XLVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

Zadania na dzień 4 kwietnia 1997 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Liczby całkowite dodatnie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 spełniają warunki:

$$x_6 = 144 \quad \text{oraz} \quad x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Wyznaczyć x_7.

2. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz(x + y + z)^3. \end{cases}$$

3. Środkowe ścian bocznych ABD, ACD, BCD ostrosłupa $ABCD$ poprowadzone z wierzchołka D tworzą równe kąty z krawędziami, do których zostały poprowadzone. Wykazać, że pole każdej ściany bocznej jest mniejsze od sumy pól pozostałych dwóch ścian bocznych.

Zadania na dzień 5 kwietnia 1997 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest określony wzorami

$$a_1 = 0, \qquad a_n = a_{[n/2]} + (-1)^{n(n+1)/2} \qquad \text{dla} \quad n > 1.$$

Dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 0$ wyznaczyć liczbę numerów n spełniających warunki

$$2^k \leqslant n < 2^{k+1}, \qquad a_n = 0.$$

Uwaga. $[n/2]$ jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $n/2$.

5. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $DC = DE$ oraz $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DEA = 90^\circ$. Niech F będzie punktem boku AB wyznaczonym przez warunek $AF : BF = AE : BC$. Udowodnić, że $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE$ oraz $\sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC$.

6. Na okręgu o promieniu 1 leży n różnych punktów $(n \geqslant 2)$. Niech q będzie liczbą odcinków o końcach w tych punktach i długości większej niż $\sqrt{2}$. Dowieść, że $3q \leqslant n^2$.