więc z lematu Gaussa wynika, że istnieje taka liczba wymierna q, że $qF(x) \in \mathbb{Z}[x]$ oraz $\frac{1}{q}(F(x))^{k-1} \in \mathbb{Z}[x]$. Jeśli $q = \frac{a}{b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $\text{nwd}(a, b) = 1$, to w szczególności $aF(x) \in \mathbb{Z}[x]$ oraz $b(F(x))^{k-1} \in \mathbb{Z}[x]$. Ale wtedy też $a^{k-1}(F(x))^{k-1} \in \mathbb{Z}[x]$, a ponieważ $\text{nwd}(a, b) = 1$, to również $\text{nwd}(a^{k-1}, b) = 1$. Istnieją więc takie $s, t \in \mathbb{Z}$, że $a^{k-1}s + bt = 1$. Mamy wówczas

$$sa^{k-1}(F(x))^{k-1} + tb(F(x))^{k-1} = (F(x))^{k-1} \in \mathbb{Z}[x].$$

Powtarzając to rozumowanie otrzymujemy kolejno, że $(F(x))^{k-2}$, $(F(x))^{k-3}, \ldots, F(x) \in \mathbb{Z}[x]$, co kończy dowód lematu.

Lemat (2). *Jeśli $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ jest stopnia nk (gdzie $k \in \mathbb{N}$), o współczynniku wiodącym a^n gdzie $a \in \mathbb{Z}$ oraz $F(t)$ jest n-tą potęgą liczby całkowitej dla nieskończenie wielu $t \in \mathbb{N}$, to $F(x) = (G(x))^n$ dla pewnego $G(x)$ o współczynnikach całkowitych.*

Dowód. Jasne jest, że jeśli $2|n$, to współczynnik wiodący wielomianu F jest liczbą dodatnią. Jeśli 2 nie dzieli n i współczynnik wiodący wielomianu F jest ujemny, to możemy rozważać wielomian $-F(x)$. W obu przypadkach możemy przyjąć, że współczynnik wiodący jest dodatni i co za tym idzie $F(x) > 0$ dla odpowiednio dużych x.

Zauważmy, że można skonstruować taki wielomian $G(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stopnia k, że $k+1$ najwyższych współczynników wielomianu $(G(x))^n$ pokrywa się z odpowiadającymi współczynnikami $F(x)$. Istotnie, przyjmujemy, że a jest współczynnikiem wiodącym wielomianu G i kolejne współczynniki wyliczamy za pomocą metody, którą zastosowaliśmy w pierwszym kroku dowodu lematu (1). Każdy współczynnik G jest wymierny, gdyż otrzymujemy go z równania liniowego o wymiernych współczynnikach.

Pokażemy teraz, że $F(x) = (G(x))^n$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że te wielomiany nie są równe. Wówczas istnieje skończenie wiele x, dla których $F(x) = (G(x))^n$, a jednocześnie istnieje nieskończenie wiele $t \in \mathbb{N}$ takich, że $\sqrt[n]{F(t)} \in \mathbb{Z}$. W szczególności istnieje więc nieskończenie wiele $r \in \mathbb{N}$, dla których $G(r) \neq \sqrt[n]{F(r)} \in \mathbb{Z}$. Jeśli M oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników współczynników G, to $MG(r) \in \mathbb{Z}$, a zatem $MG(r)$ oraz $M\sqrt[n]{F(r)}$ różnią się o co najmniej 1, gdyż są to dwie różne liczby całkowite. Otrzymujemy więc $|G(r) - \sqrt[n]{F(r)}| \geqslant \frac{1}{M}$. Udowodnimy, że nie jest to możliwe dobierając odpowiednio duże r.

Ponieważ $k+1$ najwyższych współczynników wielomianu $(G(x))^n$ pokrywa się z odpowiednimi współczynnikami wielomianu $F(x)$, więc stopień $(G(x))^n - F(x)$ jest równy co najwyżej $nk - k - 1$. Istnieje zatem taka stała c_1, że $|G(r))^n - F(r)| < c_1 r^{nk-k-1}$ dla każdego dostatecznie dużego r. Jednocześnie dla odpowiednio dużych r zachodzi $F(r) > 0$, a więc również $G(r) > 0$. Dla dostatecznie dużych r mamy więc

$$|(G(r))^n - F(r)| = |G(r) - \sqrt[n]{F(r)}| \cdot |(G(r))^{n-1} + \ldots + (\sqrt[n]{F(r)})^{n-1}| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{M}|G(r)|^{n-1},$$

a ponieważ $G(x)$ jest stopnia k istnieje taka stała $c_2 > 0$, że dla odpowiednio dużych r mamy $|G(r)|^{n-1} > c_2 r^{kn-k}$. A więc mamy również $r < \frac{Mc_1}{c_2}$, co jednak nie jest prawdą dla odpowiednio dużych r. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że w istocie $F(x) = (G(x))^n$. Z lematu (1) wynika natychmiast, że współczynniki $G(x)$ są całkowite. Dowód jest zakończony.

