XLVIII Olimpiada Matematyczna
Szkice rozwiązań zadań z zawodów drugiego stopnia

1. Podstawienie: $x = u + \frac{1}{2}$, $y = v + \frac{1}{2}$, $z = w + \frac{1}{2}$ sprowadza dany układ równań do postaci:

$$(*) \qquad \begin{cases} v^2 + w^2 + u + v + w + 1 = a \\ w^2 + u^2 + u + v + w + 1 = a \\ u^2 + v^2 + u + v + w + 1 = a \end{cases}$$

skąd przez odejmowanie stronami: $u^2 = v^2 = w^2$. Zatem każde rozwiązanie (u,v,w) układu $(*)$ ma dokładnie jedną z następujących postaci:

$$(1) \qquad (t,t,t)\,; \qquad t \in \mathbb{R}\,;$$

$$(2) \qquad (-t,t,t) \quad \text{lub} \quad (t,-t,t) \quad \text{lub} \quad (t,t,-t)\,; \qquad t \in \mathbb{R},\ t \neq 0\,.$$

Dla $u = v = w = t$ układ $(*)$ sprowadza się do równania

$$(1') \qquad 2t^2 + 3t + (1-a) = 0\,;$$

gdy zaś dwie z liczb u, v, w są równe t, trzecia $-t$ $(t \neq 0)$, układ $(*)$ sprowadza się do równania

$$(2') \qquad 2t^2 + t + (1-a) = 0\,.$$

Liczba rozwiązań (u,v,w) układu $(*)$ mających postać (1) jest równa liczbie pierwiastków równania $(1')$; oznaczmy ją przez N_1. Liczba rozwiązań (u,v,w) postaci (2) jest równa $3N_2$, gdzie N_2 oznacza liczbę pierwiastków równania $(2')$ różnych od zera. Obliczamy wyróżniki trójmianów $(1')$ i $(2')$: $\Delta_1 = 8a+1$, $\Delta_2 = 8a-7$. Zatem:

$$N_1 = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad a < -1/8\,, \\ 1 & \text{gdy} \quad a = -1/8\,, \\ 2 & \text{gdy} \quad a > -1/8\,, \end{cases} \qquad N_2 = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad a < 7/8\,, \\ 1 & \text{gdy} \quad a = 7/8 \ \text{lub} \ a = 1\,, \\ 2 & \text{gdy} \quad a > 7/8\,,\ a \neq 1\,. \end{cases}$$

Liczba rozwiązań układu $(*)$ jest więc równa:

$$N = N_1 + 3N_2 = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad a < -1/8\,, \\ 1 & \text{gdy} \quad a = -1/8\,, \\ 2 & \text{gdy} \quad -1/8 < a < 7/8\,, \\ 5 & \text{gdy} \quad a = 7/8 \ \text{lub} \ a = 1\,, \\ 8 & \text{gdy} \quad a > 7/8\,,\ a \neq 1\,. \end{cases}$$

* * * * *

2. Oznaczmy przez K punkt przecięcia prostych BP i AC, zaś przez L punkt przecięcia prostych CP i AB. Na mocy warunków zadania mamy:

$$\begin{aligned}\sphericalangle KPC &= \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABP + \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACP = \\ &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB - 2\cdot\frac{1}{3}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) = \\ &= \frac{1}{3}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) = \sphericalangle PCK\,,\end{aligned}$$

co dowodzi, że $KP = KC$. Analogicznie $LP = LB$. Trójkąty ABK oraz ACL są podobne, więc dostajemy

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AK+KB}{AL+LC} = \frac{AC-KC+KP+PB}{AB-LB+LP+PC} = \frac{AC+PB}{AB+PC}\,,$$

czyli równość, którą należało udowodnić.

