Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 25 maja - 4 czerwca 2009

(wydanie pierwsze)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 25 maja - 4 czerwca w Zwardoniu, w pensjonacie Źgoda". Kadrę obozu stanowili: Maciej Czarnecki, Jacek Jendrej, Tomasz Kobos, Przemysław Mazur oraz Jakub Onufry Wojtaszczyk.

W dniach 26, 27, 29 i 30 maja oraz 1 i 2 czerwca odbyły się zawody indywidualne, dnia 28 maja miały miejsce zaody drużynowe, a 3 czerwca rozegrany został mecz matematyczny (regulamin meczu znajduje sie na końcu tego zeszytu).

Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy byli podzieleni na dwie grupy: grupę starszą utworzyli reprezentanci Polski na 50. Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną oraz zawodnik rezerwowy, zaś grupę młodszą — pozostali uczestnicy. Zawodnicy z grupy starszej mieli 4,5 godziny na rozwiązanie 3 zadań, a z młodszej — tyle samo czasu i 4 zadania. Zawody drużynowe trwały od rana do wieczora, a mecz matematyczny — od wieczora do popołudnia następnego dnia.

W ramach zawodów indywidualnych grupa młodsza mogła uzyskać 144 punkty, zaś młodsza — 108 punktów. Trzy najlepsze wyniki z każdej grupy to: 84 punkty, 72 punkty i 71 punktów (grupa młodsza) oraz 80 punktów, 64 punkty i 62 punkty (grupa starsza). W tym miejscu zaznaczmy, że wyników uzyskanych w różnych grupach nie należy porównywać, gdyż uczestnicy rozwiązywali różne zadania. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie.

28 maja została zorganizowana wycieczka pociągiem do Żyliny na Słowacji. 31 maja planowana była piesza wycieczka na Wielką Raczę, ale nie doszła do skutku z powodu niesprzyjających warunków atmosterycznych (deszcz).

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu oraz szkice ich rozwiązań. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych Olimpiady Matematycznej znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`

Spis treści

Treści zadań

Zawody indywidualne – grupa młodsza:

Zadanie 1.

Na każdym polu ustalonej przekątnej szachownicy $n \times n$ stoi pionek. Ruch polega na wybraniu dowolnych dwóch pionków nie znajdujących się w dolnym wierszu i przesunięciu każdego z nich o jedno pole w dół. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb naturalnych n istnieje skończony ciąg ruchów przesuwający wszystkie pionki do dolnego wiersza.

Zadanie 2.

Dana są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $b_1, b_2, \ldots, b_p$ oraz liczba pierwsza $p > 2$. Wykazać, że istnieją $1 \leqslant i < j \leqslant p$ takie, że $p | a_i - a_j$ lub $p | b_i - b_j$ lub $p | a_i b_i - a_j b_j$.

Zadanie 3.

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2.$$

Udowodnić, że zachodzi nierówność $ab + bc + ca \leqslant \frac{3}{2}$.

Zadanie 4.

Okręgi ω_1, ω_2 i ω_3 są styczne wewnętrznie do większego okręgu ω odpowiednio w parami różnych punktach A, B, C. Prosta k jest wspólną styczną zewnętrzną okręgów ω_1 i ω_2, prosta l — okręgów ω_1 i ω_3, zaś prosta m — okręgów ω_2 i ω_3. Proste k i l przecinają się w punkcie X, k i m — w punkcie Y, zaś l i m — w punkcie Z. Wykazać, że proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Zadanie 5.

Wyznaczyć wszystkie funkcje f prowadzące ze zbioru $\mathbb{Q}_+$ liczb wymiernych dodatnich w zbiór $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, które spełniają następujące warunki:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \ x \in \mathbb{Q}_+,$$

$$(x+1)f(x-1) = xf(x), \ x \in \mathbb{Q}_+, \ x > 1.$$

Zadanie 6.

Czworokąt $ABCD$, w którym $AB > CD$ i $BC > AD$, jest wpisany w okrąg. Punkty X i Y leżą na bokach AB i BC, przy czym $AX = CD$ i $CY = AD$. Punkt M jest środkiem odcinka XY. Wykazać, że $\sphericalangle AMC = 90^\circ$.

Zadanie 7.

Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, dla której z każdego zbioru n kwadratów liczb całkowitych niepodzielnych przez p można wybrać niepusty podzbiór o iloczynie elementów dającym resztę 1 z dzielenia przez p.

Zadanie 8.

Dana jest liczba niewymierna α. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych (p, q) takich, że $q > 0$ oraz zachodzi nierówność:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Zadanie 9.

Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ i liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające warunek

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

Udowodnić, że $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leqslant 4\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Zadanie 10.

Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne wewnętrznie w punkcie P. Punkty A i B leżą na ich wspólnej stycznej, przy czym punkt P leży między punktami A i B. Punkty C i D są odpowiednio przecięciem stycznej z A do ω_1 ze styczną z B do ω_2 oraz przecięciem stycznej z A do ω_2 ze styczną z B do ω_1. Wykazać, że $CA + CB = DA + DB$.

Zadanie 11.

Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieją parami różne zbiory $S_1, S_2, \ldots, S_n$ takie, że $|S_i \cup S_j| \leqslant 2004$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ oraz $S_i \cup S_j \cup S_k = \{1, 2, \ldots, 2008\}$ dla $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

Zadanie 12.

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par (a, b) liczb naturalnych takich, że $a \neq b$, $a, b > 1$ oraz $b^b + a | a^a + b$.

Zadanie 13.

Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

Zadanie 14.

Dana jest liczba naturalna k. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele kwadratów liczb naturalnych postaci $n2^k - 7$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

Zadanie 15.

S jest zbiorem trzyelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ o tej własności, że jeśli $A, B \in S$ oraz $A \neq B$, to $|A \cap B| \leqslant 1$. Niech $f(n)$ oznacza maksymalną możliwą ilość zbiorów w S. Wykazać nierówności

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} \leqslant f(n) \leqslant \frac{n(n-1)}{6}.$$

Zadanie 16.

Udowodnić, że wielomian $x^{2009} - x + 3$ jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 17.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których $n^{2009} + n + 1$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 18.

Liczby rzeczywiste $x,\ y,\ z$ spełniają warunki:

$$x + y + z = 9,\ x^2 + y^2 + z^2 = 33.$$

Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjmować liczba xyz.

Zadanie 19.

W państwie jest 2009 miast. Wiadomo, że z każdego miasta wychodzą co najmniej 93 drogi i że z każdego miasta da się dojechać do każdego innego (niekoniecznie bezpośrednio). Wykazać, że z każdego miasta da się dojechać do każdego innego używając co najwyżej 62 różnych dróg.

Zadanie 20.

Punkty A, B, C, A', B', C' leżą na jednym okręgu, przy czym prosta AA' jest prostopadła do BC, prosta BB' jest prostopadła do CA, a prosta CC' jest prostopadła do AB. Punkt D leży na tym samym okręgu, a punkty A'', B'' oraz C'' są odpowiednio przecięciem prostych DA' z BC, DB' z CA oraz DC' z AB. Udowodnić, że punkty A'', B'', C'' oraz ortocentrum trójkąta ABC leżą na jednej prostej.

Zadanie 21.

Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne $a, b > 0$, dla których $a^b b^a = 1$.

Zadanie 22.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których n–kąt foremny jest przekrojem ośmiościanu foremnego pewną płaszczyzną.

Zadanie 23.

Skoczek szachowy stoi w lewym górnym rogu szachownicy o wymiarach $4 \times n$. Rozstrzygnąć dla jakich n skoczek może poruszać się tak, by na każde pole szachownicy wejść dokładnie raz i zakończyć w lewym górnym rogu.

Zadanie 24.

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że funkcja $f(x) = x^n$ jest sumą n funkcji okresowych.

Zawody indywidualne – grupa starsza:

Zawody drużynowe:

Zadanie 1.

Liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Udowodnić nierówność

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots \sqrt{x_n} \geqslant (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

Zadanie 2.

W trójkącie nierównoramiennym ABC środkowa AM przecina okrąg wpisany w punktach X i Y. Na okręgu wybrano takie punkty P, Q, że proste PX, QY i BC są równoległe. Proste AP i AQ przecinają prostą BC odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $BK = CL$.

Zadanie 3.

(n,k)-turniejem nazywamy turniej składający się z k rund, w którym bierze udział n graczy, oraz spełniający warunki:

(i) Każdy gracz gra w każdej rundzie i każdych dwóch graczy spotyka się co najwyżej raz

(ii) Jeśli gracz A spotyka gracza B w rundzie i, gracz C spotyka gracza D w rundzie i, gracz A spotyka gracza C w rundzie j, to gracz B spotyka gracza D w rundzie j.

Wyznaczyć wszystkie pary (n,k) liczb naturalnych, dla których istnieje (n,k)-turniej.

Zadanie 4.

Dany jest nierozkładalny i niestały wielomian P o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że dla każdego $r \in \mathbb{N}$ istnieje $k \in \mathbb{Z}$ o tej własności, że istnieją różne liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_r$ takie, że p_i dzieli $P(k)$, ale p_i^2 nie dzieli $P(k)$ dla $i = 1, 2, \ldots, r$.

Uwaga: Wielomian P nazywamy nierozkładalnym, jeśli dla dowolnych wielomianów Q, R o współczynnikach całkowitych zachodzi implikacja: jeżeli $P = QR$, to $Q \equiv \pm 1$ lub $R \equiv \pm 1$.

Mecz matematyczny:

Zadanie 1.

Odejmowacz i Dodawacz grają w następującą grę: dany jest ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Ruch Dodawacza polega na dodaniu do pierwszej liczby w ciągu jednej z pozostałych liczb i przestawieniu jej na koniec. Ruch Odejmowacza polega na odjęciu od pierwszej liczby jednej z pozostałych liczb tak, by otrzymany wynik był nieujemny i przestawieniu otrzymanej liczby na koniec. Jeżeli Odejmowacz nie może wykonać ruchu, przestawia liczbę na koniec bez zmieniania jej.

Odejmowacz wygrywa, jeżeli po jednym z jego ruchów w ciągu występuje liczba 0. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n \geqslant 2$ i wszystkie ciągi

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, dla których Odejmowacz ma strategię wygrywającą.

Zadanie 2.

Dany jest zbiór $n \geqslant 3$ punktów płaszczyzny S, z których żadne dwa nie są współliniowe. Wykazać, że istnieje taki zbiór T składający się z $2n - 5$ punktów płaszczyzny, że każdy trójkąt wyznaczony przez 3 różne punkty zbioru S zawiera punkt ze zbioru T.

Zadanie 3.

Dany jest graf G o n wierzchołkach i m krawędziach. Podzbiór wierzchołków grafu G nazywamy *niezależnym* jeśli żadne dwa wierzchołki tego podzbioru nie są połączone krawędzią. Dowieść, że w zbiorze wierzchołków grafu G istnieje zbiór niezależny o mocy nie mniejszej niż $\dfrac{n^2}{2m+n}$.

Zadanie 4.

Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, które spełniają warunek $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$, dla wszystkich $x, y > 0$.

Zadanie 5.

Dany jest wielomian P o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że jeśli

$$P(x) = (U_1(x))^2 + (U_2(x))^2 + \ldots + (U_k(x))^2$$

dla pewnego całkowitego dodatniego k i wielomianów rzeczywistych $U_1, \ldots, U_k$, to istnieje takie całkowite dodatnie m i wielomiany rzeczywiste $V_1, \ldots, V_m$, że

$$(P(x))^2 = (V_1(x))^4 + (V_2(x))^4 + \ldots + (V_m(x))^4.$$

Zadanie 6.

Dowieść, że jeśli a, b, c są liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, to zachodzi nierówność

$$2(a+b+c) - abc \leqslant 10.$$

Zadanie 7.

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości z A, a E — punktem przecięcia prostych AO i BC. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B i C przecinają się w punkcie T, a prosta AT przecina ten okrąg w punkcie F. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie DEF jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 8.

Okrąg ω jest okręgiem wpisanym w trójkąt ABC, stycznym do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt T jest drugim punktem przecięcia prostej AD z ω, a punkty M, N — odpowiednio drugimi punktami przecięcia prostych BT, CT z ω. Okręgi ω_1, ω_2 są styczne do ω w punktach T, D i przecinają się w punktach X, Y. Dowieść, że punkty X, Y, M, N leżą na jednym okręgu lub na jednej prostej.

Zadanie 9.

Punkty O, I są odpowiednio środkami okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC. Punkt D jest punktem styczności okręgu wpisanego z bokiem BC, a punkty E i F są odpowiednio punktami przecięcia prostych AI i AO z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Proste FI i ED przecinają się w punkcie S, proste SC i BE — w M, a proste AC i BF — w N. Udowodnić, że punkty M, I, N są współliniowe.

Zadanie 10.

Dany jest skończony zbiór liczb pierwszych S. Dowieść, że istnieje liczba całkowita dodatnia n, która jest przedstawialna w postaci $a^p + b^p$ dla każdej liczby pierwszej $p \in S$ (a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi) oraz nie jest przedstawialna w postaci $a^p + b^p$ dla wszystkich liczb pierwszych $p \notin S$.

Zadanie 11.

Wielomian P o współczynnikach całkowitych posiada pierwiastek rzeczywisty. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p postaci $4k+3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, dla których istnieje liczba naturalna n taka, że $p|P(n)$.

Zadanie 12.

Dane są względnie pierwsze liczby naturalne $a, b > 1$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p o tej własności, że najwyższa potęga liczby p dzieląca liczbę $a^{p-1} - b^{p-1}$ jest nieparzysta.

Rozwiązania

Zawody indywidualne – grupa młodsza:

Zadanie 1.

Na każdym polu ustalonej przekątnej szachownicy $n \times n$ stoi pionek. Ruch polega na wybraniu dowolnych dwóch pionków nie znajdujących się w dolnym wierszu i przesunięciu każdego z nich o jedno pole w dół. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb naturalnych n istnieje skończony ciąg ruchów przesuwający wszystkie pionki do dolnego wiersza.

Rozwiązanie:

Ponumerujmy wiersze i kolumny liczbami $0, 1, \ldots n-1$. Wówczas pionek stojący w kolumnie j musi wykonać j posunięć w dół. Każdy ruch powoduje dwa takie posunięcia, więc ogólna ich liczba musi być parzysta: $2|0+1+\ldots(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ skąd $n = 4k$ lub $n = 4k+1$ dla pewnej liczby całkowitej k. Udowodnimy teraz indukcyjnie, że dla wszystkich n tej postaci istnieje ciąg ruchów spełniający założenia. Jest to oczywiste dla $n = 0$ i $n = 1$ (nie wykonujemy żadnego ruchu). Dla $n \geqslant 4$ rozważmy nasępujący ciąg ruchów:

$$(n-1, n-3), \underbrace{(n-1, n-2), \ldots (n-1, n-2)}_{n-2 \text{ razy}}, \underbrace{(n-3, n-4), \ldots (n-3, n-4)}_{n-4 \text{ razy}}.$$

Powoduje on przesunięcie czterech ostatnich pionków do dolnego wiersza. Korzystając z założenia indukcyjnego przesuwamy pozostałe $n-4$ pionki. W ten sposób wszystkie pionki znajdują się w dolnym wierszu.

Zadanie 2.

Dana są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $b_1, b_2, \ldots, b_p$ oraz liczba pierwsza $p > 2$. Wykazać, że istnieją $1 \leqslant i < j \leqslant p$ takie, że $p|a_i - a_j$ lub $p|b_i - b_j$ lub $p|a_ib_i - a_jb_j$.

Rozwiązanie:

Załóżmy dla dowodu nie wprost, że żądane i, j nie istnieją. Wówczas ciągi $(a_1, \ldots, a_p)$, $(b_1, \ldots, b_p)$, $(a_1b_1, \ldots a_pb_p)$ rozpatrywane $\pmod p$ są permutacjami ciągu $(0, 1, \ldots, p-1)$. Bez straty ogólności przypuśćmy, że $p|a_p$. Wówczas musi zachodzić $p|b_p$, bo w przeciwnym razie dwie spośród liczb a_ib_i dzieliłyby się przez p. Wobec tego ciągi $(a_1, \ldots, a_{p-1})$, $(b_1, \ldots, b_{p-1})$, $(a_1b_1, \ldots a_{p-1}b_{p-1})$ są permutacjami ciągu $(1, 2, \ldots, p-1)$. Stąd i z twierdzenia Wilsona otrzymujemy sprzeczność:

$$-1 \equiv \prod_{i=1}^{p-1} i \equiv \prod_{i=1}^{p-1} a_i b_i = \prod_{i=1}^{p-1} a_i \prod_{i=1}^{p-1} b_i \equiv \prod_{i=1}^{p-1} i \prod_{i=1}^{p-1} i \equiv (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Zadanie 3.

