XLVII Olimpiada Matematyczna

Zawody drugiego stopnia

Teksty zadań

1. Rozstrzygnąć, czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych jest sumą trzecich potęg wielomianów o współczynnikach całkowitych.

2. Okrąg o środku O wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N, przy czym proste KL i MN przecinają się w punkcie S. Dowieść, że proste BD i OS są prostopadłe.

3. Wykazać, że jeśli każda z liczb a, b, c jest nie mniejsza od $-\frac{3}{4}$ oraz $a+b+c=1$, to

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leqslant\frac{9}{10}.$$

4. Dany jest ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ liczb ze zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Zakładamy, że dla $i = 1, 2, \ldots, 98$ zachodzą implikacje:

$$\text{jeśli } a_i = 1, \text{ to } a_{i+1} \neq 2; \qquad \text{a jeśli } a_i = 3, \text{ to } a_{i+1} \neq 4.$$

Udowodnić, że dla pewnych dwóch różnych liczb $k, l \in \{1, 2, \ldots, 98\}$ zachodzą równości: $a_k = a_l$ oraz $a_{k+1} = a_{l+1}$

5. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające równanie

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1.$$

6. Wewnątrz równoległościanu, którego krawędzie mają długości a, b, c, leży punkt P. Dowieść, że istnieje wierzchołek równoległościanu, którego odległość od punktu P nie przekracza $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.