Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 6 – 20 czerwca 2010

(wydanie pierwsze)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 6-20 czerwca 2010

Dom wczasowy „Zgoda”
Zwardoń 45A
34-373, Zwardoń
tel. (33) 864 63 28

Kadra:
Jerzy Bednarczuk
Kamil Duszenko
Andrzej Grzesik
Joanna Jaszuńska
Jacek Jendrej
Michał Kieza
Michał Korch
Marcin Kuczma
Przemysław Mazur
Maciej Skórski
Paweł Walter

Olimpiada Matematyczna w Internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 6-20 czerwca w Zwardoniu, w pensjonacie „Zgoda”. Kadrę obozu stanowili: Jerzy Bednarczuk, Kamil Duszenko, Andrzej Grzesik, Joanna Jaszuńska, Jacek Jendrej, Michał Kieza, Michał Korch, Marcin Kuczma, Przemysław Mazur, Maciej Skórski i Paweł Walter.

W dniach 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 17 i 18 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 16 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 12 oraz 19 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań, z wyjątkiem dnia 8 czerwca, kiedy to zadań było siedem. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny czterech zadań i trwały od rana do wieczora, a mecz matematyczny — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 213,5 punktu. Trzy najlepsze wyniki to 142, 130 i 129,5 punktu. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

16 czerwca została zorganizowana wycieczka pociągiem do Żyliny na Słowacji. 13 czerwca odbyła się tradycyjna piesza wycieczka na Wielką Raczę. Ciekawostką jest fakt, że tylko jednej osobie udało się dotrzeć do celu :)

Po zakończeniu obozu, w dniach 20-23 czerwca w Bilovcu w Czechach odbyły się X Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. Uczestniczyli w nich uczniowie, którzy weszli w skład delegacji tych krajów na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną. Przewodniczącym delegacji polskiej był Michał Pilipczuk, zastępcą przewodniczącego był Andrzej Grzesik. W dniach 21 i 22 czerwca każdy z zawodników rozwiązywał po trzy zadania, mając na to po cztery i pół godziny.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu, szkice ich rozwiązań, oraz zadania z X Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	10	0	1	8
2.	10	1	0	8
3.	9	2	0	8
4.	7	2	0	10
5.	9	3	1	7
6.	0	1	6	13
7.	3	0	0	17
8.	3	1	0	16
9.	7	1	4	8
10.	1	0	1	18
11.	5	0	0	15
12.	1	0	0	19
13.	10	0	1	9
14.	0	1	5	14
15.	0	0	0	20
16.	3	0	0	17
17.	16	0	0	3
18.	14	1	2	2
19.	12	4	2	1
20.	5	0	0	14
21.	18	0	0	3
22.	9	3	0	9
23.	15	2	3	1
24.	1	0	0	20
25.	10	0	0	11
26.	9	2	0	10
27.	0	1	1	19
28.	0	0	0	21
29.	12	4	1	4
30.	5	0	0	16
31.	6	2	2	11
32.	2	0	1	18
1G.	17	2	0	0
2G.	9	3	0	7
3G.	14	1	0	4
4G.	7	3	0	9
5G.	5	11	0	3
6G.	17	0	0	2
7G.	12	1	0	6

Spis treści

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AA', BB', CC' są wysokościami. Udowodnić, że
$$A'B' + B'C' + C'A' \leqslant 2 \cdot AA'.$$

2. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb n o poniższych trzech własnościach:
- n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych;
- n jest sumą dwóch sześcianów liczb całkowitych;
- n nie jest sumą dwóch szóstych potęg liczb całkowitych.

3. Dana jest liczba naturalna c. Ciąg a_1, a_2, a_3, $\ldots$ zadany jest wzorami: $a_1 = c$ oraz
$$a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)(a_n^2-1)} \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$
Wykazać, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.

4. Niech k będzie parzystą liczbą naturalną. Danych jest k kart; na każdej z nich napisana jest liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, k\}$. Suma wszystkich k liczb napisanych na kartach jest równa $2k$. Dowieść, że można podzielić karty na takie dwie grupy, że suma wszystkich liczb napisanych na kartach jednej grupy wynosi k.

5. Udowodnić, że każda liczba naturalna mniejsza niż $n!$ jest sumą co najwyżej n różnych dzielników dodatnich liczby $n!$.

6. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równości
$$y = x^2 - 2, \qquad z = y^2 - 2, \qquad x = z^2 - 2.$$
Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $x + y + z$.

7. W pewnym kraju jest $2^n + 1$ miast. Między dowolnymi dwoma z nich istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze obsługiwane przez jedną z n linii. Dowieść, że któraś z tych linii lotniczych może oferować podróż z nieparzystą liczbą lotów, zaczynającą się i kończącą w tym samym mieście.

8. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym żadna ściana nie jest trójkątem prostokątnym. Wykazać, że jeśli punkt A i punkty przecięcia wysokości ścian ABC, ACD, ADB leżą na jednej płaszczyźnie, to środek sfery opisanej na danym czworościanie i środki krawędzi AB, AC, AD leżą na jednej płaszczyźnie.

9. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ znaleźć liczbę takich funkcji f odwzorowujących zbiór n-elementowy w ten sam zbiór, że $(n-2)$-krotne złożenie $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-2}$ nie jest funkcją stałą, zaś $(n-1)$-krotne złożenie $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-1}$ jest funkcją stałą.

10. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach Z i Y. Odcinki BY i CZ przecinają się w punkcie G, zaś punkty R i S wybrano tak, że czworokąty $BCYR$ i $BCSZ$ są równoległobokami. Wykazać, że $GR = GS$.

11. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ istnieje taka liczba rzeczywista x, że dla $m = 1, 2, 3, \ldots$ liczba $[x^m] + 1$ jest podzielna przez k.

12. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $a > 1$ o następującej własności: Dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba $a^n - 1$ jest podzielna przez n^2.

13. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz = 1$. Wykazać, że

$$\frac{2}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{2}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{2}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leqslant 1.$$

14. Ciąg a_1, a_2, a_3, $\ldots$ jest określony wzorami: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ oraz

$$a_{2^t + r} = 1 - a_r \qquad \text{dla liczb całkowitych } r, t \text{ spełniających } 0 < r \leqslant 2^t.$$

Udowodnić, że w ciągu tym nie występuje blok postaci www, gdzie w jest ciągiem złożonym z zer i jedynek.

15. W czworokącie $ABCD$ opisanym na okręgu prosta ℓ przechodząca przez wierzchołek A przecina bok BC w punkcie M oraz półprostą $DC^{\rightarrow}$ w punkcie N. Punkty I_1, I_2, I_3 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABM, MNC, NDA. Dowieść, że punkt przecięcia wysokości trójkąta $I_1I_2I_3$ leży na prostej ℓ.

16. Wyznaczyć wszystkie wartości całkowite przyjmowane przez wyrażenie

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$$

dla pewnych liczb naturalnych a, b, c.

17. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na dwusieczną kąta wewnętrznego $\angle CAB$. Udowodnić, że proste BE i CD przecinają się w punkcie leżącym na dwusiecznej kąta zewnętrznego $\angle CAB$.

18. Dane są liczby naturalne a i b. Wykazać, że jeżeli dla każdej liczby naturalnej n liczba $(n+a)(n+b)$ jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych, to $a = b$.

19. Dla każdej liczby naturalnej n znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$$

dla liczb rzeczywistych b_1, b_2, ..., b_n spełniających warunki $b_1 = 0$ oraz

$$|b_{i+1}| = |b_i + 1| \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

20. Dany jest zbiór $n \geqslant 2$ punktów leżących wewnątrz kuli o promieniu 1. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ niech x_i oznacza odległość i-tego punktu danego zbioru od najbliższego innego punktu tego zbioru. Dowieść, że

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqslant 64.$$

21. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, ..., x_n spełniających warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+1} + \frac{x_2^3}{x_2^2+1} + \ldots + \frac{x_n^3}{x_n^2+1} \geqslant \frac{n}{2}.$$

22. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt M jest środkiem boku BC, zaś odcinki AM i EF przecinają się w punkcie G. Wykazać, że proste GD i BC są prostopadłe.

23. Rozważamy wszystkie k-elementowe podzbiory zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ $(0 < k \leqslant n)$. W każdym podzbiorze wybieramy najmniejszą liczbę. Wyznaczyć średnią arytmetyczną wszystkich wybranych liczb.

24. W rosnącym ciągu liczb naturalnych a_1, a_2, a_3, ... żaden wyraz nie jest dzielnikiem żadnego innego wyrazu. Dowieść, że ciąg różnic

$$a_2 - a_1, \quad a_3 - a_2, \quad a_4 - a_3, \quad \ldots$$

jest nieograniczony.

25. Niech n, p, q będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Ciąg liczb całkowitych $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ spełnia warunki:

$$x_0 = x_n \qquad \text{oraz} \qquad x_{i+1} - x_i \in \{p, -q\} \quad \text{dla } i = 0, 1 \ldots, n-1.$$

Udowodnić, że jeżeli $n > p + q$, to istnieją takie k, l, że $k \neq l$ i $\{k,l\} \neq \{0,n\}$ oraz $x_k = x_l$.

26. Punkt K leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym

$$\angle KAD = \angle KCB = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \angle KBC = \angle KDA = \beta.$$

Na bokach AB i CD zbudowano, po zewnętrznej stronie czworokąta $ABCD$, trójkąty ABP i CDQ, przy czym

$$\angle PAB = \angle QCD = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \angle PBA = \angle QDC = \beta.$$

Wykazać, ze punkt K jest środkiem odcinka PQ.

27. Niech p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 2 z dzielenia przez 3. Wyznaczyć liczbę takich trójek (x,y,z), że $x,y,z \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ oraz liczby

$$x + y + z \qquad \text{i} \qquad xyz - 1$$

są podzielne przez p.

28. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

29. Dane są takie dodatnie liczby wymierne x, y, że liczba

$$n = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

jest całkowita. Wykazać, że liczba n nie jest podzielna przez 3.

30. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n ($m \geqslant n$) zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m+k}{n}.$$

31. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab + bc + ca & = & 1 \\ 3a^2 - 4b^2 & = & 1 \\ 4b^2 - 5c^2 & = & 1 \end{cases}$$

32. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, nie będącego trapezem, leży taki punkt X, że $\angle ADX = \angle BCX$, $\angle DAX = \angle CBX$ i wszystkie te kąty są ostre, oraz taki punkt Y, że $AY = BY$ i $CY = DY$. Dowieść, że

$$\angle AYB = 2 \cdot \angle ADX.$$

7 łatwych zadań geometrycznych

1. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ kąty wewnętrzne mają jednakowe miary. Udowodnić, że

$$AB + BC = DE + EF.$$

2. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Prosta AO przecina bok BC w punkcie D. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $DP = BD$ oraz $DQ = CD$. Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

3. Czworokąt $ABCD$, w którym $\angle ABC = 90°$, jest wpisany w okrąg. Punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AC i AD. Udowodnić, że prosta MN przechodzi przez środek odcinka BD.

4. Na bokach BC i AC trójkąta ABC budujemy, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $BCDE$ i $ACFG$. Proste AE i BG przecinają się w punkcie H. Wykazać, że proste CH i AB są prostopadłe.

5. Na bokach trójkąta ABC budujemy podobne trójkąty równoramienne: APB ($AP = PB$) i CQA ($CQ = QA$) na zewnątrz oraz trójkąt BRC ($BR = RC$) do wewnątrz. Dowieść, że punkty A, P, R, Q leżą na jednej prostej albo są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku.

6. Dany jest okrąg o oraz okręgi o_1 i o_2, styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach A i B. Okręgi o_1 i o_2 leżą po jednej stronie prostej ℓ stycznej do nich odpowiednio w punktach D i E. Dowieść, że proste AD i BE przecinają się w punkcie leżącym na okręgu o.

7. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB = AD$ oraz $\angle DAB = 60°$. Punkt E leży wewnątrz tego czworokąta. Udowodnić, że

$$DE + BE + CE \geqslant AC.$$

Zawody drużynowe

1. Wskazać taką liczbę rzeczywistą a, że dla każdego układu liczb rzeczywistych nieujemnych x_1, x_2, …, x_n o sumie równej 1 zachodzi nierówność

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i + x_j) \leqslant a$$

oraz liczba a nie jest istotnie większa niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

2. Wskazać taką liczbę rzeczywistą b, że każdy wypukły wielokąt środkowosymetryczny o polu 1 jest zawarty w pewnym równoległoboku o polu b oraz liczba b nie jest istotnie większa niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

3. Wskazać taką liczbę rzeczywistą c, że w dowolnej prostokątnej tablicy liczb rzeczywistych, w której moduł każdej liczby nie przekracza 1, a suma liczb w każdej kolumnie wynosi 0, da się tak przestawić liczby w każdej kolumnie, aby moduł sumy liczb w każdym wierszu nie przekraczał c, oraz liczba c nie jest istotnie większa niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

4. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych, a $\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych. Wskazać taką funkcję $f : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$, że dla dowolnej liczby $p \in \mathbb{P}$ istnieje p-elementowy zbiór liczb naturalnych mniejszych od $f(p)$, którego dwuelementowe podzbiory mają różne sumy elementów, oraz funkcja f nie rośnie istotnie szybciej niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie pola na szachownicy rozmiaru 8×8 o następującej własności: Po usunięciu tego pola można pokryć pozostałą część szachownicy klockami rozmiaru 3×1.

2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne $a > b > n$, że liczba dodatnich dzielników liczby $a^2 + 1$ nie przekracza liczby dodatnich dzielników liczby $b^2 + 1$.

3. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} \leqslant 3\sqrt{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}.$$

4. Na okręgu danych jest n liczb rzeczywistych. Operacja polega na wpisaniu pomiędzy każdą parę sąsiednich liczb wartości bezwzględnej ich różnicy oraz wymazaniu dotychczasowych n liczb. Rozstrzygnąć, w zależności od $n \geqslant 3$, czy z dowolnego początkowego układu n liczb w wyniku wielokrotnego wykonywania opisanej operacji można otrzymać n jednakowych liczb.

5. W n-osobowym stowarzyszeniu działa k komisji. Każda komisja liczy co najmniej dwóch członków, zaś dowolne dwie różne komisje mają dokładnie jednego wspólnego członka. Dowieść, że $k \leqslant n$.

6. Dane są względnie pierwsze liczby naturalne a i b. Dowieść, że istnieje dokładnie $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$ liczb całkowitych nieujemnych, których nie można przedstawić w postaci $ax + by$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych x, y.

7. Dla każdej liczby pierwszej p wyznaczyć najmniejszy możliwy stopień wielomianu $W(x)$ o następujących trzech własnościach:
- $W(x)$ ma współczynniki całkowite.
- $W(0) = 0$ oraz $W(1) = 1$.
- Dla każdego całkowitego n, $W(n)$ daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez p.

8. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje dla wszystkich argumentów rzeczywistych wartości nieujemne. Dowieść, że istnieją takie wielomiany $P(x)$, $Q(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby x zachodzi równość

$$W(x) = (P(x))^2 + (Q(x))^2.$$

9. Okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 przechodzą przez punkt P, przy czym okręgi o_1 i o_3 są styczne zewnętrznie oraz okręgi o_2 i o_4 są stycznie zewnętrznie. Punkty A, B, C, D są drugimi punktami przecięcia odpowiednio par okręgów: o_1 i o_2, o_2 i o_3, o_3 i o_4, o_4 i o_1. Wykazać, że

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

10. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Częścią wspólną trójkątów ACE i BDF jest sześciokąt $KLMNOP$. Dowieść, że proste KN, LO, MP przecinają się w jednym punkcie.

11. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dwa czworościany, z których jeden leży wewnątrz drugiego, że suma długości wszystkich krawędzi czworościanu wewnętrznego jest większa od sumy długości wszystkich krawędzi czworościanu zewnętrznego.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Znaleźć największą możliwą liczbę wierzchołków wielościanu wypukłego, w którym dowolne trzy wierzchołki tworzą trójkąt nierozwartokątny.

2. W wierzchołkach grafu skończonego bez pętli i krawędzi wielokrotnych umieszczono lampy. Ruch polega na tym, że wybieramy lampę, a następnie zmieniamy stan tej lampy oraz wszystkich lamp sąsiednich, tj. zapalamy zgaszone i gasimy zapalone. Na początku wszystkie lampy są zgaszone. Rozstrzygnąć w zależności od grafu, czy można je wszystkie zapalić za pomocą skończonej liczby ruchów.

3. Dane są takie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z przedziału $[-1, 1]$, że $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$. Udowodnić, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}.$$

4. Wyznaczyć wszystkie takie pary (a, b) liczb rzeczywistych, że układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & a(x^2 + y^2) \\ x^3 + y^3 & = & b(x^2 + y^2) \end{array}\right.$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych x, y nie równych jednocześnie zeru.

5. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(xf(x + y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

6. Wyznaczyć wszystkie takie ściśle rosnące ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ liczb całkowitych, że wielomian

$$W(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1$$

jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

7. Wykazać, że równanie

$$x^{2005} + y^{2006} + z^{2007} = t^{2010}$$

ma rozwiązanie w zbiorze dodatnich liczb całkowitych.

8. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich par (p, q) różnych liczb pierwszych, że liczba $2^{p-1} - 1$ jest podzielna przez q oraz liczba $2^{q-1} - 1$ jest podzielna przez p.

9. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Dla $X \in \{A, B, C\}$ rozpatrujemy okrąg styczny do boków wychodzących z wierzchołka X oraz styczny w punkcie T_X do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnić, że proste AT_A, BT_B, CT_C przecinają się w jednym punkcie.

10. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Okrąg o_1 jest styczny do odcinków AB i CD oraz do łuku BC okręgu o nie zawierającego innych wierzchołków czworokąta w punkcie P_1. Okrąg o_2 jest styczny do odcinków AC i BD oraz do tego łuku w punkcie P_2. Dowieść, że $P_1 = P_2$.

11. Okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 leżą na płaszczyźnie w ten sposób, że o_1 i o_3 są styczne zewnętrznie do o_2 i o_4. Ponadto wszystkie te okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach A, B, C, D. Punkt M jest środkiem odcinka AC. Dowieść, że $\angle AMB = \angle DMA$.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Znaleźć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c &= a \\ b\sqrt{c} - a &= b \\ c\sqrt{a} - b &= c \end{cases}$$

2. W kole o promieniu 1 umieszczono 60 punktów. Wykazać, że istnieje punkt na obwodzie koła, którego suma odległości od wszystkich danych 60 punktów nie przekracza 80.

3. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że na szachownicy o wymiarach $p^2 \times p^2$ można tak wybrać p^3 pól, aby środki żadnych czterech wybranych pól nie tworzyły prostokąta o bokach równoległych do boków szachownicy.

4. Znaleźć największą liczbę naturalną k, dla której następujące stwierdzenie jest prawdziwe:

Danych jest dowolnych 2010 niezdegenerowanych trójkątów. W każdym trójkącie malujemy jeden bok na niebiesko, jeden na czerwono i jeden na biało. Dla każdego koloru z osobna porządkujemy boki niemalejąco ze względu na długość. Uzyskujemy

$$\begin{array}{ll} n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_{2010} & \text{— długości boków niebieskich,} \\ c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_{2010} & \text{— długości boków czerwonych,} \\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{2010} & \text{— długości boków białych.} \end{array}$$

Wówczas istnieje k wskaźników j, dla których można zbudować niezdegenerowany trójkąt o bokach długości n_j, c_j, b_j.

5. Dodatnie liczby rzeczywiste x, y, z spełniają nierówność

$$x + y + z \geqslant 6.$$

Znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1}.$$

6. W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełnione są równości

$$AB + CD = \sqrt{2} \cdot AC \qquad \text{oraz} \qquad BC + DA = \sqrt{2} \cdot BD.$$

Dowieść, że czworokąt ten jest równoległobokiem.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AA', BB', CC' są wysokościami. Udowodnić, że

$$A'B' + B'C' + C'A' \leqslant 2 \cdot AA'.$$

Rozwiązanie:

Odbijmy punkt A' względem prostych AB i AC otrzymując odpowiednio punkty X i Y. Okrąg o średnicy AC przechodzi przez punkty C' i A', skąd dostajemy $\angle BC'A' = 180° - \angle AC'A' = \angle ACB$ i podobnie $\angle AC'B' = \angle ACB$. Wobec tego $\angle AC'B' = \angle XC'B$, czyli punkt X leży na prostej $B'C'$ i ten sam wniosek jest słuszny dla punktu Y. Stąd

$$A'B' + B'C' + C'A' = YB' + B'C' + C'X = YX.$$

Pozostaje zauważyć, że nierówność trójkąta daje $YX \leqslant YA + AX = 2 \cdot AA'$.

2. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb n o poniższych trzech własnościach:

• n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych;
• n jest sumą dwóch sześcianów liczb całkowitych;
• n nie jest sumą dwóch szóstych potęg liczb całkowitych.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b warunki zadania spełnia liczba $n = 8(a^6 + b^6)$. Mamy

$$n = (2a^3 + 2b^3)^2 + (2a^3 - 2b^3)^2 = (2a^2)^3 + (2b^2)^3,$$

zatem pierwsze dwie własności są spełnione. Pozostaje dowieść, że równość

$$8(a^6 + b^6) = c^6 + d^6$$

dla pewnych liczb całkowitych c, d prowadzi do sprzeczności. Ponieważ nie wszystkie z liczb a, b, c, d są równe zeru, więc dzieląc je w razie potrzeby przez odpowiednią potęgę dwójki — i zachowując jednocześnie powyższą równość — możemy przyjąć, iż nie wszystkie one są parzyste. Ale $8|c^6 + d^6$, zaś kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Zatem $2|c$ oraz $2|d$, co daje $a^6 + b^6 = 8 \cdot [(\frac{1}{2}c)^6 + (\frac{1}{2}d)^6]$, i analogiczne rozumowanie wskazuje, że $2|a$ oraz $2|b$, skąd sprzeczność.

3. Dana jest liczba naturalna c. Ciąg a_1, a_2, a_3, ... zadany jest wzorami: $a_1 = c$ oraz

$$a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)(a_n^2-1)} \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Wykazać, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.

Rozwiązanie:

Z danego w treści zadania wzoru wynika, że

$$(*) \qquad (a_{n+1} - ca_n)^2 = (c^2-1)(a_n^2-1)$$

oraz

$$(a_n - ca_{n-1})^2 = (c^2-1)(a_{n-1}^2-1).$$

Z ostatniej równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_n^2 - 2ca_na_{n-1} + c^2a_{n-1}^2 &= c^2a_{n-1}^2 - c^2 - a_{n-1}^2 + 1, \\ a_n^2 + c^2 - 1 &= 2ca_na_{n-1} - a_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Po odjęciu obu stron powyższej zależności od $c^2a_n^2$ stwierdzamy, że

$$(c^2-1)(a_n^2-1) = (ca_n - a_{n-1})^2.$$

Wraz z równością $(*)$ daje to

$$(a_{n+1} - ca_n)^2 = (ca_n - a_{n-1})^2.$$

Ze wzoru danego w treści zadania wynika, że wyrażenia w nawiasach są dodatnie i w efekcie równe. Ostatecznie

$$a_{n+1} = 2ca_n - a_{n-1} \qquad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots,$$

co w połączeniu z równościami $a_1 = c$, $a_2 = 2c^2 - 1$ przez prostą indukcję pociąga za sobą tezę.

Uwaga. Rozwiązanie można również oprzeć na wzorze

$$a_n = \tfrac{1}{2}[(c + \sqrt{c^2-1})^n + (c - \sqrt{c^2-1})^n],$$

gdyż po prawej stronie nieparzyste potęgi pierwiastków skracają się.

4. Niech k będzie parzystą liczbą naturalną. Danych jest k kart; na każdej z nich napisana jest liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, k\}$. Suma wszystkich k liczb napisanych na kartach jest równa $2k$. Dowieść, że można podzielić karty na takie dwie grupy, że suma wszystkich liczb napisanych na kartach jednej grupy wynosi k.

Rozwiązanie:

Niech x_1, x_2, …, x_k oznaczają liczby napisane na rozpatrywanych kartach. Przypuśćmy, że teza jest fałszywa. Wówczas liczby

$$x_1, \quad x_1+x_2, \quad x_1+x_2+x_3, \quad \ldots, \quad x_1+x_2+\ldots+x_k$$

dają różne reszty z dzielenia przez k, gdyby bowiem liczby $x_1+x_2+\ldots+x_i$ oraz $x_1+x_2+\ldots+x_j$ (gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant k$) dawały jednakowe reszty, to mielibyśmy $x_{i+1}+x_{i+2}+\ldots+x_j = k$, wbrew uczynionemu założeniu.

Zatem wśród reszt z dzielenia wyżej wypisanych liczb przez k każda z reszt 0, 1, …, $k-1$ pojawia się dokładnie jeden raz. W szczególności pojawia się reszta, jaką daje liczba x_2 z dzielenia przez k, skąd liczba $(x_1+x_2+\ldots+x_\ell)-x_2$ dzieli się przez k dla pewnej wartości ℓ. Jeżeli $\ell = 2$, to $k|x_1$, czyli $x_1 = k$ i dostajemy sprzeczność. Natomiast jeżeli $\ell \geqslant 3$, to $x_1+x_3+x_4+\ldots+x_\ell = k$, ponownie wbrew przypuszczeniu. Pozostaje możliwość $\ell = 1$, która oznacza, że $x_1 \equiv x_2 \pmod{k}$.

Analogiczne rozumowanie dowodzi, że $x_i \equiv x_j \pmod{k}$ dla dowolnych wartości $i, j = 1, 2, \ldots, k$. W myśl warunków zadania prowadzi to do wniosku, że $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 2$. Jednak w tej sytuacji mamy $x_1+x_2+\ldots+x_{k/2} = k$, a więc rozwiązanie jest zakończone.

5. Udowodnić, że każda liczba naturalna mniejsza niż $n!$ jest sumą co najwyżej n różnych dzielników dodatnich liczby $n!$.

Rozwiązanie:

Zastosujemy indukcję ze względu na n. Dla $n = 1$ teza jest prawdziwa. Przypuśćmy następnie, iż jest ona prawdziwa dla pewnej liczby n oraz niech $N < (n+1)!$ będzie liczbą naturalną; mamy udowodnić, że N jest sumą co najwyżej $n+1$ różnych dzielników liczby $(n+1)!$.

Niech q i r będą odpowiednio ilorazem i resztą z dzielenia liczby N przez $n+1$. Ponieważ $r < n+1$, więc r jest dzielnikiem liczby $(n+1)!$.

Jeżeli $q = 0$, to $N = r$, a więc N jest dzielnikiem $(n+1)!$.

Jeżeli zaś $q > 0$, to $q < \frac{N}{n+1} < n!$ i w myśl założenia indukcyjnego istnieje przedstawienie $q = d_1+d_2+\ldots+d_k$, gdzie d_1, d_2, …, d_k są różnymi dzielnikami liczby $n!$ oraz $k \leqslant n$. Wówczas poszukiwanym przedstawieniem N jest

$$N = (n+1)d_1 + (n+1)d_2 + \ldots + (n+1)d_k + r,$$

gdzie pomijamy ostatni składnik r, jeśli jest on równy zeru.

6. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równości

$$y = x^2 - 2, \qquad z = y^2 - 2, \qquad x = z^2 - 2.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $x+y+z$.

Rozwiązanie:

Jest jasne, że $x = z^2 - 2 \geqslant -2$. Gdyby $x > 2$, to uzyskalibyśmy

$$y = x^2 - 2 = (x-2)(x+1) + x > x,$$

a więc także $y > 2$ i podobnie $z > y$ oraz $x > z$, co prowadzi do sprzeczności.

Zatem $|x| \leqslant 2$, czyli $x = 2\cos\alpha$ dla pewnej liczby rzeczywistej $\alpha \in [0, \pi]$. Stąd

$$y = x^2 - 2 = 4\cos^2\alpha - 2 = 2(2\cos^2\alpha - 1) = 2\cos 2\alpha$$

i analogicznie $z = y^2 - 2 = 2\cos 4\alpha$ oraz $x = z^2 - 2 = 2\cos 8\alpha$. Stąd wniosek, że $\cos\alpha = \cos 8\alpha$, czyli

$$0 = \cos\alpha - \cos 8\alpha = 2\sin\tfrac{7}{2}\alpha\sin\tfrac{9}{2}\alpha,$$

co daje następujące możliwe wartości α: 0, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{4}{7}\pi$, $\frac{6}{7}\pi$, $\frac{2}{9}\pi$, $\frac{4}{9}\pi$, $\frac{8}{9}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$. Pozostaje obliczyć, że:

- dla $\alpha = 0$ mamy $x = y = z = 2$, czyli $x + y + z = \mathbf{6}$;
- dla $\alpha = \frac{2}{7}\pi, \frac{4}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi$ mamy

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2\cos\tfrac{2}{7}\pi + 2\cos\tfrac{4}{7}\pi + 2\cos\tfrac{6}{7}\pi = \\ &= -2(\cos\tfrac{1}{7}\pi + \cos\tfrac{3}{7}\pi + \cos\tfrac{5}{7}\pi) = \\ &= -\frac{\sin\frac{2}{7}\pi + (\sin\frac{4}{7}\pi - \sin\frac{2}{7}\pi) + (\sin\frac{6}{7}\pi - \sin\frac{4}{7}\pi)}{\sin\frac{1}{7}\pi} = \\ &= -\frac{\sin\frac{6}{7}\pi}{\sin\frac{1}{7}\pi} = \mathbf{-1}; \end{aligned}$$

- dla $\alpha = \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi$ mamy

$$x+y+z = 2\cos\tfrac{2}{9}\pi + 2(\cos\tfrac{4}{9}\pi + \cos\tfrac{8}{9}\pi) = 2\cos\tfrac{2}{9}\pi + 4\cos\tfrac{6}{9}\pi\cos\tfrac{2}{9}\pi = \mathbf{0};$$

- dla $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ mamy $x = y = z = -1$, czyli $x + y + z = \mathbf{-3}$.

7. W pewnym kraju jest $2^n + 1$ miast. Między dowolnymi dwoma z nich istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze obsługiwane przez jedną z n linii. Dowieść, że któraś z tych linii lotniczych może oferować podróż z nieparzystą liczbą lotów, zaczynającą się i kończącą w tym samym mieście.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne ze względu na n. Dla $n = 1$ otrzymujemy 3 miasta i wszystkie połączenia między nimi obsługiwane przez tę samą linię, więc teza jest prawdziwa.

Przechodząc do kroku indukcyjnego rozpatrzmy $2^{n+1}+1$ miast i $n+1$ linii lotniczych obsługujących połączenia między nimi. Wybierzmy jedną z tych linii, powiedzmy ℓ; przyjmijmy, że nie oferuje ona podróży okrężnej z nieparzystą liczbą lotów. Wynika stąd, że jeżeli pomiędzy miastami A i B można odbyć podróż liniami ℓ z parzystą liczbą lotów, to każda inna podróż liniami ℓ od A do B również składa się z parzystej liczby lotów.

Podzielimy teraz zbiór wszystkich miast na dwa podzbiory X i Y. Wybierzmy dowolne miasto P i zaliczmy do X te miasta, do których można dolecieć z P liniami ℓ z parzystą liczbą lotów, zaś do Y te miasta, do których można dolecieć z P liniami ℓ z nieparzystą liczbą lotów. Jeżeli pozostaną jeszcze jakieś miasta, to wybieramy z nich dowolne miasto P' i zaliczamy do X (odpowiednio do Y) te miasta, do których można dolecieć z P liniami ℓ z parzystą (odpowiednio z nieparzystą) liczbą lotów. Postępowanie to kontynuujemy aż do wyczerpania wszystkich miast.

Suma zbiorów X i Y jest zbiorem $(2^{n+1}+1)$-elementowym, zatem jeden z tych zbiorów ma przynajmniej 2^n+1 elementów. Z określenia tych zbiorów wynika, że dwa miasta należące do tego samego zbioru nie mają bezpośredniego połączenia liniami ℓ. Wobec tego istnieje taki zbiór 2^n+1 miast, że bezpośrednie połączenia między nimi są obsługiwane przez pozostałe n linii. Na mocy założenia indukcyjnego rozwiązanie jest zakończone.

8. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym żadna ściana nie jest trójkątem prostokątnym. Wykazać, że jeśli punkt A i punkty przecięcia wysokości ścian ABC, ACD, ADB leżą na jednej płaszczyźnie, to środek sfery opisanej na danym czworościanie i środki krawędzi AB, AC, AD leżą na jednej płaszczyźnie.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez H_B, H_C, H_D punkty przecięcia wysokości odpowiednio ścian ACD, ADB, ABC. Na mocy założeń punkty te są różne od A. Zatem prosta AH_B zawiera wysokość trójkąta ACD, czyli przecina płaszczyznę BCD w punkcie K_B leżącym na prostej CD. W istocie punkt K_B jest rzutem prostokątnym wierzchołka A na prostą CD. Analogicznie określmy $K_C = AH_C \cap DB$, $K_D = AH_D \cap BC$; są to rzuty prostokątne wierzchołka A na odpowiednie krawędzie.

Punkty K_B, K_C, K_D leżą na odpowiednio na prostych AH_B, AH_C, AH_D zawartych w myśl warunków zadania w jednej płaszczyźnie. Punkty te leżą jednocześnie na płaszczyźnie BCD. Obie te płaszczyzny mają więc punkty wspólne i nie pokrywają się (A nie leży na drugiej z nich), zatem punkty K_B, K_C, K_D leżą na jednej prostej.

Z drugiej strony, jeżeli A' oznacza rzut prostokątny wierzchołka A na płaszczyznę BCD, to K_B, K_C, K_D są rzutami prostokątnymi punktu A' odpowiednio na boki CD, DB, BC trójkąta BCD. Skoro rzuty te leżą na jednej prostej, punkt A' leży na okręgu opisanym na tym trójkącie, a więc na sferze opisanej na czworościanie $ABCD$. Wobec tego odcinek AA' łączy dwa punkty tej sfery, czyli jego płaszczyzna symetralna przechodzi przez jej środek. Ale na płaszczyźnie tej leżą oczywiście środki krawędzi AB, AC, AD. To kończy rozwiązanie.

9. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ znaleźć liczbę takich funkcji f odwzorowujących zbiór n-elementowy w ten sam zbiór, że $(n-2)$-krotne złożenie $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-2}$ nie jest funkcją stałą, zaś $(n-1)$-krotne złożenie $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-1}$ jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ niech A_k oznacza zbiór wartości k-krotnego złożenia funkcji f, tzn. zbiór elementów postaci $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{k}(x))\ldots))$, gdzie x przebiega dany zbiór n-elementowy, który oznaczmy A_0.

Jest jasne, że wówczas $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ oraz równość $A_k = A_{k+1}$ dla pewnego k pociąga za sobą równości $A_k = A_{k+1} = A_{k+2} = \ldots$.

W zadaniu chodzi o wyznaczenie liczby funkcji f, dla których $A_{n-2} \neq A_{n-1}$ oraz A_{n-1} jest zbiorem jednoelementowym. W takiej sytuacji liczby elementów danych zbiorów wynoszą $|A_{n-i}| = i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zatem każda taka funkcja f określa ciąg podzbiorów zbioru A_0, w którym każdy następny podzbiór powstaje z poprzedniego przez odrzucenie jednego elementu, a zatem określa jednoznacznie pewną permutację zbioru A_0 (mianowicie ciąg kolejnych elementów do odrzucenia). Odwrotnie, każdy taki ciąg podzbiorów określa funkcję f, bo jeśli $A_{n-i} = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to odpowiadająca funkcja f jest zadana wzorem

$$f(a_j) = \begin{cases} a_1 & \text{dla } j = 1 \\ a_{j-1} & \text{dla } j \geqslant 2 \end{cases} .$$

Wobec tego liczba szukanych funkcji jest równa liczbie wszystkich permutacji zbioru n-elementowego, czyli $\mathbf{n}!$.

10. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach Z i Y. Odcinki BY i CZ przecinają się w punkcie G, zaś punkty R i S wybrano tak, że czworokąty $BCYR$ i $BCSZ$ są równoległobokami. Wykazać, że $GR = GS$.

Rozwiązanie:

Niech okrąg wpisany w trójkąt ABC będzie styczny do boku BC w punkcie X oraz niech okrąg o dopisany do tego trójkąta będzie styczny: do boku BC w punkcie T, zaś do przedłużeń boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Wówczas łatwy rachunek daje $BX = CT$, skąd $CQ = CT = BX = BZ = CS$ oraz

$$ZP = ZB + BP = XB + BT = BX + CX = BC = ZS.$$

Równości $ZP = ZS$ i $CQ = CS$ oznaczają, że punkty Z i C leżą na prostej potęgowej okręgu o i punktu S; leży więc na niej także punkt G. Analogicznie dowodzimy, że G leży na prostej potęgowej okręgu o i punktu R; stąd zaś G jest jednakowo odległy od punktów R i S.

11. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ istnieje taka liczba rzeczywista x, że dla $m = 1, 2, 3, \ldots$ liczba $[x^m] + 1$ jest podzielna przez k.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że żądaną własność ma liczba $x = k + \sqrt{k^2 - k}$.

Aby to udowodnić, określmy dla $m = 1, 2, 3, \ldots$ liczbę d_m wzorem

$$\begin{aligned} d_m &= (k + \sqrt{k^2-k})^m + (k - \sqrt{k^2-k})^m = \\ &= \sum_{i=0}^{m} k^{m-i}(\sqrt{k^2-k})^i + \sum_{i=0}^{m}(-1)^i k^{m-i}(\sqrt{k^2-k})^i = \\ &= 2\sum_{j=0}^{[m/2]} k^{m-2j}(k^2-k)^j = 2\sum_{j=0}^{[m/2]} k^{m-j}(k-1)^j. \end{aligned}$$

Liczba otrzymana po prawej stronie jest całkowita oraz podzielna przez $k^{m-[m/2]}$ i tym bardziej przez k. Ponadto $0 < (k - \sqrt{k^2-k})^m < 1$, gdyż liczba stojąca w nawiasie należy do przedziału $(0, 1)$. Wobec tego $x^m < d_m < x^m + 1$, czyli liczba $[x^m] + 1 = d_m$ jest podzielna przez k.

12. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $a > 1$ o następującej własności: Dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba $a^n - 1$ jest podzielna przez n^2.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że liczba $a = 2$ nie ma postulowanej własności, natomiast mają ją wszystkie liczby $a \geqslant 3$.

Dla liczby $a = 2$ udowodnimy więcej, a mianowicie, że dla żadnej liczby naturalnej $n > 1$ nie zachodzi podzielność $n | 2^n - 1$. Przypuśćmy bowiem, że n jest taką liczbą i niech p będzie jej najmniejszym dzielnikiem pierwszym. Wówczas $2^n \equiv 1 \pmod{p}$, zaś małe twierdzenie Fermata daje $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; to oznacza, że najmniejszy naturalny wykładnik ℓ, dla którego $2^\ell \equiv 1 \pmod{p}$, jest dzielnikiem liczb n i $p - 1$. Jednak liczby n i $p - 1$ są względnie pierwsze, skąd $\ell = 1$ i $2^1 \equiv 1 \pmod{p}$, co jest niedorzecznością.

Niech teraz $a \geqslant 3$. Przyjmijmy, że dla pewnej liczby naturalnej n mamy $n^2 | a^n - 1$ i określmy $m = \frac{a^n - 1}{n}$. Udowodnimy, że wówczas $m^2 | a^m - 1$. Ponieważ z założenia $a \geqslant 3$ wynika nierówność $m > n$, więc rozpoczynając od liczby $n = 1$ otrzymamy w ten sposób rosnący ciąg liczb naturalnych o zadanej własności.

Zauważmy, że w myśl założenia $n^2|a^n-1$ liczba $m=\frac{a^n-1}{n}$ jest podzielna przez n. Ponadto liczba

$$\frac{a^m-1}{a^n-1}=1+a^n+a^{2n}+\ldots+a^{m-n}$$

jest sumą $\frac{m-n}{n}+1=\frac{m}{n}=\frac{a^n-1}{n^2}$ liczb, z których każda daje resztę 1 z dzielenia przez a^n-1, a więc tym bardziej przez $\frac{a^n-1}{n^2}$. Stąd wynika podzielność

$$\frac{a^n-1}{n^2}\bigg|\frac{a^m-1}{a^n-1}, \qquad \text{czyli} \qquad m^2=(a^n-1)\frac{a^n-1}{n^2}\bigg|(a^n-1)\frac{a^m-1}{a^n-1}=a^m-1.$$

13. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz=1$. Wykazać, że

$$\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1}\leqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Niech

$$x=\frac{a}{b},\quad y=\frac{c}{a},\quad z=\frac{b}{c}$$

dla pewnych liczb dodatnich a, b, c (liczby takie istnieją na mocy warunku $xyz=1$, np. $a=x$, $b=1$, $c=xy$). Wówczas

$$(x+1)^2+y^2+1=x^2+y^2+2x+2\geqslant 2xy+2x+2=2\Big(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+1\Big)=2\cdot\frac{a+b+c}{b}.$$

Stąd i z dwóch analogicznych przekształceń otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}&\leqslant\frac{b}{a+b+c},\\ \frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}&\leqslant\frac{a}{a+b+c},\\ \frac{2}{(z+1)^2+x^2+1}&\leqslant\frac{c}{a+b+c},\end{aligned}$$

co po zsumowaniu stronami daje tezę.

14. Ciąg a_1, a_2, a_3, $\ldots$ jest określony wzorami: $a_1=1$, $a_2=0$ oraz

$$a_{2^t+r}=1-a_r \qquad \text{dla liczb całkowitych } r,t \text{ spełniających } 0<r\leqslant 2^t.$$

Udowodnić, że w ciągu tym nie występuje blok postaci www, gdzie w jest ciągiem złożonym z zer i jedynek.

Rozwiązanie:

Przyjmując $b_n = a_{n+1}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ widzimy, że $b_{2^t+r} = 1 - b_r$ dla $0 \leqslant r < 2^t$, co daje następujący opis:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy w zapisie dwójkowym } n \text{ występuje parzysta liczba jedynek} \\ 0 & \text{gdy w zapisie dwójkowym } n \text{ występuje nieparzysta liczba jedynek} \end{cases}$$

Opis ten prowadzi do wniosku, że $b_{m+1} = 1 - b_m$ dla dowolnej liczby parzystej m.

Przypuśćmy, wbrew tezie, że istnieje taka para (n, r), w której $n \geqslant 0$ i $r \geqslant 1$, że $b_{n+i} = b_{n+r+i} = b_{n+2r+i}$ dla $i = 0, 1, \ldots, r-1$. Z powyższego opisu wynika, że jeśli długość bloku r jest parzysta, to jedna z par $(\frac{n}{2}, \frac{r}{2})$, $(\frac{n+1}{2}, \frac{r}{2})$, w zależności od parzystości n, również ma wskazaną własność (usuwamy ostatnią cyfrę w zapisie dwójkowym liczb n, $n+1$, …, $n+3r-1$). Wolno w takim razie przyjąć, że r jest liczbą nieparzystą. Dla $i = 0, 1, \ldots, r-2$ jedna z liczb $n+i$, $n+r+i$ jest parzysta, więc blok długości nieparzystej

$$(b_n, \ldots, b_{n+r-1}) = (b_{n+r}, \ldots, b_{n+2r-1}) = (b_{n+2r}, \ldots, b_{n+3r-1})$$

składa się naprzemiennie z zer i jedynek. W szczególności wynika stąd, że pierwsza i ostatnia liczba w tym bloku są równe i wobec tego $b_{n+r-1} = b_{n+r}$, $b_{n+2r-1} = b_{n+2r}$. Jest to niemożliwe, gdyż jedna z liczb $n+r-1$, $n+2r-1$ jest parzysta. Zatem dany ciąg nie może zawierać potrójnego bloku postaci www.

15. W czworokącie $ABCD$ opisanym na okręgu prosta ℓ przechodząca przez wierzchołek A przecina bok BC w punkcie M oraz półprostą $DC^{\rightarrow}$ w punkcie N. Punkty I_1, I_2, I_3 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABM, MNC, NDA. Dowieść, że punkt przecięcia wysokości trójkąta $I_1I_2I_3$ leży na prostej ℓ.

Rozwiązanie:

Poprowadźmy styczną do okręgu wpisanego w trójkąt ABM równoległą do prostej CD (tak, aby okrąg i prosta CD leżały po przeciwnych stronach stycznej). Niech styczna ta przecina bok BC w punkcie E, zaś prostą ℓ w punkcie H. Uzupełnijmy ponadto trójkąt HEC do równoległoboku $HECF$.

Czworokąty $ABCD$ i $ABEH$ są opisane na okręgach, więc

$$\begin{aligned} AD + HF &= AD + EC = AD + BC - BE = CD + AB - BE = \\ &= CD + AH - EH = CD + AH - CF = DF + AH. \end{aligned}$$

Oznacza to, że w czworokąt $AHFD$ można wpisać okrąg, który oczywiście pokrywa się z okręgiem wpisanym w trójkąt NDA. Wobec tego prosta HF jest styczna do tego okręgu.

Prosta I_1H jest dwusieczną kąta $\angle EHA$, więc z równoległości $EH \parallel CD$ wynika, że prosta I_1H jest prostopadła do dwusiecznej kąta $\angle AND$, na której leżą środki I_2 i I_3. Stąd wniosek, że $I_1H \perp I_2I_3$. Analogicznie równoległość $HF \parallel BC$ prowadzi do prostopadłości $I_3H \perp I_1I_2$. W efekcie punkt H leżący na prostej ℓ jest punktem przecięcia wysokości trójkąta $I_1I_2I_3$.

16. Wyznaczyć wszystkie wartości całkowite przyjmowane przez wyrażenie

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$$

dla pewnych liczb naturalnych a, b, c.

Rozwiązanie:

Niech k będzie całkowitą wartością danego ułamka. Spośród wszystkich trójek liczb naturalnych (a,b,c), dla których wartość tego ułamka wynosi k, wybierzmy tę, dla której suma $a+b+c$ jest najmniejsza możliwa. Możemy oczywiście przyjąć, że $a \leqslant b \leqslant c$.

Weźmy pod uwagę następujące równanie kwadratowe o niewiadomej x:

$$a^2+b^2+x^2 = kabx.$$

Pierwiastkiem tego równania jest liczba naturalna $x = c$, więc ma ono dwa pierwiastki $x_1 \leqslant x_2$, dla których $x_1 + x_2 = kabx$ oraz $x_1x_2 = a^2+b^2$. Przypuśćmy, że $x_1 < b$. Ponieważ $c \geqslant b$, więc mamy $x_2 = c$. Ponadto pierwiastek $x_1 = kab - c = \frac{a^2+b^2}{c}$ jest liczbą naturalną oraz dla trójki (a,b,x_1) wartość danego w treści zadania ułamka wynosi k. Jednak w tej sytuacji nierówność $a+b+x_1 < a+b+b \leqslant a+b+c$ przeczy minimalności trójki (a,b,c).

Wobec tego $x_1 \geqslant b$ i w takim razie $x_2 = \frac{a^2+b^2}{x_1} \leqslant \frac{2b^2}{x_1} \leqslant 2b$. Ponadto jeśli nierówność $x_1 > b$ jest ostra, to $x_2 < 2b$. To w połączeniu z faktem, że $x_1 \leqslant x_2$, prowadzi do zależności $kab = x_1 + x_2 < 2b + 2b = 4b$, skąd wniosek, że $ka < 4$ i tym bardziej $k \leqslant 3$.

Wartości $k = 1$ i $k = 3$ są oczywiście przyjmowane odpowiednio dla trójek $(a,b,c) = (3,3,3)$ i $(a,b,c) = (1,1,1)$. Załóżmy z kolei, że rozpatrywany ułamek przyjmuje wartość $k = 2$; równanie $a^2+b^2+c^2 = 2abc$ ma zatem rozwiązanie w liczbach naturalnych a, b, c. Ponieważ $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ dla liczb n niepodzielnych przez 3, więc któraś z liczb a, b, c jest podzielna przez 3 (w przeciwnym razie lewa strona tego równania byłaby podzielna przez 3, a prawa nie). Zatem pewien składnik lewej strony dzieli się przez 3 i cała lewa strona również, to zaś oznacza, że wszystkie te składniki dzielą się przez 3, czyli $a = 3A$, $b = 3B$, $c = 3C$ dla pewnych liczb naturalnych A, B, C, w sprzeczności z konkluzją poprzedniego akapitu, gdyż

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{ABC} = \frac{(\frac{1}{3}a)^2+(\frac{1}{3}b)^2+(\frac{1}{3}c)^2}{\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{3}b\cdot\frac{1}{3}c} = 3\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = 6.$$

Zatem całkowitymi wartościami danego ułamka są tylko **1** i **3**.

17. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na dwusieczną kąta wewnętrznego $\angle CAB$. Udowodnić, że proste BE i CD przecinają się w punkcie leżącym na dwusiecznej kąta zewnętrznego $\angle CAB$.

Rozwiązanie:

Proste BE i CD przecinają się (gdyby bowiem były one równoległe, to $BDCE$ byłby równoległobokiem, być może zdegenerowanym, i dwusieczna kąta $\angle BAC$ połowiłaby bok BC, w sprzeczności z założeniem $AB \neq AC$). Oznaczmy $F = BE \cap CD$; stosując twierdzenie Talesa oraz korzystając z podobieństwa trójkątów ABD i ACE dostajemy

$$\frac{FC}{FD} = \frac{CE}{BD} = \frac{AE}{AD}.$$

Stąd wynika, że $FA \parallel CE$, a więc $FA \perp AD$, co jest równoznaczne z tezą.

18. Dane są liczby naturalne a i b. Wykazać, że jeżeli dla każdej liczby naturalnej n liczba $(n+a)(n+b)$ jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych, to $a = b$.

Rozwiązanie:

Dla każdej liczby naturalnej ℓ wprowadźmy oznaczenie

$$\lambda(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \ell \text{ jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych} \\ 1 & \text{gdy } \ell \text{ jest iloczynem nieparzystej liczby liczb pierwszych} \end{cases}$$

i przypuśćmy wbrew tezie, że $a \neq b$, na przykład $a < b$. Niech k będzie na tyle dużą liczbą naturalną, że liczba $n = k(b-a) - a$ jest dodatnia. Liczba

$$(n+a)(n+b) = k(b-a)[k(b-a) - a + b] = k(k+1)(b-a)^2$$

jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych oraz $(b-a)^2 \neq 0$, a więc mamy $\lambda(k(k+1)) = 0$, skąd $\lambda(k) = \lambda(k+1)$. Z dowolności k wynika, że dla wszystkich dostatecznie dużych liczb naturalnych k wartość $\lambda(k)$ jest taka sama. Jest to niemożliwe, gdyż $\lambda(p) = 1$ dla każdej liczby pierwszej p oraz $\lambda(m^2) = 0$ dla każdej liczby naturalnej m. Sprzeczność ta dowodzi, że $a = b$.

19. Dla każdej liczby naturalnej n znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$$

dla liczb rzeczywistych b_1, b_2, …, b_n spełniających warunki $b_1 = 0$ oraz

$$|b_{i+1}| = |b_i + 1| \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1}^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(b_i+1)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_i + (n-1),$$

skąd dostajemy

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} = \frac{-n+1+b_n^2+2b_n}{2n} = -\frac{1}{2} + \frac{(b_n+1)^2}{2n}.$$

Widać stąd, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to najmniejsza wartość rozważanego wyrażenia jest osiągana dla ciągu $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = (0, -1, 0, \ldots, -1)$ i wynosi $-\mathbf{\frac{1}{2}}$, zaś dla parzystych liczb n wyraz b_n musi być parzysty (gdyż wyrazy są liczbami całkowitymi naprzemiennie różnych parzystości), więc najmniejsza wartość jest osiągana dla $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n) = (0, -1, 0, \ldots, -1, 0)$ i wynosi $-\mathbf{\frac{1}{2}} + \mathbf{\frac{1}{2n}}$.

20. Dany jest zbiór $n \geqslant 2$ punktów leżących wewnątrz kuli o promieniu 1. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ niech x_i oznacza odległość i-tego punktu danego zbioru od najbliższego innego punktu tego zbioru. Dowieść, że

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqslant 64.$$

Rozwiązanie:
Niech K_i oznacza kulę o środku w i-tym punkcie rozpatrywanego zbioru i promieniu $\frac{1}{2}x_i$. Kule K_1, K_2, …, K_n są rozłączne, gdyż z istnienia punktu $x \in K_i \cap K_j$ wynika, że i-ty i j-ty punkt zadanego zbioru są w odległości mniejszej niż $\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_j \leqslant \max\{x_i, x_j\}$, wbrew określeniu jednej z liczb x_i, x_j. Ponadto wszystkie te kule mają promień nie większy niż 1, czyli są zawarte w kuli K o promieniu 2 współśrodkowej z daną kulą jednostkową. Wobec tego suma objętości tych kul, równa $\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2}x_1)^3 + \frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2}x_2)^3 + \ldots + \frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2}x_n)^3$, nie przekracza objętości K, czyli $\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3$, skąd teza.

21. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, …, x_n spełniających warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+1} + \frac{x_2^3}{x_2^2+1} + \ldots + \frac{x_n^3}{x_n^2+1} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{x^3}{x^2+1} \geqslant x - \frac{1}{2}.$$

Wówczas teza będzie oczywista, gdyż

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+1}+\frac{x_2^3}{x_2^2+1}+\ldots+\frac{x_n^3}{x_n^2+1} \geqslant \left(x_1-\frac{1}{2}\right)+\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(x_n-\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{2}.$$

Jednak nierówność zapowiedziana na początku jest równoważna nierówności $x^3 \geqslant (x-\frac{1}{2})(x^2+1) = x^3 - \frac{1}{2}(x-1)^2$, a ta ostatnia nierówność jest w widoczny sposób prawdziwa.

22. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt M jest środkiem boku BC, zaś odcinki AM i EF przecinają się w punkcie G. Wykazać, że proste GD i BC są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Dla trójkąta równoramiennego ($AB = AC$) teza jest oczywista ze względu na symetrię całego układu. W dalszej części załóżmy zatem, że $AB \neq AC$.

Niech prosta prostopadła do BC i przechodząca przez punkt D przecina odcinek EF w punkcie G'. Poprowadźmy przez punkt G' prostą równoległą do BC; niech przecina ona boki AB i AC odpowiednio w punktach K i H. Oznaczmy wreszcie przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC (leży on na prostej DG').

Punkty G', I, H, E leżą na jednym okręgu, gdyż $\angle IG'H = \angle IEH = 90^\circ$. Analogicznie punkty G', I, K, F leżą na jednym okręgu. Trójkąt EIF jest równoramienny, zatem $\angle G'HI = \angle G'EI = \angle G'FI = \angle GKI$. Stąd wniosek, że trójkąt KIH także jest równoramienny, czyli spodek jego wysokości G' jest środkiem boku KH. Ponieważ M jest środkiem boku BC, więc rozpatrując jednokładność względem punktu A przeprowadzającą prostą KH na BC widzimy, że $G' = G$, to zaś pociąga za sobą tezę.