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2.$$

Udowodnić, że zachodzi nierówność $ab + bc + ca \leqslant \frac{3}{2}$.

Rozwiązanie:

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza otrzymujemy:

$$1 = \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3},$$

czyli równoważnie $(a+b+c)^2 \leqslant a^2 + b^3 + c^2 + 3$, co po wymnożeniu lewej strony daje dokładnie tezę zadania.

Zadanie 4.

Okręgi ω_1, ω_2 i ω_3 są styczne wewnętrznie do większego okręgu ω odpowiednio w parami różnych punktach A, B, C. Prosta k jest wspólną styczną zewnętrzną okręgów ω_1 i ω_2, prosta l — okręgów ω_1 i ω_3, zaś prosta m — okręgów ω_2 i ω_3. Proste k i l przecinają się w punkcie X, k i m — w punkcie Y, zaś l i m — w punkcie Z. Wykazać, że proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Rozwiązanie:

Jeżeli proste k, l i m przecinają się w jednym punkcie, to nie ma czego dowodzić. Przypuśćmy zatem, że tak nie jest. Założmy najpierw, że okręgi ω_1, ω_2, ω_3 leżą wewnątrz trójkąta XYZ. Niech γ będzie okręgiem wpisanym w trójkąt XYZ. Niech J_A będzie jednokładnością o środku A i skali dodatniej o skali dodatniej przekształcającą ω na ω_1, a J_X — jednokładnością o środku X i skali dodatniej przekształcającą ω_1 na γ. Wówczas ich złożenie jest jednokładnością o skali dodatniej lub translacją przekształcającą ω na γ. W pierwszym przypadku prosta AX przechodzi przez środek jednokładności, a w drugim jest równoległa do wektora translacji. Analogiczne rozumowania dowodzą, że to samo można powiedzieć o prostych BY i CZ, skąd wynika teza.

Pozostałe siedem przypadków dotyczące położenia prostych k, l, m rozpatruje się tak samo, z tą tylko różnicą, że być może γ jest okręgiem dopisanym.

Zadanie 5.

Wyznaczyć wszystkie funkcje f prowadzące ze zbioru $\mathbb{Q}_+$ liczb wymiernych dodatnich w zbiór $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, które spełniają następujące warunki:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \ x \in \mathbb{Q}_+,$$

$$(x+1)f(x-1) = xf(x), \ x \in \mathbb{Q}_+, \ x > 1.$$

Rozwiązanie

Sprawdzimy, że wszystkie takie funkcje są postaci $f(\frac{p}{q}) = a \cdot (p+q)$, gdzie $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym i $a \in \mathbb{Z}$. Z drugiej równości dla $x = 2$ otrzymujemy $3f(1) = 2f(2)$, więc $f(1)$ jest liczbą parzystą. Niech $a = \frac{f(1)}{2}$. Zastosujemy indukcję względem $p+q$. Załóżmy, że dla $p+q < k$ mamy $f(\frac{p}{q}) = a\cdot(p+q)$ i $p_0 + q_0 = k$. Możemy założyć, że $p_0 > q_0$, gdyż na mocy pierwszej równości z treści zadania $f(\frac{p_0}{q_0}) = f(\frac{q_0}{p_0})$. Na mocy drugiej równości dla $x = \frac{p_0}{q_0}$ i założenia indukcyjnego dla $p = p_0 - q_0, q = q_0$ (wtedy $p + q = p_0 < k$) mamy $f(\frac{p_0}{q_0}) = f(\frac{p_0 - q_0}{q_0}) \cdot \frac{p_0+q_0}{p_0} = p_0 \cdot \frac{p_0+q_0}{p_0} = p_0 + q_0$.

Zadanie 6.

Czworokąt $ABCD$, w którym $AB > CD$ i $BC > AD$, jest wpisany w okrąg. Punkty X i Y leżą na bokach AB i BC, przy czym $AX = CD$ i $CY = AD$. Punkt M jest środkiem odcinka XY. Wykazać, że $\sphericalangle AMC = 90^\circ$.

Rozwiązanie

Niech A' będzie punktem symetrycznym do punktu A względem M. Wówczas punkt M jest wspólnym środkiem odcinków AA' i XY, więc czworokąt $AXA'Y$ jest równoległobokiem. Mamy równości: $A'Y = AX = CD$, $CY = AD$ oraz $\sphericalangle CYA' = 180^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$, więc trójkąty $A'YC$ i ADC są przystające. Wobec tego $AC = A'C$ i w trójkącie równoramiennym $AA'C$ środkowa AM pokrywa się z wysokością, czyli $AM \perp CM$.

Zadanie 7.

Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, dla której z każdego zbioru n kwadratów liczb całkowitych niepodzielnych przez p można wybrać niepusty podzbiór o iloczynie elementów dającym resztę 1 z dzielenia przez p.

Rozwiązanie

Wykażemy, że $n = \frac{p-1}{2}$. Wiadomo, że istnieje generator g modulo p, tzn. taka reszta g, że najmniejszą taką liczbą całkowitą dodatnią k, że $g^k \equiv 1 \pmod p$ jest $k = p-1$, równoważnie- liczby $g^0, g^1, \ldots, g^{p-2}$ dają wszystkie możliwe niezerowe reszty z dzielenia przez p.

Biorąc zbiór $\{g^2, g^2+p, \ldots, g^2+np\}$ dla $n < \frac{p-1}{2}$ widzimy, że nie ma on żądanej własności, gdyż iloczyny jego niepustych podzbiorów przystają do g^{2k} modulo p dla pewnego $0 < k < \frac{p-1}{2}$, czyli nie przystają do 1. Stąd $n \geqslant \frac{p-1}{2}$.

Dla dowodu drugiej nierówności weźmy dowolny zbiór $\frac{p-1}{2}$ kwadratów liczb całkowitych niepodzielnych przez p, konkretnie $\{a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}^2\}$. Tak jak poprzednio niech g oznacza generator modulo p, wówczas istnieją takie liczby $0 \leqslant \alpha_i < p-1$, że $g^{\alpha_i} \equiv a_i \pmod p$ dla $i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Wówczas branie iloczynu liczb a_i^2 modulo p odpowiada sumowaniu liczb $2\alpha_i$ modulo $p-1$, tzn. chcemy wykazać, że istnieją takie liczby $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$, że $p-1 | 2(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_k})$, tzn. $\frac{p-1}{2} | \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_k}$.

Rozważmy liczby $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\frac{p-1}{2}}$. Jest ich $\frac{p-1}{2}$. Jeśli pewna z nich daje resztę 0 to znaleźliśmy szukany podzbiór. Jeśli nie to pewne dwie z wypisanych liczb muszą dawać tą samą resztę modulo $\frac{p-1}{2}$ i wówczas ich różnica jest podzielna przez $\frac{p-1}{2}$, a zatem i w tym wypadku znaleźliśmy szukany podzbiór.

Zadanie 8.

Dana jest liczba niewymierna α. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych (p, q) takich, że $q > 0$ oraz zachodzi nierówność:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Rozwiązanie

$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \Leftrightarrow |q\alpha - p| < \frac{1}{q}$. Wykażemy, że dla każdego całkowitego dodatniego N istnieje takie p oraz $q \leqslant N$, że

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{q}$$

Otrzymamy wtedy nieskończenie wiele par (p, q), bo w przeciwnym wypadku dla pewnej pary (p_0, q_0) $|q_0\alpha - p_0|$ byłoby dowolnie małe, co przeczy niewymierności liczby α.

Rozważmy ciąg $(q\alpha - \lfloor q\alpha \rfloor), q \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Wszystkie wyrazy tego ciągu należą do przedziału $[0; 1)$ i jest ich $N+1$, więc istnieją takie $0 \leqslant j < k \leqslant N$, że $|(k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor) - (j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor)| < \frac{1}{N}$); można zatem przyjąć $q = k - j$, $p = \lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$.

Zadanie 9.

Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ i liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające warunek

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

Udowodnić, że $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leqslant 4\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Rozwiązanie

Bez straty ogólności załóżmy, że a_1 jest maksymalną, zaś a_2 minimalną spośród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Z warunku danego w zadaniu oraz nierówności Cauchyego-Schwarza otrzymujemy

$$(n + \frac{1}{2})^2 \geqslant (a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n)(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} \ldots + \frac{1}{a_n}) \geqslant$$
$$\geqslant (t + \frac{1}{t} + 1 + \ldots + 1)^2 = (t + \frac{1}{t} + n - 2)^2,$$

gdzie $t = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$. Wynika stąd bezpośrednio, że $t + \frac{1}{t} \leqslant 2 + \frac{1}{2}$, a ponieważ funkcja $x + \frac{1}{x}$ jest monotoniczna dla $x > 1$ dostajemy, że $t \leqslant 2$, a zatem $a_1 \leqslant 4a_2$ i dowód jest zakończony.

Zadanie 10.

Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne wewnętrznie w punkcie P. Punkty A i B leżą na ich wspólnej stycznej, przy czym punkt P leży między punktami A i B. Punkty C i D są odpowiednio przecięciem stycznej z A do ω_1 ze styczną z B do ω_2 oraz przecięciem stycznej z A do ω_2 ze styczną z B do ω_1. Wykazać, że $CA + CB = DA + DB$.

Rozwiązanie

Załóżmy najpierw, że proste AC i BD przecinają się w punkcie Q, a proste AD i BC przecinają się w punkcie R, przy czym Q i R leżą po tej samej stronie prostej AB, co okręgi ω_1 i ω_2. Oznaczmy punkty styczności prostych AR, AQ, BQ, BR do odopwiednich okręgów przez K, L, M, N. Wiadomo, że odcinki styczne poprowadzone z punktu do okręgu są równe; mamy stąd: $AP = AK = AL$, $BP = BM = BN$, $QL = QM$, $RK = RN$. Dodając odpowiednie równości stronami dostajemy $AQ + BR = AR + BQ$, czyli w czworokąt wklęsły $AQBR$ da się wpisać okrąg. Ten sam okrąg jest oczywiście wpisany w czworokąt wypukły $CQDR$, czyli $CQ+DR = CR+DQ$. Odejmując to od poprzedniej równości dostajemy $AQ - CQ + BD = AC + BQ - DQ$, czyli $CA + CB = DA + DB$.

W przypadku, gdy któraś para prostych przecina się po drugiej stronie prostej AB bądź nie przecina się w ogóle postępujamy analogicznie: piszemy równości odcinków, które sumują się do wpisywalności okręgu w czworokąt (być może nieograniczony), a następnie zauważamy inny czworokąt, wktóry ten sam okrąg jest wpisany; zapisując odpowiednie równości po przekształceniach dostajemy tezę.

Zadanie 11.

Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieją parami różne zbiory $S_1, S_2, \dots, S_n$ takie, że $|S_i \cup S_j| \leqslant 2004$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ oraz $S_i \cup S_j \cup S_k = \{1, 2, \dots, 2008\}$ dla $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

Rozwiązanie

Załóżmy, że zbiory $S_1, S_2, \dots, S_n$ spełniają warunki dane w zadaniu. Niech $S = \{1, 2, \dots, 2008\}$ oraz $T_i = S \backslash S_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas założenia zadania równoważne są warunkom $|T_i \cap T_j| \geqslant 4$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ oraz $T_i \cap T_j \cap T_k = \emptyset$ dla $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$. Zauważmy, że każda para zbiorów (T_i, T_j) dla $1 \leqslant i < j \leqslant n$ wyznacza co najmniej 4 elementy, które nie należą do żadnego innego zbioru T_k, a oczywiście należą do S. Jako, że takich par jest $\binom{n}{2}$ otrzymujemy nierówność $4\binom{n}{2} \leqslant |S| = 2008$, a zatem $n^2 - n \leqslant 1004$ co jak nietrudno sprawdzić oznacza, że $n \leqslant 32$.

Aby przekonać się, że n może być równe 32, wystarczy zauważyć, że wybierając $\binom{32}{2}$ parami rozłącznych czteroelementowych podzbiorów S a następnie przyjmując $T_i = \bigcup_{j, j\neq i}(T_i \cap T_j)$ spełniamy wszystkie warunki zadania.

Zadanie 12.

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par (a, b) liczb naturalnych takich, że $a \neq b$, $a, b > 1$ oraz $b^b + a | a^a + b$.

Rozwiązanie

Zauważmy na początek, że $a \equiv -b^b \pmod{b^b+a}$, a zatem dana podzielność równoważna jest podzielności $b^b + a | (-b)^{ab} + b$

Niech $b \geqslant 2$ będzie dowolną liczbą całkowitą parzystą oraz niech $a = b^{b+2} - b^b + b$. Wówczas $b^b + a = b^{b+2} + b$ oraz $(-b)^{ab} = b^{ab}$, a zatem dana podzielność zapisuje się jako $b^{b+2} + b | b^{ab} + b$ lub po prostu $b^{b+1} + 1 | b^{ab-1} + 1$. Dla k nieparzystych mamy $b^{kl} + 1 = (b^k + 1)((b^k)^{l-1} - (b^k)^{l-2} + \ldots - b + 1)$, a zatem wystarczyło by wykazać, że $b + 1 | ab - 1$, gdyż $b + 1$ jest nieparzyste. Mamy jednak

$$ab-1 = b^{b+3} - b^{b+1} + b^2 - 1 = b^{b+1}(b^2-1) + (b^2-1) = (b-1)(b+1)(b^{b+1}+1).$$

Jako, że par liczb naturalnych danej postaci jest nieskończenie wiele, rozwiązanie zadania jest zakończone.

Zadanie 13.
Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

Rozwiązanie
Ponieważ $AB = 2R \sin \sphericalangle AEB$, gdzie R jest promieniem okręgu, oraz analogicznie dla pozostałych boków, więc teza jest równoważna trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy dla trójkąta ACE i prostych AD, CF, EB.

Zadanie 14.
Dana jest liczba naturalna k. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele kwadratów liczb naturalnych postaci $n2^k - 7$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie
Jasne jest, że dla danego k wystarczy udowodnić istnienie jednego kwadratu powyższej postaci, gdyż jeśli $a^2 = n2^k - 7$, to również $(a + 2^k)^2 = a^2 + 2^{k+1} + 2^{2k} = (n + 2 + 2^k)2^k - 7$.

Będziemy rozumować indukcyjnie. Dla $k = 1, 2, 3$ wystarczy wziąć odpowiednio $n = 4$, $n = 2$, $n = 1$. Załóżmy więc, że $k \geqslant 3$ i że istnieje takie a, że $a^2 = n2^k - 7$. Jeśli n jest parzyste, tzn. $n = 2m$, to wówczas $a^2 = m2^{k+1} - 7$ i nie ma czego dowodzić. Jeśli n jest nieparzyste to wówczas $n + 1 = 2m$ i zauważmy, że wtedy $(a + 2^{k-1})^2 = a^2 + 2^k + 2^{2k-2} = n2^k - 7 + 2^k + 2^{2k-2} = (m+2^{k-3})2^{k+1} - 7$. Jako, że $k \geqslant 3$ współczynnik przy 2^{k+1} jest liczbą całkowitą i dowód jest zakończony.