Lemat (3). *Jeśli $F(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych o współczynniku wiodącym a i $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$ są liczbami całkowitymi takimi, że*

$$F(x)F(a_1x)F(a_2x)\ldots F(a_{n-1}x) = (G(x))^n,$$

dla pewnego $G(x) \in \mathbb{Z}[x]$, to wówczas $F(x) = ax^m(H(x))^n$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej m i pewnego wielomianu $H(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Dowód. Wykażemy, że krotność każdego niezerowego pierwiastka zespolonego wielomianu F jest podzielna przez n. Załóżmy, że tak nie jest i spośród wszystkich pierwiastków niespełniających tego warunku wybierzmy ten o najmniejszym module. Niech będzie to z. Wówczas $\frac{z}{a_{n-1}}$ jest pierwiastkiem $F(a_{n-1}x)$ i jego krotność również jest niepodzielna przez n. Zauważmy też, że jeśli $\frac{z}{a_{n-1}}$ jest pierwiastkiem $F(a_ix)$ dla pewnego $1 \leqslant i < n-1$, to jego krotność jest podzielna przez n. Bowiem gdyby tak nie było to $\frac{a_iz}{a_{n-1}}$ byłoby niezerowym pierwiastkiem F o krotności niepodzielnej przez n. Ale skoro $1 \leqslant a_i < a_{n-1}$, to $|\frac{a_iz}{a_{n-1}}| < |z|$, co przeczy minimalności $|z|$. Z tych samych powodów, jeśli $\frac{z}{a_{n-1}}$ jest pierwiastkiem $F(x)$, to n jest dzielnikiem jego krotności.

Pokazaliśmy zatem, że $\frac{z}{a_{n-1}}$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$F(x)F(a_1x)F(a_2x)\ldots F(a_{n-1}x) = (G(x))^n$$

o krotności niepodzielnej przez n. Ale to jest niemożliwe, bo krotności pierwiastków wielomianu $(G(x))^n$ są podzielne przez n.

Oznaczmy przez m krotność 0 w $F(x)$. Ponieważ krotności wszystkich pierwiastków F oprócz zera są podzielne przez n, możemy napisać $F(x) = ax^m(H(x))^n$ dla pewnego unormowanego wielomianu H o współczynnikach **zespolonych**. Wielomian $\frac{F(x)}{ax^m}$ ma wymierne współczynniki i jest równy $(H(x))^n$, a ponieważ współczynnik wiodący H jest równy 1, więc z lematu (1) wynika, że $H \in \mathbb{Q}[x]$. Lemat (3) został dowiedziony.

Przejdźmy do właściwej części rozwiązania. Rozważmy wielomian

$$Q(x) = P(x)P(2^n x)P(2^{2n} x)\dots P(2^{(n-1)n} x).$$

Niech k będzie stopniem wielomianu P, natomiast a jego współczynnikiem wiodącym. Wówczas współczynnikiem wiodącym wielomianu Q jest $(a2^{k+2k+\dots+(n-1)k})^n$, a jego stopień to nk. Jasne też jest, że dla każdego $m \in \mathbb{Z}_+$ liczba $Q(2^m)$ jest n-tą potęgą liczby całkowitej, gdyż jest iloczynem n-tych potęg liczb całkowitych. A zatem, na mocy lematu (2) istnieje taki wielomian $G \in \mathbb{Z}[x]$, że $Q(x) = (G(x))^n$. Z kolei z lematu (3) otrzymujemy, że wówczas $P(x) = ax^m(H(x))^n$ dla pewnego H o współczynnikach wymiernych.

Jeśli $P(x) \equiv 0$ to teza jest oczywiście spełniona. Jeśli $P(x) \not\equiv 0$, to możemy wybrać takie l, że $P(2^{ln}) \neq 0$. Wstawiając więc $x = 2^{nl}$ do powyższej równości dostajemy, że a jest n-tą potęgą liczby wymiernej, a skoro $a \in \mathbb{Z}$, to a jest n-tą potęgą liczby całkowitej. Zapiszmy więc $a = b^n$. Możemy wybrać takie l, że $P(2^{ln+1}) \neq 0$. Dostajemy wówczas, że $b^n 2^{m(ln+1)}(H(2^{ln+1}))^n$ jest n-tą potęgą liczby całkowitej. Czyli $2^{m(ln+1)}$ jest n-tą potęgą liczby wymiernej, ale tak jak poprzednio stwierdzamy, że musi to też być n-ta potęga liczby całkowitej a więc $n|m$, czyli $m = nt$ dla $t \in \mathbb{N}$. Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że wielomian $P(x)$ jest n-tą potęgą wielomianu $bx^t H(x)$ o współczynnikach wymiernych. Ale skoro P ma współczynniki całkowite to na mocy lematu (1) wielomian $bx^t H(x)$ ma współczynniki całkowite i dowód jest zakończony.

6. Niech S_1, S_2 będą okręgami przecinającymi się w dwóch różnych punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okrąg S_1 w punkcie C, a okrąg S_2 w punkcie D. Punkty M, N, K leżą odpowiednio na odcinkach CD, BC, BD oraz prosta MN jest równoległa do BD, a prosta MK jest równoległa do BC. „Zewnętrzne" łuki BC okręgu S_1 oraz BD okręgu S_2 zawierają odpowiednio punkty E i F, przy czym prosta EN jest prostopadła do BC, a prosta FK jest prostopadła do BD. Dowieść, że kąt $\measuredangle EMF$ jest prosty.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $O_1,\ O_2$ środki okręgów $S_1,\ S_2$. Zachodzą równości

$$\measuredangle BO_1C = 2\measuredangle BAC = 360^\circ - 2\measuredangle DAB = 360^\circ - \measuredangle DO_2B.$$

Stąd wynika, że istnieje podobieństwo zmieniające orientację, które przeprowadza S_1 w S_2, B na D, a C na B. Z twierdzenia Talesa wynika, że $\frac{BK}{KD} = \frac{CM}{MD} = \frac{CN}{NB}$, więc punkt N przechodzi w tym podobieństwie na punkt K. Niech E' będzie obrazem punktu E w tymże podobieństwie. Wtedy oczywiście punkty E', K, F są współliniowe i z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu mamy

$$\frac{FK}{KB} = \frac{DK}{KE'} = \frac{BN}{NE},$$

a stąd

$$\frac{FK}{KM} = \frac{FK}{BN} = \frac{BK}{NE} = \frac{MN}{NE}.$$

Ponadto $KF \perp BK \parallel MN$ oraz $KM \parallel BN \perp NE$, więc trójkąty FKM i MNE są podobne przez złożenie jednokładności z obrotem o kąt prosty. Musi być również $EM \perp MF$ i mamy tezę.

