L OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Do Pani/Pana Dyrektora Szkoły
Do Pani/Pana Profesora Matematyki

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej uprzejmie prosi o zapoznanie uczniów i nauczycieli zainteresowanych zadaniami Olimpiady z podanymi tu szkicami rozwiązań zadań konkursowych stopnia pierwszego L Olimpiady Matematycznej.

W dalszej części niniejszego druku podajemy teksty zadań z zawodów międzynarodowych: XXXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej i XXI Austriacko–Polskich Zawodów Matematycznych, a także z IX Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (*Baltic Way* '98).

Zawody pierwszego stopnia L Olimpiady Matematycznej są zakończone. Zawody stopnia drugiego odbędą się w dniach 26 i 27 lutego 1999 r. Zawody stopnia trzeciego odbędą się w dniach 14 i 15 kwietnia 1999 r.

Zawiadomienia o dokładnym terminie i miejscu zawodów stopnia drugiego wyślą komitety okręgowe zakwalifikowanym zawodnikom w terminie do dnia 10 lutego 1999 r.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`http://www.impan.gov.pl/~olimp/`

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Szkice rozwiązań zadań konkursowych zawodów pierwszego stopnia L Olimpiady Matematycznej

1. *I sposób:* Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba 50^n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Jeśli ponadto n dzieli się przez 3, to $(50n+1)^{50}$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Stąd wynika, że liczba $50^n+(50n+1)^{50}$ jest podzielna przez 3 dla liczb n postaci $6k+3$.

II sposób: Dla n podzielnych przez 5 liczba $50^n+(50n+1)^{50}$ jest sumą piątych potęg. Zatem liczba ta, na mocy tożsamości

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4),$$

jest złożona.

2. *I sposób:* Tezę dostajemy natychmiast z następującej równości:

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab-(a+b+c+d)^2=\frac{(2a+2b-c-d)^2}{2}+\frac{3(c-d)^2}{2}.$$

II sposób: Na mocy nierówności pomiędzy średnią kwadratową a arytmetyczną otrzymujemy $3((a+b)^2+c^2+d^2)\geq((a+b)+c+d)^2$, czyli nierówność, którą należało udowodnić.

3. Uzupełnijmy trójkąt ABC do kwadratu $ABFC$. Załóżmy, że prosta AD przecina bok CF w punkcie P, zaś prosta BE przecina bok AC w punkcie Q. Ponieważ

$$\frac{CP}{AB}=\frac{CD}{DB}=\frac{1}{2},$$

więc $CP=\frac{1}{2}CF$. Wykorzystując prostopadłość prostych AP i BQ oraz powyższą równość dostajemy $CQ=\frac{1}{2}AC$, i w konsekwencji $CP=CQ$. Punkty C, Q, E, P leżą na jednym okręgu, skąd $\sphericalangle CED=\sphericalangle CEP=\sphericalangle CQP=45^\circ$.

4. Ponieważ $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)$ oraz $2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(x^4+y^4)$, więc liczby $2xy$ i $2x^2y^2$ są całkowite. Gdyby przy tym liczba xy nie była całkowita, to $2xy$ byłaby nieparzysta. Ale wówczas liczba $2x^2y^2=(2xy)^2/2$ nie byłaby całkowita. Wniosek stąd, że liczba xy jest całkowita.

Całkowitość liczby x^n+y^n dowodzimy indukcyjnie korzystając z tożsamości $x^n+y^n=(x^{n-1}+y^{n-1})(x+y)-xy(x^{n-2}+y^{n-2})$.

5. Dane równanie zapisujemy w postaci $y=x^{50/x}$. Ponieważ dla każdego x będącego dzielnikiem 50 liczba po prawej stronie jest całkowita, otrzymujemy rozwiązania równania dla $x\in\{1,2,5,10,25,50\}$. Inne rozwiązania tego równania otrzymamy tylko wtedy, gdy $x\geq 2$ oraz dla pewnego $k\geq 2$ liczba x jest jednocześnie k-tą potęgą pewnej liczby naturalnej oraz dzielnikiem liczby $50k$. Jeśli p jest dzielnikiem pierwszym takiej liczby x, to $p^k|50k$. Ponieważ $p^k>k$, więc nie może być $p^k|k$, skąd $p\in\{2,5\}$. Jeżeli $p=2$, to $2^k|2k$, skąd $k=2$. Jeżeli zaś $p=5$, to $5^k|25k$, skąd znowu $k=2$. Zatem x musi jednocześnie być kwadratem pewnej liczby naturalnej oraz dzielnikiem liczby 100.