Zadanie 15.
S jest zbiorem trzyelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ o tej własności, że jeśli $A, B \in S$ oraz $A \neq B$, to $|A \cap B| \leqslant 1$. Niech $f(n)$ oznacza maksymalną możliwą ilość zbiorów w S. Wykazać nierówności

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} \leqslant f(n) \leqslant \frac{n(n-1)}{6}.$$

Rozwiązanie

1. Niech $S = \{T_1, T_2, \ldots, T_s\}$, gdzie T_k są różnymi trzyelementowymi podzbiorami zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Niech U będzie zbiorem tych dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, które są zawarte w pewnym zbiorze T_k. Na mocy założenia każdy element z U jest zawarty w dokładnie jednym zbiorze T_k. Z drugiej strony, każdy zbiór T_k zawiera dokładnie 3 elementy z U. Zatem

$$3\,|S| = |U| \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow s \leqslant \frac{n(n-1)}{6}.$$

2. Niech S_j, $0 \leqslant j < n$, będzie zbiorem wszystkich takich trójek $\{a, b, c\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, że $a + b + c \equiv j \pmod{n}$. Niech $\{a, b, c\}$ i $\{a, b, d\}$ będą różnymi elementami zbioru S_j. Wtedy

$$a + b + d \equiv j \equiv a + b + c \pmod{n} \Rightarrow d \equiv c \pmod{n} \Rightarrow d = c.$$

Zatem każdy zbiór S_j spełnia warunki z treści zadania. Zauważmy teraz, że $|S_0| + \ldots + |S_{n-1}| = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, gdyż każdy trzyelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ należy do dokładnie jednego zbioru S_i. Zatem dla pewnego j $|S_j| \geqslant \frac{(n-1)(n-2)}{6}$. ■

Zadanie 16.

Udowodnić, że wielomian $x^{2009} - x + 3$ jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Dla dowodu niewprost załóżmy, że $x^{2009} - x + 3 = P(x) \cdot Q(x)$, gdzie P i Q są niestałymi wielomianami o współczynnikach całkowitych. Wówczas $P(0) \cdot Q(0) = 3$, skąd wynika, że jedna z liczb $P(0), Q(0)$ na moduł jest równa 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $|P(0)| = 1$ i niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będą pierwiastkami P (być może zespolonymi), takie istnieją gdyż P nie jest stały. Wówczas $|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n| = 1$, a zatem istnieje takie $\alpha = \alpha_i$ dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$, że $|\alpha| \leqslant 1$. Jasne jest, że α jest również pierwiastkiem wielomianu $x^{2009} - x + 3$, czyli $\alpha^{2009} - \alpha + 3 = 0$. Otrzymujemy stąd, że $|\alpha^{2009} - \alpha| = 3$. Z nierówności trójkąta oraz oszacowania $|\alpha| \leqslant 1$ otrzymujemy jednak

$$3 = |\alpha^{2009} - \alpha| \leqslant |\alpha|^{2009} + |\alpha| \leqslant 1 + 1 = 2,$$

sprzeczność.

Zadanie 17.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których $n^{2009} + n + 1$ jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

Niech $M = n^{2009} + n + 1$, $m = n^2 + n + 1$. Zauważmy, że $M - m = n^{2009} - n^2 = n^2(n^{2007} - 1)$. $3 \mid 2007$, więc $m \mid (n-1)m = n^3 - 1 \mid n^{2007} - 1 \mid n^2(n^{2007} - 1) = M - m \Rightarrow m \mid M$. Dla $n \geqslant 2$ mamy $M \geqslant n^3 > n^3 - 1 = (n-1)m \geqslant m > 1$, czyli m jest dzielnikiem właściwym. Zatem M nie jest w tym przypadku liczbą pierwszą. Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $n = 0$ M nie jest, a dla $n = 1$ jest liczbą pierwszą.

Odpowiedź. Jedyną taką liczbą naturalną jest $n = 1$.

Zadanie 18.

Liczby rzeczywiste $x,\ y,\ z$ spełniają warunki:

$$x + y + z = 9,\ x^2 + y^2 + z^2 = 33.$$

Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjmować liczba xyz.

Rozwiązanie

Oznaczmy $xyz = c$. Rozważmy wielomian $p(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz$. Mamy $x+y+z = 9$, $xy+yz+zx = \frac{1}{2} \cdot [(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)] = 24$, więc

$$p(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - c \tag{1}$$

Otrzymaliśmy, że jeśli liczby $x,\ y,\ z$ spełniają nałożone warunki, to wielomian (1) rozkłada się na czynniki liniowe. Odwrotnie, jeśli (1) rozkłada się na czynniki liniowe, to jego pierwiastki x, y, z spełniają podane warunki. Pozostaje stwierdzić, dla jakich c wielomian (1) ma trzy pierwiastki rzeczywiste (z uwzględnieniem krotności).

$p'(t) = 3(t^2 - 6t + 8) = 3(t-2)(t-4)$, więc funkcja p jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 2]$, malejąca w przedziale $[2; 4]$ i rosnąca w przedziale $[4; \infty)$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym rozkładalności na czynniki liniowe jest więc układ nierówności $p(2) \geqslant 0,\ p(4) \leqslant 0 \Leftrightarrow 16 \leqslant c \leqslant 20$.

Odpowiedź. Liczba xyz może przyjmować wartości z przedziału $[16; 20]$.

Zadanie 19.

W państwie jest 2009 miast. Wiadomo, że z każdego miasta wychodzą co najmniej 93 drogi i że z każdego miasta da się dojechać do każdego innego (niekoniecznie bezpośrednio). Wykazać, że z każdego miasta da się dojechać do każdego innego używając co najwyżej 62 różnych dróg.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza nie zachodzi, tzn. istnieją miasta A i B o tej własności, że każda ścieżka je łącząca zawiera co najmniej 63 drogi. Rozważmy najkrótszą ścieżkę łącząca miasta A i B. Zawiera ona w sumie co najmniej 64 miasta. Zaznaczmy w niej, poczynając od miasta A, co trzecie miasto. Jasne jest, że zaznaczyliśmy co najmniej 22 miasta. Zauważmy teraz, że jeśli pewne dwa z zaznaczonych miast X, Y miałyby wspólnego sąsiada Z, to ścieżkę dałoby się skrócić zastępując fragment $X \to \ldots \to Y$ fragmentem $X \to Z \to Y$. Wybraliśmy jednak ścieżkę z A do B o minimalnej długości, skąd wynika, że żadne dwa z zaznaczonych wierzchołków nie mają wspólnego sąsiada. Z tych samych powodów żadne dwa zaznaczone miasta nie mogą być połączone drogą. Ponieważ z każdego miasta wychodzą co najmniej 93 drogi do innych miast daje nam to $22 \cdot 93 = 2046 > 2009$ różnych miast. Sprzeczność, która kończy dowód.

Zadanie 20.

Punkty A, B, C, A', B', C' leżą na jednym okręgu, przy czym prosta AA' jest prostopadła do BC, prosta BB' jest prostopadła do CA, a prosta CC' jest prostopadła do AB. Punkt D leży na tym samym okręgu, a punkty A'', B'' oraz C'' są odpowiednio przecięciem prostych DA' z BC, DB' z CA oraz DC' z AB. Udowodnić, że punkty A'', B'', C'' oraz ortocentrum trójkąta ABC leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Z twierdzenia Pascala zastosowanego dla sześciokąta $AA'DB'BC$ wynika, że punkty A'', B'' i ortocentrum H leżą na jednej prostej. Analogicznie trójki A'', C'', H i B'', C'', H są współliniowe, skąd wynika teza zadania.

Zadanie 21.

Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne $a, b > 0$, dla których $a^b b^a = 1$.

Rozwiązanie:

Oczywiście istnieją względnie pierwsze liczby naturalne $k,\ l,\ m$, dla których $a = \frac{k}{m}$ oraz $b = \frac{l}{m}$. Podstawiając to do wyjściowej równości dostajemy

$$\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{l}{m}} \left(\frac{l}{m}\right)^{\frac{k}{m}} = 1$$

lub równoważnie $k^l l^k = m^{k+l}$. Zauważmy, że gdyby liczba pierwsza p była wspólnym dzielnikiem k i l, to dzieliłaby również m, co stoi w sprzeczności z $NWD(k, l, m) = 1$. Wobec tego liczby k i l sa względnie pierwsze.

Iloczyn względnie pierwszych liczb k^l i l^k jest $(k+l)$–tą potęgą liczby naturalnej, więc każda z nich również jest $(k+l)$–tą potęgą. Jednak wykładniki l i $(k+l)$ są względnie pierwsze, skąd liczba k też jest $(k+l)$–tą potęgą. Jednakże $2^{k+l} > 2^k > k$, skąd mamy $k = 1$. Analogicznie $l = 1$ i wstawiając do powyższej równości otrzymujemy $m = 1$, skąd $a = b = 1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że para $(1, 1)$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 22.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których n–kąt foremny jest przekrojem ośmiościanu foremnego pewną płaszczyzną.

Rozwiązanie:

Ponieważ ośmiościan ma osiem ścian, więc oczywiście $n \leqslant 8$. Łatwo uzyskać trójkąt (ściana), kwadrat (wszystkie wierzchołki prócz dwóch przeciwległych) i sześciokąt (płaszczyzna równoodległa od dwóch równoległych ścian). Zauważmy teraz, że ośmiościan ma cztery pary ścian równoległych, wobec tego n–kąt wycięty z ośmiościanu dla $n > 4$ musi mieć przynajmniej jedną parę boków równoległych. Łatwo zauważyć, że pięciokąt i siedmiokąt foremny nie mają tej własności. Pozostał przypadek $n = 8$. Podzielmy krawędzie czworościanu na trzy grupy tak, aby krawędzie każdej grupy tworzyły kwadrat o środku w środku ośmiościanu. Wiadomo, że dowolna płaszczyzna przecina obwód każdego kwadratu w co najwyżej dwóch punktach, więc wielokąt powstały jako przekrój ma nie więcej niż sześć wierzchołków. Tym samym wszystkie przypadki zostały rozpatrzone.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają $n = 3$, $n = 4$ i $n = 6$.

Zadanie 23.

Skoczek szachowy stoi w lewym górnym rogu szachownicy o wymiarach $4 \times n$. Rozstrzygnąć dla jakich n skoczek może poruszać się tak, by na każde pole szachownicy wejść dokładnie raz i zakończyć w lewym górnym rogu.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że dla żadnego n nie istnieje ciąg ruchów spełniający warunki zadania. Przypuśćmy, że tak nie jest. Rozważmy planszę $4 \times n$. Ma ona dwa wiersze skrajne i dwa środkowe. Jasne jest, że skoczek nie jest w stanie, będąc w wierszu skrajnym, wykonać ruchu na pole w wierszu skrajnym. Oznacza to, że zarówno ruch wcześniej jak i ruch później musi znajdować się w wierszu środkowym. Ponieważ jednak w iwerszach środkowych jest tyle samo pól co w wierszach skrajnych, więc skoczek musi z wiersza środkowego skakać na pole w wierszu skrajnym, bo inaczej częściej stawałby na polach środkowych. Stąd wniosek, że skoczek znejduje się na polu skrajnym po wykonaniu

0, 2, 4, ..., $4n$ ruchów. Zauważmy jednak, że wtedy znajduje się na polu tego samego koloru co pole, z którego zaczynał (bo wykonując pojedynczy ruch zmienia kolor pola na przeciwny). Stąd wniosek, że skoczek nigdy nie będzie na polu skrajnm koloru przeciwnego — sprzeczność, bo oznacza to, że nie może się znaleźć w lewym dolnym rogu.

Zadanie 24.
Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że funkcja $f(x) = x^n$ jest sumą n funkcji okresowych.

Rozwiązanie
Dowiedziemy indukcyjnie, że wielomian stopnia n nie jest sumą n funkcji okresowych. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech zatem $n > 1$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, gdzie P jest wielomianem stopnia n, a f_i jest okresowa o okresie t_i. Zatem $P(x+t_n)-P(x) = \sum_{i=1}^{n-1}(f(x+t_n) - f(x))$, ale po lewej stronie mamy wielomian stopnia $n-1$, a po prawej sumę $n-1$ funkcji okresowych. Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem indukcyjnym, która dowodzi tezy zadania.
Odpowiedź: Nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

Zawody indywidualne – grupa starsza:
Zadanie 1.
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Załóżmy, że na prostej BC, poza odcinkiem BC, znajduje się taki punkt E, a wewnątrz odcinka AD – taki punkt F, że $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CBF$. Niech I oznacza punkt przecięcia CD i EF, zaś J – punkt przecięcia AB i EF. Niech K będzie środkiem odcinka EF. Załóżmy, że punkt K nie leży na żadnej z prostych AB, CD. Udowodnić, że punkty A, B, I, K leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy punkty C, D, J, K leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie
Załóżmy, że punkt C leży między punktami B i E (jeżeli punkt B leży między C i E, to postępujemy analogicznie). Dana w zadaniu równość kątów mówi, że punkty A, B, E, F leżą na jednym okręgu. Stąd mamy $\sphericalangle DFE = \sphericalangle ABE = \sphericalangle DCE$, więc punkty C, D, E, F leżą na jednym okręgu. Korzystając z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu mamy: $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{FJ} = (\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{KJ})(\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KJ}) = JK^2 - EK^2$ oraz $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FI} = (\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{KI})(\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KI}) = KI^2 - EK^2$. Z tego samego twierdzenia przekształćmy tezę; należy pokazać, że $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KJ}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{KI}$.

Jednakże $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DI} = JK^2 - KI^2 = (\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KI})(\overrightarrow{KJ} - \overrightarrow{KI}) = (\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KI}) \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KJ} - \overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{KI}$, co kończy dowód.

Zadanie 2.

Niech $S = \{0, 1, \ldots, N^2 - 1\}$ będzie zbiorem wszystkich reszt modulo N^2. Załóżmy, że A jest N–elementowym podzbiorem zbioru S. Dowieść, że istnieje taki N–elementowy podzbiór B zbioru S, że zbiór $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ zawiera co najmniej połowę wszystkich reszt modulo N^2.

Rozwiązanie

Zbiór B będziemy konstruować indukcyjnie w ten sposób, że jeśli $|A+B| < \frac{N^2}{2}$, to do zbioru B dodamy taki element, który zwiększy moc $A + B$ o co najmniej $\frac{N}{2}$.

W pierwszym kroku do B dodajemy dowolny element i wówczas moc $A+B$ zwiększa się o N. Załóżmy więc, że w pewnym kroku moc $A + B$ jest mniejsza niż $\frac{N^2}{2}$. Załóżmy, że nie istnieje taki $b \in S$, że po dodaniu go do B moc $A + B$ nie zwiększy się o $\frac{N}{2}$. Wynika stąd, że dla każdego $b \in S$ zachodzi $|(A+B)\cap(A+b)| \geqslant N - \frac{N}{2} + 1 = \frac{N}{2} + 1$.$b \in S$ możemy wybrać na N^2 sposobów, a więc wszystkich elementów (licząc z powtórzeniami) występujących na tych przecięciach jest co najmniej $(\frac{N}{2} + 1)(N^2) > \frac{N^3}{2}$. Wszystkie te elementy należą jednocześnie do $A+B$, a zatem na mocy zasady szufladkowej Dirichleta pewien element występuje więcej niż $\frac{N^3}{2 \cdot \frac{N^2}{2}} = N$ razy. To jednak oznacza sprzeczność. Istotnie, element ten można zapisać na więcej niż N sposobów w postaci $a_i + b_i$, gdzie liczby b_i są parami różne. Ale zbiór A ma N elementów skąd wynika, że dla pewnych i, j byłoby $a_i = a_j$, a stąd też $b_i = b_j$, sprzeczność.

Jeśli warunek $|A + B| > \frac{N^2}{2}$ nie zostanie spełniony wcześniej to zostanie spełniony po N-tym kroku, gdyż $N \cdot \frac{N}{2} = \frac{N^2}{2}$. Jeśli warunek ten zostanie spełniony wcześniej to B uzupełniamy w dowolny sposób.

Zadanie 3.

