XLVII Olimpiada Matematyczna

Zawody pierwszego stopnia

Teksty zadań

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których równanie $2\sin nx = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ma rozwiązania w liczbach rzeczywistych x.

2. *Liczbą palindromiczną* nazywamy taką liczbę naturalną, której zapis dziesiętny czytany od strony lewej do prawej jest taki sam, jak czytany od strony prawej do lewej. Niech (x_n) będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb palindromicznych. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze, które są dzielnikami co najmniej jednej z różnic $x_{n+1} - x_n$.

3. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych (k, n są liczbami naturalnymi). Wykazać, ze można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.
Uwaga. Jeżeli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

4. Prosta styczna do okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Udowodnić, że $\dfrac{|AD|}{|DB|} + \dfrac{|AE|}{|EC|} = 1$.

5. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle CAB| = \alpha > 90°$, oraz odcinek PQ, którego środkiem jest punkt A. Dowieść, że

$$\Big(|BP| + |CQ|\Big) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geqslant |BC|.$$

6. Dane są dwa ciągi liczb całkowitych dodatnich: ciąg arytmetyczny o różnicy $r > 0$ i ciąg geometryczny o ilorazie $q > 1$; liczby naturalne r, q są względnie pierwsze. Udowodnić, że jeśli te ciągi mają jeden wspólny wyraz, to mają nieskończenie wiele wspólnych wyrazów.

7. Liczby nieujemne a, b, c, p, q, r spełniają warunki:

$$a + b + c = p + q + r = 1; \qquad p, q, r \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Udowodnić, że $8abc \leqslant pa + qb + rc$ oraz rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

8. Ze środka kwadratu wybiega promień świetlny, który odbija się od boków kwadratu zgodnie z zasadą *kąt padania jest równy kątowi odbicia*. Po pewnym czasie promień wraca do środka kwadratu. Promień nigdy nie trafił w wierzchołek, ani nie przeszedł wcześniej przez środek. Dowieść, że liczba odbić od boków kwadratu jest nieparzysta.

9. Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian te nie ma pierwiastków całkowitych.

10. Wykazać, że równanie $x^x = y^3 + z^3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

11. W konkursie skoków narciarskich uczestniczy 65 zawodników. Startują oni kolejno, według ustalonego wcześniej porządku. Każdy wykonuje jeden skok. Przyjmujemy, że uzyskane wyniki są różne od zera oraz że każda kolejność końcowa jest jednakowo prawdopodobna. W każdym momencie konkursu liderem nazywamy zawodnika, który do tego momentu uzyskał najlepszy wynik. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo tego, że w czasie całego konkursu dokładnie jeden raz nastąpiła zmiana lidera. Wykazać, że $p > \frac{1}{16}$.

12. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dwa przystające sześciany o wspólnym środku, że każda ściana pierwszego sześcianu ma punkt wspólny z każdą ścianą drugiego sześcianu.