7. Udowodnić, że istnieje liczba postaci 333333^{333333^n}, gdzie n jest liczbą naturalną, zakończona 333333^{333333} trójkami w zapisie dziesiętnym.

Rozwiązanie
Dla danej liczby całkowitej dodatniej a niech $v_5(a)$ oznacza liczbę całkowitą nieujemną n, dla której $5^n \parallel a$ (tzn. taką liczbę n, że $5^n \mid a$ ale $5^{n+1} \nmid a$, czyli $v_5(a)$ jest wykładnikiem z jakim liczba 5 wchodzi w rozkład liczby a na czynniki pierwsze).

Lemat (1). *Jeśli $v_5(a-1) > 0$, to $v_5(a^n - 1) = v_5(a-1) + v_5(n)$ gdzie $a > 1$ i $n > 0$ są liczbami całkowitymi.*

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na $v_5(n)$. Mamy $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$. W drugim nawiasie jest dokładnie n składników. Ponieważ n jest niepodzielne przez 5 (bo $v_5(n) = 0$) i $a \equiv 1 \pmod 5$, więc liczba w drugim nawiasie nie dzieli się przez 5, a więc w tym wypadku $v_5(a^n - 1) = v_5(a-1)$.

Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla $v_5(n) = k \geqslant 0$. Wykażemy ją dla $v_5(n) = k+1$. Zapiszmy $n = 5^{k+1}b$, gdzie b jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 5. Z założenia indukcyjnego wynika, że $a^{5^k b} = 5^{k+l}c + 1$ gdzie $c \in \mathbb{Z}$ jest liczbą niepodzielną przez 5 i $l = v_5(a-1)$. Po podniesieniu tej równości do potęgi 5 otrzymujemy

$$a^{5^{k+1}b} = (5^{k+l}c+1)^5 =$$
$$= 5^{5k+5l}c^5 + 5^{4k+4l+1}c^4 + 2\cdot 5^{3k+3l+1}c^3 + 2\cdot 5^{2k+2l+1}c^2 + 5^{k+l+1}c + 1.$$

Na mocy założenia $l > 0$, a więc łatwo zauważyć, że pierwsze 4 składniki powyższej sumy są podzielne przez 5^{k+l+2}. A zatem

$$a^{5^{k+1}b} - 1 \equiv 5^{k+l+1}c \pmod{5^{k+l+2}},$$

czyli $v_5(a^{5^{k+1}b} - 1) = k + l + 1$, gdyż c jest niepodzielne przez 5. A dokładnie to chcieliśmy wykazać.

Niech $A = 333333$.

Lemat (2)**.** *Niech $k \geqslant 4$ będzie liczbą naturalną. Wtedy $2^k \parallel A^{5\cdot 10^{k-2}} - 1$ oraz $5^k \parallel A^{5\cdot 10^{k-2}} - 1$.*

Dowód. Niech $B = A^{5^{k-1}}$. Ponieważ $A \equiv 5 \pmod 8$ i $5^5 \equiv 5 \pmod 8$, więcv $B \equiv 5 \pmod 8$ oraz

$$A^{5\cdot 10^{k-2}} - 1 = B^{2^{k-2}} - 1 = (B-1)(B+1)(B^2+1)\ldots(B^{2^{k-3}}+1).$$

Liczba w pierwszym nawiasie dzieli się przez 4 ale nie przez 8, a liczby w następnych $k-2$ nawiasach dzielą się przez 2, ale nie przez 4. A zatem cały iloczyn dzieli się przez 2^k, ale przez 2^{k+1} już nie.

Zauważmy teraz, że $A^{5\cdot 10^{k-2}} - 1 = (A^4)^{2^{k-4}\cdot 5^{k-1}} - 1$. Nietrudno sprawdzić, że $v_5(A^4-1) = 1$. Ponieważ $k \geqslant 4$, więc $2^{k-4} \in \mathbb{Z}$. Z udowodnionego wcześniej lematu otrzymujemy

$$v_5\left((A^4)^{2^{k-4}\cdot 5^{k-1}} - 1\right) = v_5(A^4-1) + v_5(2^{k-4}\cdot 5^{k-1}) = 1 + k - 1 = k,$$

co chcieliśmy wykazać.