23. Rozważamy wszystkie k-elementowe podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(0 < k \leqslant n)$. W każdym podzbiorze wybieramy najmniejszą liczbę. Wyznaczyć średnią arytmetyczną wszystkich wybranych liczb.

Rozwiązanie:

Sposób 1. Popatrzmy na liczbę podzbiorów, w których j jest najmniejszym elementem. Do elementu j musimy dobrać $k-1$ elementów większych od j;

można to zrobić na $\binom{n-j}{k-1}$ sposobów. Stąd wniosek, że wartość szukanej średniej wynosi

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n-k+1} j\binom{n-j}{k-1}}{\displaystyle\binom{n}{k}}.$$

Obliczmy wartość licznika tego ułamka. Z podobnych powodów jak poprzednio liczba $j\binom{n-j}{k-1}$ jest liczbą podzbiorów $(k+1)$-elementowych zbioru $\{0,1,\ldots,n\}$, których drugim z kolei elementem jest j (mamy wtedy j możliwości wyboru pierwszego elementu i $\binom{n-j}{k-1}$ możliwości wyboru pozostałych elementów). To oznacza, że suma w liczniku jest równa liczbie wszystkich $(k+1)$-elementowych podzbiorów, czyli $\binom{n+1}{k+1}$. Wobec tego szukana wartość średniej wynosi

$$\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \mathbf{\frac{n+1}{k+1}}.$$

Sposób 2. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\binom{a}{b} &= \binom{a-1}{b-1}+\binom{a-1}{b}=\binom{a-1}{b-1}+\binom{a-2}{b-1}+\binom{a-2}{b}= \\ &= \binom{a-1}{b-1}+\binom{a-2}{b-1}+\binom{a-3}{b-1}+\binom{a-3}{b}=\ldots=\sum_{\ell=b-1}^{a-1}\binom{\ell}{b-1}.\end{aligned}$$

Zmieniając kolejność sumowania i wykorzystując dwukrotnie ten wzór otrzymujemy bardziej rachunkowe dokończenie rozwiązania:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-k+1} j\binom{n-j}{k-1} &= \sum_{j=1}^{n-k+1}\binom{n-j}{k-1}\sum_{i=1}^{j}1=\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum_{j=i}^{n-k+1}\binom{n-j}{k-1}= \\ &= \sum_{i=1}^{n-k+1}\binom{n-i+1}{k}=\binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

24. W rosnącym ciągu liczb naturalnych a_1, a_2, a_3, ... żaden wyraz nie jest dzielnikiem żadnego innego wyrazu. Dowieść, że ciąg różnic

$$a_2-a_1,\quad a_3-a_2,\quad a_4-a_3,\quad \ldots$$

jest nieograniczony.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, wbrew tezie, że dla pewnej liczby naturalnej k mamy

$$a_{n+1} - a_n \leqslant k \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

czyli $a_{n+1} \leqslant a_n + k$. Zatem wśród dowolnych k kolejnych liczb naturalnych nie mniejszych niż a_1 można znaleźć wyraz ciągu a_1, a_2, a_3, ...

Rozpatrzmy ciąg c_1, c_2, c_3, ... określony wzorami: $c_1 = a_1$ oraz

$$c_{n+1} = (c_n + 1)(c_n + 2) \ldots (c_n + k) + c_n \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dla każdego n wśród k kolejnych liczb naturalnych $c_n + 1$, $c_n + 2$, ..., $c_n + k$ istnieje liczba, która jest wyrazem ciągu a_1, a_2, a_3, ... Niech będzie to liczba $c_n + d_n$. Wyrazy tak zdefiniowanego ciągu d_1, d_2, d_3, ... są liczbami naturalnymi nie większymi od k, więc nie mogą być wszystkie różne. Załóżmy, że

$$d_m = d_n = d, \qquad \text{gdzie } m < n.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} c_{m+1} + d &= (c_m + 1)(c_m + 2) \ldots (c_m + k) + c_m + d = \\ &= (c_m + d)[(c_m + 1) \ldots (c_m + d - 1)(c_m + d + 1) \ldots (c_m + k) + 1], \end{aligned}$$

więc liczba $c_m + d$ jest właściwym dzielnikiem liczby $c_{m+1} + d$. Rozumując analogicznie widzimy, że w ciągu

$$c_m + d, \quad c_{m+1} + d, \quad c_{m+2} + d, \quad \ldots, \quad c_{n-1} + d, \quad c_n + d$$

każda liczba jest dzielnikiem liczby po niej następującej. Wobec tego liczba $c_m + d$ jest właściwym dzielnikiem liczby $c_n + d$, co przeczy faktowi, że obie liczby występują w danym w treści zadania ciągu.

25. Niech n, p, q będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Ciąg liczb całkowitych $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ spełnia warunki:

$$x_0 = x_n \qquad \text{oraz} \qquad x_{i+1} - x_i \in \{p, -q\} \qquad \text{dla } i = 0, 1 \ldots, n-1.$$

Udowodnić, że jeżeli $n > p + q$, to istnieją takie k, l, że $k \neq l$ i $\{k, l\} \neq \{0, n\}$ oraz $x_k = x_l$.

Rozwiązanie:

Możemy oczywiście przyjąć, że $x_0 = 0$. Następnie jeżeli liczby p i q nie są względnie pierwsze, to możemy podzielić je (i każdy wyraz ciągu) przez ich największy wspólny dzielnik, zachowując założenia i tezę zadania. W dalszej części przyjmujemy zatem, że p i q są względnie pierwsze.

Z warunków zadania wynika, że

$$x_{i+1} - x_i \equiv p \pmod{p+q} \qquad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Stąd przez prostą indukcję mamy

$$x_k \equiv kp \pmod{p+q} \qquad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ponieważ liczby p i $p+q$ są względnie pierwsze, warunek $x_n = 0$ implikuje podzielność $p+q|n$. Oznaczmy $y_k = x_{k+p+q} - x_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n-(p+q)$. Z poprzednich spostrzeżeń wynika, że $p+q|y_k$ dla dowolnego k. Ponadto

$$y_{k+1} - y_k = (x_{k+1+p+q} - x_{k+p+q}) - (x_{k+1} - x_k)$$

jest różnicą dwóch liczb ze zbioru $\{p, -q\}$ oraz jest podzielna przez $p+q$, co prowadzi do relacji $y_{k+1} - y_k \in \{-(p+q), 0, p+q\}$.

W efekcie ciąg

$$(*) \qquad \frac{y_0}{p+q}, \qquad \frac{y_1}{p+q}, \qquad \ldots, \qquad \frac{y_{n-(p+q)}}{p+q}$$

jest ciągiem liczb całkowitych, którego dwa kolejne wyrazy różnią się najwyżej o 1. Ponadto

$$0 = x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{p+q}-1} y_{k(p+q)},$$

czyli w ciągu $(*)$ musi wystąpić wyraz zerowy. Pozostaje spostrzec, że równość $y_k = 0$ dla pewnego k kończy rozwiązanie.

26. Punkt K leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym

$$\angle KAD = \angle KCB = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \angle KBC = \angle KDA = \beta.$$

Na bokach AB i CD zbudowano, po zewnętrznej stronie czworokąta $ABCD$, trójkąty ABP i CDQ, przy czym

$$\angle PAB = \angle QCD = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \angle PBA = \angle QDC = \beta.$$

Wykazać, ze punkt K jest środkiem odcinka PQ.

Rozwiązanie:

Rozważmy podobieństwo φ będące złożeniem obrotu wokół punktu A o kąt $\alpha = \angle PAB$ z jednokładnością o środku A i skali $\frac{AB}{AP}$, oraz podobieństwo ψ — złożenie obrotu wokół punktu C o kąt $-\alpha = \angle DCQ$ z jednokładnością o środku C i skali $\frac{CQ}{CD}$ (znaki kątów pochodzą od ich orientacji).

Z podobieństw odpowiednich trójkątów wynika, że $\varphi(K) = D$ i $\psi(B) = K$. Ponadto z definicji tych podobieństw mamy $\varphi(P) = B$ i $\psi(D) = Q$. To oznacza, że $\psi(\varphi(P)) = K$ i $\psi(\varphi(K)) = Q$. Jednak złożenie $\psi \circ \varphi$ jest przesunięciem, gdyż kąty obrotów sumują się do zera, a skale jednokładności mnożą się do jedynki. To oznacza, że $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KQ}$, czyli K jest środkiem odcinka PQ.

27. Niech p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 2 z dzielenia przez 3. Wyznaczyć liczbę takich trójek (x, y, z), że $x, y, z \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ oraz liczby

$$x + y + z \qquad \text{i} \qquad xyz - 1$$

są podzielne przez p.

Rozwiązanie:

Niech S będzie zbiorem trójek, o jakich mowa w treści zadania, i niech

$$S_k = \{(x, y, z) \in S : y \equiv kx \pmod{p}\}$$

dla $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Wtedy zbiory S_0, S_1, ..., S_{p-1} są parami rozłączne, zaś ich sumą jest zbiór S.

Ustalmy wartość k i wybierzmy dowolnie trójkę $(x, y, z) \in S_k$. Wówczas $z \equiv -(k+1)x \pmod{p}$, co daje $xyz \equiv -k(k+1)x^3 \pmod{p}$, czyli mamy

$$(*) \qquad -k(k+1)x^3 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Stąd w szczególności wynika, że $x \neq 0$ oraz $k \notin \{0, p-1\}$. Podnosząc warunek $(*)$ do potęgi $\frac{p-2}{3}$, a następnie mnożąc obustronnie przez x otrzymujemy kongruencję $(-k(k+1))^{\frac{p-2}{3}} \equiv x \pmod{p}$, gdzie po drodze korzystamy z małego twierdzenia Fermata. Zatem x jest wyznaczone jednoznacznie przez k. Odwrotnie, jeśli $k \notin \{0, p-1\}$ i spełniona jest kongruencja $(*)$ — co, jak wiemy, ma miejsce dla dokładnie jednej wartości $x \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ — to zachodzi relacja

$$(x, kx \mod p, -(k+1)x \mod p) \in S_k.$$

Zatem $|S_0| = |S_{p-1}| = 0$ oraz $|S_k| = 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, p-2$, i w rezultacie

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_{p-2}| = \mathbf{p - 2}.$$

28. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

Rozwiązanie:

Wstawiając $y = -f(x)$ dostajemy $f(0) = 2x + f(z)$, gdzie $z = f(-f(x)) - x$. Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x liczba $f(0) - 2x$ jest wartością funkcji f, czyli funkcja ta jest „na”.

Załóżmy teraz, że dla pewnych argumentów x_1, x_2 zachodzi $f(x_1) = f(x_2)$. Skoro f jest „na”, możemy wybrać takie y, że $f(y) = x_1 + x_2$. Wstawiając do danego w zadaniu równania $x = x_1$ i y otrzymujemy

$$2x_1 = f(f(x_1) + y) - f(f(y) - x_1) = f(f(x_1) + y) - f(x_2)$$

i analogicznie $2x_2 = f(f(x_2) + y) - f(x_1)$. Ale prawe strony tych równości są równe, więc lewe też, co oznacza, że $x_1 = x_2$. Stąd wynika, że funkcja f jest różnowartościowa.

Podstawiając do danego równania $x = 0$ uzyskujemy $f(f(0)+y) = f(f(y))$. Korzystając z różnowartościowości f dostajemy $f(y) = y + f(0)$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że wszystkie funkcje postaci $\mathbf{f(x) = x + c}$ spełniają podane równanie.

29. Dane są takie dodatnie liczby wymierne x, y, że liczba

$$n = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

jest całkowita. Wykazać, że liczba n nie jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie:

Niech $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, gdzie w liczniku i mianowniku każdego ułamka stoją względnie pierwsze liczby naturalne. Niech ponadto liczby q i s nie będą podzielne przez 3 (wolno to założyć z uwagi na symetrię wyrażeń $x + \frac{1}{x}$ i $y + \frac{1}{y}$). Dana w zadaniu równość zapisuje się w postaci $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} + \frac{q}{p} + \frac{s}{r} = n$ lub równoważnie

$$(pr + qs)(ps + qr) = npqrs.$$

Badając obie strony tej równości modulo p dostajemy $p|q^2rs$, co w połączeniu ze względną pierwszością liczb p i q daje warunek $p|rs$. Analogicznie uzyskujemy zależność $q|rs$ i znów korzystając ze względnej pierwszości mamy $pq|rs$. Podobnie stwierdzamy, że $rs|pq$, a więc $pq = rs$.

Liczby q i s nie są podzielne przez 3, zatem uzyskana przed chwilą równość prowadzi do wniosku, że $p = 3^u p'$ i $r = 3^u r'$, gdzie $u \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ oraz liczby p' i r' nie są podzielne przez 3. Stąd otrzymujemy

$$(*) \qquad (3^{2u}p'r' + qs) \cdot 3^u(p's + qr') = n \cdot 3^{2u}p'qr's.$$

Po lewej stronie drugi nawias nie jest podzielny przez 3, bowiem jest sumą dwóch liczb dających jednakowe reszty z dzielenia przez 3 jako że ich iloczyn $p's \cdot qr' = \frac{pqrs}{3^{2u}} = (\frac{pq}{3^u})^2$ jest kwadratem liczby naturalnej i daje resztę 1 z dzielenia przez 3. Również pierwszy nawias nie jest podzielny przez 3 (jest to oczywiste w przypadku $u \geqslant 1$, natomiast dla $u = 0$ przeprowadzamy to samo rozumowanie, co dla drugiego nawiasu). Zatem lewa strona $(*)$ nie jest podzielna przez 3^{u+1}, i w efekcie postać prawej strony wskazuje, że $u = 0$ oraz liczba n nie jest podzielna przez 3.

30. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n ($m \geqslant n$) zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m+k}{n}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy następującą sytuację: spośród m kobiet i n mężczyzn chcemy wybrać m-osobową delegację. Ponadto każdy z delegowanych mężczyzn musi założyć czerwony lub niebieski krawat. Zbadajmy, na ile sposobów można to uczynić. Możemy najpierw wybrać k mężczyzn do delegacji na $\binom{n}{k}$ sposobów, następnie dobrać do nich $m-k$ kobiet na $\binom{m}{m-k} = \binom{m}{k}$ sposobów, a na końcu wybrać tych mężczyzn, którzy założą czerwony krawat, na 2^k sposobów. Ponieważ k przebiega zbiór $\{0, 1, \ldots, n\}$, więc zliczając w ten sposób otrzymujemy lewą stronę równości danej do udowodnienia. Aby otrzymać prawą stronę, na początku delegujemy $n-k$ mężczyzn, którzy założą czerwony krawat. Możemy to zrobić na $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ sposobów. Następnie spośród pozostałych $m+k$ osób wybieramy n, które nie zostaną delegowane — tu mamy $\binom{m+k}{n}$ sposobów. Na końcu pozostali delegowani mężczyźni zakładają niebieskie krawaty.

31. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab + bc + ca &= 1 \\ 3a^2 - 4b^2 &= 1 \\ 4b^2 - 5c^2 &= 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Jeżeli trójka (a, b, c) spełnia dany układ, to trójka $(-a, -b, -c)$ także. Wobec tego bez straty ogólności możemy przyjąć, że co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są nieujemne.

Niech $x, y, z \in (0, \pi)$ będą takimi kątami, że

$$a = \operatorname{ctg} x, \qquad b = \operatorname{ctg} y, \qquad c = \operatorname{ctg} z.$$

Z pierwszego równania danego układu mamy

$$\operatorname{ctg} z = c = \frac{1 - ab}{a + b} = -\operatorname{ctg}(x + y),$$

co oznacza, że suma $x+y+z$ jest wielokrotnością π. Z nieujemności co najmniej dwóch spośród liczb a, b, c dostajemy $0 < x+y+z < \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\pi = 2\pi$, a więc $x+y+z=\pi$. W takim razie x, y, z są miarami kątów pewnego trójkąta. Przekształćmy teraz drugie równanie: $3a^2-4b^2=1$ przepisujemy w postaci $3(a^2+1)=4(b^2+1)$, czyli

$$\frac{3}{\sin^2 x}=\frac{4}{\sin^2 y}, \qquad \text{i analogicznie} \quad \frac{4}{\sin^2 y}=\frac{5}{\sin^2 z}.$$

Z twierdzenia sinusów wynika teraz, że boki rzeczonego trójkąta mają się do siebie jak $\sqrt{3}:\sqrt{4}:\sqrt{5}$ i pozostaje obliczyć cotangensy kątów takiego trójkąta. W tym celu opuszczamy wysokość na bok o długości 2; niech dzieli ona ten bok na odcinki o długościach t i $2-t$ (przyległe odpowiednio do boków o długościach $\sqrt{3}$ i $\sqrt{5}$). Z twierdzenia Pitagorasa mamy wtedy $3-t^2=5-(2-t)^2$, czyli $t=\frac{1}{2}$. Ponadto długość wysokości wynosi $h=\sqrt{3-t^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$, skąd wyznaczamy $a=\frac{2-t}{h}=\frac{3}{\sqrt{11}}$ i $c=\frac{t}{h}=\frac{1}{\sqrt{11}}$, co daje $b=\frac{2}{\sqrt{11}}$. Łatwo stwierdzić, że ta trójka istotnie spełnia podany układ.

Uwalnianiając się od poczynionego na wstępie założenia dostajemy dwie trójki spełniające dany układ: $(\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{11}}},\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{11}}},\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{11}}})$ i $(-\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{11}}},-\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{11}}},-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{11}}})$.

32. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, nie będącego trapezem, leży taki punkt X, że $\angle ADX=\angle BCX$, $\angle DAX=\angle CBX$ i wszystkie te kąty są ostre, oraz taki punkt Y, że $AY=BY$ i $CY=DY$. Dowieść, że

$$\angle AYB = 2\cdot\angle ADX.$$

Rozwiązanie:

Niech M i N będą takimi punktami na symetralnej odcinka AB, że trójkąty AMN i ADX są podobne oraz mają tę samą orientację. Wówczas $\frac{AM}{AN}=\frac{AD}{AX}$, co wraz z równością kątów $\angle MAD=\angle NAX$ daje podobieństwo trójkątów AMD i ANX. Analogicznie dowodzimy, że ze zgodnego podobieństwa trójkątów BMN i BCX wynika podobieństwo trójkątów BMC i BNX. Zatem

$$\frac{CM}{XN}=\frac{BM}{BN}=\frac{AM}{AN}=\frac{DM}{XN},$$

czyli $CM=DM$. Wobec tego punkt M pokrywa się z punktem Y, gdyż symetralne odcinków AB i CD mają dokładnie jeden punkt wspólny, a stąd

$$\angle AYB=\angle AMB=2\angle AMN=2\angle ADX.$$

7 łatwych zadań geometrycznych

1. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ kąty wewnętrzne mają jednakowe miary. Udowodnić, że

$$AB + BC = DE + EF.$$

Rozwiązanie:

Przedłużając boki BC, DE i FA otrzymujemy trójkąt równoboczny o wierzchołkach $X = FA \cap BC$, $Y = BC \cap DE$, $Z = DE \cap FA$. Trójkąty AXB, CYD i EZF są również równoboczne. Stąd

$$\begin{aligned} AB + BC &= XB + BC = XC = XY - CY = ZY - DY = ZD = \\ &= DE + EZ = DE + EF. \end{aligned}$$

2. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Prosta AO przecina bok BC w punkcie D. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $DP = BD$ oraz $DQ = CD$. Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

Rozwiązanie:

Niech E i F będą rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC. Rzuty prostokątne punktu O na te proste są środkami boków, wyznaczają więc prostą równoległą do BC. Zatem także $EF \parallel BC$.

Ponadto w myśl założeń zadania trójkąty BDP i CDQ są równoramienne. Wobec tego $BE = EP$ oraz $CF = FQ$, co wraz z uzyskaną wcześniej zależnością $EF \parallel BC$ daje, na mocy twierdzenia Talesa, tezę zadania.

3. Czworokąt $ABCD$, w którym $\angle ABC = 90°$, jest wpisany w okrąg. Punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AC i AD. Udowodnić, że prosta MN przechodzi przez środek odcinka BD.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez K rzut prostokątny punktu B na prostą CD. Wówczas punkt B znajduje się na okręgu opisanym na trójkącie ACD, zaś K, M, N są rzutami prostokątnymi tego punktu na boki tego trójkąta. Rzuty te leżą więc na jednej prostej (prostej Simsona).

Z drugiej strony, w czworokącie $NBKD$ kąty przy wierzchołkach N, K, D są proste. Jest on zatem prostokątem. Ponadto punkty K, M, N leżą na przekątnej tego prostokąta, przechodzącej oczywiście przez środek drugiej przekątnej BD. To dowodzi tezy.

4. Na bokach BC i AC trójkąta ABC budujemy, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $BCDE$ i $ACFG$. Proste AE i BG przecinają się w punkcie H. Wykazać, że proste CH i AB są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Na boku AB danego trójkąta zbudujmy, po zewnętrznej stronie, kwadrat $ABIJ$. Obrót o kąt 90° wokół punktu B przeprowadza punkty E i A odpowiednio na punkty C i I. Stąd wniosek, że $CI \perp AE$. Podobnie dowodzimy, że $CJ \perp BG$.

Zatem proste AE i BD zawierają wysokości trójkąta powstającego z trójkąta JIC w wyniku przesunięcia odcinka JI na odcinek AB. Wobec tego prosta CH zawiera trzecią wysokość tego trójkąta, co kończy rozwiązanie.

5. Na bokach trójkąta ABC budujemy podobne trójkąty równoramienne: APB $(AP = PB)$ i CQA $(CQ = QA)$ na zewnątrz oraz trójkąt BRC $(BR = RC)$ do wewnątrz. Dowieść, że punkty A, P, R, Q leżą na jednej prostej albo są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku.

Rozwiązanie:

Obrót o kąt $\alpha = \angle ABP = \angle CBR$ wokół punktu B przeprowadza pewne punkty $D \in \overline{AB}$ i $E \in \overline{BC}$ odpowiednio na punkty P i Q. Ponadto z uwagi na dane podobieństwa mamy

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BP}{BR} = \frac{BA}{BC}.$$

Zatem proste DE i AC są równoległe. Ponieważ $\alpha = \angle QAC$, więc udowodniliśmy, że równoległe proste DE i AC przy pewnych obrotach o kąt α przechodzą odpowiednio na proste PR i AQ. Wobec tego $PR \parallel AQ$ i analogicznie $QR \parallel AP$, skąd teza.

6. Dany jest okrąg o oraz okręgi o_1 i o_2, styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach A i B. Okręgi o_1 i o_2 leżą po jednej stronie prostej ℓ stycznej do nich odpowiednio w punktach D i E. Dowieść, że proste AD i BE przecinają się w punkcie leżącym na okręgu o.

Rozwiązanie:

Poprowadźmy prostą równoległą do prostej ℓ, leżącą po przeciwnej stronie tej prostej niż okręgi o_1 i o_2 oraz styczną do okręgu o w punkcie C. Wykażemy, że C jest poszukiwanym punktem.

Jednokładność o środku A przekształcająca okrąg o_1 na o przeprowadza prostą ℓ styczną do o_1 w punkcie D na równoległą do niej prostą styczną do okręgu o, i leżącą po przeciwnej stronie ℓ niż A. Wynika stąd, że rozpatrywana jednokładność przeprowadza punkt D na C. W rezultacie punkty A, D, C leżą na jednej prostej. To samo możemy powiedzieć o punktach B, E, C, co kończy rozwiązanie.

7. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB = AD$ oraz $\angle DAB = 60°$. Punkt E leży wewnątrz tego czworokąta. Udowodnić, że

$$DE + BE + CE \geqslant AC.$$

Rozwiązanie:

Z warunków zadania wynika, że trójkąt ABD jest równoboczny. Stosując nierówność Ptolemeusza do czworokąta $ABED$ dostajemy

$$AE \cdot BD \leqslant AB \cdot DE + BE \cdot AD$$

i po uwzględnieniu równości $BD = AB = AD$ widzimy, że $AE \leqslant DE + BE$. Zatem na mocy nierówności trójkąta dla punktów B, E, D uzyskujemy

$$DE + BE + CE \geqslant AE + CE \geqslant AC.$$

Zawody drużynowe

1. Wskazać taką liczbę rzeczywistą a, że dla każdego układu liczb rzeczywistych nieujemnych x_1, x_2, ..., x_n o sumie równej 1 zachodzi nierówność

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i + x_j) \leqslant a$$

oraz liczba a nie jest istotnie większa niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ i $x_3 = \ldots = x_n = 0$ wartość wyrażenia po lewej stronie wynosi $\frac{1}{4}$.

Aby udowodnić nierówność dla $a = \frac{1}{4}$ zapiszmy inaczej jej lewą stronę:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i + x_j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \sum_{j\neq i} x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(1-x_i) = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2. Wskazać taką liczbę rzeczywistą b, że każdy wypukły wielokąt środkowosymetryczny o polu 1 jest zawarty w pewnym równoległoboku o polu b oraz liczba b nie jest istotnie większa niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

Rozwiązanie:

Przedstawimy rozwiązanie dla $b = \sqrt{2}$. (W istocie najlepszą stałą jest $\frac{4}{3}$ osiągana dla sześciokąta foremnego, ale rozwiązanie jest wtedy znacznie bardziej skomplikowane.)

Niech O będzie środkiem symetrii wielokąta $\mathcal{P}$ i wybierzmy na jego obwodzie takie punkty A i B, że pole $[OAB]$ jest maksymalne. Prowadząc przez A prostą równoległą do OB oraz przez B prostą równoległą do OA, a także dwie proste symetryczne do nich względem punktu O, otrzymujemy równoległobok $\mathcal{R}_1$ zawierający $\mathcal{P}$, przy czym środki boków $\mathcal{R}_1$ leżą na obwodzie $\mathcal{P}$. Niech ponadto $\mathcal{R}$ będzie równoległobokiem symetrycznym względem O o jednym boku AB; oznaczmy go przez $ABA'B'$ (zawiera się on w $\mathcal{P}$). Wreszcie niech $\mathcal{R}_2$ będzie najmniejszym równoległobokiem zawierającym $\mathcal{P}$ o bokach równoległych do boków $\mathcal{R}$.

Wykażemy, że $[\mathcal{R}_1] \leqslant \sqrt{2}[\mathcal{P}]$ lub $[\mathcal{R}_2] \leqslant \sqrt{2}[\mathcal{P}]$.

Wyprowadźmy z punktu O półprostą równoległą do $B'A^{\rightarrow}$ (w tym samym kierunku). Przecina ona odcinek AB w pewnym punkcie X oraz brzeg $\mathcal{P}$ w pewnym punkcie X'; niech $x = \frac{OX'}{OX}$. Wtedy $1 \leqslant x \leqslant 2$. Analogicznie definiujemy $y = \frac{OY'}{OY}$ dla półprostej wychodzącej z O równoległej do $AB^{\rightarrow}$. W tej sytuacji $[\mathcal{R}_2] = xy[\mathcal{R}]$, a z drugiej strony $\mathcal{P}$ zawiera środkowosymetryczny ośmiokąt o początkowych wierzchołkach A, X', B, Y', którego pole wynosi $\frac{x+y}{2}[ABA'B']$, czyli mamy $\frac{x+y}{2}[\mathcal{R}] \leqslant [\mathcal{P}]$. Ostatecznie

$$[\mathcal{R}_1] \cdot [\mathcal{R}_2] = 2[\mathcal{R}] \cdot xy[\mathcal{R}] \leqslant 2[\mathcal{R}] \cdot (\tfrac{x+y}{2})^2[\mathcal{R}] \leqslant 2(\tfrac{x+y}{2}[\mathcal{R}])^2 \leqslant 2[\mathcal{P}],$$

skąd istotnie $[\mathcal{R}_1] \leqslant \sqrt{2}[\mathcal{P}]$ lub $[\mathcal{R}_2] \leqslant \sqrt{2}[\mathcal{P}]$.

3. Wskazać taką liczbę rzeczywistą c, że w dowolnej prostokątnej tablicy liczb rzeczywistych, w której moduł każdej liczby nie przekracza 1, a suma liczb w każdej kolumnie wynosi 0, da się tak przestawić liczby w każdej kolumnie, aby moduł sumy liczb w każdym wierszu nie przekraczał c, oraz liczba c nie jest istotnie większa niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że najlepszą stałą jest $c = 2$.

Rozważmy zatem dowolną tablicę oraz wszystkie tablice, które można z niej otrzymać przestawiając liczby w kolumnach. Dla każdej takiej tablicy możemy obliczyć wielkość $|W_1| + |W_2| + \ldots + |W_\ell|$, gdzie W_i jest sumą wszystkich liczb z i-tego wiersza (ℓ oznacza liczbę wierszy). Wybierzmy tę tablicę, dla której ta wielkość jest najmniejsza. Udowodnimy, że wówczas $|W_i| < 2$ dla $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Przypuśćmy, że tak nie jest; niech na przykład $|W_1| \geqslant 2$ i po zmianie znaków wszystkich liczb w tablicy $W_1 \geqslant 2$. Skoro $W_1 + W_2 + \ldots + W_\ell = 0$, pewien wiersz ma sumę ujemną, np. $W_2 < 0$. Mamy teraz $W_1 > W_2$, więc w pewnej kolumnie, np. w pierwszej, liczba x w pierwszym wierszu jest większa od liczby y w drugim wierszu. Zamieńmy teraz liczby x i y miejscami. Otrzymamy nową tablicę, dla której rozpatrywana wielkość wynosi

$$|W_1 + (y - x)| + |W_2 + (x - y)| + |W_3| + \ldots + |W_\ell|.$$

Ponieważ $|x|, |y| \leqslant 1$ oraz $W_1 \geqslant 2$, mamy

$$|W_1 + (y - x)| = W_1 + y - x = |W_1| + y - x.$$

Z drugiej strony, $W_2 < 0$ oraz $x - y > 0$, co daje $|W_2 + (x - y)| < |W_2| + x - y$. To jednak oznacza, że dla nowej tablicy rozpatrywana wielkość jest mniejsza, co przeczy minimalności tej poprzedniej.

Stałej $c = 2$ nie można poprawić, gdyż dla tablicy o 2 kolumnach, z których każda składa się z n liczb równych $1 - \frac{1}{n}$ oraz $n - 1$ liczb równych -1, po dowolnym przestawieniu kolumn istnieje wiersz o sumie $2 - \frac{2}{n}$.

4. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych, a $\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych. Wskazać taką funkcję $f : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$, że dla dowolnej liczby $p \in \mathbb{P}$ istnieje p-elementowy zbiór liczb naturalnych mniejszych od $f(p)$, którego dwuelementowe podzbiory mają różne sumy elementów, oraz funkcja f nie rośnie istotnie szybciej niż w poprawnych rozwiązaniach innych drużyn.

Rozwiązanie:

Podamy konstrukcję opisanych zbiorów dla $f(p) = 2p^2$ dla nieparzystych liczb pierwszych p. Funkcja ta nie może być „istotnie" mniejsza: p-elementowy zbiór ma $\frac{1}{2}p(p-1)$ podzbiorów i każdy z nich ma mieć inną sumę, więc największy element zbioru musi być równy co najmniej $\frac{1}{4}p(p-1)$.

Niech r_i dla $i = 0, 1, \ldots, p-1$ oznacza resztę z dzielenia liczby i^2 przez p i weźmy pod uwagę zbiór p liczb postaci $2pj + r_j$ dla $j = 0, 1, \ldots, p-1$. Jest to zbiór liczb naturalnych nie większych niż $2p(p-1) + 1$. Mamy wykazać, że z równości

$$(2pa + r_a) + (2pb + r_b) = (2pc + r_c) + (2pd + r_d)$$

dla $a, b, c, d \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, gdzie $a \neq b$, $c \neq d$, wynika, że składniki obu stron są równe. Zapiszmy tę równość w postaci $2p(a + b - c - d) = r_c + r_d - r_a - r_b$. Prawa strona ma moduł mniejszy niż $2p$, a więc obie strony są zerami, skąd

$$a + b = c + d \qquad \text{oraz} \qquad a^2 + b^2 \equiv c^2 + d^2 \pmod{p}.$$

W takim razie $(a-c)(a+c) \equiv (d-b)(d+b) \pmod{p}$, co daje albo $a = c$ i $b = d$, albo — po skróceniu przez pierwszy czynnik — $a + c \equiv d + b \pmod{p}$ i wraz z zależnością $a + b = c + d$ dostajemy $b = c$, $a = d$.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie pola na szachownicy rozmiaru 8×8 o następującej własności: Po usunięciu tego pola można pokryć pozostałą część szachownicy klockami rozmiaru 3×1.

Rozwiązanie:

Wypełnijmy pola danej szachownicy liczbami w następujący sposób:

1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1

Wówczas każdy klocek przykrywa pola o łącznej sumie 2. Wobec tego suma liczb wpisanych w pola przykryte przez 21 klocków wynosi 42, zaś suma liczb we wszystkich polach jest równa 44. Zatem jedynymi polami o zadanej własności mogą być tylko cztery pola z liczbą 2. W istocie mają one taką własność: każde z nich jest środkiem pewnej szachownicy 5×5 i po jego usunięciu można ją pokryć 8 klockami; pozostała część wyjściowej szachownicy rozpada się na prostokąty 3×5 i 3×8, które oczywiście również można pokryć klockami.

2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne $a > b > n$, że liczba dodatnich dzielników liczby $a^2 + 1$ nie przekracza liczby dodatnich dzielników liczby $b^2 + 1$.

Rozwiązanie:

Niech funkcja $d(k)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby k oraz niech $c_k = d(k^2 + 1)$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$

Zauważmy, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej k podzielnej przez ℓ różnych liczb pierwszych mamy $c_k < k - 2\ell$. Istotnie, dzielniki liczby $k^2 + 1$ większe niż k są postaci $\frac{k^2+1}{d}$ dla pewnego dzielnika $d | k^2 + 1$ mniejszego niż k, a więc c_k jest dwukrotnością liczby tych dzielników $k^2 + 1$, które są mniejsze niż k. Tych ostatnich jest co najwyżej $\frac{k-1}{2} - \ell$, ponieważ z $\frac{k-1}{2}$ nieparzystych liczb naturalnych mniejszych od k należy jeszcze usunąć ℓ liczb pierwszych dzielących k. W rezultacie $c_k \leqslant 2(\frac{k-1}{2} - \ell) < k - 2\ell$.

Załóżmy teraz, że teza zadania nie zachodzi dla liczby n; oznacza to, że $c_n < c_{n+1} < c_{n+2} < \ldots$, co prowadzi do nierówności $c_{n+i} > i$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Wybierając taką liczbę i, dla której liczba $n+i$ jest nieparzysta i ma n różnych dzielników pierwszych, otrzymujemy $i < c_{n+i} < (n+i) - 2n = -n+i$, czyli sprzeczność.

3. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} \leqslant 3\sqrt{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}.$$

Rozwiązanie:

Dla dowolnych liczb dodatnich a, b spełniona jest następująca nierówność między średnimi potęgowymi:

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^3 \leqslant \frac{a^3+b^3}{2}.$$

Stąd i z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostajemy

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2} &= 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^3 + \sqrt{2}\cdot z \cdot z \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leqslant \\
&\leqslant 2\sqrt{2}\cdot\frac{x^3+y^3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\left[2z^3 + \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^3\right] \leqslant \\
&\leqslant 2\sqrt{2}\cdot\frac{x^3+y^3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\left[2z^3 + \frac{x^3+y^3}{2}\right] = \\
&= \sqrt{2}\left(\tfrac{7}{6}x^3 + \tfrac{7}{6}y^3 + \tfrac{2}{3}z^3\right).
\end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2+z^2)\sqrt{y^2+z^2} &\leqslant \sqrt{2}\left(\tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{7}{6}y^3 + \tfrac{7}{6}z^3\right), \\
(x^2+y^2+z^2)\sqrt{z^2+x^2} &\leqslant \sqrt{2}\left(\tfrac{7}{6}x^3 + \tfrac{2}{3}y^3 + \tfrac{7}{6}z^3\right)
\end{aligned}$$

i sumując stronami dostajemy tezę.