* * * * *

3. Przyjmijmy, że dane punkty są wierzchołkami pewnego n-kąta (jeśli $n=2$, wystarczy oczywiście jeden kolor). Wszystkie odcinki o jednakowym kolorze wyznaczają rozłączne pary wierzchołków wielokąta. Maksymalna liczba rozłącznych podzbiorów dwuelementowych zbioru n-elementowego wynosi $[n/2]$. Zatem liczba kolorów jest nie mniejsza niż

$$\binom{n}{2}\left[\frac{n}{2}\right]^{-1} = \begin{cases} n & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\,,\\ n-1 & \text{dla } n \text{ parzystych}\,.\end{cases}$$

Wykażemy, że ta liczba kolorów wystarcza do spełnienia żądanego warunku.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, bierzemy zbiór wierzchołków n-kąta foremnego i malujemy jednakowym kolorem bok i wszystkie równoległe do niego przekątne; odcinki nierównoległe malujemy różnymi kolorami. Użyliśmy n kolorów.

Gdy n jest liczbą parzystą, bierzemy zbiór wierzchołków $(n-1)$-kąta foremnego V oraz jeszcze jeden punkt P_0. Kolorujemy boki i przekątne wielokąta V w sposób opisany powyżej, używając $n-1$ kolorów. Dla każdej rodziny równoległych odcinków jednakowego koloru k_i pozostaje jeden wierzchołek P_i wielokąta V nie będący końcem żadnego z tych odcinków. Malujemy odcinek P_0P_i kolorem k_i. Użyliśmy $n-1$ kolorów, spełniając wymagany warunek.

(*mek, wp*)

XLVIII Olimpiada Matematyczna
Szkice rozwiązań zadań z zawodów drugiego stopnia

4. Niech a, b, c będą liczbami, jakich szukamy. Z podanych warunków wynika, że są to liczby większe od 1, parami względnie pierwsze. Liczba $bc+ca+ab-1$ dzieli się przez a, przez b i przez c, dzieli się więc także przez iloczyn abc:

$$bc + ca + ab = kabc + 1 \qquad (k \text{ – liczba całkowita}). \tag{1}$$

Po podzieleniu stronami przez abc:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = k + \frac{1}{abc}. \tag{2}$$

Suma po lewej stronie równości (1) jest większa od 1, więc $k > 0$. Suma po lewej stronie (2) jest mniejsza od 2, więc $k < 2$. Zatem $k = 1$. Prawa strona (2) jest większa od 1, więc największa z liczb $1/a$, $1/b$, $1/c$ przekracza $1/3$. Przyjmując, że $a > b > c$ wnosimy stąd, że $c = 2$. Równość (1) przybiera postać $2a + 2b + ab = 2ab + 1$, czyli $(a-2)(b-2) = 3$. Stąd $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$. Te liczby spełniają warunki zadania i są (z dokładnością do permutacji) jego jedynym rozwiązaniem.

* * * * *

5. Zbiorem zdarzeń elementarnych w tym zadaniu jest

$$\Omega = \{(b_1,\ldots,b_k,c_1,\ldots,c_m) \;:\; b_1,\ldots,b_k,c_1,\ldots,c_m \in \{1,2,\ldots,6\}\},$$

gdzie wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Niech A oznacza zdarzenie, którego prawdopodobieństwa szukamy:

$$A = \{(b_1,\ldots,b_k,c_1,\ldots,c_m) \in \Omega \;:\; 7 \,|\, (b_1+\ldots+b_k - c_1 - \ldots - c_m)\}.$$

Niech zaś B będzie zdarzeniem, że łączna liczba wyrzuconych oczek na wszystkich $k+m$ kostkach jest podzielna przez 7:

$$B = \{(b_1,\ldots,b_k,c_1,\ldots,c_m) \in \Omega \;:\; 7 \,|\, (b_1+\ldots+b_k + c_1 + \ldots + c_m)\}.$$

Przekształcenie dane wzorem

$$(b_1,\ldots,b_k,c_1,\ldots,c_m) \mapsto (b_1,\ldots,b_k,7-c_1,\ldots,7-c_m)$$

jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym zbioru A na zbiór B. Zbiory A i B są więc równoliczne, a zatem prawdopodobieństwa zdarzeń A i B są jednakowe.