Niech P będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynniku wiodącym równym 1. Dowieść, że jeżeli $b - a \geqslant 4$, to istnieją liczby $x_1, x_2 \in [a, b]$ takie że $P(x_2) - P(x_1) \geqslant 4$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że wystarczy udowodnić tezę dla $b = a + 4$, ponieważ $[a, a + 4] \subset [a, b]$. Przyjmijmy zatem, że $b = a + 4$. Przypuśćmy wbrew tezie, że nie istnieją żądane liczby x_1, x_2. Wtedy liczby $c = \min\{P(x) : x \in [a, b]\}$ i $d = \max\{P(x) : x \in [a, b]\}$ spełniają nierówność $d - c < 4$. Rozważmy wielomian $Q = P(x + \frac{a+b}{2}) - \frac{c+d}{2}$. Widać, że dla dowolnej liczby $x \in [-2, 2]$ mamy $Q(x) \in (-2, 2)$ oraz współczynnik wiodący wielomianu Q jest równy 1. Niech n będzie stopniem wielomianu Q. Skonstruujmy teraz ciąg wielomianów $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$ w następujący sposób:

$$T_0(x) = 2,\ T_1(x) = x,\ T_k(x) = xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)\ (k > 1).$$

Indukcyjnie sprawdzamy, że dla każdego k współczynnik wiodący wielomianu T_k jest równy 1 oraz $T_k(2\cos\varphi) = 2\cos k\varphi$ dla wszystkich φ rzeczywistych, ponieważ

$$\cos k\varphi = 2\cos\varphi\cos(k-1)\varphi - \cos(k-2)\varphi.$$

Niech $x_k = 2\cos\frac{k\pi}{n}$ dla $k = 0, 1\ldots, n$. Liczby te są posortowane malejąco, ponadto T_n przyjmuje w punktach x_k na przemian wartość 2 i -2, więc wielomian $T_n - Q$ przyjmuje w tych punktach na przemian wartości dodatnie i ujemne. Wobec tego w każdym przedziale (x_{k+1}, x_k) ma miejsce zerowe $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. W takim razie wielomian $T_n - Q$ (stopnia $n-1$) ma n pierwiastków, więc jest wielomianem zerowym, co przeczy temu, że przyjmuje wartości dodatnie i ujemne. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

Zadanie 4.

Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n znaleźć liczbę takich permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, dla których liczba $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ jest podzielna przez k dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że dodanie do wszystkich liczb a_i ustalonej liczby całkowitej nie wpływa na podzielność, a więc i na wynik końcowy. Oznaczmy go przez A_n. Łatwo zobaczyć, że $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 6$. Załóżmy, że $n > 3$. Warunek z podzielnością dla $n-1$ wygląda tak: $n-1|n^2+n-2a_n$, skąd $a_n = 1$ lub $a_n = n$ lub ewentualnie $a_n = \frac{n+1}{2}$, gdy n jest nieparzyste. Dwa pierwsze przypadki pozostawiają nam na pozostałych miejscach permutacje ciągów odpowiednio $(2, 3\ldots, n)$ i $(1, 2, \ldots, n-1)$, co daje łącznie $2A_{n-1}$ permutacji na mocy wcześniejszej uwagi. Jeśli $a_n = \frac{n+1}{2}$, to musi zachodzić $n-2|n^2-1-2a_{n-1}$, czyli $a_{n-1} = \frac{n+1}{2} + k(n-2)$. Ponieważ jednak element $\frac{n+1}{2}$ został już użyty, więc $k \geqslant 1$ i $a_{n-1} \geqslant \frac{3n-3}{2} > n$, bo $n > 3$. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że $a_n \neq \frac{n+1}{2}$. W takim razie $A_n = 2A_{n-1}$ i przez indukcję mamy $A_n = 3 \cdot 2^{n-2}$.

Zadanie 5.

Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Załóżmy, że P i Q są takimi punktami tego czworokąta, że na czworokątach $PQDA$ i $QPBC$ można opisać okręgi. Załóżmy, że na odcinku PQ znajduje się taki punkt E, że $\sphericalangle PAE = \sphericalangle QDE$ i $\sphericalangle PBE = \sphericalangle QCE$. Wykazać, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Rozwiązanie

Zauważmy, że okrąg opisany na trójkącie ADE jest styczny do prostej PQ, gdyż

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle PAD - \sphericalangle PAE = 180^\circ - \sphericalangle PQD - \sphericalangle QDE = \sphericalangle DEQ$$

i korzystamy z twierdzenia o stycznej i cięciwie. Analogicznie okrąg opisany na trójkącie BCE jest styczny do prostej PQ. Załóżmy teraz, że proste AD, BC i PQ są równoległe. Wówczas czworokąty $PQDA$ i $QPBC$ są trapezami równoramiennymi, więc istnieje wspólna symetralna odcinków AD, BC i PQ, czyli czworokąt $ABCD$ jest wpisywalny w okrąg jako trapez równoramienny.

W takim razie bez straty ogólności można założyć, że proste AD i PQ przecinają się w punkcie X. Z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu mamy równości: $XE^2 = XA \cdot XD = XP \cdot XQ$, więc punkt X leży na osi potęgowej okręgów opisanych na wielokątach BCE i $BCPQ$, czyli na prostej BC. W takim razie zachodzą równości $XB \cdot XC = XE^2 = XA \cdot XB$, skąd bezpośrednio wynika teza.

Zadanie 6.

Dane są liczby naturalne $m, n \geqslant 2$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, z których żadna nie jest podzielna przez m^{n-1}. Wykazać, że istnieją liczby całkowite $e_1, e_2, \ldots, e_n$, nie wszystkie równe 0, takie, że $|e_i| < m$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $m^n | e_1a_1 + e_2a_2 + \ldots + e_na_n$.

Rozwiązanie

Rozważmy wszystkie liczby postaci $c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_na_n$, gdzie $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Liczb tych jest m^n i jeśli pewne dwie dają tą samą resztę modulo m^n, powiedzmy

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_na_n \equiv c_1'a_1 + c_2'a_2 + \ldots + c_n'a_n \pmod{m^n},$$

to łatwo zauważyć, że wówczas wystarczy przyjąć $e_i = c_i - c_i'$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ i wszystkie warunki są spełnione.

Wystarczy więc skoncentrować się na sytuacji, w której żadne dwie liczby nie dają tej samej reszty modulo m^n, tzn. liczby rozważanej postaci tworzą wszystkie reszty modulo m^n. Niech ω będzie ustalonym pierwiastkiem pierwotnym m^n-go stopnia z jedności. Rozważmy iloczyn $\prod_{i=1}^{n}(\omega^{a_i\cdot 0} + \omega^{a_i\cdot 1} + \ldots + \omega^{a_i\cdot(m-1)})$

Z jednej strony łatwo zauważyć, że po otworzeniu nawiasów powstaje suma $\sum \omega^A$, gdzie A będzie przebiega liczby postaci rozważanej na początku. Ponieważ wiadomo, że liczby te tworzą pełny system reszt modulo m^n otrzymujemy, iż $\prod_{i=1}^{n}(\omega^{a_i \cdot 0}+\omega^{a_i \cdot 1}+\ldots+\omega^{a_i \cdot (m-1)}) = 1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{m^n-1} = \frac{\omega^{m^n}-1}{\omega-1} = 0$.

Z drugiej strony widzimy, że

$$\prod_{i=1}^{n}(\omega^{a_i \cdot 0} + \omega^{a_i \cdot 1} + \ldots + \omega^{a_i \cdot (m-1)}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\omega^{a_i m} - 1}{\omega^{a_i} - 1},$$

a jako, że m^{n-1} nie dzieli a_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to wszystkie czynniki występujące w powyższym iloczynie są rożne od 0. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 7.

Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz liczba pierwsza p. Dowieść, że jeśli a, b, c są liczbami całkowitymi spełniającymi równania

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa,$$

to $a = b = c$.

Rozwiązanie

Jeśli np. $a = b$, to łatwo uzyskać $a = b = c$. Można więc założyć, że $a \neq b \neq c \neq a$. Z równości podanych w treści otrzymujemy $\frac{a^n-b^n}{b-c} = \frac{b^n-c^n}{c-a} = \frac{c^n-a^n}{a-b} = -p$. Mnożąc stronami otrzymujemy

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} \cdot \frac{b^n - c^n}{b - c} \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a} = \frac{a^n - b^n}{b - c} \cdot \frac{b^n - c^n}{c - a} \cdot \frac{c^n - a^n}{a - c} = -p^3 \qquad (2)$$

Stąd od razu wynika, że $n = 2k$ dla pewnego całkowitego k, bo gdyby n było nieparzyste, to lewa strona powyższej równości byłaby nieujemna.

Przypuśćmy, że p jest liczbą nieparzystą. Wtedy $\frac{a^n-b^n}{a-b} = a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1}$ też jest liczbą nieparzystą, gdyż jest dzielnikiem liczby nieparzystej. Ale powyższa suma ma $n = 2k$ składników, więc liczby a i b są różnej parzystości. Analogicznie b i c oraz c i a są różnej parzystości. To oczywiście nie jest możliwe.

Zatem p jest parzyste, czyli $p = 2$. Znów korzystając z równości z treści zadania otrzymujemy, że a, b, c są tej samej parzystości. Uwzględniając tę informację i podstawiając $n = 2k, p = 2$ przepiszmy (1) w następujący sposób:

$$\frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a^k - b^k}{a - b} \cdot \frac{b^k + c^k}{2} \cdot \frac{b^k - c^k}{b - c} \cdot \frac{c^k + a^k}{2} \cdot \frac{c^k - a^k}{c - a} = -1$$

Jest iloczyn liczb całkowitych, więc moduł każdej z nich wynosi 1. Załóżmy najpierw, że $a, b, c \neq 0$. Pewne dwie spośród liczb a, b, c. Są tego samego znaku. Niech to będą liczby a i b. $\left|a^k + b^k\right| = 2$, więc $a = b = 1$ lub $a = b = -1$. Załóżmy teraz bez straty ogólności, że $a = 0$. Wtedy b i c są parzyste, $\left|b^k\right| = \left|c^k\right| = 2$, więc $b^k + c^k \in \{-4, 0, 4\}$ Sprzeczność. ■

Zadanie 8.

W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki BE i CF są wysokościami. Dwa okręgi przechodzące przez punkty A i F są styczne do prostej BC w punktach P i Q, przy czym B leży pomiędzy C i Q. Udowodnić, że proste PE i QF przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie AEF.

Rozwiązanie

Niech AD będzie trzecią wysokością. Ponieważ $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AFC$, więc na czworokącie $ACDF$ da się opisać okrąg, skąd $BA{\cdot}BF = BC{\cdot}BD$. Analogicznie $CA \cdot CE = CB \cdot CD$. Jednocześnie $BA \cdot BF = BP^2 = BQ^2$ i obliczamy:

$$CA \cdot CE = CB \cdot CD = BC^2 - BC \cdot BD = BC^2 - BP^2 =$$

$$= (BC + BQ)(BC - BP) = CQ \cdot CP,$$

więc na czworokącie $AEPQ$ można opisać okrąg. Stąd $\sphericalangle EAQ + \sphericalangle EPQ = 180^\circ$. Ponadto z twierdzenia o stycznej i siecznej mamy $\sphericalangle FAQ = \sphericalangle FQB$. Oznaczmy przez S punkt przecięcia PE i QF. Zachodzą równości:

$$\sphericalangle ESF = \sphericalangle QSP = 180^\circ - \sphericalangle QPS - \sphericalangle PQS =$$

$$= 180^\circ - \sphericalangle EPQ - \sphericalangle FQB = \sphericalangle EAQ - \sphericalangle FAQ = \sphericalangle EAF.$$

To dowodzi, że na czworokącie $AFES$ można opisać okrąg.

Uwaga: W powyższych obliczeniach milcząco zakładamy, że punkt E leży między P i S. Jednak w przeciwnym wypadku obliczenia są analogiczne.

Zadanie 9.

Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunki

$$abcd = 1 \text{ oraz } a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Wykazać, że

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

Rozwiązanie

Z nierówności między średnimi mamy:

$$a = \sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{d}} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d}\right).$$

Dodając stronami tę nierówność i trzy analogiczne dostajemy:

$$4(a+b+c+d) \leqslant 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}\right),$$

skąd bezpośrednio wynika teza.

Zadanie 10.

Funkcje f_1, f_2, $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają warunek: dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3 funkcja $a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3$ jest słabo monotoniczna. Dowieść, że istnieją liczby c_1, c_2, c_3 nie wszystkie równe 0 takie, że $c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 \equiv 0$.

Rozwiązanie

Jeżeli wszystkie funkcje są stałe, to teza jest oczywista. Przypuśćmy zatem bez straty ogólności, że $f_1(x_0) < f_1(y_0)$ dla pewnych $x_0 < y_0$. Udowodnimy, że dla wszystkich a_2, a_3 rzeczywistych istnieje takie a_1, że funkcja $a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$ jest stała.

Funkcja $g(t) = (tf_1+a_2f_2+a_3f_3)(y_0)-(tf_1+a_2f_2+a_3f_3)(x_0)$ jest niestałą funkcją liniową, więc ma dokładnie jedno miejsce zerowe. Oznaczmy je przez a_1. Weźmy teraz dowolne x, y takie że $x < y$. Przyjmijmy

$$h(t) = (tf_1 + a_2f_2 + a_3f_3)(y) - (tf_1 + a_2f_2 + a_3f_3)(x).$$

Dla $t > a_1$ mamy $g(t) > 0$, więc funkcja $tf_1 + a_2f_2 + a_3f_3$ musi być słabo rosnąca, czyli $h(t) \geqslant 0$. Analogicznie $h(t) \leqslant 0$ dla $t < a_1$. Ponieważ h jest funkcją liniową, więc jest ciągła, czyli $h(a_1) = 0$. Ponieważ x, y były dowolne, więc funkcja $a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$ jest stała.

Istnieją zatem takie p, q, że funkcje pf_1+f_2 i qf_1+f_3 są funkcjami stałymi. Istnieją zatem r, s ($\{r,s\} \neq \{0\}$), że $r(pf_1 + f_2) + s(qf_1 + f_3) \equiv 0$. Wystarczy zatem przyjąć $c_1 = pr + qs$, $c_2 = r$, $c_3 = s$.

Zadanie 11.

W lewym górnym rogu planszy $m\times n$ stoi k pionków. Ruch pionka polega na przestawieniu go na sąsiednie pole (mające z wyjściowym wspólną krawędź). Każdym z pionków wykonujemy $m + n - 2$ ruchów, aby przemieścić go do prawego dolnego rogu. Wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę pól, które nie zostały odwiedzone przez żaden pionek.

Rozwiązanie

Niech $k \leqslant \min(m, n)$. Wprowadźmy układ współrzędnych w ten sposób, że lewe górne pole ma współrzędne $(1,1)$, a prawe dolne (m,n). Rozważmy zbiór S pól (x,y) spełniających warunek $k < x+y \leqslant m+n-k+1$. Przy ruchu pionka suma współrzędnych pola, na którym stoi, zwiększa się o 1, więc każda trasa zawiera $m+n-2k+1$ pól tego zbioru, czyli w sumie k tras zawiera co najwyżej $k(m+n-2k+1)$ pól z S.

Zbiór S liczy $mn - 2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} = mn - k^2 + k$ pól. Zatem liczba nieodwiedzonych pól zbioru S wynosi co najmniej $mn - k^2 + k - km - kn + 2k^2 - k = (m-k)(n-k)$. Aby uzyskać taki wynik, wystarczy poprowadzić i–ty pionek tak, by przeszedł przez pola $(i,1)$, $(i, n-i+1)$, $(m, n-i+1)$. Jeśli $k > l = \min(m,n)$, to pewne l pionków przesuwamy tak, by ich trasy przykryły całą planszę, a pozostałe przemieszczamy dowolnie.

Zadanie 12.

Dowieść, że w czworokącie wypukłym $ABCD$ istnieje punkt P spełniający równości:

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PDC = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PAD =$$

$$= \sphericalangle PCD + \sphericalangle PBA = \sphericalangle PDA + \sphericalangle PCB = 90^\circ$$

wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne są prostopadłe.

Rozwiązanie

($\Rightarrow$) Załóżmy, że jest spełniona równość kątów. Niech punkty K, L, M, N będą rzutami P na boki AB, BC, CD, DA. Należą one do wnętrz boków, jako że z równości kątów wynika, że wszystkie są ostre. Czworokąty $AKPN$, $BKPL$, $CLPM$, $DNPM$ są wpisane w okręgi; korzystając z tego warunek z założenia jest równoważny temu, że $KLMN$ jest prostokątem. Oznaczmy przez O_A, O_B, O_C, O_D środki wyżej wymienionych okręgów. Odcinki KN i LM mają wspólną symetralną — jest nią prosta O_AO_C, która jest jednocześnie linią łączącą środki boków w trójkącie APC, więc jest równoległa do AC. Stąd $AC \perp KN$; analogicznie $BD \perp KL$ i mamy tezę.