4. Na okręgu danych jest n liczb rzeczywistych. Operacja polega na wpisaniu pomiędzy każdą parę sąsiednich liczb wartości bezwzględnej ich różnicy oraz wymazaniu dotychczasowych n liczb. Rozstrzygnąć, w zależności od $n \geqslant 3$, czy z dowolnego początkowego układu n liczb w wyniku wielokrotnego wykonywania opisanej operacji można otrzymać n jednakowych liczb.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dla każdego $n \geqslant 3$ istnieje początkowy układ, z którego nigdy nie otrzymuje się n równych liczb. Rozpatrzmy w tym celu wielomian

$$W(t) = t^{n-1} - t^{n-2} - t^{n-3} - \ldots - t - 1.$$

Nietrudno sprawdzić, że $W(1) = -n + 2 < 0$ oraz $W(2) = 1 > 0$, zatem wielomian ten ma pierwiastek α w przedziale $(1, 2)$. Jako początkowy układ liczb wpisujemy na okręgu kolejno liczby 1, α, α^2, ..., α^{n-1}. Wówczas po wykonaniu opisanej w zadaniu operacji otrzymujemy na okręgu kolejno następujące liczby: $\alpha - 1$, $\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1)$, $\alpha^3 - \alpha^2 = \alpha^2(\alpha - 1)$, ..., $\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} = \alpha^{n-2}(\alpha - 1)$, $\alpha^{n-1} - 1 = (\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} + \ldots + \alpha + 1)(\alpha - 1) = \alpha^{n-1}(\alpha - 1)$. Uzyskany układ powstaje z początkowego także w wyniku pomnożenia wszystkich liczb przez $\alpha - 1$. Wobec tego układ otrzymany po wykonaniu k operacji powstaje z początkowego przez pomnożenie wszystkich liczb przez $(\alpha - 1)^k$, zatem nie może składać się z n jednakowych liczb.

5. W n-osobowym stowarzyszeniu działa k komisji. Każda komisja liczy co najmniej dwóch członków, zaś dowolne dwie różne komisje mają dokładnie jednego wspólnego członka. Dowieść, że $k \leqslant n$.

Rozwiązanie:

Niech $\{1, 2, \ldots, n\}$ będzie zbiorem numerów członków stowarzyszenia oraz niech $A_j \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$ będzie zbiorem numerów członków j-tej komisji. Niech ponadto $B_i = \{j \in \{1, 2, \ldots, k\} : i \in A_j\}$, czyli B_i składa się z numerów tych komisji, do których należy członek i.

Załóżmy, że członek o numerze i nie wchodzi w skład j-tej komisji. Wówczas dwie różne komisje zawierające członka i nie mogą mieć wspólnego członka należącego jednocześnie do komisji A_j. Wynika stąd, że liczba komisji zawierających członka i nie przekracza liczby członków komisji A_j, czyli $|B_i| \leqslant |A_j|$. Stąd dostajemy $n - |B_i| \geqslant n - |A_j|$. Liczba po prawej stronie jest dodatnia (z wyłączeniem przypadku, gdy $|A_j| = n$, czyli pewna komisja składa się ze wszystkich członków stowarzyszenia, wtedy jednak oczywiście $k \leqslant 2 \leqslant n$). Zatem

$$(*) \qquad \frac{1}{n - |B_i|} \leqslant \frac{1}{n - |A_j|}.$$

Przesumujmy teraz powyższą nierówność po wszystkich takich parach (i, j), że $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant k$ oraz $i \notin A_j$. Dla ustalonego i liczba takich par jest równa liczbie komisji, do których nie należy członek i, czyli $k - |B_i|$. Natomiast dla ustalonego j liczba takich par jest równa liczbie członków stowarzyszenia nie należących do komisji A_j, czyli $n - |A_j|$. Wobec tego

$$\sum_{(i,j): i \notin A_j} \frac{1}{n - |B_i|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k - |B_i|}{n - |B_i|} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{k - n}{n - |B_i|}\right) = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{k - n}{n - |B_i|},$$

$$\sum_{(i,j):i\notin A_j} \frac{1}{n-|A_j|} \quad = \quad \sum_{j=1}^{k} \frac{n-|A_j|}{n-|A_j|} = \sum_{j=1}^{k} 1 = k.$$

W takim razie na mocy nierówności (∗) dostajemy

$$(k-n)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-|B_i|} - 1\Big) \leqslant 0.$$

Liczba w drugim nawiasie jest dodatnia, gdyż stojąca tam suma jest sumą n składników równych co najmniej $\frac{1}{n}$, wśród których niektóre są większe niż $\frac{1}{n}$ (w przeciwnym razie byłoby $B_i = \emptyset$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, czyli żaden członek nie należałby do żadnej komisji). Zatem liczba w pierwszym nawiasie jest niedodatnia, czyli $k \leqslant n$.

6. Dane są względnie pierwsze liczby naturalne a i b. Dowieść, że istnieje dokładnie $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$ liczb całkowitych nieujemnych, których nie można przedstawić w postaci $ax+by$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych x, y.

Rozwiązanie:

Niech S będzie zbiorem liczb postaci $ax+by$, gdzie $x \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, $y \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$. Nietrudno spostrzec, że wszystkie liczby tej postaci są różne: gdyby $ax+by = ax'+by'$, to $a(x-x') = b(y'-y)$, czyli $b|y'-y$ na mocy względnej pierwszości liczb a i b, ale to dla $0 \leqslant y, y' \leqslant a-1$ wymusza $y = y'$, skąd także $x = x'$. Wobec tego zbiór S składa się dokładnie z ab liczb, wśród których najmniejsza wynosi 0, a największa wynosi

$$a(b-1) + b(a-1) = 2ab - a - b.$$

Przypisując liczbie $ax+by \in S$ liczbę

$$a(b-1-x) + b(a-1-x) = 2ab - a - b - (ax+by) \in S$$

łączymy liczby zbioru S w pary. Jedyną liczbą, którą w ten sposób możemy połączyć w parę z nią samą, jest $ab - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. Ponieważ $|S| = ab$, więc gdy liczby a i b są obie nieparzyste, musimy mieć $ab - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \in S$. Wniosek stąd, że liczba elementów zbioru S nie przekraczających $ab - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ jest równa tej z liczb $\frac{1}{2}|S|$ lub $\frac{1}{2}(1+|S|)$, która jest całkowita (a przy tym druga liczba jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $ab - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ jest całkowita).

W rezultacie liczb całkowitych nieujemnych nie przekraczających $ab - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ i nie należących do zbioru S jest dokładnie

$$ab - \tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2} + 1 - \tfrac{1}{2}(1+|S|) = \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(a-1)(b-1).$$

Zauważmy też, że każda liczba postaci $ax + by$ dla pewnych $x, y \geqslant 0$ nie przekraczająca $ab - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ musi należeć do zbioru S, gdyż wówczas $x < b$ i $y < a$.

Do zakończenia rozwiązania pozostaje sprawdzić, że każda liczba całkowita większa niż $ab - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ daje się zapisać w postaci $ax + by$ dla pewnych liczb całkowitych $x, y \geqslant 0$. Niech więc n będzie liczbą całkowitą; reszty z dzielenia liczb ai przez b dla $i = 0, 1, \ldots, b-1$ są różne (gdyż a i b są względnie pierwsze), zatem $ax \equiv n \pmod{b}$ dla pewnego $x \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, przy czym $ax \leqslant a(b-1)$, a więc jeżeli $n \geqslant ab - a$, to $n - ax$ jest nieujemną wielokrotnością y. Analogicznie każda liczba nie mniejsza niż $ab - b$ ma rozpatrywane przedstawienie. Ponieważ $ab - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \geqslant \min\{ab - a, ab - b\}$, więc rozwiązanie jest zakończone.

7. Dla każdej liczby pierwszej p wyznaczyć najmniejszy możliwy stopień wielomianu $W(x)$ o następujących trzech własnościach:

- $W(x)$ ma współczynniki całkowite.
- $W(0) = 0$ oraz $W(1) = 1$.
- Dla każdego całkowitego n, $W(n)$ daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez p.

Rozwiązanie:

Z małego twierdzenia Fermata wynika, że $W(x) = x^{p-1}$ ma wszystkie wymienione własności.

Przypuśćmy, że wielomian $W(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x$ o wymaganych własnościach ma stopień $k < p - 1$. Wówczas

$$\sum_{j=1}^{p-1} W(j) = \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{k} a_i j^i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p-1} a_i j^i = \sum_{i=1}^{k} a_i s_i,$$

gdzie oznaczyliśmy

$$s_i = 1^i + 2^i + \ldots + (p-1)^i \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Wykażemy, że liczby s_1, s_2, …, s_k są podzielne przez p. Wyniknie stąd sprzeczność, gdyż na mocy kongruencji $W(j) \equiv 0$ lub $1 \pmod{p}$ dla $j = 1, 2, \ldots, p-1$ oraz warunku $W(1) = 1$ suma $W(1) + W(2) + \ldots + W(p-1)$ nie może być podzielna przez p.

Niech więc $\ell \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$. Wielomian $x^\ell - 1$ rozpatrywany modulo p ma stopień ℓ, zatem ma co najwyżej ℓ różnych pierwiastków modulo p. Skoro $\ell < p - 1$, pewna liczba $g \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ spełnia warunek $g^\ell \not\equiv 1 \pmod{p}$. Odwzorowanie $x \mapsto gx \pmod{p}$ przeprowadza zbiór $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ wzajemnie jednoznacznie na ten sam zbiór. Wobec tego

$$s_\ell \equiv g^\ell + (2g)^\ell + \ldots + ((p-1)g)^\ell = g^\ell [1^\ell + 2^\ell + \ldots + (p-1)^\ell] = g^\ell s_\ell \pmod{p}.$$

Ponieważ $g^\ell \not\equiv 1 \pmod{p}$, więc otrzymujemy stąd podzielność $p | s_\ell$ i w rezultacie szukany najmniejszy stopień jest równy $\mathbf{p - 1}$.

8. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje dla wszystkich argumentów rzeczywistych wartości nieujemne. Dowieść, że istnieją takie wielomiany $P(x)$, $Q(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby x zachodzi równość

$$W(x) = (P(x))^2 + (Q(x))^2.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy indukcję względem stopnia wielomianu W. Dla wielomianów stałych teza jest prawdziwa.

Przyjmijmy, że wielomian W ma pierwiastek rzeczywisty a. Skoro $W(x) \geqslant 0$ dla każdego x, więc jest to pierwiastek krotności parzystej oraz

$$W(x) = (x-a)^2 w(x)$$

dla pewnego wielomianu w o współczynnikach rzeczywistych przyjmującego tylko wartości nieujemne. Na mocy założenia indukcyjnego istnieje przedstawienie postaci $w(x) = (p(x))^2 + (q(x))^2$ i wystarczy teraz przyjąć

$$P(x) = (x-a)p(x), \qquad Q(x) = (x-a)q(x).$$

Jeżeli zaś wielomian W nie ma pierwiastków rzeczywistych, to na podstawie zasadniczego twierdzenia algebry jest on iloczynem trójmianów kwadratowych przyjmujących tylko wartości dodatnie. Niech

$$W(x) = (x^2 + kx + l)w(x),$$

gdzie w jest wielomianem przyjmującym wartości dodatnie. Wówczas mamy

$$x^2 + kx + l = (a(x))^2 + (b(x))^2, \qquad w(x) = (p(x))^2 + (q(x))^2,$$

gdzie $a(x) = x + \frac{1}{2}k$, $b(x) \equiv \frac{1}{2}\sqrt{4l - k^2}$, zaś wielomiany p, q istnieją na mocy założenia indukcyjnego. W tej sytuacji wielomiany

$$P(x) = a(x)p(x) + b(x)q(x), \qquad Q(x) = a(x)q(x) - b(x)p(x)$$

spełniają zależność

$$(P(x))^2 + (Q(x))^2 = [(a(x))^2 + (b(x))^2][(p(x))^2 + (q(x))^2] = W(x).$$

9. Okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 przechodzą przez punkt P, przy czym okręgi o_1 i o_3 są styczne zewnętrznie oraz okręgi o_2 i o_4 są stycznie zewnętrznie. Punkty A, B, C, D są drugimi punktami przecięcia odpowiednio par okręgów: o_1 i o_2, o_2 i o_3, o_3 i o_4, o_4 i o_1. Wykazać, że

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy inwersję względem punktu P o dowolnym promieniu. Obraz punktu X przy tej inwersji będziemy oznaczać X'.

Okręgi o_1 i o_3 są styczne w punkcie będącym środkiem inwersji, zatem ich obrazami są dwie proste równoległe. To samo można powiedzieć o okręgach o_2 i o_4. Wobec tego punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku.

Trójkąty PAB i $PB'A'$ są podobne, skąd $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{B'A'}{A'P}$ i $AB = A'B' \cdot \dfrac{BP}{A'P}$. Analogicznie

$$BC = B'C' \cdot \frac{BP}{C'P}, \qquad AD = A'D' \cdot \frac{DP}{A'P}, \qquad DC = D'C' \cdot \frac{DP}{C'P}.$$

Wykorzystując teraz powyższe cztery równości oraz zależności $A'B' = D'C'$, $B'C' = A'D'$ obliczamy lewą stronę danego w treści zadania wyrażenia, otrzymując w wyniku rachunku jego prawą stronę.

10. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Częścią wspólną trójkątów ACE i BDF jest sześciokąt $KLMNOP$. Dowieść, że proste KN, LO, MP przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Ustalmy oznaczenia kolejnych wierzchołków sześciokąta $KLMNOP$ tak, by $K = EA \cap FB$ oraz $L = FB \cap AC$.

Stosując twierdzenie Pascala do „sześciokąta” o kolejnych wierzchołkach F, D, B, E, A, C stwierdzamy, że punkty $P = FD \cap EA$, $M = DB \cap AC$, $X = BE \cap CF$ będące punktami przecięcia „przeciwległych boków” leżą na jednej prostej. Podobnie punkt $Y = CF \cap AC$ leży na prostej KN oraz punkt $Z = AC \cap BD$ leży na prostej LO.

Punkty X, Y, Z są wyznaczone przez przecięcia głównych przekątnych sześciokąta $ABCDEF$, zatem pokrywają się (i teza jest spełniona, gdyż jak udowodniliśmy przekątne KN, LO, MP przechodzą przez ten punkt) albo są wierzchołkami niezdegenerowanego trójkąta XYZ.

W tym drugim przypadku zastosujemy do tego trójkąta trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy. Ażeby dowieść, że przekątne główne sześciokąta $KLMNOP$ przecinają się w jednym punkcie, należy wykazać, że

$$(*) \qquad \frac{\sin\angle EXP}{\sin\angle PXF} \cdot \frac{\sin\angle CYN}{\sin\angle NYD} \cdot \frac{\sin\angle AZL}{\sin\angle LXB} = 1.$$

Stosując jednak trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy do trójkąta XEF i prostych XP, EP, FP dostajemy

$$\frac{\sin\angle EXP}{\sin\angle PXF} = \frac{\sin\angle BEA}{\sin\angle AEF} \cdot \frac{\sin\angle EFD}{\sin\angle DFC}$$

i analogicznie

$$\frac{\sin\angle CYN}{\sin\angle NYD} = \frac{\sin\angle FCE}{\sin\angle ECD}\cdot\frac{\sin\angle CDB}{\sin\angle BDA}, \qquad \frac{\sin\angle AZL}{\sin\angle LXB} = \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle CAB}\cdot\frac{\sin\angle ABF}{\sin\angle FBE}.$$

Mnożąc powyższe trzy zależności i korzystając z równości kątów wpisanych $\angle BEA = \angle BDA$, $\angle EFD = \angle ECD$, $\angle FCE = \angle FBE$, $\angle CDB = \angle CAB$, $\angle DAC = \angle DFC$, $\angle ABF = \angle AEF$ uzyskujemy związek $(*)$, czyli tezę.

11. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dwa czworościany, z których jeden leży wewnątrz drugiego, że suma długości wszystkich krawędzi czworościanu wewnętrznego jest większa od sumy długości wszystkich krawędzi czworościanu zewnętrznego.

Rozwiązanie:

Takie czworościany istnieją. Rozpatrzmy mianowicie czworościan $ABCD$, w którym podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku 1 i ponadto $DA = DB = DC = 1000$, oraz niech różne punkty P, Q, R, S leżą wewnątrz czworościanu $ABCD$, przy czym odległości punktów P i Q od płaszczyzny ABC wynoszą 1, zaś odległości punktów R i S od tej płaszczyzny wynoszą 999. Wówczas każdy z odcinków PR, PS, QR, QS ma długość co najmniej 998, a zatem suma długości wszystkich krawędzi czworościanu $PQRS$ jest większa niż $4 \cdot 998 = 3992$, zaś suma długości wszystkich krawędzi zawierającego go czworościanu $ABCD$ jest równa 3003.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Znaleźć największą możliwą liczbę wierzchołków wielościanu wypukłego, w którym dowolne trzy wierzchołki tworzą trójkąt nierozwartokątny.

Rozwiązanie:

Niech $\mathcal{V}$ będzie wielościanem wypukłym o wierzchołkach A_1, A_2, …, A_n spełniającym warunki zadania oraz niech $\mathcal{V}_i$ będzie obrazem wielościanu $\mathcal{V}$ przy przesunięciu o wektor $\overrightarrow{A_1A_i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Udowodnimy, że:

A. Wielościany $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, …, $\mathcal{V}_n$ mają parami rozłączne wnętrza.

B. Wielościany $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, …, $\mathcal{V}_n$ zawierają się w wielościanie $\mathcal{W}$ będącym obrazem wielościanu $\mathcal{V}$ w jednokładności względem punktu A_1 o skali 2.

Dowód zdania **A.** Niech $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$. Zauważmy, że wielościan $\mathcal{V}_j$ jest obrazem wielościanu $\mathcal{V}_i$ przy przesunięciu o wektor $\overrightarrow{A_iA_1} + \overrightarrow{A_1A_j} = \overrightarrow{A_iA_j}$. Wielościany $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_i$ i $\mathcal{V}_j$ są przystające, wystarczy więc udowodnić, że w wyniku przesunięcia wielościanu $\mathcal{V}$ o wektor $\overrightarrow{A_iA_j}$ otrzymujemy wielościan $\mathcal{V}'$, którego wnętrze jest rozłączne z wnętrzem wielościanu $\mathcal{V}$.