Oznaczmy przez $p_{n,r}$ $(n \geqslant 1,\ r = 0,1,\ldots,6)$ prawdopodobieństwo tego, że przy rzucie n kostkami reszta przy dzieleniu przez 7 łącznej liczby wyrzuconych oczek jest równa r. Wówczas $p_{1,0} = 0$, $p_{1,1} = p_{1,2} = \ldots = p_{1,6} = 1/6$.

Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dostajemy dla $n=1,2,3,\ldots$ równość:

$$(*)\qquad p_{n+1,0}=p_{1,0}\cdot p_{n,0}+\sum_{r=1}^{6}p_{1,7-r}\cdot p_{n,r}=\frac{1}{6}\sum_{r=1}^{6}p_{n,r}=\frac{1}{6}(1-p_{n,0})\,.$$

Wprowadzając oznaczenie $q_n=p_{n,0}-\frac{1}{7}$, ze wzoru $(*)$ otrzymujemy równość

$$q_{n+1}=q_n\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\qquad\text{dla}\quad n\geqslant 1\,.$$

Stąd przez łatwą indukcję

$$q_n=q_1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{(-1)^n}{7\cdot 6^{n-1}}\qquad\text{dla}\quad n\geqslant 1\,.$$

Ostatecznie więc

$$P(A)=P(B)=p_{k+m,0}=\frac{1}{7}+q_{k+m}=\frac{1}{7}+\frac{(-1)^{k+m}}{7\cdot 6^{k+m-1}}\,.$$

* * * * *

6. Oznaczmy wierzchołki danego sześcianu $\mathcal{C}$ przez $A_1,\ldots,A_8$. Oznaczmy przez $\mathcal{C}_i$ sześcian o krawędzi długości $\frac{1}{2}$, mający jeden wierzchołek w punkcie A_i oraz trzy ściany zawarte w ścianach sześcianu $\mathcal{C}$. Niech $P_1,\ldots,P_8$ będą ośmioma danymi punktami.

Każdy sześcian $\mathcal{C}_i$ ma średnicę $\frac{1}{2}\sqrt{3}<1$. Jeśli więc pewne dwa różne punkty P_k, P_l leżą w którymś z sześcianów $\mathcal{C}_i$, to $P_kP_l<1$; wymagany warunek jest spełniony.

Załóżmy zatem, że każdy z tych sześcianów zawiera dokładnie jeden punkt P_i. Ustalmy numerację tak, by $P_i\in\mathcal{C}_i$ dla $i=1,\ldots,8$. Sześcian $\mathcal{C}_i$ ma dokładnie trzy ściany wspólne z powierzchnią sześcianu $\mathcal{C}$; punkt P_i jest odległy od każdej z tych trzech ścian o nie więcej niż $1/2$. Oznaczmy te trzy odległości przez a_i, b_i, c_i. Niech d będzie największą spośród 24 liczb: $a_1,b_1,c_1,\ldots,a_8,b_8,c_8$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $d=P_1Q$, gdzie Q jest rzutem prostokątnym punktu P_1 na pewną ścianę sześcianu $\mathcal{C}$, oraz że A_1A_2 jest krawędzią sześcianu $\mathcal{C}$ równoległą do prostej P_1Q.

Niech R będzie rzutem prostokątnym punktu P na prostą A_1A_2. Weźmy pod uwagę prostopadłościan, którego jedną krawędzią jest odcinek A_2R, a jedną ze ścian prostopadłych do A_2R jest kwadrat o wierzchołku A_2 i boku długości d, zawarty w ścianie sześcianu $\mathcal{C}$. Z określenia liczby d wynika, że ów prostopadłościan zawiera punkty P_1 i P_2. Jego średnica jest równa

$$\sqrt{d^2+d^2+(1-d)^2}=\sqrt{d(3d-2)+1}\leqslant 1\,,$$

gdyż $0\leqslant d\leqslant\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. Zatem $P_1P_2\leqslant 1$, co kończy dowód.

(*mek, wp*)