($\Leftarrow$) Jeżeli $ABCD$ jest rombem, to P jest jego środkiem. Przypuśćmy, że $AC \perp BD$ i $AB < AD$. Niech U_A, U_C będą środkami okręgów opisanych na trójkątach ABD, BCD, a AV_A, CV_C będą ich średnicami. Oczywiście punkty U_A i U_C leżą na symetralnej odcinka BD równoległej do AC, więc również $V_AV_C \| AC$. Niech P będzie punktem przecięcia prostych AU_A i CU_C; ponieważ AU_A leży w $\sphericalangle CAD$, a CU_C — w $\sphericalangle ACD$, więc P leży wewnątrz trójkąta ACD, czyli wewnątrz czworokąta $ABCD$. Punkty K, L, M, N, O_A, O_C definiujemy jak w pierwszej części. Mamy $\sphericalangle NKP = \sphericalangle NAP = \sphericalangle DAU_A = \sphericalangle BAC$, a skoro $PK \perp AB$, to $NK \perp AC$, analogicznie $LM \perp AC$. Istnieją zatem jednokładności: f o środku A przekształcająca AKN na ABD i g o środku C przekształcająca BCD na LCM. Oczywiście $(g \circ f)(V_C) = V_A$, ale $V_AV_C \| AC$, więc $g \circ f$ jest translacją. Stąd $f \circ g$ też jest translacją, ale $(f \circ g)(K) = L$, więc $KL \| AC$. Analogicznie $MN \| AC$, czyli $KLMN$ jest prostokątem, co kończy dowód.

Zadanie 13.

Trzy parami różne punkty A, B, C leżą na ustalonej prostej w tej właśnie kolejności. Niech ω będzie okręgiem przechodzącym przez punkty A i C, którego środek nie leży na prostej AC. Niech P będzie punktem przecięcia stycznych do ω w punktach A i C, zaś Q niech będzie punktem przecięcia odcinka BP z ω. Dowieść, że punkt przecięcia dwusiecznej kąta $\sphericalangle AQC$ oraz prostej AC nie zależy od wyboru okręgu ω.

Rozwiązanie

Niech T będzie drugim punktem przecięcia PB z okręgiem. Z twierdzenia o dwusiecznej wystarczy pokazać, że $\frac{AQ}{QC}$ jest stałe. Z podobieństw trójkątów mamy: $\frac{QC}{CP} = \frac{CT}{PT}$ oraz $\frac{AQ}{AP} = \frac{AT}{PT}$, czyli $\frac{AQ}{QC} = \frac{AT}{TC}$. Kolejne podobieństwa mówią, że $\frac{AB}{BT} = \frac{AQ}{CT}$ i $\frac{BC}{BT} = \frac{CQ}{AT}$. Dzieląc je przez siebie i korzystając z poprzedniej równości otrzymujemy $\frac{AB}{BC} = \left(\frac{AQ}{QC}\right)^2$, co dowodzi tezy.

Zadanie 14.

Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 5$. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita $1 \leqslant a \leqslant p-2$ taka, że liczby $a^{p-1}-1$ i $(a+1)^{p-1}-1$ nie są podzielne przez p^2.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $(p-1)^{p-1} = 1-(p-1)p+\ldots \equiv 1+p \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. A zatem jeśli liczba $(p-2)^{p-1}-1$ nie jest podzielna przez p^2 wystarczy przyjąć $a = p-2$.

Załóżmy więc, że wypisana liczba dzieli się przez p^2, tzn.

$$1 \equiv (p-2)^{p-1} = 2^{p-1} - (p-1)2^{p-2}p + \ldots \equiv 2^{p-1} + p2^{p-2} \pmod{p^2},$$

co oznacza tyle, że $2^{p-1} \equiv 1 - p2^{p-2} \pmod{p^2}$.

Zauważmy teraz, że kongruencja $\left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ równoważna jest kongruencji $(p-1)^{p-1} \equiv 2^{p-1} \pmod{p^2}$, a to, na mocy wcześniejszych obserwacji, równoważne jest $1+p \equiv 1-p2^{p-2} \pmod{p^2}$, a stąd $2^{p-2} \equiv -1 \pmod{p}$. Ale z Małego Twierdzenia Fermata $2^{p-1} = 2 \cdot 2^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$, więc $p = 3$, a to jest niemożliwe. Czyli $\left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

Analogiczny rachunek pokazuje, że $\left(\frac{p+1}{2}\right)^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy $2^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$ co, znowu z Małego Twierdzenia Fermata, jest niemożliwe. Zatem w tym wypadku wystarczy przyjąć $a = \frac{p-1}{2}$.

Zadanie 15.

Niech p i q będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Podzbiór S zbioru $\mathbb{N}$ nazywamy idealnym jeśli $0 \in S$ oraz dla każdego $n \in S$ liczby całkowite $n+p$ i $n+q$ należą do S. Wyznaczyć ilość idealnych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$.

Rozwiązanie

Wiadomo, że każda liczba naturalna ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $px + qy$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$ oraz $0 \leqslant x < q$. Rozważmy zatem zbiór A punktów kratowych (x, y) spełniających zależności: $px + qy \geqslant 0,\ 0 \leqslant x < q$. Każdy punkt przedstawia jednoznacznie liczbę naturalną: $(x, y) \to px + qy$. Łatwo zobaczyć, że podzbiór S zbioru A jest idealny, jeśli zawiera (0,0) i wraz z punktem (x, y) zawiera punkty $(x, y+1)$ oraz $(x+1, y)$ o ile należą do zbioru A. Istotnie, dla $x < q-1$ jest to oczywiste, a dla $x = q-1$ wystarczy zauważyć, że liczba $pq+qy = p\cdot 0+q(p+y)$ należy do S jako dodatnia wielokrotność q. Pokolorujmy teraz na mandarynkowo wszystkie kwadraty jednostkowe o środku $(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$, gdzie $(x, y) \in S$ lub $x \geqslant q$, a na seledynowo pozostałe. Wówczas fragment granicy między tymi dwoma obszarami między punktami $(0, 0)$ i $(q, -p)$ jest jedną z najkrótszych ścieżek między tymi punktami leżących powyżej prostej $px+qy = 0$. Odwrotnie, mając daną taką łamaną jesteśmy w stanie jednoznacznie odtworzyć zbiór S: kolorujemy na mandarynkowo kwadraty powżej łamanej i do S należą ich lewe dolne rogi. Wobec tego szukany wynik jest liczbą wszystkich najkrótszych dróg od $(0, 0)$ do $(q, -p)$ powyżej prostej $px+qy = 0$. Oczywiście wszystkich najkrótszych dróg jest $\binom{p+q}{p}$. Każda z nich jest reprezentowana przez ciąg $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{p+q})$, gdzie $a_0 = a_{p+q} = 0$ i $a_{j+1} - a_j \in \{p, -q\}$ przy pomocy odpowiedniości $(x, y) \to px + qy$. Ciągi a i b nazwiemy równoważnymi, jeżeli istnieje takie $k \in \{0, 1, \ldots p + q - 1\}$, że $b_j = a_{j+k} - a_k$ dla $j \leqslant p + q - k$ oraz $b_j = a_{j+k-p-q} - a_k$ dla $j \leqslant p + q - k$. Z definicji każdy ciąg zawiera parami różne liczby (poza $a_0 = a_{p+q}$), bo droga nie przechodzi przez jeden punkt dwa razy. Wobec tego klasy równoważności tej relacji mają dokładnie $p + q$ elementów, bo w definicji równwoważności przy $k > 0$ mamy różne ciągi (w szczególności mają minima w różnych miejscach). Z drugiej strony w każdej klasie jest dokładnie jeden ciąg składający się z liczb nieujemnych (taki, który przyjmuje minimum w zerowym wyrazie), a takie i tylko takie definiują nam drogi powyżej prostej $px + qy = 0$. Wobec tego wszystkich zbiorów S jest $\frac{1}{p+q}\binom{p+q}{p}$.

Zadanie 16.

Ciąg liczb naturalnych (a_k) spełnia warunki: $a_1 = 2$ oraz $a_{k+1} = 2a_k^2 - 1$ dla $k \geqslant 1$. Wykazać, że jeśli n jest liczbą całkowitą dodatnią to liczby n i a_n są względnie pierwsze.

Rozwiązanie

Jasne jest, że liczby 1 i a_1 są względnie pierwsze, niech więc $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Rozważmy dowolny dzielnik pierwszy p liczby n. Zauważmy, że jeśli dla pewnego k liczba a_k jest podzielna przez p, to $a_{k+1} \equiv -1 \pmod{p}$ oraz $a_{k+2} \equiv a_{k+3} \equiv \ldots \equiv 1 \pmod{p}$, a zatem żaden następny wyraz ciągu nie jest podzielny przez p. Jasne jest również, że ciąg (a_k) jest okresowy modulo p, co więcej jego okres jest nie dłuższy niż $\frac{p+1}{2}$, gdyż wszystkie wartości ciągu dają resztę postaci $2a^2 - 1$, a reszt takiej postaci jest $\frac{p+1}{2}$. A zatem, wśród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p+1}{2}}$ albo jest liczba podzielna przez p i wszystkie kolejne wartości ciągu nie są podzielne przez p albo nie ma takiej wartości i żadna kolejna wartość ciągu również nie jest podzielna przez p, gdyż ciąg jest cykliczny modulo p. W każdym razie a_n nie dzieli się przez p gdyż $n > \frac{p+1}{2}$. A zatem n i a_n są względnie pierwsze.

Zadanie 17.

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że funkcja $f(x) = x^n$ jest sumą n funkcji okresowych.

Rozwiązanie

Dowiedziemy indukcyjnie, że wielomian stopnia n nie jest sumą n funkcji okresowych. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech zatem $n > 1$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, gdzie P jest wielomianem stopnia n, a f_i jest okresowa o okresie t_i. Zatem $P(x+t_n)-P(x) = \sum_{i=1}^{n-1}(f(x+t_n) - f(x))$, ale po lewej stronie mamy wielomian stopnia $n-1$, a po prawej sumę $n-1$ funkcji okresowych. Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem indukcyjnym, która dowodzi tezy zadania.

Zadanie 18.

Dany jest $(k+l)$–elementowy zbiór $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+l}\}$ liczb rzeczywistych zawartych w przedziale $[0,1]$ (k i l są dodatnimi liczbami całkowitymi). k-elementowy podzbiór zbioru A nazywamy *dobrym* jeśli

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{x \in A} x - \frac{1}{l} \sum_{y \in S \setminus A} y \right| \leqslant \frac{k+l}{2kl}.$$

Udowodnić, że liczba dobrych podzbiorów zbioru S jest nie mniejsza niż $\frac{2}{k+l}\binom{k+l}{k}$.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolną permutację $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+l})$ ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_{k+l})$. Przyjmijmy dla wygody, że $a_i = a_{k+l+i}$ dla $i \in \mathbb{Z}$ oraz oznaczmy $A_j = \{a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_{j+k}\}$. Udowodnimy, że spośród zbiorów A_j $(j = 1, 2, \ldots, k+l)$ co najmniej dwa są dobre. Połóżmy jeszcze $c_j = \frac{1}{k}\sum_{x\in A_j} x - \frac{1}{l}\sum_{y\in S\setminus A_j} y$. Zauważmy dwie rzeczy: po pierwsze $\sum_{j=1}^{k+l} c_j = 0$. Wynika to stąd, że dowolny element a_i zostanie policzony k razy z wagą $\frac{1}{k}$ i l razy z wagą $-\frac{1}{l}$. Po drugie

$$|c_j - c_{j-1}| = \left|\frac{1}{k}\sum_{x\in A_j} x - \frac{1}{l}\sum_{y\in S\setminus A_j} y - \frac{1}{k}\sum_{x\in A_{j-1}} x + \frac{1}{l}\sum_{y\in S\setminus A_{j-1}} y\right| =$$

$$= \frac{1}{k} + \frac{1}{l}|a_{j+k} - a_j| \leqslant \frac{k+l}{kl}.$$

Nazwijmy liczbę rzeczywistą *dobrą*, jeżeli jej moduł nie przekracza $\frac{k+l}{2kl}$. Z powyższej nierówności wynika, że jeżeli c_j nie jest dobra, to c_{j+1} jest dobra lub jest tego samego znaku. Przypuśćmy teraz, że co najwyżej jedna z liczb c_j (niech to będzie c_1) jest dobra. Wówczas liczby $c_2, c_3, \ldots c_{k+l}$ są tego samego znaku i mamy sprzeczność:

$$\left|\sum_{j=1}^{k+l} c_j\right| \geqslant \left|\sum_{j=2}^{k+l} c_j\right| - |c_1| \geqslant |c_2| - \frac{k+l}{2kl} > 0.$$

Wobec tego co najmniej dwa spośród zbiorów A_j są dobre.

Licząc po wszystkich permutacjach ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_{k+l})$ otrzymaliśmy co najmniej $2(k+l)!$ dobrych zbiorów. Pozostaje sprawdzić ile razy mogliśmy policzyć ustalony zbiór A. Otóż najpierw wybieramy wskaźnik j taki, że $A = A_j$ na $k+l$ sposobów, następnie ustawiamy elementy zbioru A na swoich miejscach na $k!$ sposobów oraz pozostałe elementy na $l!$ sposobów. Łącznie zbiór A wystąpił $(k+l)k!l!$ sposobów, zatem liczba dobrych zbiorów to przynajmniej $\frac{2(k+l)!}{(k+l)k!l!} = \frac{2}{k+l}\binom{k+l}{k}$.

Zawody drużynowe:

Zadanie 1.

Liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}=1.$$

Udowodnić nierówność

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots\sqrt{x_n}\geqslant(n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenie $a_i=\frac{1}{1+x_i}$. Wówczas $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ oraz $x_i=\frac{1-a_i}{a_i}=\frac{1}{a_i}(\sum_{j\neq i}a_j)$. Z nierówności między średnimi otrzymujemy:

$$\sqrt{\frac{\sum_{j,j\neq i}\frac{a_j}{a_i}}{n-1}}\geqslant\frac{\sum_{j,j\neq i}\sqrt{\frac{a_j}{a_i}}}{n-1}\quad\text{oraz}\quad\frac{\sum_{j,j\neq i}\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}}{n-1}\geqslant\sqrt{\frac{n-1}{\sum_{j,j\neq i}\frac{a_j}{a_i}}}.$$

Korzystając z tych nierówności mamy:

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots\sqrt{x_n}=\sum_i\sqrt{\sum_{j,j\neq i}\frac{a_j}{a_i}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i\neq j}\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}\geqslant$$

$$\geqslant(n-1)\sum_i\sqrt{\frac{1}{\sum_{j,j\neq i}\frac{a_j}{a_i}}}=(n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

Zadanie 2.

W trójkącie nierównoramiennym ABC środkowa AM przecina okrąg wpisany w punktach X i Y. Na okręgu wybrano takie punkty P, Q, że proste PX, QY i BC są równoległe. Proste AP i AQ przecinają prostą BC odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $BK=CL$.

Rozwiązanie:

Łatwo zobaczyć, że wystarczy pokazać, że $KM=LM$. Z twierdzenia Talesa mamy równości: $KM=\frac{PX\cdot AM}{AX}$ i $LM=\frac{QY\cdot AM}{AY}$, więc wystarczy pokazać, że $\frac{PX}{AX}=\frac{QY}{AY}$.

Zadanie 3.

(n,k)–turniejem nazywamy turniej składający się z k rund, w którym bierze udział n graczy, oraz spełniający warunki:

(i) Każdy gracz gra w każdej rundzie i każdych dwóch graczy spotyka się co najwyżej raz

(ii) Jeśli gracz A spotyka gracza B w rundzie i, gracz C spotyka gracza D w rundzie i, gracz A spotyka gracza C w rundzie j, to gracz B spotyka gracza D w rundzie j.

Wyznaczyć wszystkie pary (n,k) liczb naturalnych, dla których istnieje (n,k)–turniej.