Lemat (3)**.** *Niech $k \geqslant 4$ będzie liczbą naturalną. Wówczas $A^m \equiv A^n \pmod{10^k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \equiv n \pmod{5\cdot 10^{k-2}}$.*

Dowód. Bez straty ogólności można przyjąć, że $m \geqslant n$. Kongruencja $A^m \equiv A^n \pmod{10^k}$ równoważna jest kongruencji $A^{m-n} \equiv 1 \pmod{10^k}$. Jeśli $5\cdot 10^{k-2} | m-n$, to ze względu na lemat (2) jasne jest, że ta kongruencja jest spełniona. Załóżmy teraz, że $5\cdot 10^{k-2} \nmid m-n$. Niech a

i b oznaczają wykładniki z jakimi liczby 2 oraz 5 wchodzą w rozkład liczby $m-n$ na czynniki pierwsze. Wówczas $a<k-2$ lub $b<k-1$. W pierwszym przypadku, jeśli zapiszemy $m-n=2^a\cdot(2c+1)$ i rozłożymy a–krotnie wyrażenie $A^{m-n}-1$ jako różnicę kwadratów tak, jak w dowodzie lematu 2, to dojdziemy do wniosku, że $2^{a+2}\parallel A^{m-n}-1$. Liczba 2^k nie dzieli $A^{m-n}-1$, bo $a+2<k-2+2=k$. Jeśli $a\geqslant k-2\geqslant 2$ oraz $b<k-1$, to piszemy $m-n=4\cdot 5^b\cdot d$, gdzie d jest niepodzielne przez 5. Wówczas $A^{m-n}-1=(A^4)^{d\cdot 5^b}-1$. Ponieważ $v_5(A^4-1)=1$ na mocy lematu (1) mamy

$$v_5\left((A^4)^{d\cdot 5^b}-1\right)=v_5(A-1)+v_5(d\cdot 5^b)=1+b<1+k-1=k.$$

A więc 5^k nie dzieli $A^{m-n}-1$. W obu przypadkach przekonaliśmy się, że 10^k nie dzieli $A^{m-n}-1$, a zatem teza lematu została dowiedziona.

Lemat (4)**.** *Niech k,m,R będą takimi liczbami naturalnymi, że $k\geqslant 4$, $0<R<10^k$ oraz $A^m\equiv R \pmod{10^k}$. Wtedy dla dowolnego $0\leqslant c<10$ istnieje takie $0\leqslant t<10$ że $A^{t\cdot 5\cdot 10^{k-2}+m}\equiv c\cdot 10^k+R \pmod{10^{k+1}}$.*

Dowód. Rozważmy liczby $A_t=A^{t\cdot 5\cdot 10^{k-2}+m}$ dla $t=0,1,2,\ldots 9$. Na mocy lematu (3) $A_t\equiv R \pmod{10^k}$ dla $t=0,1,2,\ldots,9$, gdyż wszystkie wykładniki dają tą samą resztę z dzielenia przez $5\cdot 10^{k-2}$. Z lematu (3) wynika również, że reszty z dzielenia tych liczb przez 10^{k+1} są parami różne, gdyż różne są reszty z dzielenia wykładników przez $5\cdot 10^{k-1}$ (łatwe sprawdzenie). Tych liczb jest 10, więc jasne jest, że resztami muszą być $0\cdot 10^k+R, 1\cdot 10^k+R,\ldots,9\cdot 10^k+R$. Udowodniliśmy lemat.

Przystępujemy do właściwej części rozwiązania. Oznaczmy $A=333333$. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje takie n, że liczba A^{A^n} ma na końcu co najmniej k trójek.

Dla $k=6$ sprawa jest jasna, gdyż wystarczy przyjąć $n=0$. Załóżmy więc, iż dla pewnego n liczba A^{A^n} kończy się co najmniej k trójkami. Z lematu (4) wynika, że dla pewnego $0\leqslant l<10$ mamy

$$A^{l\cdot 5\cdot 10^{k-2}+A^n}\equiv 3\cdot 10^k+\overbrace{33\ldots 3}^{k}\equiv\overbrace{33\ldots 3}^{k+1}\pmod{10^{k+1}},$$

czyli liczba $A^{l\cdot 5\cdot 10^{k-2}+A^n}$ kończy się przynajmniej $k+1$ trójkami. Z lematu (3) wynika, że wystarczy znaleźć taką liczbę m, dla której spełniony jest warunek $A^m \equiv l\cdot 5\cdot 10^{k-2}+A^n \pmod{5\cdot 10^{k-1}}$. Wówczas bowiem będzie $A^{A^m} \equiv A^{l\cdot 5\cdot 10^{k-2}+A^n} \pmod{10^{k+1}}$, a to oznacza, że liczba A^{A^m} będzie kończyć się co najmniej $k+1$ trójkami. Znajdziemy takie m, że nawet $A^m \equiv l\cdot 5\cdot 10^{k-2}+A^n \pmod{10^k}$.

Niech $0 < R_1 < 10^{k-2}$ będzie resztą z dzielenia liczby A^n przez 10^{k-2}, a $0 < R_2 < 10^{k-1}$ resztą z dzielenia liczby $l\cdot 5\cdot 10^{k-2}+A^n$ przez 10^{k-1}. Na mocy lematu (4) istnieje m_1 takie, że

$$A^{m_1} \equiv c_1\cdot 10^{k-2}+R_1 \pmod{10^{k-1}},$$

gdzie c_1 to reszta z dzielenia liczby $5l+\frac{A^n-R_1}{10^{k-2}}$ przez 10 (jest to liczba całkowita ze względu na określenie R_1). Niech $5l+\frac{A^n-R_1}{10^{k-2}} = 10s+c_1$. Wówczas

$$\begin{aligned} A^{m_1} &\equiv \left(-10s+5l+\frac{A^n-R_1}{10^{k-2}}\right)\cdot 10^{k-2}+R_1 \\ &\equiv l\cdot 5\cdot 10^{k-2}+A^n-R_1+R_1 \equiv R_2 \pmod{10^{k-1}}. \end{aligned}$$

Ponownie z lematu (4) wynika istnienie takiego m_2, że

$$A^{m_2} \equiv c_2\cdot 10^{k-1}+R_2 \pmod{10^k},$$

gdzie c_2 jest resztą z dzielenia liczby $\frac{l\cdot 5\cdot 10^{k-2}+A^n-R_2}{10^{k-1}}$ przez 10. Przekształcając jak poprzednio stwierdzamy, że $A^{m_2} \equiv l\cdot 5\cdot 10^{k-2}+A^n \pmod{10^k}$. Zadanie jest rozwiązane.