Niech π_1, π_2 będą płaszczyznami prostopadłymi do prostej A_iA_j, przechodzącymi odpowiednio przez punkty A_i, A_j. Punkty te są wierzchołkami wielościanu $\mathcal{V}$; zauważmy ponadto, że wraz z dowolnym punktem, nie leżącym pomiędzy płaszczyznami π_1 i π_2, wyznaczają one trójkąt rozwartokątny. Zatem wszystkie wierzchołki wielościanu wypukłego $\mathcal{V}$ są zawarte pomiędzy płaszczyznami π_1 i π_2, a więc jest tam zawarty cały wielościan. Przesunięcie o wektor $\overrightarrow{A_iA_j}$ przekształca płaszczyznę π_1 na π_2. Stąd wynika, że wielościany $\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}'$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny π_2 i wszystkie ich punkty wspólne leżą na tej płaszczyźnie. Ponieważ nie zawiera ona punktów wewnętrznych wielościanu $\mathcal{V}$, więc dowód zdania **A.** jest zakończony.

Dowód zdania **B.** Niech punkt P należy do pewnego wielościanu $\mathcal{V}_i$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$. Uzupełnijmy trójkąt A_1A_iP do równoległoboku A_1A_iPQ. Wówczas $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{A_1A_i}$, co oznacza, że punkt Q należy do wielościanu $\mathcal{V}$. Punkt A_i jest wierzchołkiem tego wielościanu, a ponieważ jest on wypukły, więc środek M odcinka QA_i również należy do wielościanu $\mathcal{V}$. Jednakże punkt M jest również środkiem odcinka A_1P. Stąd i z określenia wielościanu $\mathcal{W}$ wynika, że punkt P należy do tego wielościanu. To dowodzi zdania **B.**

Ze zdań **A.** i **B.** wynika, że suma objętości wielościanów $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, …, $\mathcal{V}_n$, która jest równa n-krotnej objętości wielościanu $\mathcal{V}$ (gdyż wszystkie te wielościany są przystające), nie przekracza objętości wielościanu $\mathcal{W}$. Ta ostatnia objętość jest $2^3 = 8$ razy większa od objętości wielościanu $\mathcal{V}$. Zatem $n \leqslant 8$.

Jest jasne, że sześcian jest przykładem wielościanu o **8** wierzchołkach i postulowanej własności.

2. W wierzchołkach grafu skończonego bez pętli i krawędzi wielokrotnych umieszczono lampy. Ruch polega na tym, że wybieramy lampę, a następnie zmieniamy stan tej lampy oraz wszystkich lamp sąsiednich, tj. zapalamy zgaszone i gasimy zapalone. Na początku wszystkie lampy są zgaszone. Rozstrzygnąć w zależności od grafu, czy można je wszystkie zapalić za pomocą skończonej liczby ruchów.

Rozwiązanie:

Udowodnimy nie wprost, że dla każdego grafu taka operacja jest możliwa. Przypuśćmy zatem, że G jest grafem, dla którego nie da się tego zrobić i spośród takich grafów ma najmniej wierzchołków. Rozważmy graf G z usuniętym jednym wierzchołkiem. Z założenia wiemy, że w tym mniejszym grafie istnieje sekwencja ruchów zapalająca wszystkie lampy tego grafu. Gdyby ta sama sekwencja w grafie G zapalała również lampę w pozostałym wierzchołku, mielibyśmy sprzeczność. Powtarzając to rozumowanie dla wszystkich wierzchołków grafu G widzimy, że istnieje sekwencja ruchów zmieniająca stan wszystkich wierzchołków poza jednym dowolnie wybranym. Wykonując dwie takie sekwencje dla dwóch różnych wierzchołków spowodujemy zmianę stanu tylko tych dwóch, resztę pozostawiając bez zmian. To oznacza, że gdyby w pewnym momencie liczba lamp zgaszonych była parzysta, to zapalając po dwie uzyskalibyśmy sprzeczność. W takim razie graf G ma nieparzystą liczbę wierzchołków, a każdy ruch powoduje zmianę stanu parzystej liczby lamp, co oznacza, że każdy wierzchołek ma nieparzystą liczbę sąsiadów. Zatem suma liczb sąsiadów wszystkich wierzchołków jest nieparzysta, co jest jednak niemożliwe, bo suma tych liczb to podwojona liczba krawędzi. Sprzeczność kończy dowód.

3. Dane są takie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z przedziału $[-1, 1]$, że $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$. Udowodnić, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}.$$

Rozwiązanie:

Podstawmy $x_j = \sin\alpha_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas równość dana w założeniach przyjmuje postać

$$\sin^3\alpha_1 + \sin^3\alpha_2 + \ldots + \sin^3\alpha_n = 0.$$

Stąd sumując zależności $\sin 3\alpha_j = 3\sin\alpha_j - 4\sin^3\alpha_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n = \\ &= \frac{\sin 3\alpha_1 + \sin 3\alpha_2 + \ldots + \sin 3\alpha_n}{3} \leqslant \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

4. Wyznaczyć wszystkie takie pary (a, b) liczb rzeczywistych, że układ równań

$$\begin{cases} x+y &= a(x^2+y^2) \\ x^3+y^3 &= b(x^2+y^2) \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych x, y nie równych jednocześnie zeru.

Rozwiązanie:

Jeżeli (x, y) jest rozwiązaniem danego układu dla pary (a, b), to dla każdej liczby rzeczywistej t różnej od zera (tx, ty) jest rozwiązaniem dla pary $(\frac{a}{t}, tb)$. Wynika stąd, że istnienie rozwiązań zależy jedynie od wartości iloczynu ab (przy czym przypadek $ab = 0$ trzeba wyłączyć do odrębnego rozpoznania), a ponadto że rozwiązanie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste x, y nie równe jednocześnie zeru, dla których

$$(x+y)(x^3+y^3) = ab(x^2+y^2)^2.$$

Nie ograniczając w niczym ogólności dalszego rozumowania możemy przyjąć, że $x^2 + y^2 = 1$; wówczas

$$(x+y)(x^3+y^3) = (x+y)^2(x^2-xy+y^2) = (1+2xy)(1-xy) = 1+xy-2(xy)^2.$$

Przy warunku $x^2 + y^2 = 1$ iloczyn xy przebiega wszystkie liczby rzeczywiste o wartości bezwzględnej nie większej niż $\frac{1}{2}$. Ponadto dla $|t| \leqslant \frac{1}{2}$ trójmian kwadratowy $1 + t - 2t^2$ przyjmuje wartości w przedziale od 0 do $\frac{9}{8}$.

Pozostaje zauważyć, że dla $a = b = 0$ układ ma rozwiązania, natomiast dla $ab = 0$ i $(a, b) \neq (0, 0)$ rozwiązań nie ma, gdyż równania $x+y = 0$ i $x^3+y^3 = 0$ są równoważne. Wobec tego szukany zbiór par (a, b) to pary spełniające $\mathbf{a = b = 0}$ lub $\mathbf{0 < ab \leqslant \frac{9}{8}}$.

5. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

Rozwiązanie:

Podstawiając $x = 0$ otrzymujemy $f(0) = f(yf(0))$. Zatem dla $f(0) \neq 0$ otrzymalibyśmy, że f jest funkcją stałą, co jest rzecz jasna niemożliwe. Mamy więc $f(0) = 0$. Wstawiając z kolei $y = 0$ i $y = -x$ otrzymujemy odpowiednio

$$(*) \qquad f(xf(x)) = x^2 \qquad \text{oraz} \qquad f(-xf(x)) = -x^2.$$

Zatem $f(x) = 0$ pociąga $x = 0$. Udowodnimy teraz, że f jest różnowartościowa. Niech $f(a) = f(b)$. Jeśli $f(a) = 0$, to $a = 0 = b$. Załóżmy więc, że $f(a) \neq 0$.

Podstawmy w równaniu z treści zadania $x = a$, $y = b - a$. Dostajemy wówczas $f(af(b)) = f((b-a)f(a)) + a^2$. Ale $f(af(b)) = f(af(a)) = a^2$, czyli mamy $(b-a)f(a) = 0$, a stąd $b = a$.

Zatem funkcja f istotnie jest różnowartościowa. Stąd i z $(*)$ wynika, że dla każdego x zachodzi $-xf(-x) = xf(x)$, skąd $f(-x) = -f(x)$ (dla $x = 0$ jest to oczywiste). Wstawmy w wyjściowym równaniu $-x$ w miejsce x oraz $y + x$ w miejsce y. Uwzględniając ostatnią uwagę uzyskujemy

$$-f(xf(y)) = -f((y+x)f(x)) + x^2.$$

Wobec tego dla podstawienia $x \leftarrow x + y$, $y \leftarrow -y$ mamy

$$\begin{aligned} f((x+y)f(x)) &= -f(yf(x+y)) + (x+y)^2 = \\ &= -f(xf(y)) - y^2 + (x+y)^2 = -f(xf(y)) + x^2 + 2xy, \end{aligned}$$

gdzie przedostatnia równość bierze się z przestawienia zmiennych w warunku z treści zadania. Widzimy zatem, że $f(xf(y)) = xy$. Oczywiście analogicznie $f(yf(x)) = xy$. Zatem $xf(y) = yf(x)$ dla wszystkich x, y, co po wstawieniu $y = 1$ prowadzi do wyniku $f(x) = cx$ dla pewnego rzeczywistego c. Łatwo sprawdzić, że $c = 1$ i $c = -1$ są jedynymi wartościami, dla których otrzymana funkcja spełnia wyjściowe równanie.

6. Wyznaczyć wszystkie takie ściśle rosnące ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ liczb całkowitych, że wielomian

$$W(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1$$

jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że wielomian $W(x)$ jest iloczynem wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Wówczas

$$P(a_i)Q(a_i) = W(a_i) = 1 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Liczby $P(a_i)$ i $Q(a_i)$ są całkowite, zaś jedynymi przedstawieniami liczby 1 w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych są: $1 \cdot 1$ oraz $(-1) \cdot (-1)$. Zatem

$$P(a_i) = Q(a_i) = \pm 1 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n,$$

skąd uzyskujemy

$$P(a_i) - Q(a_i) = 0 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Stopień każdego z wielomianów $P(x)$, $Q(x)$ jest mniejszy niż n, więc różnica $P(x)-Q(x)$ ma również stopnień mniejszy niż n. Wykazaliśmy jednak, że różnica ta ma n różnych pierwiastków: a_1, a_2, ..., a_n. Wobec tego różnica ta jest wielomianem zerowym. Wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ są więc równe oraz

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)=W(x)-1=P(x)Q(x)-1=(P(x)+1)(P(x)-1)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Ponieważ prawa strona jest iloczynem dwóch wielomianów tego samego stopnia, co P, więc jest to wielomian stopnia parzystego. Wynika stąd, że n jest liczbą parzystą: $n=2m$. Ponadto istnieją takie ciągi i_1, i_2, ..., i_m oraz j_1, j_2, ..., j_m, że każda liczba ze zbioru $\{1,2,\dots,n\}$ jest wyrazem dokładnie jednego z nich oraz

$$\begin{array}{rcl} P(x)+1 & = & (x-a_{i_1})(x-a_{i_2})\dots(x-a_{i_m}),\\ P(x)-1 & = & (x-a_{j_1})(x-a_{j_2})\dots(x-a_{j_m}) \end{array}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Zatem

$$(x-a_{i_1})(x-a_{i_2})\dots(x-a_{i_m})-(x-a_{j_1})(x-a_{j_2})\dots(x-a_{j_m})\equiv 2.$$

Przypuśćmy, że liczba n występuje w ciągu i_1, i_2, ..., i_m. Podstawiając powyżej $x=a_n$ otrzymujemy wówczas

$$-(a_n-a_{j_1})(a_n-a_{j_2})\dots(a_n-a_{j_m})=2.$$

Na mocy założeń zadania mamy $a_1<a_2<\dots<a_n$, więc liczby $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}$ są mniejsze od a_n. Zatem lewa strona jest ujemna i otrzymujemy sprzeczność.

Wobec tego liczba n występuje w ciągu $j_1, j_2, \dots, j_m$; kładąc $x=a_n$ widzimy, że

$$(a_n-a_{i_1})(a_n-a_{i_2})\dots(a_n-a_{i_m})=2.$$

Liczby a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m} są różne i mniejsze od a_n. Jedynym przedstawieniem liczby 2 w postaci iloczynu co najmniej dwóch różnych liczb naturalnych jest $1\cdot 2$. W związku z tym po lewej stronie występuje albo jeden składnik równy 2, albo dwa składniki, równe odpowiednio 1 i 2.

W pierwszym przypadku $m=1$, $n=2$, $i_1=1$ oraz $a_2-a_1=a_n-a_{i_1}=2$. Zatem (a_1,a_2) jest ciągiem postaci $(\mathbf{k},\mathbf{k+2})$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Z kolei w drugim przypadku mamy $m=2$, $n=4$ oraz $a_4-a_{i_1}=1$, $a_4-a_{i_2}=2$. Wobec tego $i_1=3$, $i_2=2$ oraz a_2, a_3, a_4 jest ciągiem trzech kolejnych liczb całkowitych. Patrząc na równość

$$(x-a_{i_1})(x-a_{i_2})-(x-a_{j_1})(x-a_{j_2})\equiv 2$$

widzimy, że lewa strona jest wielomianem, której współczynnik przy x jest równy $a_1+a_4-a_2-a_3$, zaś po prawej stronie występuje wielomian stały. Zatem $a_1+a_4-a_2-a_3=0$, czyli $a_1-a_2=a_3-a_4=-1$. To dowodzi, że

(a_1, a_2, a_3, a_4) jest ciągiem czterech kolejnych liczb całkowitych, a więc ma postać $(\mathbf{k}, \mathbf{k+1}, \mathbf{k+2}, \mathbf{k+3})$.

Ciągi obu postaci spełniają warunki zadania, otrzymujemy bowiem odpowiednio wielomiany $W(x) = (x+k+1)^2$ i $W(x) = (x^2+(2k+3)x+k^2+3k+1)^2$.

7. Wykazać, że równanie

$$x^{2005} + y^{2006} + z^{2007} = t^{2010}$$

ma rozwiązanie w zbiorze dodatnich liczb całkowitych.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że istnieje rozwiązanie tego równania, w którym każda z niewiadomych jest postaci $2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 11^{\gamma}$ dla pewnych liczb naturalnych α, β, γ. W tym celu zauważmy, że mnożąc równość $2^5 \cdot 3 + 11^2 + 2^9 = 3^6$ przez $2^p \cdot 3^q \cdot 11^r$ dostajemy

$$2^{p+5} \cdot 3^{q+1} \cdot 11^r + 2^p \cdot 3^q \cdot 11^{r+2} + 2^{p+9} \cdot 3^q \cdot 11^r = 2^p \cdot 3^{q+6} \cdot 11^r.$$

Aby z powyższej zależności otrzymać rozwiązanie danego w treści równania, należy tak dobrać wykładniki p, q i r, by

$$\begin{array}{llll}
5 \cdot 401 | p+5, & 2 \cdot 17 \cdot 59 | p, & 3 \cdot 3 \cdot 223 | p+9, & 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 | p, \\
5 \cdot 401 | q+1, & 2 \cdot 17 \cdot 59 | q, & 3 \cdot 3 \cdot 223 | q, & 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 | q+6, \\
5 \cdot 401 | r, & 2 \cdot 17 \cdot 59 | r+2, & 3 \cdot 3 \cdot 223 | r, & 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 | r.
\end{array}$$

Powyższe zależności traktujemy jako układ kongruencji o zmiennych p, q i r. Ma on rozwiązanie na podstawie uogólnionego chińskiego twierdzenia o resztach — moduły nie są wprawdzie względnie pierwsze, ale dla każdej pary kongruencji z tą samą niewiadomą największy wspólny dzielnik modułów jest dzielnikiem różnicy reszt, które chcemy otrzymać przy dzieleniu przez te moduły.

8. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich par (p, q) różnych liczb pierwszych, że liczba $2^{p-1} - 1$ jest podzielna przez q oraz liczba $2^{q-1} - 1$ jest podzielna przez p.

Rozwiązanie:

Rozważmy liczby postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$ dla $n \geqslant 2$. Przyjmijmy, że p i q są takimi liczbami pierwszymi, że $p | F_n$ i $q | F_{n+1}$. Wtedy mamy

$$2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p} \qquad \text{oraz} \qquad 2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p},$$

skąd wynika, że 2^{n+1} jest najmniejszym wykładnikiem dodatnim, do którego należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę dającą resztę 1 z dzielenia przez p. To wraz z małym twierdzeniem Fermata daje $2^{n+1}|p-1$. W takim razie liczba p daje resztę 1 z dzielenia przez 8, a więc 2 jest resztą kwadratową modulo p, co pociąga

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Rozumując podobnie jak poprzednio dochodzimy do wniosku, że $2^{n+1}|\frac{p-1}{2}$, czyli $2^{n+2}|p-1$. Ponieważ $q|2^{2^{n+1}}+1$, więc również $q|2^{2^{n+2}}-1$, co wobec podzielności $2^{n+2}|p-1$ daje $q|2^{p-1}-1$.

Analogicznie uzyskujemy $2^{n+3}|q-1$. Ponadto z podzielności $p|2^{2^n}+1$ wynika $p|2^{2^{n+3}}-1$, skąd $p|2^{q-1}-1$.

Wskazane przez nas pary (p,q) są różne, gdyż dowolne dwie liczby F_n i F_m $(n \neq m)$ są względnie pierwsze.

9. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Dla $X \in \{A,B,C\}$ rozpatrujemy okrąg styczny do boków wychodzących z wierzchołka X oraz styczny w punkcie T_X do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnić, że proste AT_A, BT_B, CT_C przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Istnieje jednokładność j_1 o środku A i skali dodatniej, która przeprowadza okrąg wpisany w trójkąt ABC na okrąg styczny do boków AB, AC oraz do okręgu opisanego w punkcie T_A. Ponadto istnieje jednokładność j_2 o środku T_A i skali dodatniej przeprowadzająca ten ostatni okrąg na okrąg opisany na trójkącie ABC. W myśl twierdzenia o składaniu jednokładności przekształcenie $j_2 \circ j_1$ jest jednokładnością o środku P leżącym na prostej AT_A.

Ponieważ $j_2 \circ j_1$ jest jednokładnością o skali dodatniej odwzorowującą okrąg wpisany w trójkąt ABC na okrąg opisany, a istnieje tylko jedna taka jednokładność, więc analogiczne rozumowanie wskazuje, że jej środek P leży także na prostych BT_B i CT_C, skąd teza.

10. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Okrąg o_1 jest styczny do odcinków AB i CD oraz do łuku BC okręgu o nie zawierającego innych wierzchołków czworokąta w punkcie P_1. Okrąg o_2 jest styczny do odcinków AC i BD oraz do tego łuku w punkcie P_2. Dowieść, że $P_1 = P_2$.

