XLVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

Zadania na dzień 21 lutego 1997 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Dla każdej liczby rzeczywistej a wyznaczyć liczbę uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniających układ równań

$$\begin{cases} x + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z = a \end{cases}$$

2. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki:

$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCA = \frac{1}{3}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB)\,.$$

Udowodnić, że

$$\frac{AC}{AB + PC} = \frac{AB}{AC + PB}\,.$$

3. Dany jest zbiór n punktów ($n \geqslant 2$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Kolorujemy wszystkie odcinki o końcach w tym zbiorze tak, by każde dwa odcinki o wspólnym końcu miały różne kolory. Wyznaczyć najmniejszą liczbę kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie.

Zadania na dzień 22 lutego 1997 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich mających następującą własność: iloczyn dowolnych dwóch z nich daje resztę 1 przy dzieleniu przez trzecią liczbę.

5. Rzucamy k kostkami sześciennymi białymi i m czarnymi. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że reszta z dzielenia przez 7 łącznej liczby oczek wyrzuconych na kostkach białych jest równa reszcie z dzielenia przez 7 łącznej liczby oczek wyrzuconych na kostkach czarnych.

6. W sześcianie o krawędzi długości 1 leży osiem punktów. Wykazać, że pewne dwa z nich są końcami odcinka o długości nie większej niż 1.