8. Wielomiany W i V nazywamy względnie pierwszymi, jeśli nie istnieje wielomian U stopnia dodatniego taki, że $U|W$ i $U|V$. Niech P, Q i R będą względnie pierwszymi wielomianami stopnia dodatniego. Udowodnić, że jeżeli zachodzi

$$\big(P(x)\big)^n+\big(Q(x)\big)^n=\big(R(x)\big)^n,$$

to $n \leqslant 2$.

Rozwiązanie

Lemat

Dane są względnie pierwsze wielomiany stopnia dodatniego A, B, C takie, że $A+B=C$ oraz

$$A(t)=a\prod_{i=1}^{k}(t-x_i)^{\alpha_i},\; B(t)=b\prod_{i=1}^{l}(t-y_i)^{\beta_i},\; C(t)=c\prod_{i=1}^{m}(t-z_i)^{\gamma_i},$$

gdzie $a, b, c, x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots z_m$ są dowolnymi liczbami zespolonymi, a w wykładnikach występują liczby całkowite dodatnie (zasadnicze twierdzenie algebry mówi, że każdy wielomian jest takiej właśnie postaci). Wówczas $k + l + m > \max\{\deg(A),\ \deg(B),\ \deg(C)\}$.

Dowód

Równość $A + B = C$ różniczkujemy stronami:

$$A(t)\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{t-x_i} + B(t)\sum_{i=1}^{l}\frac{\beta_i}{t-y_i} = C(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i}{t-z_i}$$

$$A(t)\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{t-x_i} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i}{t-z_i}\Big) = B(t)\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i}{t-z_i} - \sum_{i=1}^{l}\frac{\beta_i}{t-y_i}\Big) \neq 0.$$

Niech $D(t) = \prod_{i=1}^{k}(t-x_i)\prod_{i=1}^{l}(t-y_i)\prod_{i=1}^{m}(t-z_i)$. Mamy teraz równość wielomianów:

$$A(t)D(t)\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{t-x_i} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i}{t-z_i}\Big) = B(t)D(t)\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i}{t-z_i} - \sum_{i=1}^{l}\frac{\beta_i}{t-y_i}\Big).$$

Ale A i B są względnie pierwsze, czyli $A(t)|D(t)\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i}{t-z_i} - \sum_{i=1}^{l}\frac{\beta_i}{t-y_i}\Big)$. W szczególności $deg(A) < deg(D)$. Analogicznie $deg(B) < deg(D)$ i $deg(C) < deg(D)$. Wystarczy teraz zauważyć, że $\deg(D) = k + l + m$. ■

Podstawmy teraz $A = P^n$, $B = Q^n$ i $C = R^n$. Mamy:

$$3\max\{\deg(P),\ \deg(Q),\ \deg(R)\} \geqslant \deg(P) + \deg(Q) + \deg(R) \geqslant$$

$$\geqslant k + l + m > n \cdot \max\{\deg(P),\ \deg(Q),\ \deg(R)\},$$

czyli $n < 3$.

9. $S_1, S_2, ..., S_{2008}$ są podzbiorami zbioru $\{1, 2, \ldots, 2008\}$, z których każdy ma parzystą liczbę elementów. Dowieść, że dla pewnych numerów $1 \leqslant i < j \leqslant 2008$ również zbiór $S_i \cap S_j$ ma parzystą liczbę elementów.

Rozwiązanie

W tym rozwiązaniu napis $m \equiv n$ oznaczać będzie, że $m \equiv n \pmod 2$, a symbol $|X|$ — liczbę elementów zbioru X. Dla $A, B \subset \{1, 2, \ldots, 2008\}$

oznaczmy przez $\langle A, B\rangle$ resztę z dzielenia przez 2 liczby elementów części wspólnej zbiorów A i B, czyli $\langle A, B\rangle \equiv |A\cap B|$.
Zauważmy, że spełnione są równości: $\langle A, B\Delta C\rangle \equiv \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$ oraz $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$ dla wszystkich $A, B, C \subset \{1, 2, \ldots, 2008\}$, gdzie przez $B\Delta C$ oznaczyliśmy tzw. różnicę symetryczną zbiorów B i C, czyli zbiór $B\Delta C = (B\cup C)\setminus(B\cap C)$. Można wykazać, że $A\Delta B = B\Delta A$ (trywialne) oraz $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (łatwe, ale nieco żmudne). Łatwo też zauważyć, że $|S_i\Delta S_j| \equiv 0$, dla $1 \leqslant i, j \leqslant 2008$. Stąd przez indukcję wynika, że $|S_{i_1}\Delta\ldots\Delta S_{i_k}| = 0$ dla $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant 2008$. Wszystkich zbiorów postaci $S_{i_1}\Delta\ldots\Delta S_{i_k}$ jest 2^{2008}, są to zbiory: $\emptyset$, S_1, S_2, ..., S_{2008}, $S_1\Delta S_2$, $S_1\Delta S_3$, ..., $S_{2007}\Delta S_{2008}$, ..., $S_1\Delta S_2\Delta\ldots\Delta S_{2008}$. Liczba elementów każdego z nich jest parzysta, a takich podzbiorów zbiór $\{1, 2, \ldots, 2008\}$ ma 2^{2007}, skąd wniosek, że $S_{i_1}\Delta\ldots\Delta S_{i_k} = S_{i_{k+1}}\Delta\ldots\Delta S_{i_l}$ dla pewnych $i_1, \ldots, i_l$, bez straty ogólności parami różnych, bo jeśli $X\Delta Y = Y\Delta Z$, to $X = Z$. W takim razie $S_{i_1}\Delta\ldots\Delta S_{i_l} = \emptyset$. Rozpatrzmy przypadki:

Przypadek 1
l jest parzyste. Wtedy:

$$0 \equiv \langle S_{i_1}, \emptyset\rangle \equiv \langle S_{i_1}, \sum_{j=1}^{l} S_{i_j}\rangle \equiv \langle S_{i_1}, S_{i_1}\rangle + \sum_{j=2}^{l}\langle S_{i_1}, S_{i_j}\rangle \equiv \sum_{j=2}^{l}\langle S_{i_1}, S_{i_j}\rangle.$$

Ponieważ liczba składników (każdy równy 0 lub 1) po prawej stronie jest nieparzysta, więc co najmniej jeden z nich jest zerem, co daje tezę.

Przypadek 2
l jest nieparzyste. Niech $i \in \{1, 2, \ldots, 2008\} \setminus \{i_1, \ldots, i_l\} \neq \emptyset$, bo l jest nieparzyste. Wtedy:

$$0 \equiv \langle S_i, \emptyset\rangle \equiv \langle S_i, \sum_{j=1}^{l} S_{i_j}\rangle \equiv \sum_{j=1}^{l}\langle S_i, S_{i_j}\rangle.$$

Ponieważ liczba składników po prawej stronie jest nieparzysta, więc co najmniej jeden z nich jest zerem, co daje tezę.

10. W nierównoramiennym trójkącie ABC punkty M_a, M_b, M_c oznaczają odpowiednio środki boków BC, CA, AB. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a punkty A', B', C' są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z bokami BC, CA, AB. Prosta k jest symetryczna do prostej BC względem prostej AI, a prosta l jest prostopadła do prostej IM_a i przechodzi przez punkt A'. Prosta k przecina prostą l w punkcie X_a. Punkty X_b i X_c definiujemy analogicznie. Wykazać, że punkty X_a, X_b, X_c leżą na jednej prostej, która jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Rozwiązanie

Wiadomo, że okrąg W wpisany w trójkąt ABC jest styczny wewnętrznie do okręgu F opisanego na trójkącie $M_aM_bM_c$, zwanego okręgiem Feuerbacha (np. S.I.Zetel, „*Geometria trójkąta*”, PZWS, Warszawa, 1964). Na okręgu Feuerbacha leżą też spodki wysokości trójkąta ABC oraz środki odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum, czyli punktem wspólnym trzech wysokości trójkąta. Dlatego często nazywany jest on okręgiem dziewięciu punktów. Wykażemy, że każdy z punktów X_a, X_b, X_c leży na wspólnej stycznej do tych dwóch okręgów. Wystarczy zająć się punktem X_a; dowód dla pozostałych punktów będzie analogiczny.

Skorzystamy z twierdzenia, które czytelnik z łatwością sam udowodni: *punkty $P \neq I$, $Q \neq I$, $R \neq I$ leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy proste ℓ_P, ℓ_Q, ℓ_R, które są obrazami w inwersji względem pewnego okręgu W o środku I okręgów o średnicach IP, IQ, IR przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe (te proste nazywane są biegunowymi punktów P, Q, R względem okręgu W).*

Z warunków zadania wynika, że prosta l jest obrazem w inwersji względem W okręgu o średnicy IM_a, a prosta k jest jest obrazem w inwersji względem W okręgu o średnicy IA'', gdzie A'' jest punktem styczności k do okręgu W (punkty A' i A'' są symetryczne względem prostej IM_a). Aby wykazać tezę, wystarczy dowieść, że prosta przechodząca przez punkty M_a i A'' przechodzi też przez punkt Z, w którym są styczne okręgi W i F. Rozważmy inwersję INV względem okręgu S_a o środku M_a i promieniu M_aA'. Ten okrąg inwersja INV przekształca na siebie. Okrąg F przechodzi przez środek inwersji INV, więc przekształca go ona na pewną prostą. Spodek H_a wysokości opuszczonej z punktu A leży na okręgu F. Wykażemy, że INV przekształca punkt H_a na punkt I_a, w którym przecinają się proste BC i AI. Mamy

$M_aH_a = |M_aC - H_aC| = |\frac{a}{2} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}| = |\frac{b^2-c^2}{2a}|,$

$M_aI_a = |M_aC - I_aC| = |\frac{a}{2} - \frac{ab}{b+c}| = |\frac{a(b-c)}{2(b+c)}|,$
$M_aA' = |M_aC - A'C| = |\frac{a}{2} - \frac{a+b-c}{2}| = |\frac{b-c}{2}|,$

więc $M_aH_a \cdot M_aI_a = M_aA'^2$, a to oznacza, że INV przekształca punkt H_a na punkt I_a. Teraz wykażemy, że INV przekształca okrąg F na prostą k. Kąt między okręgami W i S_a jest prosty, więc kąt między ich obrazami też jest prosty. INV oczywiście pozostawia punkty okręgu S_a na swych miejscach, w szczególności punkty wspólne okręgów S_a i W. Stąd wynika, że okrąg W jest przekształcany na siebie. Okręgi F i W są styczne, więc ich obrazy też są styczne w obrazie punktu Z. Wynika stąd, że obrazem okręgu F przechodzącego przez środek inwersji INV jest prosta styczna do okręgu W i to przechodząca przez punkt I_a, ale nie przechodząca przez środek inwersji M_a. Wobec tego nie jest to prosta BC. Do wyboru zostaje prosta k. Jest ona styczna do okręgu W w obrazie punktu Z a poza tym w punkcie A''. Wobec tego obrazem punktu Z jest punkt A'', ale z tego wynika, że punkty M_a (środek inwersji INV), Z i punkt A'' leżą na jednej prostej. Tego nam brakowało do zakończenia dowodu.