Rozwiązanie:

Rozważmy graf (n,k)–turnieju; jego wierzchołkami są uczestnicy, a krawędziami — mecze. Udowodnimy indukcyjnie ze względu na liczbę rund, że jego spójne składowe mają rozmiary będące liczbami postaci 2^q. Na początku wystarczy przyjąć $q = 0$. Załóżmy teraz, że mamy już rozegranych l rund i U jest spójną składową grafu. Jeżeli w $(l+1)$–szej rundzie każdy zawodnik z U gra z zawodnikiem z U, to teza indukcyjna zachodzi. Przypuśćmy zatem, że zawodnik u ze składowej U gra z zawodnikiem v ze składowej V. Rozważmy dowolnego zawodnika u' ze składowej U. Z definicji spójnej składowej istnieje ciąg zawodników $u_0, u_1, \ldots, u_m$ z U, że $u_0 = u$, $u_m = u'$ oraz u_i grał z u_{i+1} w rundzie $r_i \leqslant l$. Konstruujemy ciąg $v_0, v_1, \ldots, v_m$ w następujący sposób: $v_0 = v$ oraz v_{i+1} jest przeciwnikiem v_i z rundy r_i. Z powyższej konstrukcji widać, że u_i musi grać z v_i, w szczególności u' gra z v_m. Ponadto jasne jest, że zaodnicy v_i należą do składowej V. Ponieważ u' był dowolnie wybrany, więc każdy zawodnik z U gra z jakimś zawodnikiem z V, w szczególności $|U| \leqslant |V|$. Analogicznie każdy zawodnik z V gra z zawodnikiem z U oraz $|V| \leqslant |U|$. Wobec tego $|U| = |V|$, ale w tej sytuacji $U \cup V$ jest spójną składową grafu po $l+1$ rundach i ma rozmiar $2^q + 2^q = 2^{q+1}$. Kończy to dowód tezy indukcyjnej. Zauważmy, że po k rundach każda spójna składowa ma rozmiar co najmniej $k+1$ (zawodnik i wszyscy jego przeciwnicy), więc jeśli q jest najmniejszą taką liczbą całkowitą, że $2^q > k$, to w oczywisty sposób 2^q dzieli rozmiar każdej składowej, a więc także $2^q|n$.

Udowodnimy teraz, że jeżeli istnieje taka liczba q, że $k < 2^q$ i $2^q|n$, to istnieje (n,k)–turniej. Wystarczy pokazać, że istnieje $(2^q,k)$–turniej, gdyż wtedy dla otrzymania (n,k)–turnieju wystarczy rozegrać pewną liczbę rozłącznych $(2^q,k)$–turniejów. Zauważmy teraz, że jeżeli istnieje (n,k)–turniej, to istnieje też (n,k')–turniej, gdzie $k' < k$. Istotnie, wystarczy rozegrać k' pierwszych rund (n,k)–turnieju. Z powyższych spostrzeżeń wynika, że wystarczy udowodnić istnienie $(2^q, 2^q-1)$–turnieju. Konstruujemy go w następujący sposób: niech X będzie zbiorem wszystkich ciągów $(x_1, \ldots, x_q)$, gdzie $x_i \in \{0,1\}$. Oczywiście $|X| = 2^q$, więc będziemy je utożsamiać z zawodnikami. Wprowadźmy w X dodawanie modulo 2 (informatyk powiedziałby "xor") i oznaczmy je przez $+$: $(x_1, \ldots, x_q) + (y_1, \ldots, y_q) = (x_1 + y_1, \ldots, x_q + y_q)$. W X jest $2^q - 1$ ciągów niezerowych; runda polega na tym, że bierzemy ustalony ciąg $z \in X \setminus \{0\}$ i zawodnicy x i y grają mecz wtedy i tylko wtedy, gdy $x+y = z$. Wówczas warunek (i) jest spełniony w oczywisty sposób; aby sprawdzić warunek (ii) załóżmy, że $a+b=c+d=i$ oraz $a+c=j$. Wtedy $b+d=b+(a+a)+(c+c)+d=(b+a)+(a+c)+(c+d)=i+j+i=(i+i)+j=j$, gdyż dla dowolnego x zachodzi $x+x=0$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają pary (n,k), dla których $k<2^q$, gdzie 2^q jest najwyższą potęgą dwójki dzielącą n.

Zadanie 4.

Dany jest nierozkładalny i niestały wielomian P o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że dla każdego $r\in\mathbb{N}$ istnieje $k\in\mathbb{Z}$ o tej własności, że istnieją różne liczby pierwsze $p_1,p_2,\ldots,p_r$ takie, że p_i dzieli $P(k)$, ale p_i^2 nie dzieli $P(k)$ dla $i=1,2,\ldots,r$.

Uwaga: Wielomian P nazywamy nierozkładalnym, jeśli dla dowolnych wielomianów Q, R o współczynnikach całkowitych zachodzi implikacja: jeżeli $P=QR$, to $Q\equiv\pm1$ lub $R\equiv\pm1$.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p o tej własności, że $p|P(k)$, ale $p^2\not|P(k)$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wówczas tezę otrzymamy z Chińskiego Twierdzenia o Resztach: jeśli $p_1,p_2,\ldots,p_r$ są liczbami pierwszymi o powyższej własności, tzn. dla $i=1,2,\ldots,r$ istnieje $k_i\in\mathbb{Z}$ takie, że $p_i|P(k_i)$ oraz $p_i^2\not|P(k_i)$, to z Chińskiego Twierdzenia o Resztach istnieje k takie, że $k\equiv k_i \pmod{p_i^2}$ dla $i=1,2,\ldots,r$. Wtedy jasne jest, że $P(k)$ posiada żądaną własność.

W pierwszej kolejności udowodnimy, że zbiór liczb pierwszych p takich, że $p|P(k)$ dla pewnego $k\in\mathbb{Z}$ jest nieskończony. Dla dowodu niewprost załóżmy, że zbiór ten jest skończony i przyjmijmy, że jego elementami są liczby $p_1,p_2,\ldots,p_m$. Oczywiście $m\geqslant1$, gdyż wielomian P jest niestały. Ponieważ wielomian P jest niestały wiadomo również, że istnieje takie u, że $P(u)\neq0$. Wtedy oczywiście

$$P(u)=(-1)^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_m^{\alpha_m}$$

gdzie $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ są pewnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. Niech teraz $l\in\mathbb{Z}$. Mamy

$$P(u+lp_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\ldots p_k^{\alpha_k+1})=(-1)^{\beta_0}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_m^{\beta_m}$$

dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$. Liczby $P(u)$ oraz $P(u+lp_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\ldots p_m^{\alpha_m+1})$ dają tą samą resztę z dzielenia przez liczbę $p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\ldots p_m^{\alpha_m+1}$, a więc, w szczególności, dla $1\leqslant i\leqslant m$, mamy

$$P(u)\equiv P(u+lp_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\ldots p_m^{\alpha_m+1}) \pmod{p_i^{\alpha_i+1}}.$$

Czyli najwyższe potęgi liczby p_i, które są wspólnymi dzielnikami liczb $P(u)$ oraz $P(u + lp_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1} \dots p_m^{\alpha_m+1})$ są takie same. Stąd $\alpha_i = \beta_i$. A zatem, dla każdego $l \in \mathbb{Z}$:

$$P(u + lp_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1} \dots p_m^{\alpha_m+1}) = \pm P(u).$$

gdyż dla każdego x całkowitego liczba $P(x)$ nie posiada czynników pierwszych różnych od $p_1, p_2, \dots, p_m$. Z powyższej równości wynika, że co najmniej jedna z wartości: $P(u)$ lub $-P(u)$ jest przyjmowana przez wielomian P nieskończenie wiele razy, ale to jest niemożliwe, gdyż wielomian P jest niestały. Uzyskana sprzeczność kończy dowód tej części rozumowania.

Wykażemy teraz, że zbiór liczb pierwszych p takich, że $p|P(k)$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$ oraz spełniających implikację: $p|P(k)$ implikuje $p^2|P(k)$ jest skończony. Oczywiście jest to podzbiór zbioru pojawiającego się w poprzedniej części rozumowania, który jak już wiemy jest nieskończony. A więc otrzymamy to co zapowiedzieliśmy na początku, a zatem otrzymamy też tezę. Załóżmy zatem, że p jest taką liczbą pierwszą i niech k będzie takie, że $p|P(k)$, czyli też $p^2|P(k)$. Ale mamy też $p|P(p+k)$, a zatem również $p^2|P(p+k)$. Jeśli $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, to wtedy

$$0 \equiv P(p+k) = a_n(p+k)^n + a_{n-1}(p+k)^{n-1} + \dots + a_1(p+k) + a_0 \equiv$$

$$\equiv p(na_nk^{n-1}+a_{n-1}(n-1)k^{n-2}+\dots+a_1)+(a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\dots+a_1k+a_0) =$$
$$= pP'(k) + P(k) \equiv pP'(k) \pmod{p^2},$$

gdzie w drugiej kongruencji wykorzystaliśmy wzór dwumianowy Newtona oraz fakt, że reszta składników redukuje się modulo p^2. Otrzymaliśmy zatem, że $p|P'(k)$. Jednakże, wielomian P jest wielomianem nierozkładalnym, a więc w szczególności jest względnie pierwszy ze swoją pochodną, która jest wielomianem o stopień mniejszym. Wynika stąd, że istnieją wielomiany $A(x), B(x)$ o współczynnikach całkowitych oraz niezerowa liczba całkowita c taka, że prawdziwa jest równość

$$A(x)P(x) + B(x)P'(x) = c.$$

Wstawiając do powyższej równości $x = p$ otrzymujemy, że $p|c$, a więc wszystkie liczby pierwsze p o danej własności są dzielnikami pewnej niezerowej liczby całkowitej, a to oznacza, że jest ich skończenie wiele. Tym samym rozwiązanie zadania jest zakończone.

Mecz matematyczny:

Zadanie 1.

Odejmowacz i Dodawacz grają w następującą grę: dany jest ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Ruch Dodawacza polega na dodaniu do pierwszej liczby w ciągu jednej z pozostałych liczb i przestawieniu jej na koniec. Ruch Odejmowacza polega na odjęciu od pierwszej liczby jednej z pozostałych liczb tak, by otrzymany wynik był nieujemny i przestawieniu otrzymanej liczby na koniec. Jeżeli Odejmowacz nie może wykonać ruchu, przestawia liczbę na koniec bez zmieniania jej.

Odejmowacz wygrywa, jeżeli po jednym z jego ruchów w ciągu występuje liczba 0. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n \geqslant 2$ i wszystkie ciągi $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, dla których Odejmowacz ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie

Jasne jest, że dla $n = 1$ i $n = 2$ Odejmowaczowi nie uda się wykonać żadnego ruchu i tym samym przegra. Przypuśćmy zatem, że $n > 2$. Rozważmy dwa przypadki:

1° n jest liczbą parzystą. Zauważmy, że istnieje $\frac{n}{2}$ spośród tych liczb, na których operuje tylko Odejmowacz (konkretnie co druga, w zależności od tego, czy zaczyna, czy nie). Wobec tego suma tych liczb się nie zwiększa, a jeżeli wszystkie te liczby są dodatnie, to wśród dwóch kolejnych ruchów przynajmniej raz zmniejsza (nie jest możliwe trafić na ściśle najmniejszą liczbę dwa razy z rzędu), więc po skończonej liczbie ruchów musi pojawić się liczba 0. Odejmowacz wygrywa.

2° n jest liczbą nieparzystą. Przypuśćmy, że Dodawacz zaczyna (w przeciwnym wypadku dowodzimy analogicznie). Jest jasne, że po obejściu pierwszego kółka Odejmowaczowi nie uda się wygrać, jeżeli dodawacz będzie dodawał do swoich liczb największą aktualnie występującą. Wobec tego po pierwszym kółku zachodzą nierówności $a_1 < a_3 < a_5 \ldots < a_n$ oraz $a_1 > a_j$ dla j parzystych. Udowodnimy przez indukcję, że taka sytuacja utrzyma się po każdym ruchu Dodawacza, więc Odejmowacz nie wygra, bo od a_1 może odjąć tylko liczby mniejsze. Teraz Odejmowacz rusza się: odejmuje coś od a_1 i przeindeksowuje ciąg: teraz zachodzą nierówności $a_2 < a_4 < \ldots < a_{n-1}$ oraz $a_2 > a_j$ dla j nieparzystych (gdyż poprzednio było $a_3 > a_j$ dla j parzystych i $a_3 > a_1$, a liczba a_1 się jeszcze zmniejszyła). Teraz Dodawacz dodaje do nowego a_1 nowe a_{n-1} (największą liczbę spośród wypisanych) i przeindeksowuje ciąg: poprzednie nierówności wyglądają tak: $a_1 < a_3 < \ldots a_{n-2}$ i $a_1 > a_j$ dla j parzystych. Ponadto a_n jest teraz największą liczbą w ciągu, więc teza indukcyjna zachodzi, co kończy dowód. Odejmowacz przegrywa.

Zadanie 2.

Dany jest zbiór $n \geqslant 3$ punktów płaszczyzny S, z których żadne dwa nie są współliniowe. Wykazać, że istnieje taki zbiór T składający się z $2n-5$ punktów płaszczyzny, że każdy trójkąt wyznaczony przez 3 różne punkty zbioru S zawiera punkt ze zbioru T.

Rozwiązanie

Niech $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ będą punktami płaszczyzny zbioru S, przy czym załóżmy, że $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ - możemy tak założyć, gdyż bez straty ogólności możemy obrócić płaszczyznę tak aby liczby x_i były różne, a potem przenumerować punkty. Rozważamy odległość punktu (x_i, y_i) do prostej przechodzącej przez punkty $(x_j, y_j), (x_k, y_k)$ dla $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$ oraz $i \neq j \neq k \neq i$. Spośród wszystkich takich odległości wybierzmy najmniejszą i oznaczmy przez d jej połowę. Zdefiniujmy zbiór T składający się z $2n-4$ punktów jako

$$T = \{(x_i, y_i - d), (x_i, y_i + d) : i = 2, 3, \ldots, n-1\}.$$

Rozważmy dowolny trójkąt składający się z punktów zbioru S i załóżmy, że odpowiadające im indeksy to $k < l < m$. Łatwo zauważyć, że wówczas jeden z punktów $(x_l, y_l - d)$, $(x_l, y_l + d)$ znajduje się wewnątrz tego trójkąta - wynika to stąd, że prosta równoległa do osi OY przechodząca przez punkt (x_l, y_l) przecina odcinek łączący punkty $(x_k, y_k), (x_m, y_m)$ gdyż $x_k < x_l < x_m$. A zatem T jest zbiorem $2n-4$ punktów spełniających dany warunek. Zauważmy jednak, że jeden punkt ze zbioru T jest niepotrzebny. Istotnie, otoczka wypukła zbioru S jest wielokątem wypukłym o wierzchołkach w zbiorze S. Jako, że otoczka zawiera co najmniej 3 wierzchołki możemy wybrać wierzchołek (x_i, y_i) taki, że $1 < i < n$. Jasne jest, że wówczas jeden z punktów $(x_i, y_i - d), (x_i, y_i + d)$ leży po za otoczką wypukłą zbioru S, czyli nie leży we wnętrzu żadnego trójkąta wyznaczonego przez trzy różne punkty zbioru S. A zatem usuwając go otrzymujemy zbiór $2n-5$ punktów, który spełnia żądany warunek.

Zadanie 3.

Dany jest graf G o n wierzchołkach i m krawędziach. Podzbiór wierzchołków grafu G nazywamy *niezależnym* jeśli żadne dwa wierzchołki tego podzbioru nie są połączone krawędzią. Dowieść, że w zbiorze wierzchołków grafu G istnieje zbiór niezależny o mocy nie mniejszej niż $\dfrac{n^2}{2m+n}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że największy zbiór niezależny ma moc co najmniej $\sum_v \frac{1}{d(v)+1}$, gdzie sumowanie przebiega po wszystkich wierzchołkach grafu, a $d(v)$ jest stopniem wierzchołka v. Skonstruujmy zbiór niezależny w następujący sposób:

ponumerujmy w losowy sposób wierzchołki grafu liczbami $1, 2, \ldots, n$ (każde numerowanie losujemy z równym prawdopodobieństwem), a następnie wybierajmy wierzchołki zachłannie, tzn. bierzemy wierzchołek o numerze k wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołki o numerach $1, 2, \ldots, k-1$ nie sa jego sąsiadami. Przy tej konstrukcji wierzchołek v jest w zbiorze niezależnym z prawdopodobieństwem $\frac{1}{d(v)+1}$, ponieważ dzieje się tak, gdy ma numer mniejszy od wszystkich swoich sąsiadów. Wobec tego średnia liczba wierzchołków (formalnie: wartość oczekiwana) jest równa $\sum_v \frac{1}{d(v)+1}$. Niemożliwe jest, żeby każdy zbiór był poniżej średniej; w takim razie któryś zbiór niezależny ma moc większą lub równą $\sum_v \frac{1}{d(v)+1}$.

