L Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria.

1. Dowieść, że wśród liczb postaci $50^n + (50n+1)^{50}$, gdzie n jest liczbą naturalną, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

2. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność

$$(a+b+c+d)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab\,.$$

3. W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = 2\cdot CD$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AD. Wyznaczyć miarę kąta CED.

4. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że liczby $x+y$, x^2+y^2, x^3+y^3 i x^4+y^4 są całkowite. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba x^n+y^n jest liczbą całkowitą.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

12 października 1998 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

II seria.

5. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniające równanie $y^x = x^{50}$.

6. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q. Dowieść, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ.

7. Dana jest liczba naturalna $n \ge 2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ mające dokładnie n pierwiastków nie większych niż -1 oraz spełniające warunek

$$a_0^2 + a_1a_n = a_n^2 + a_0a_{n-1}\,.$$

Uwaga: Pierwiastki są liczone z uwzględnieniem krotności: jeśli liczba x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $P(x)$ (tzn. jeśli wielomian $P(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x-x_0)^k$, ale nie przez $(x-x_0)^{k+1}$), wówczas liczba x_0 jest traktowana jak k pierwiastków wielomianu $P(x)$.

8. Dana jest liczba naturalna $n \ge 2$ oraz zbiór n-elementowy S. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną k, dla której istnieją podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru S o następującej własności:
dla dowolnych dwóch różnych elementów $a, b \in S$, istnieje taka liczba $j \in \{1,2,\ldots,k\}$, że zbiór $A_j \cap \{a,b\}$ jest jednoelementowy.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

12 listopada 1998 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

III seria.

9. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

10. Dana jest liczba $x_1 > 0$. Ciąg (x_n) jest zdefiniowany wzorem:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \qquad \text{dla} \;\; n = 1,2,3,\ldots\,.$$

Udowodnić, że istnieje granica $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$ i obliczyć ją.

11. W urnie znajdują się dwie kule: biała i czarna. Ponadto mamy do dyspozycji 50 kul białych i 50 czarnych. Wykonujemy 50 razy następującą czynność: losujemy z urny kulę, a następnie wrzucamy ją z powrotem do urny oraz dokładamy jedną kulę tego samego koloru, co wylosowana kula. Po zakończeniu tych czynności mamy więc w urnie 52 kule. Jaka liczba kul białych znajdujących się w urnie jest najbardziej prawdopodobna?

12. Wszystkie wierzchołki sześcianu o krawędzi a leżą na powierzchni czworościanu foremnego o krawędzi 1. Wyznaczyć możliwe wartości a.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 grudnia 1998 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.