11. Udowodnić, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leqslant 3.$$

Rozwiązanie

Jak łatwo zauważyć daną nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{c+a}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{2a}{(a+b)(c+a)^2}} + \frac{a+b}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{2b}{(b+c)(a+b)^2}} +$$
$$+\frac{b+c}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{2c}{(c+a)(b+c)^2}} \leqslant \frac{3}{2(a+b+c)}.$$

Z nierówności Jensena dla wklęsłej funkcji $\sqrt{x}$ oraz wag $\frac{c+a}{2(a+b+c)}$, $\frac{a+b}{2(a+b+c)}$, $\frac{b+c}{2(a+b+c)}$ otrzymujemy

$$\frac{c+a}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{2a}{(a+b)(c+a)^2}} + \frac{a+b}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{2b}{(b+c)(a+b)^2}} +$$

$$+\frac{b+c}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{2c}{(c+a)(b+c)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a}{(a+b)(c+a)}+\frac{b}{(b+c)(a+b)}+\frac{c}{(c+a)(b+c)}\right)}.$$

Pozostaje więc wykazać, że otrzymane wyrażenie jest niewiększe niż $\frac{3}{2(a+b+c)}$. Po podniesieniu do kwadratu i pomnożeniu przez $4(a+b+c)^2$ widzimy, że jest to równoważne nierówności

$$4(a+b+c)\left(\frac{a}{(a+b)(c+a)}+\frac{b}{(b+c)(a+b)}+\frac{c}{(c+a)(b+c)}\right) \leqslant 9,$$

a po pomnożeniu obu stron nierówności przez $(a+b)(b+c)(c+a)$ i otworzeniu wszystkich nawiasów

$$8(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+24abc$$

$$\leqslant 9(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+18abc$$

i po zredukowaniu wyrazów podobnych

$$6abc \leqslant a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2,$$

co jest natychmiastowym wnioskiem z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną. Kończy to dowód.

12. Na płaszczyźnie dany jest n-kąt wypukły P. Trójkąt utworzony z trzech różnych wierzchołków P nazywamy *dobrym* jeśli wszystkie jego boki mają długość 1. Dowieść, że jest nie więcej niż $\frac{2}{3}n$ dobrych trójkątów.

Rozwiązanie

Rozważmy wszystkie dobre trójkąty zawierające ustalony wierzchołek A. Pozostałe dwa wierzchołki takiego trójkąta muszą leżeć na okręgu ω_A o środku w A i promieniu równym 1. Ponieważ wielokąt P jest wypukły, to wierzchołki te leżą na łuku o kącie mniejszym niż $180°$. Niech L_A, R_A będzie najkrótszym takim łukiem, przy czym L_A jest wcześniej niż R_A w porządku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Zarówno AL_A, jak i AR_A są bokami pewnych dobrych trójkątów. Powiemy, że dobry trójkąt z bokiem AL_A jest *przypisany antyzegarowo* do A, dobry trójkąt z bokiem AR_A jest zaś *przypisany zegarowo* do A. Jeżeli jest to ten sam trójkąt, to mówimy, że jest on dwukrotnie przypisany do A. Zatem dla każdego wierzchołka są dokładnie dwa przypisania, więc wszystkich przypisań jest $2n$.

Rozważmy pewien dobry trójkąt ABC, gdzie wierzchołki A,B oraz C leżą w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara. Udowodnimy, że ABC jest przypisany do swoich wierzchołków co najmniej 3 razy. Wówczas, jeśli oznaczymy liczbę dobrych trójkątów przez t, to liczba równa $2n$ spełnia nierówność $2n \geqslant 3t$, czyli $t \leqslant \frac{2n}{3}$, co daje tezę zadania.

Udowodnimy konkretnie, że ABC jest przypisany zegarowo do B lub antyzegarowo do C. Jeżeli to wykażemy, to analogicznie dostaniemy, że ABC jest przypisany zgodnie ze wskazówkami zegara do C lub przeciwnie do A oraz zgodnie do A lub przeciwnie do B, czyli w ogólności jest minimalnie 3 razy gdziekolwiek przypisany, co daje tezę.

Przypuśćmy przeciwnie, że ABC ani nie jest przypisany zegarowo do B ani antyzegarowo do C, czyli $R_B \neq A$ oraz $L_C \neq A$. Oznaczmy przez A', B' oraz C' przecięcia okręgów ω_A, ω_B oraz ω_C różne od A, B i C. Niech $CL_CL'_C$ będzie dobrym trójkątem zawierającym bok CL_C. Zauważmy, że kąt L_CCA ma miarę mniejszą niż $120°$ (bo w przeciwnym razie kąt L_CCB byłby większy niż $180°$), czyli jeden z punktów L_C oraz L'_C należy do łuku $B'A$ okręgu ω_C, oznaczmy ten punkt przez X. Jeżeli $L_C = B'$ oraz $L'_C = A$, to niech $X = B'$.