Aby zakończyć dowód wystarczy skorzystać z nierówności między średnimi:

$$\sum_v \frac{1}{d(v)+1} \geqslant \frac{n^2}{\sum_v (d(v)+1)} = \frac{n^2}{2m+n}.$$

Zadanie 4.

Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ spełniające warunek $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$, dla wszystkich $x, y > 0$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że $f(x) \leqslant 1$ dla wszystkich x. Przypuśćmy przeciwnie, że dla pewnego x mamy $f(x) > 1$. Wówczas podstawiając $y = \frac{x}{f(x)-1}$ otrzymujemy $f(x)f(\frac{xf(x)}{f(x)-1}) = f(\frac{xf(x)}{f(x)-1})$, czyli $f(x) = 1$ wbrew przyjętemu założeniu.

Mamy $f(yf(x)) \leqslant 1$, skąd widzimy, że funkcja jest nireosnąca. Przypuśćmy teraz, że istnieje t, dla którego $f(t) = 1$. Wówczas podstawiając $x = t$ mamy $f(y) = f(y+t)$, czyli f jest okresowa. Łącząc to z monotonicznością dostajemy, że $f(x) = 1$ dla każdego x.

Załóżmy teraz, że $f(x) < 1$ dla każdego x. W szczególności $f(yf(x)) < 1$, czyli f jest ściśle malejąca, a więc różnowartościowa. Podstawiając $x = t,\ y = \frac{1}{f(t)}$ mamy $f(t) + f(1) = f(t + \frac{1}{f(t)})$ dla dowolnego t. Podstawiając $x = 1,\ y = \frac{t}{f(1)}$ dostajemy $f(1) + f(t) = f(1 + \frac{t}{f(1)})$. Łącząc te dwie równości z różnowartościowością funkcji f otrzymujemy $t + \frac{1}{f(t)} = 1 + \frac{t}{f(1)}$, czyli $f(t) = \frac{1}{1+ct}$, gdzie $c = \frac{1}{f(1)} - 1$ jest liczbą dodatnią.

Łącząc te dwa przypadki widzimy, że $f(x) = \frac{1}{1+cx}$, gdzie $c \geqslant 0$. Przez bezpośrednie podstawienie sprawdzamy, że funkcje tej postaci spełniają wyjściowe równanie.

Zadanie 5.

Dany jest wielomian P o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że jeśli

$$P(x) = (U_1(x))^2 + (U_2(x))^2 + \ldots + (U_k(x))^2$$

dla pewnego całkowitego dodatniego k i wielomianów rzeczywistych $U_1, \ldots, U_k$, to istnieje takie całkowite dodatnie m i wielomiany rzeczywiste $V_1, \ldots, V_m$, że

$$(P(x))^2 = (V_1(x))^4 + (V_2(x))^4 + \ldots + (V_m(x))^4.$$

Rozwiązanie

Na początek zauważmy, że jeśli wielomiany $F(x)$ i $G(x)$ są sumami czwartych potęg pewnych wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, to wielomian $F(x) \cdot G(x)$ również ma tę własność (wystarczy wymnożyć nawiasy). Co więcej, wiadomo, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na iloczyn wielomianów stopnia 1 oraz iloczyn wielomianów stopnia 2 nie posiadających pierwiastka rzeczywistego. Możemy więc zapisać $P(x) = c(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}P_1(x)P_2(x)\ldots P_l(x)$, gdzie $P_i(x)$ są nierozkładalnymi i unormowanymi wielomianami stopnia 2, a $c \geqslant 0$ liczbą rzeczywistą. Jasne jest, że krotności wszystkich pierwiastków są parzyste, gdyż w przeciwnym razie P przyjmowałby wartości ujemne, a to jest niemożliwe gdyż jest sumą kwadratów wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. A więc wielomiany $(x-a_i)^{2\alpha_i}$ są czwartymi potęgami, a to oznacza, że z uwagi poczynionej na początku wystarczy wykazać, że wielomiany $(P_i(x))^2$, dla $i = 1, 2, \ldots, l$ są sumami czwartych potęg wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Niech $f(x) = x^2 + ax + b$ będzie dowolnym unormowanym trójmianem kwadratowym bez pierwiastków. Jasne jest, że wystarczy, iż tezę wykażemy dla $f(x+u)$, gdzie u jest dowolną liczbą rzeczywistą. W szczególności możemy przyjąć $u = \frac{-b}{2}$. Ale $f(x - \frac{b}{2}) = x^2 - \frac{\Delta}{4}$, przy czym wiadomo, że $\Delta < 0$. Wystarczy więc udowodnić tezę dla trójmianu $f(x) = x^2 + t^2$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Ale

$$\frac{1}{2}\left((x - \frac{1}{\sqrt{3}}t)^4 + (x + \frac{1}{\sqrt{3}}t)^4\right) = x^4 + 2x^2t^2 + c^4 = (x^2 + t^2)^2,$$

a zatem rozwiązanie zadania jest zakończone.

Zadanie 6.

Dowieść, że jeśli a, b, c są liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, to zachodzi nierówność

$$2(a + b + c) - abc \leqslant 10.$$

Rozwiązanie

Jeśli liczby a, b, c są ujemne, to po zamianie dwóch z nich na liczby przeciwne nie zmieniamy danego warunku, a lewa strona nierówności zwiększa się. Jeśli dokładnie dwie spośród liczb a, b, c są ujemne to zamieniając jedną z ujemnych liczb na przeciwną również nie zmieniamy danego warunki, a zwiększamy lewą stronę nierówności. Wystarczy więc ograniczyć się do dwóch przypadków: wszystkie liczby a, b, c są nieujemne lub dokładnie jedna z liczb a, b, c jest ujemna. Rozpatrzmy pierwszy z nich.

Jeśli $abc \geqslant 1$, to z nierówności między średnią arytmetyczną a kwadratową

$$2(a+b+c) - abc \leqslant 2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} - 1 = 6\sqrt{3} - 1 < 10.$$

W przeciwnym razie pewna z liczb a, b, c jest mniejsza niż 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a < 1$. Wówczas

$$2(a+b+c) - abc \leqslant 2\left(a + 2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right) = 2a + 2\sqrt{18 - 2a^2} \leqslant 10,$$

przy czym druga z nierówności zachodzi, gdyż proste przekształcenia pokazują, że równoważna jest ona nierówności $0 \leqslant 3(1-a)(\frac{7}{3} - a)$.

Załóżmy teraz, że dokładnie jedna z liczb a, b, c jest ujemna, niech będzie to liczba c. Nierówność możemy przepisać równoważnie

$$-2(a+b+c) \geqslant -10 - abc$$

lub też

$$\frac{1}{2}((a-2)^2 + (b-2)^2 + (c+1)^2) \geqslant -1 + 3c - abc.$$

Ale skoro $c < 0$, to

$$\begin{aligned} -1 + 3c - abc \leqslant -1 + 3c - c\left(\tfrac{a^2+b^2}{2}\right) &= \tfrac{1}{2}(-2 + 6c - c(9 - c^2)) = \\ &= \tfrac{1}{2}(-2 - 3c + c^3) = \tfrac{1}{2}(c+1)^2(c-2) \leqslant 0, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Zadanie 7.

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości z A, a E — punktem przecięcia prostych AO i BC. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B i C przecinają się w punkcie T, a prosta AT przecina ten okrąg w punkcie F. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie DEF jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie:

Rozważmy złożenie inwersji o środku A i kwadracie promienia $AB \cdot AC$ z symetrią względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$. W tym przekształceniu punkty B i C prechodzą na siebie nawzajem; wobec tego prosta BC i okrąg opisany na trójkącie ABC też przechodzą na siebie nawzajem. Z lematu o symedianie wiemy, że prosta AT jest symedianą w trójkącie ABC, jej obraz jest zatem środkową i środek M odcinka BC jest obrazem punktu F. Mamy równość $\sphericalangle BAE = \sphericalangle FAC$, więc proste AE i AF przechodzą na siebie nawzajem i obrazy E', F' punktów E, F są punktami przecięcia prostych AF, AE z okręgiem. Znów korzystając z powyższej równości kątów dostajemy równość łuków BE' i $F'C$, a więc punkty E' i F' są symetryczne względem symetralnej odcinka BC i taki też jest okrąg opisany na trójkącie $E'F'M$. Jest więc styczny do prostej BC w punkcie M. Te figury są obrazami okręgów opisanych na trójkątach DEF i ABC, które w takim razie też są styczne.

Zadanie 8.

Okrąg ω jest okręgiem wpisanym w trójkąt ABC, stycznym do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt T jest drugim punktem przecięcia prostej AD z ω, a punkty M, N — odpowiednio drugimi punktami przecięcia prostych BT, CT z ω. Okręgi ω_1, ω_2 są styczne do ω w punktach T, D i przecinają się w punktach X, Y. Dowieść, że punkty X, Y, M, N leżą na jednym okręgu lub na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Jeżeli $AC = BC$, to odcinek XM jest symetryczny do YN względem prostej AD, więc teza oczywiście zachodzi (trapez równoramienny da się wpisać w okrąg). Przypuśćmy, że $AC \neq BC$. Wykażemy najpierw, że proste BC, XY, MN i styczna k do okręgu ω w punkcie T przecinają się w jednym punkcie. Istotnie, BC, XY i k są współpękowe jako osie potęgowe par okręgów spośród trójki ω, ω_1, ω_2. Aby przekonać się o współpękowości prostych BC, MN i k wystarczy dokonać rzutowania środkowego płaszczyzny, które okrąg ω przeprowadza na okrąg i przekształca AC i BC na równe odcinki. Wówczas trzy wspomniane proste są równoległe, a więc w sensie geometrii rzutowej przecinają się w jednym punkcie.

Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych BC, XY, MN i k. Korzystając z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu mamy $PM \cdot PN = PD^2 = PX \cdot PY$, skąd już łatwo wynika teza.

Zadanie 9.

Punkty O, I są odpowiednio środkami okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC. Punkt D jest punktem styczności okręgu wpisanego z bokiem BC, a punkty E i F są odpowiednio punktami przecięcia prostych AI i AO z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Proste FI i ED przecinają się w punkcie S, proste SC i BE — w M, a proste AC i BF — w N. Udowodnić, że punkty M, I, N są współliniowe.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że punkt S leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Niech $T \neq F$ będzie punktem przecięcia prostej FI z okręgiem opisanym na trójkącie ABC, a L i K niech będą odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami AC i AB. Mamy wówczas równości

$$\angle ITA = \angle FTA = 90^\circ = \angle ILA = \angle IKA,$$

skąd wynika, że punkty T, L, K, A leżą na okręgu o średnicy AI. A zatem $\angle TLA = \angle TKA$, co pociąga za sobą $\angle TLC = \angle TKB$. Mamy też $\angle TCL = \angle TCA = \angle TBA = \angle TBK$, a stąd trójkąty TCL i TBK są podobne. Zachodzą więc następujące równości

$$\frac{CT}{BT} = \frac{CL}{BK} = \frac{CD}{BD}.$$

Z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że prosta TD jest dwusieczną kąta CTB. Przechodzi zatem przez środek łuku CB, czyli punkt E. A więc proste ED i FI przecinają się w T skąd już wynika, że punkty S i T pokrywają się.

Aby zakończyć dowód zastosujmy twierdzenie Pascala do samoprzecinającego się sześciokąta $AEBFTC$ wpisanego w okrąg. Dostajemy wówczas, że przecięcie prostych AE i FT (punkt I), przecięcie prostych EB i TC (punkt M) oraz przecięcie prostych BF i CA (punkt N) są współliniowe, co kończy dowód.

10. Dany jest skończony zbiór liczb pierwszych S. Dowieść, że istnieje liczba całkowita dodatnia n, która jest przedstawialna w postaci $a^p + b^p$ dla każdej liczby pierwszej $p \in S$ (a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi) oraz nie jest przedstawialna w postaci $a^p + b^p$ dla wszystkich liczb pierwszych $p \notin S$.

Rozwiązanie

Jasne jest, że jeśli S jest zbiorem pustym wystarczy przyjąć $n = 1$. Załóżmy więc, że S nie jest pusty i niech liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą wszystkimi elementami zbioru S. Wykażemy, że liczba $n = 2^{p_1 p_2 \cdots p_k + 1}$ spełnia żądany warunek.

Jako, że $2^{p_1p_2\dots p_k+1} = 2^{p_1p_2\dots p_k} + 2^{p_1p_2\dots p_k}$ jasne jest, że wystarczy pokazać, że jeśl p jest liczbą pierwsza, różną od $p_1, p_2, \dots, p_k$, to nie istnieją liczby całkowite dodatnie a, b takie, że $2^{p_1p_2\dots p_k+1} = a^p + b^p$. Dla dowodu niewprost załóżmy, że istnieją a, b o tej własności. Niech $a = 2^k a_0$ oraz $b = 2^l b_0$, gdzie a_0 i b_0 są nieparzyste. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $k \geqslant l$. Dostajemy więc równanie $2^{p_1p_2\dots p_k+1-lp} = 2^{kp-lp}a_0^p + b_0^p$. Zauważmy, że jeśli $k > l$ to po prawej stronie występuje liczba całkowita nieparzysta większa niż 1. Ale po lewej stronie wystąpić może tylko liczba niecałkowita, liczba 1 lub liczba parzysta. Stąd $k = l$.

Mamy zatem równanie $2^m = a_0^p + b_0^p$, gdzie $m = p_1p_2\dots p_k + 1 - lp$ oraz a_0, b_0 są nieparzyste. Rozpatrzymy dwa przypadki: $p = 2$ i $p > 2$.

W obu przypadkach jasne jest, że m jest liczbą całkowitą dodatnią (gdyż inaczej równanie nie jest spełnione). Co więcej, jeśli $p = 2$, to m jest liczbą parzystą (gdyż liczby p_i są nieparzyste), a zatem $m \geqslant 2$ i lewa strona równania jest podzielna przez 4. Ale a_0, b_0 są nieparzyste, a zatem $a_0^2 + b_0^2 \equiv 2 \pmod 4$, sprzeczność.

Załóżmy teraz, że $p > 2$. Możemy więc rozłożyć

$$2^m = a_0^p + b_0^p = (a_0 + b_0)(a_0^{p-1} - a_0^{p-2}b_0 + \dots - a_0 b^{p-2} + b_0^{p-1}).$$

Wynika stąd, że liczba $a_0 + b_0$ jest potęgą liczby 2, jeśli więc $a_0 + b_0 = 2^t$ to dostajemy równanie

$$2^m = a_0^p + (2^t - a_0)^p = p2^t a_0^{p-1} - \binom{p}{2} 2^{2t} a_0^{p-2} + \dots - p2^{t(p-1)}a_0 + 2^{tp}.$$

Ponieważ $t > 0$, a liczby a_0 i p są nieparzyste, jasne jest, że liczba występująca po prawej stronie dzieli się przez 2 dokładnie w potędze t, a zatem $t = m$. Czyli $\frac{a_0^p + b_0^p}{a_0 + b_0} = 1$, a stąd $a = b = 1$ (gdyż $p > 1$). A więc w szczególności $m = 1$, czyli $p_1p_2\dots p_k = lp$. To jednak oznacza sprzeczność gdyż p jest liczbą pierwszą różną od $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Zadanie 11.

Wielomian P o współczynnikach całkowitych posiada pierwiastek rzeczywisty. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p postaci $4k+3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, dla których istnieje liczba naturalna n taka, że $p | P(n)$.

Rozwiązanie

Niech a_0 oznacza wyraz wolny wielomianu P. Jasne jest, że jeśli $a_0 = 0$, to teza jest spełniona, a zatem możemy przyjąć, że $a_0 \neq 0$. Jasne jest również, że w wielomianie $P(a_0x)$ wszystkie współczynniki są podzielne przez a_0, a zatem $\frac{P(a_0x)}{a_0}$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Co więcej, posiada on pierwiastek rzeczywisty (gdyż posiada go P) i jeśli teza zadania spełniona jest dla tego wielomianu to spełniona jest również dla wielomianu P. Zauważmy przy tym, że wyraz wolny tego wielomianu jest równy 1. A zatem bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a_0 = 1$. Co więcej możemy założyć, że wielomian P jest nierozkładalny na iloczyn wielomianów o współczynnikach całkowitych, gdyż z rozkładu P na iloczyn nierozkładalnych wielomianów o współczynnikach całkowitych możemy wybrać ten wielomian, który posiada pierwiastek rzeczywisty i udowodnić tezę dla niego i wówczas automatycznie teza zachodzi również dla wielomianu P.