Rozwiązanie:

Niech M i N będą punktami styczności okręgu o_2 odpowiednio do odcinków AC i BD, zaś K i L — punktami przecięcia prostej MN odpowiednio z prostymi AB i CD. Ponadto niech R będzie punktem przecięcia prostych AC i BD. Wykorzystamy teraz następujący

Lemat (Kobosa): Niech okrąg ω' leżący wewnątrz okręgu ω będzie do niego styczny w punkcie P. Wybierzmy punkt $X \in \omega$ różny od P oraz niech prosta przechodząca przez punkt X będzie styczna do okręgu ω' w punkcie Y. Wówczas wartość stosunku $\frac{XY}{XP}$ nie zależy od wyboru punktu X.

Dowód: Niech Z będzie punktem przecięcia okręgu ω' z prostą XP różnym od P. Z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu mamy

$$XY^2 = XP \cdot XZ = XP \cdot (XP - ZP) = XP \cdot (XP - \kappa \cdot XP) = XP^2(1-\kappa),$$

gdzie κ jest skalą jednokładności o środku P przekształcającej okrąg ω na ω'. To oznacza, że $\frac{XY}{XP} = \sqrt{1-\kappa}$, co dowodzi lematu.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Z lematu Kobosa zastosowanego do punktów $A, B \in o$ i okręgu o_2 stycznego do o w punkcie P_2 wiemy, że

$$\frac{AM}{AP_2} = \frac{BN}{BP_2}.$$

Ponadto na mocy twierdzenia Menelausa dla trójkąta ABR przeciętego prostą MN dostajemy

$$1 = \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BN}{NR} \cdot \frac{RM}{MA} = \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BP_2}{NR} \cdot \frac{RM}{AP_2} = \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BP_2}{AP_2},$$

gdzie wykorzystaliśmy równość odcinków stycznych $RM = NR$. To oznacza, że prosta P_2K jest dwusieczną kąta $\angle AP_2B$. Analogicznie prosta P_2L jest dwusieczną kąta $\angle CP_2D$.

Niech teraz K', L', M', N' oznaczają drugie punkty przecięcia odpowiednio prostych PK, PL, PM, PN z okręgiem o. Z poprzednich rozważań wynika, że K' i L' są odpowiednio środkami łuków AB i CD okręgu o. Ponadto z istnienia jednokładności o środku P_2 przekształcającej okrąg o_2 na o wynika, że M' jest punktem styczności do okręgu o prostej równoległej do AC, czyli jest środkiem łuku AC. Analogicznie N' jest środkiem łuku BD. Stąd wynika, że długość łuku $K'M'$ jest równa połowie długości łuku BC zawierającego punkty D i A; tak samo długość łuku $L'N'$. Wobec tego czworokąt $K'L'N'M'$ jest trapezem równoramiennym, czyli w szczególności $K'L' \parallel M'N'$. Łącząc to z warunkiem $MN \parallel M'N'$ (wynikającym z rozpatrzenia jednokładności o środku P_2) otrzymujemy $K'L' \parallel KL$. Na mocy twierdzenia Talesa stwierdzamy teraz, że

$$\frac{P_2K}{P_2K'} = \frac{P_2L}{P_2L'} = \lambda,$$

czyli okrąg o' przechodzący przez punkty P_2, K, L jest obrazem okręgu o w jednokładności o środku P_2 i skali λ.

Pozostaje spostrzec, że $o' = o_1$. Rzeczywiście, styczna do okręgu o w punkcie K' jest równoległa do AB, bo K' jest środkiem łuku AB. Zatem jej obrazem w tej jednokładności jest prosta AB. W takim razie okrąg o' jest styczny do o w punkcie P_2, do odcinka AB w punkcie K i analogicznie do odcinka CD w punkcie L. W rezultacie $o' = o_1$, co rzecz jasna daje $P_1 = P_2$.

11. Okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 leżą na płaszczyźnie w ten sposób, że o_1 i o_3 są styczne zewnętrznie do o_2 i o_4. Ponadto wszystkie te okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach A, B, C, D. Punkt M jest środkiem odcinka AC. Dowieść, że $\angle AMB = \angle DMA$.

Rozwiązanie:

Poprowadźmy styczne do okręgu o w punktach B i D.

Jeżeli są one równoległe, to cała konfiguracja jest symetryczna względem prostej BD, a w takim razie $\angle AMB = \angle DMA = 90°$.

Przypuśćmy zatem, że poprowadzone styczne przecinają się w punkcie P; oczywiście $PB = PD$. Rozważmy teraz inwersję o środku P i promieniu PB. Przeprowadza ona punkty B i D oraz proste PB i PD na siebie; wobec tego przeprowadza ona okrąg o na okrąg styczny do prostych PB i PD odpowiednio w punktach B i D, czyli na siebie. Z podobnych powodów okręgi o_2 i o_4 przejdą na siebie (wystarczy dorysować drugą styczną z punktu P). To oznacza, że obrazy okręgów o_1 i o_3 są styczne wewnętrznie do o oraz zewnętrznie do o_2 i o_4. Ale są tylko dwa takie okręgi, mianowicie o_1 i o_3. Nie może jednak o_1 przejść na siebie, bo wówczas A byłby punktem stałym inwersji i mielibyśmy $PB = PA$, czyli prosta PA byłaby styczną do okręgu o przechodzącą przez punkt P, ale takich prostych innych niż PB i PD nie ma. W efekcie okręgi o_1 i o_3 przy badanej inwersji wymieniają się, skąd punkt A przechodzi na C. Punkty P, A i C leżą zatem na jednej prostej.

Niech teraz O będzie środkiem okręgu o i rozważmy okrąg o średnicy OP. Ponieważ B, D, M są rzutami prostokątnymi punktu O odpowiednio na proste PB, PD i AC przechodzące przez P, więc punkty te leżą na tym okręgu. Stąd zaś kąty $\angle AMB$ i $\angle DMA$ są równe jako wpisane w okrąg (lub ich dopełnienia) oparte na równych cięciwach PB i PD.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Znaleźć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c &= a \\ b\sqrt{c} - a &= b \\ c\sqrt{a} - b &= c \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Nie ograniczając ogólności rozumowania przyjmijmy, że a jest największą spośród trzech niewiadomych.

Z nierówności $a \geqslant c$ oraz z pierwszego równania układu wynika, że

$$c = a(\sqrt{b} - 1) \geqslant c(\sqrt{b} - 1),$$

gdyż czynnik $\sqrt{b} - 1$ jest dodatni, jako równy ilorazowi $\frac{c}{a}$. Dzieląc powyższą zależność stronami przez c widzimy, że $1 \geqslant \sqrt{b} - 1$, czyli $b \leqslant 4$.

Podobnie drugie równanie układu prowadzi do wniosku, że

$$b(\sqrt{c} - 1) = a \geqslant b,$$

skąd $\sqrt{c} - 1 \geqslant 1$, czyli $c \geqslant 4$.

Na koniec, uwzględniając trzecie równanie oraz uzyskane wyżej zależności dostajemy

$$1 \leqslant \sqrt{c} - 1 \leqslant \sqrt{a} - 1 = \frac{b}{c} \leqslant \frac{4}{c} \leqslant 1.$$

Wszystkie powyższe nierówności są więc równościami i w rezultacie

$$\sqrt{c} = \sqrt{a} = 2 \qquad \text{oraz} \qquad b = c,$$

czyli $a = b = c = 4$. Dokonując bezpośredniego sprawdzenia stwierdzamy ostatecznie, że jedynym rozwiązaniem jest $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4})$.

2. W kole o promieniu 1 umieszczono 60 punktów. Wykazać, że istnieje punkt na obwodzie koła, którego suma odległości od wszystkich danych 60 punktów nie przekracza 80.

Rozwiązanie:

Wpiszmy trójkąt równoboczny ABC w dane koło. Udowodnimy, że dla dowolnego punktu X należącego do danego koła spełniona jest nierówność

$$(*) \qquad AX + BX + CX \leqslant 4.$$

Niech bowiem punkt X leży wewnątrz kąta wypukłego $\angle AOB$, gdzie O oznacza środek koła; wystarczy wykazać, że wówczas $AX + BX \leqslant 2$ oraz $CX \leqslant 2$.

Druga nierówność jest oczywista. By uzasadnić pierwszą, zauważmy, że obraz trójkąta AOB w symetrii względem prostej AB zawiera się w danym kole i wobec tego po ewentualnym odbiciu względem tej prostej możemy założyć, że punkt X leży na prostej AB lub po jej przeciwnej stronie niż środek koła. Niech półprosta $AX^{\to}$ przecina obwód koła w punkcie $Y \neq A$ (jeżeli $X = A$, to $AX + BX = BA = \sqrt{3} < 2$). Na mocy nierówności trójkąta mamy

$$AX + BX \leqslant AX + XY + YB = AY + BY,$$

czyli pozostaje uzasadnić, że $AY+BY \leqslant 2$. To zaś jest konsekwencją twierdzenia Ptolemeusza zastosowanego do czworokąta $AYBC$, gdyż płynąca zeń równość

$$AY \cdot BC + AC \cdot BY = AB \cdot CY$$

po uwzględnieniu zależności $BC = AC = AB$ daje $AY + BY = CY \leqslant 2$.

Powróćmy teraz do rozwiązania zadania. Niech P_1, P_2, ..., P_{60} będą danymi w treści zadania punktami. Biorąc $X = P_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 60$ w nierówności $(*)$ i sumując stronami dostajemy

$$\sum_{i=1}^{60}(AP_i + BP_i + CP_i) \leqslant 60 \cdot 4 = 240,$$

zatem przynajmniej jedna z sum $\displaystyle\sum_{i=1}^{60} AP_i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{60} BP_i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{60} CP_i$ nie przekracza 80, a to pokrywa się z dowodzoną tezą.

3. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że na szachownicy o wymiarach $p^2 \times p^2$ można tak wybrać p^3 pól, aby środki żadnych czterech wybranych pól nie tworzyły prostokąta o bokach równoległych do boków szachownicy.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia wierszy i kolumn danej szachownicy: p^2 wierszy oznaczamy parami (a, b) dla $a, b = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, zaś p^2 kolumn — parami (c, d) dla $c, d = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Aby uzyskać żądaną konfigurację pól, wybieramy pole leżące na przecięciu wiersza (a, b) i kolumny (c, d) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$ac \equiv b + d \pmod{p}.$$

Dla każdej trójki (a, b, c) liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ istnieje dokładnie jedna taka liczba $d \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, że spełniona jest powyższa kongruencja: liczbą tą jest mianowicie reszta z dzielenia liczby $ac - b$ przez p. Wobec tego w opisany sposób wybraliśmy p^3 pól szachownicy.

Pozostaje sprawdzić, że taki wybór pól rzeczywiście spełnia warunki zadania. Przypuśćmy, że tak nie jest; istnieją więc takie dwa różne wiersze (a_1, b_1) i (a_2, b_2) oraz takie dwie różne kolumny (c_1, d_1) i (c_2, d_2), że wybrane zostało każde z czterech pól leżących na przecięciu jednego z tych wierszy i jednej z tych kolumn. W takim razie

$$a_i c_j \equiv b_i + d_j \pmod p \qquad \text{dla } i, j = 1, 2.$$

Ustalając wartość i oraz odejmując dwie z powyższych zależności uzyskane dla $j = 1, 2$ widzimy, że

$$(*) \qquad a_i(c_1 - c_2) \equiv d_1 - d_2 \pmod p \qquad \text{dla } i = 1, 2,$$

skąd otrzymujemy

$$(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) \equiv 0 \pmod p,$$

a ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc musimy mieć $a_1 = a_2$ lub $c_1 = c_2$. Z uwagi na symetrię zmiennych a i c w warunku $ac \equiv b + d \pmod p$ możemy przyjąć, że $c_1 = c_2$. W tej sytuacji warunek $(*)$ daje $d_1 = d_2$. Zatem pary (c_1, d_1) i (c_2, d_2) są jednakowe i uzyskaliśmy sprzeczność, która kończy rozwiązanie.

4. Znaleźć największą liczbę naturalną k, dla której następujące stwierdzenie jest prawdziwe:

Danych jest dowolnych 2010 niezdegenerowanych trójkątów. W każdym trójkącie malujemy jeden bok na niebiesko, jeden na czerwono i jeden na biało. Dla każdego koloru z osobna porządkujemy boki niemalejąco ze względu na długość. Uzyskujemy

$$\begin{array}{ll} n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_{2010} & \text{— długości boków niebieskich,} \\ c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_{2010} & \text{— długości boków czerwonych,} \\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{2010} & \text{— długości boków białych.} \end{array}$$

Wówczas istnieje k wskaźników j, dla których można zbudować niezdegenerowany trójkąt o bokach długości n_j, c_j, b_j.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że liczby n_{2010}, c_{2010} i b_{2010} zawsze są długościami boków trójkąta. Możemy oczywiście przyjąć, że n_{2010} jest największą z tych trzech liczb. Weźmy pod uwagę ten trójkąt T, w którym niebieski bok ma długość n_{2010}; jego czerwony bok i biały bok mają odpowiednio długości c_i oraz b_j dla pewnych wskaźników $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2010\}$. Na podstawie nierówności trójkąta dla T mamy wówczas

$$n_{2010} < c_i + b_j \leqslant c_{2010} + b_{2010},$$

co w połączeniu z warunkiem $n_{2010} = \max\{n_{2010}, c_{2010}, b_{2010}\}$ dowodzi stwierdzenia sformułowanego w pierwszym zdaniu rozwiązania.

Z drugiej strony, rozważmy następujące 2010 trójkątów:

- dla $\ell = 1, 2, \ldots, 2008$ trójkąt o niebieskim boku 2ℓ, czerwonym boku ℓ i białym boku $\ell + 1$;
- trójkąt o niebieskim boku 4018, czerwonym boku 2009 i białym boku 4020;
- trójkąt o niebieskim boku 4020, czerwonym boku 4020 i białym boku 1.

Nietrudno sprawdzić, że dla takiego zbioru trójkątów mamy

$$\begin{aligned}(n_1, n_2, \ldots, n_{2008}, n_{2009}, n_{2010}) &= (2, 4, \ldots, 4016, 4018, 4020),\\ (c_1, c_2, \ldots, c_{2008}, c_{2009}, c_{2010}) &= (1, 2, \ldots, 2008, 2009, 4020),\\ (b_1, b_2, \ldots, b_{2008}, b_{2009}, b_{2010}) &= (1, 2, \ldots, 2008, 2009, 4020),\end{aligned}$$

i dla $j = 1, 2, \ldots, 2008, 2009$ trójka $(n_j, c_j, b_j) = (2j, j, j)$ nie określa długości boków niezdegenerowanego trójkąta. Wobec tego szukaną największą wartością jest $\mathbf{k} = \mathbf{1}$.

5. Dodatnie liczby rzeczywiste x, y, z spełniają nierówność

$$x + y + z \geqslant 6.$$

Znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1}.$$

Rozwiązanie:
Wprowadźmy oznaczenie

$$E = \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1}.$$

Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy zależność

$$\frac{x^2}{14} + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{2}{49}(y^2 + z + 1) \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{14} \cdot \frac{x}{y^2 + z + 1} \cdot \frac{2}{49}(y^2 + z + 1)} = \frac{3}{7}x$$

oraz dwie analogiczne zależności otrzymane z powyższej po dokonaniu cyklicznego przestawienia symboli x, y, z. Sumując te trzy nierówności dostajemy

$$\frac{1}{14}(x^2 + y^2 + z^2) + E + \frac{2}{49}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2}{49}(x + y + z) + \frac{6}{49} \geqslant \frac{3}{7}(x + y + z),$$

co po przekształceniach sprowadza się do nierówności

$$L = \frac{11}{98}(x^2 + y^2 + z^2) + E + \frac{6}{49} \geqslant \frac{19}{49}(x + y + z) \geqslant \frac{19}{49} \cdot 6.$$

Ponadto nierówność między średnią arytmetyczną i kwadratową prowadzi do wniosku, że $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geqslant 12$. W takim razie

$$x^2+y^2+z^2+E = L + \frac{87}{98}(x^2+y^2+z^2) - \frac{6}{49} \geqslant \frac{19}{49}\cdot 6 + \frac{87}{98}\cdot 12 - \frac{6}{49} = \frac{90}{7}.$$

Uzyskana po prawej stronie liczba jest wartością danego w zadaniu wyrażenia dla $x=y=z=2$. Wobec tego szukaną najmniejszą wartością jest $\mathbf{\frac{90}{7}}$.

6. W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełnione są równości

$$AB+CD=\sqrt{2}\cdot AC \qquad \text{oraz} \qquad BC+DA=\sqrt{2}\cdot BD.$$

Dowieść, że czworokąt ten jest równoległobokiem.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$, $\vec{d}=\overrightarrow{DA}$. Na mocy nierówności trójkąta mamy

$$(*) \qquad \begin{array}{rcl} |\vec{a}|+|\vec{c}| & \geqslant & |\vec{a}-\vec{c}|, \\ |\vec{b}|+|\vec{d}| & \geqslant & |\vec{b}-\vec{d}|. \end{array}$$

Zatem możemy przeprowadzić następujący rachunek wykorzystujący własności iloczynu skalarnego:

$$\begin{aligned} (AB+CD)^2+(BC+DA)^2 &= (|\vec{a}|+|\vec{c}|)^2+(|\vec{b}|+|\vec{d}|)^2 \geqslant \\ &\geqslant |\vec{a}-\vec{c}|^2+|\vec{b}-\vec{d}|^2 = \\ &= |\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2-2\cdot\vec{a}\circ\vec{c}+|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-2\cdot\vec{b}\circ\vec{d} = \\ &= |\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{c}+\vec{d}|^2-2\cdot(\vec{a}+\vec{d})\circ(\vec{b}+\vec{c}) = \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2-2\cdot\overrightarrow{DB}\circ\overrightarrow{BD} = \\ &= 2(AC^2+BD^2). \end{aligned}$$

W myśl założeń zadania wielkości $(AB+CD)^2+(BC+DA)^2$ i $2(AC^2+BD^2)$ są równe, a więc powyższe nierówności muszą być w istocie równościami. To samo dotyczy zatem nierówności $(*)$. Jednak nierówność trójkąta dla sumy dwóch wektorów staje się równością jedynie dla wektorów równoległych, skąd wniosek, że $\vec{a}\parallel\vec{c}$ i $\vec{b}\parallel\vec{d}$, co rzecz jasna implikuje tezę zadania.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7** i **8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6**–**11**.
13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6**–**11**.
15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.