Analogicznie zauważmy, że jeden z punktów R_B oraz R'_B leży na łuku $C'A$, oznaczmy ten punkt przez Y, $Y \neq A$. Wówczas kąty XAY, YAB, BAC oraz CAX są mniejsze niż $180°$, co znaczy, że punkt A leży wewnątrz czworokąta $BCXY$, co jest sprzeczne z wypukłością P, gdyż A, B, C, X oraz Y są pięcioma wierzchołkami P. Tym samym otrzymujemy tezę.

13. Ciąg (e_n) definiujemy następująco. $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, a wyraz e_{n+1} jest najmniejszą liczbą, która dotychczas nie wystąpiła w ciągu i $NWD(e_n, e_{n+1}) > 1$. Dowieść, że dla każdej odpowiednio dużej liczby pierwszej p pierwszym wyrazem ciągu (e_n) podzielnym przez p jest $2p$.

Rozwiązanie

Niech e_{k_p} będzie pierwszym wyrazem ciągu (e_n) podzielnym przez p.

Niech $A(p)$ będzie liczbą takich liczb $i < k_p$, że $e_i < 2p$ i $e_{i+1} \geqslant 2p$. Dla każdej takiej pary istnieje liczba pierwsza q_i taka, że $q_i | NWD(e_i, e_{i+1})$. Oznacza to w szczególności, że wszystkie liczby podzielne przez q_i mniejsze od $2p$ już wystąpiły w ciągu, czyli e_i jest ostatnim wyrazem ciągu (e_n) podzielnym przez q_i mniejszym od $2p$. W takim razie $A(p)$ nie przekracza liczby liczb pierwszych mniejszych od $2p$: $A(p) \leqslant \pi(2p)$. Niech teraz $B(p)$ będzie liczbą takich liczb $i < k_p$ takich, że $e_i \geqslant 2p$ i $e_{i+1} < 2p$. Przypuśćmy, że $e_{k_p} = kp > 2p$. Rozważmy liczby postaci $2kl$, gdzie $\frac{p}{k} < l < \frac{p}{2}$. Po pierwsze, wszystkie musiały wystąpić w ciągu z indeksami mniejszymi od k_p. W przeciwnym razie z tego, że $p \nmid e_{k_p-1}$ i $NWD(e_{k_p-1}, e_{k_p}) > 1$ mamy $NWD(e_{k_p-1}, k) > 1$ i wyraz postaci $2kl$ powinien pojawić się zamiast kp jako mniejszy. Ponieważ do tej pory $2p$ nie wystąpiło w ciągu, więc po wyrazie postaci $2kl$ musi pojawić się wyraz mniejszy od $2p$. Z tych rozważań wynika, że $B(p) \geqslant \frac{p-1}{2} - \frac{p}{k} \geqslant \frac{p}{6} - \frac{1}{2} > \frac{p}{2008}$ dla $p > 3$. Z drugiej strony $A(p) - B(p) \geqslant 0$, bo $e_1 < 2p$ i $e_{k_p} \geqslant 2p$. Mamy w takim razie:

$$0 \leqslant \frac{A(p) - B(p)}{\frac{2p}{\ln(2p)}} \leqslant \frac{\pi(2p)}{\frac{2p}{\ln(2p)}} - \frac{\ln(2p)}{1004}.$$

Przy $p \to \infty$ prawa strona dąży do $-\infty$, bo $\frac{\pi(2p)}{\frac{2p}{\ln(2p)}} \to 1$. Stąd wniosek, że dla dostatecznie dużych p nierówność nie zachodzi i $e_{k_p} = 2p$.

Uwaga. W rozwiązaniu wykorzystane jest twierdzenie, którego „elementarne” dowody wykraczają dosyć istotnie poza to, czego można się dowiedzieć na zajęciach na studiach ma tematycznych na pierwszym roku. Chodzi o równość $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln(n)}} = 1$. *Jednak w tym rozwiązaniu nie potrzebujemy aż tak silnego twierdzenia. Wystarczy na przykład stwierdzić, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n spełniona jest nierówność* $\frac{\pi(n)}{n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{22}{23} = \frac{110592}{676039} < \frac{1}{6}$, *bo dla dostatecznie dużych liczb pierwszych p, np. $p > 400$ zachodzi nierówność* $\frac{p}{6} - \frac{1}{2} > \frac{110592}{676039} \cdot p$. *Dowód tego, że* $\frac{\pi(n)}{n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{22}{23}$ *wynika natychmiast z tego, że jeśli liczba n jest wielokrotnością iloczynu* $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$, *to tych liczb* **niepodzielnych** *przez żadną z liczb* 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, *które nie są większe niż n jest* $\frac{\pi(n)}{n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{22}{23}$, *zatem liczb pierwszych mniejszych od n jest co najwyżej* $9 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{22}{23} \cdot n$

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 12 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy.
3. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

4. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą.
5. Drużyna wywoływana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

6. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
7. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
8. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablica swego zastępcę.
9. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoja drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

10. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolna liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania.Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejna osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach 7 i 8. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.

11. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referująca wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieje na poprawność i zbliża się do końca.

12. Po oznajmieniu przez referującego, ze referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie **referujący** odpowiada na te zastrzeżenia.

13. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach 6-11.

14. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusje i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

15. Drużyna wywołująca staje się drużyna referująca i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach 6-11.

16. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

17. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

18. Przewodniczący Jury może nałożyć kare punktowa na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

19. Mecz wygrywa drużyna, która zdobędzie więcej punktów.

20. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.