Załóżmy więc, że P jest nierozkładalnym wielomianem o współczynnikach całkowitych posiadającym wyraz wolny równy 1 oraz pierwiastek rzeczywisty α. Przyjmijmy jeszcze, że współczynnik wiodący wielomianu P jest dodatni. Niech Q będzie niezerowym wielomianem o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest α i jego stopień jest możliwie najmniejszy. Twierdzimy, że $Q|P$. Istotnie, zapiszmy dzielenie z resztą: $P(x) = Q(x)G(x) + R(x)$, gdzie $R(x)$ jest wielomianem o współczynnikach wymiernych. Niech c będzie taką liczbą całkowitą, że $cR(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, czyli $cP(x) = cQ(x)G(x) + cR(x)$. Wstawiając do równości $x = \alpha$ otrzymujemy $cR(\alpha) = 0$, ale cR jest wielomianem o współczynnikach całkowitych o stopniu mniejszym niż Q, a stąd $R \equiv 0$, czyli $Q|P$. Jako, że P jest wielomianem nierozkładalnym otrzymujemy równość $P(x) = Q(x)$ (możemy założyć, że Q również posiada dodatni współczynnik wiodący).

Zauważmy teraz, że α jest pierwiastkiem wielomianu P z krotnością 1. Istotnie, jeśli krotność α wynosiłaby co najmniej 2, to wówczas mielibyśmy $P'(\alpha) = 0$. Jest to sprzeczność gdyż $P'(x)$ jest niezerowym (łatwo zauważyć, że P nie może być stały) wielomianem o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest α oraz $degP' < degP$. W takim razie istnieje przedział (a, b), gdzie $a < b$, taki, że $P(x) < 0$, dla $x \in (a, b)$.

Tezę wykażemy indukcyjnie. Załóżmy, że mamy już l liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_l$, które dają resztę 3 z dzielenia przez 4 i dzielą pewną wartość wielomianu P. Znajdziemy kolejną taką liczbę pierwszą. Niech $A = p_1 p_2 \ldots p_l$ (jeśli $l = 0$, to przyjmujemy $A = 1$). Zauważmy, że dla każdego całkowitego u liczba $P(uA)$ nie dzieli się przez liczby $p_1, p_2, \ldots, p_l$ - wynika to natychmiast z faktu, że wyraz wolny wielomianu P jest równy 1. Weźmy takie u całkowite, że $P(uA) > 0$. Niech m będzie najwyższą potęgą liczby 2 dzielącą $P(uA)$, tzn. $P(uA) = 2^m t$, gdzie t jest liczbą nieparzystą. Jeśli $t \equiv 3 \pmod 4$ to liczba t posiada dzielnik pierwszy postaci $4k+3$ (gdyż $t > 0$) a jako, że nie jest to żadna z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_l$ to jest to nowa, szukana liczba pierwsza danej postaci. Załóżmy więc, że $t \equiv 1 \pmod 4$. Z twierdzenia Dirichleta istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych dających resztę 1 z dzielenia przez 2^{m+2}. Niech y będzie taką z nich, że $\frac{y(b-a)}{A} > 2^{m+2}$, tzn. w przedziale $(\frac{ya}{A}, \frac{yb}{A})$ znajduje się co najmniej 2^{m+2} liczb całkowitych (zauważmy, że $y \neq p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, l$, gdyż liczby p_i dają resztę 3 z dzielenia przez 4). Wybierzmy z nich taką liczbę całkowitą x, że $x \equiv u \pmod{2^{m+2}}$, wówczas $\frac{Ax}{y} \in (a, b)$, a stąd $P(\frac{Ax}{y}) < 0$. Jako, że y jest liczbą nieparzystą możemy rozważać liczbę $\frac{x}{y}$ modulo 2^{m+2} i mamy wtedy $\frac{x}{y} \equiv u \pmod{2^{m+2}}$. Wówczas $P(\frac{Ax}{y}) \equiv P(Au) \pmod{2^{m+2}}$ co oznacza, że $P(\frac{Ax}{y}) = -2^m \frac{c}{d}$, gdzie liczby $c, d > 0$ są względnie pierwsze oraz $\frac{c}{d} \equiv 3 \pmod 4$ (pamiętamy o tym, że t daje resztę 1 z dzielenia przez 4). Jasne jest, że $d | y^n$, gdzie n oznacza stopień wielomianu P, a skoro y jest liczbą pierwszą to d jest potęgą liczby y, a więc w szczególności daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Wynika stąd, że $c \equiv 3 \pmod 4$, a więc istnieje liczba pierwsza p postaci $4k + 3$ taka, że $p | c$. Jasne jest, że $p \neq p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, l$, gdyż wyraz wolny wielomianu P jest równy 1, a y nie jest żadną z liczb p_i dla $i = 1, 2, \ldots, l$. Mamy również $y \neq p$, skąd wynika, że istnieje taka liczba naturalna v, że $v \equiv \frac{Ax}{y} \pmod p$. Wówczas $p | P(v)$ i wystarczy przyjąć $p_{l+1} = p$.

Zadanie 12.

Dane są względnie pierwsze liczby naturalne $a, b > 1$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p o tej własności, że najwyższa potęga liczby p dzieląca liczbę $a^{p-1} - b^{p-1}$ jest nieparzysta.

Rozwiązanie

Dla danej liczby pierwszej p i $n \in \mathbb{N}$ niech $v_p(n)$ oznacza najwyższą potęgę, w której p dzieli n (jeśli p nie dzieli n, to $v_p(n) = 0$). Naszym celem jest wykazanie, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że liczba $v_p(a^{p-1} - b^{p-1})$ jest nieparzysta.

Załóżmy, że liczb pierwszych o tej własności jest skończenie wiele i niech będą to $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Jasne jest, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ liczba p_i nie dzieli a. Istotnie, jeśli $p_i | a$, to p_i nie dzieli b, gdyż liczby a i b są względnie pierwsze a stąd $v_{p_i}(a^{p_i-1} - b^{p_i-1}) = 0$ co przeczy założeniu. Z tych samych powodów p_i nie dzieli b dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

Rozważmy dowolną liczbe pierwszą p, większą od liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$, która nie dzieli $a - b$. Weźmy teraz dowolny dzielnik pierwszy q liczby $a^p - b^p$, który nie jest dzielnikiem liczby $a - b$. Jasne jest, że wówczas q nie dzieli a, gdyż wówczas dzieliłoby również b, co przeczy założeniom. Analogicznie, q nie dzieli b. Twierdzimy, że $q \neq p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Istotnie, p jest liczbą pierwszą większą niż wszystkie liczby p_i, a zatem dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ liczby p i $p_i - 1$ są względnie pierwsze, czyli istnieją $s, t \in \mathbb{Z}$ takie, że $ps + (p_i - 1)t = 1$. Dla dowodu nie wprost przyjmijmy, że $p_i = q$. Z Małego Twierdzenia Fermata mamy

$$1 \equiv a^{p_i-1} \equiv b^{p_i-1} \pmod q,$$

ale wiadomo, że mamy również $a^p \equiv b^p \pmod q$. Podnosząc pierwsza kongruencję do potęgi t, a drugą do potęgi s, a następnie mnożąc je stronami dostajemy $a \equiv b \pmod q$, co przeczy temu, że q nie jest dzielnikiem liczby $a-b$. Skoro q nie jest żadną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$, to $2 | v_q(a^{q-1} - b^{q-1})$. Udowodnimy teraz, że $v_q(a^{q-1} - b^{q-1}) = v_q(a^p - b^p)$. W pierwszej kolejności zauważmy, że $p | q-1$. Istotnie, niech u oznacza najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, dla której $q | a^u - b^u$. Jeśli $p = lu + r$, to wówczas

$$a^p \equiv a^{lu} \cdot a^r \equiv b^p \equiv b^{lu} \cdot b^r \pmod q,$$

a skoro $a^u \equiv b^u \pmod q$, to $a^r \equiv b^r \pmod q$. Ale $r < u$ skąd wynika, że $r = 0$, a to znaczy, że u dzieli p. Jako, że p jest liczbą pierwszą, a $u > 1$ (gdyż q nie jest dzielnikiem liczby $a-b$) to musimy mieć $u = p$. Bez trudu w analogiczny sposób pokazujemy, że $p | q-1$. Niech więc $q - 1 = mp$. Oczywiście q nie dzieli m. Niech też $v_q(a^p - b^p) = \alpha > 0$, tzn. $a^p - b^p = cq^\alpha$ i q nie dzieli c. Mamy wtedy

$$a^{q-1} = a^{mp} = (cq^\alpha + b^p)^m =$$
$$= c^m q^{\alpha m} + \ldots + \tbinom{m}{2} c^2 q^{2\alpha} b^{(m-2)p} + mcq^\alpha b^{(m-1)p} + b^{mp},$$

cz yli

$$a^{q-1} - b^{q-1} = c^m q^{\alpha m} + \ldots + \binom{m}{2} c^2 q^{2\alpha} b^{(m-2)p} + mcq^\alpha b^{(m-1)p},$$

a jasne jest, że w powyższej sumie wszystkie składniki po za ostatnim dzielą się przez q w potędze co najmniej 2α, a ostatni dzieli się dokładnie w potędze α, gdyż q nie dzieli żadnej z liczb m, c, b. Co pokazuje, że rzeczywiście $v_q(a^{q-1} - b^{q-1}) = \alpha = v_q(a^p - b^p)$. W szczególności mamy więc $2 | v_q(a^{p-1} - b^{p-1})$.

Jasne jest, że $a - b | a^p - b^p$. Wykażemy, że liczba $A = \frac{a^p - b^p}{a-b}$ jest kwadratem liczby naturalnej. Wykazaliśmy już, że każda liczba pierwsza będąca dzielnikiem licznika, ale nie mianownika, dzieli ją w potędze parzystej. Wystarczy więc pokazać, że żaden dzielnik pierwszy mianownika nie może być dzielnikiem A. Załóżmy, że q dzieli $a - b$ dokładnie w potędze $\beta > 0$ (w szczególności $q \neq p$). Możemy teraz napisać $a - b = dq^\beta$ i w analogiczny sposób jak poprzednio pokazać, że $a^p - b^p$ jest podzielne przez q dokładnie w potędze β. A zatem $v_q(a^p - b^p) = \beta = v_q(a - b)$, a stąd $v_q(A) = 0$, czyli to co chcieliśmy.

Powyższe rozumowanie prowadzi nas do wniosku, że dla każdej odpowiednio dużej liczby pierwszej p liczba $\frac{a^p - b^p}{a-b}$ jest kwadratem liczby naturalnej. Wykorzystamy ten wniosek do uzyskania sprzeczności.

W dalszej części rozwiązania posłużymy się własnościami reszt kwadratowych i symbolu Legendre'a. Udowodnimy najpierw, że istnieje taka liczba pierwsza $q > |a-b|$, że liczba $-ab$ jest nieresztą kwadratową modulo q, tzn. $\left(\frac{-ab}{q}\right) = -1$. Niech $ab = r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_m^{\alpha_m}$ będzie rozkładem na czynniki pierwsze. Rozważmy następujący układ kongruencji

$$x \equiv 1 \pmod{r_i} \text{ jeśli } r_i \equiv 1 \pmod 4$$

$$x \equiv -1 \pmod{r_i} \text{ jeśli } r_i \equiv 3 \pmod 4$$

$$x \equiv 7 \pmod 8$$

Z Chińskiego twierdzenia o resztach wiadomo, że taki układ kongruencji posiada rozwiązanie, zaś z twierdzenia Dirichleta wynika natychmiast, że wśród liczb całkowitych spełniających ten układ jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. Niech q będzie dowolną z nich większą niż $|a-b|$. Wówczas

$$\text{jeśli } r_i \equiv 1 \pmod 4,\ \text{to} \left(\frac{r_i}{q}\right) = (-1)^{\frac{r_i-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{r_i}\right) = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\text{jeśli } r_i \equiv 3 \pmod 4,\ \text{to} \left(\frac{r_i}{q}\right) = (-1)^{\frac{r_i-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{r_i}\right) = (-1) \cdot (-1) = 1,$$

$$\left(\frac{2}{q}\right) = 1 \text{ oraz } \left(\frac{-1}{q}\right) = -1.$$

W powyższych równościach wykorzystaliśmy prawo wzajemności reszt kwadratowych oraz warunki na bycie resztą kwadratową liczb -1 i 2. Mamy zatem

$$\left(\frac{-ab}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{ab}{q}\right) = (-1) \cdot \left(\frac{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_m^{\alpha_m}}{q}\right) =$$

$$= (-1) \cdot \left(\frac{r_1}{q}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{r_2}{q}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{r_m}{q}\right)^{\alpha_m} = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \dots \cdot 1 = -1,$$

a więc q jest szukaną liczbą pierwszą.

Korzystając ponownie z twierdzenia Dirichleta wnioskujemy, że istnieje taka liczba pierwsza p, że $q-1|p+1$ oraz p jest na tyle duże aby liczba $\frac{a^p-b^p}{a-b}$ była kwadratem liczby naturalnej. Z wyboru liczby q wynika, że q nie jest dzielnikiem liczby a ani liczby b, a zatem z małego twierdzenia Fermata prawdziwa jest podzielność $q|a^{p+1} - b^{p+1}$ Wykorzystamy tą podzielność do udowodnienia, że liczba $\frac{a^p-b^p}{a-b}$ nie jest resztą kwadratową modulo q i będzie to szukana sprzeczność. Operując na liczbach wymiernych modulo q uzyskujemy

$$\frac{a^p-b^p}{a-b} \equiv \frac{a^{p+1} \cdot a^{-1} - b^p}{a-b} \equiv \frac{b^{p+1} \cdot a^{-1} - b^p}{a-b} = b^p \frac{\frac{b}{a} - 1}{a-b} = \frac{-b^p}{a} \pmod q.$$

A stąd
$$\left(\frac{\frac{a^p-b^p}{a-b}}{q}\right) = \left(\frac{\frac{-b^p}{a}}{q}\right) = \left(\frac{-ab}{q}\right) = -1,$$
gdzie druga równość wynika z faktu, że p jest liczbą nieparzystą. Żądana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Regulamin meczu matematycznego:

1. W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn posiada Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 12 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy.

3. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

4. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania rozwiązania jednego z zadań. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą.

5. Drużyna wywoływana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie.

6. Jeżeli drużyna wywoływana przyjmuje zadanie, Kapitan drużyny wywołującej wyznacza członka drużyny wywoływanej do zreferowania rozwiązania przy tablicy. Rozwiązanie to jest oceniane przez Jury.

7. Można wyznaczyć jedynie te osoby, które dotychczas nie zakończyły referowania żadnego zadania.

8. Podczas referowania rozwiązania nie jest dopuszczalne komunikowanie się osoby referującej ze swoją drużyną, jak również drużyna przeciwna nie może w tym czasie zadawać pytań ani komentować fragmentów rozwiązania. Osoba referująca nie może korzystać z notatek.

9. Kapitan może zmienić osobę referującą dowolną liczbę razy, przy czym n-ta zmiana dokonywana przez drużynę powoduje odjęcie n punktów.

10. Czas na zreferowanie rozwiązania wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieje na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że zakończył referowanie, drużyna przeciwna zgłasza zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli Jury uznaje rozwiązanie za poprawne, punktuje je od 5 do 10 punktów. Jury może przyznać drużynie wywołującej te punkty, które zostały odjęte drużynie rozwiązującej, jeżeli usterki rozwiązania zostały przez tę drużynę zauważone.

13. Jeżeli Jury nie uznaje rozwiązania za poprawne, żadna z drużyn nie otrzymuje punktów, chyba, że drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy dyskwalifikujące rozwiązanie. Wtedy ma ona prawo do przedstawienia własnego rozwiązania na zasadach i przy punktacji określonej w pozycjach 6-12.

14. Jeżeli drużyna wywołana nie przyjmie zadania, rozwiązuje je drużyna wywołująca zgodnie z zasadami określonymi w punktach 6-12. Jeśli jednak nie przedstawi ona poprawnego rozwiązania, otrzyma -10 (minus 10) punktów.

15. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

16. Mecz wygrywa drużyna, która zdobędzie więcej punktów.

17. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do Jury.