XLVII Olimpiada Matematyczna

Zawody trzeciego stopnia

Teksty zadań

1. Wyznaczyć wszystkie pary (n, r), gdzie n jest liczbą cakowitą dodatnią, r zaś liczbą rzeczywistą, dla których wielomian $(x+1)^n - r$ jest podzielny przez wielomian $2x^2+2x+1$.

2. Wewnątrz danego trójkąta ABC wybrano punkt P spełniający warunki: $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCA| < |\sphericalangle PAB|$. Prosta BP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach B i E. Okrąg opisany na trójkącie APE przecina procstą CE w punktach E i F. Udowodnić, że punkty A, P, E, F są kolejnymi wierzchołkami czworokąta oraz że stosunek pola czworokąta $APEF$ do pola trójkąta ABP nie zależy od wyboru punktu P.

3. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$ oraz liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, których suma jest równa się 1

(a) Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots,\ x_n$ o sumie równej 1 zachodzi nierówność

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leqslant \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}$$

(b) Wyznaczyć wszystkie układy liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o sumie równej 1, dla których powyższa nierówność staje się równością.

Uwaga. Symbol $\sum\limits_{i<j} x_i x_j$ oznacza sumę $\binom{n}{2}$ składników odpowiadających wszystkim parom wstaźników i, j ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ spełniających warunek $i < j$.

4. W czworościanie $ABCD$ zachodzą następujące równości:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD| \qquad \text{oraz} \qquad |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDC|.$$

Dowieść, że krawędzie AB i CD mają jednakową długość.

5. Dla liczby naturalnej $k \geqslant 1$ oznaczmy przez $p(k)$ najmniejszą liczbę pierwszą, która nie jest dzielnikiem liczby k. Jeśli $p(k) > 2$, to przyjmujemy, że $q(k)$ jest iloczynem wszystkich liczb pierwszych mniejszych od $p(k)$; gdy zaś $p(k) = 2$, to przyjmujemy $q(k) = 1$. Określamy ciąg (x_n) wzorami:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których zachodzi równość $x_n = 111111$.

6. Spośród wszystkich permutacji f zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ spełaniających warunek

$$f(i) \geqslant i - 1 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n$$

wybieramy jedną (każdy wybór jest jednakowo prawdopodobny). Niech p_n będzie prawdopodobieństwem tego, że wybrana permutacja spełnia warunek

$$f(i) \leqslant i + 1 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których $p_n > \frac{1}{3}$.