Otrzymujemy dwie nowe wartości x w tym przypadku: $x=4$ oraz $x=100$. Zatem dane równanie ma 8 rozwiązań:

$$(1,1),\quad (2,2^{25}),\quad (4,2^{25}),\quad (5,5^{10}),\quad (10,10^5),\quad (25,625),\quad (50,50),\quad (100,10).$$

6. Przez $[XYZ]$ będziemy oznaczać pole trójkąta XYZ. Niech K będzie punktem przecięcia odcinków DP i AQ, zaś niech L będzie punktem przecięcia odcinków CP i BQ. Ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AD, więc (na mocy twierdzenia Cevy)

$$\frac{BL}{LQ}=\frac{AK}{KQ}, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{[BCP]}{[CQP]}=\frac{[ADP]}{[DQP]}.$$

Dostajemy zatem

$$\frac{[BCP]}{[ADP]}=\frac{[CQP]}{[DQP]}=\frac{CQ}{DQ}.$$

7. Niech $-p_1\le -p_2\le \ldots \le -p_n$ będą pierwiastkami wielomianu spełniającego warunki zadania. Wówczas $p_1\ge p_2\ge \ldots \ge p_n\ge 1$ oraz $a_n\ne 0$. Ponadto

$$a_{n-1}=a_n(p_1+p_2+\ldots+p_n), \quad a_1=a_np_1p_2\ldots p_n\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}\right),$$

oraz $a_0=a_np_1p_2\ldots p_n$. Warunek $a_0^2+a_1a_n=a_n^2+a_0a_{n-1}$ można więc przepisać w postaci

$$p_1p_2\ldots p_n+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}=\frac{1}{p_1p_2\ldots p_n}+p_1+p_2+\ldots+p_n.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że dla $n\ge 2$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $p_1\ge p_2\ge \ldots \ge p_n\ge 1$ zachodzi nierówność

$$p_1p_2\ldots p_n+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}\ge\frac{1}{p_1p_2\ldots p_n}+p_1+p_2+\ldots+p_n \tag{1}$$

oraz, że

równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2=p_3=\ldots=p_n=1$. (2)

Dla $n=2$ nierówność (1) przybiera postać

$$p_1p_2+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\ge\frac{1}{p_1p_2}+p_1+p_2. \tag{3}$$

Jest ona równoważna nierówności

$$p_1^2p_2^2-p_1^2p_2-p_1p_2^2+p_1p_2\ge p_1p_2-p_1-p_2+1,$$

czyli $p_1p_2(p_1-1)(p_2-1)\ge(p_1-1)(p_2-1)$, co przy założeniu $p_1\ge p_2\ge 1$ jest spełnione. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2-1=0$.

Załóżmy teraz prawdziwość nierówności (1) oraz stwierdzenia (2) dla pewnego $n\ge 2$. Niech ponadto dane będą liczby $p_1\ge p_2\ge \ldots \ge p_n\ge p_{n+1}\ge 1$.

Wówczas $p_1p_2 \geq p_3 \geq \ldots \geq p_{n+1} \geq 1$, skąd na mocy założenia indukcyjnego

$$(p_1p_2)p_3...p_np_{n+1} + \frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} \geq$$
$$\geq \frac{1}{(p_1p_2)p_3...p_np_{n+1}} + p_1p_2 + p_3 + \ldots + p_n + p_{n+1} \qquad (4)$$

oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_3 = \ldots = p_n = p_{n+1} = 1$.

Dodanie nierówności (3) i (4) stronami daje

$$p_1p_2p_3...p_np_{n+1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} \geq$$
$$\geq \frac{1}{p_1p_2p_3...p_np_{n+1}} + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n + p_{n+1}.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2 = p_3 = \ldots = p_n = p_{n+1} = 1$.

Ze stwierdzenia (2) wynika zatem, że wielomiany spełniające warunki zadania mają postać $P(x) = a(x+1)^{n-1}(x+b)$, gdzie a jest dowolną niezerową liczbą rzeczywistą, zaś $b \geq 1$.

8. Wykażemy, że $k = [\log_2(n-1)+1]$, tzn. $2^{k-1} < n \leq 2^k$.

Mając liczbę k określoną jak wyżej, konstruujemy zbiory A_j następująco: numerujemy elementy zbioru S liczbami k-cyfrowymi w układzie dwójkowym (dopuszczamy zera początkowe). Mamy więc do dyspozycji $2^k \geq n$ liczb. Następnie za A_i bierzemy zbiór tych elementów zbioru S, których numer ma na i-tym miejscu jedynkę. Dowolne różne elementy a i b zbioru S mają wówczas przypisane różne numery, które różnią się, powiedzmy, na j-tym miejscu. Wtedy do zbioru A_j należy dokładnie jeden z elementów a, b.

Tak znaleziona liczba k jest najmniejsza. Załóżmy bowiem, że istnieją zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ spełniające warunki zadania dla $2^k < n$. Każdemu elementowi x zbioru S przypisujemy układ k liczb $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ według następującej zasady:

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \notin A_i \\ 1 & \text{gdy} \quad x \in A_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Ponieważ $2^k < n$, więc istnieją takie dwa różne elementy $a, b \in S$, które mają przypisany ten sam układ liczb. To zaś oznacza, że element a należy do dokładnie tych samych zbiorów spośród $A_1, A_2, \ldots, A_k$, co element b.

9. Oznaczmy przez c_1 okrąg wpisany w trójkąt DEF, zaś przez c_2 okrąg wpisany w trójkąt ABC. Ponieważ okręgi wpisane w trójkąty AEF i DEF są styczne, więc $AF + DE = AE + DF$. To oznacza, że w czworokąt $AEDF$ można wpisać okrąg; oznaczmy ten okrąg przez c_A. Punkt D jest środkiem jednokładności j_1, o skali dodatniej, przekształcającej okrąg c_1 na c_A; punkt A jest środkiem jednokładności j_2, o skali dodatniej, przekształcającej okrąg c_A na c_2. Zatem jednokładność j, o skali dodatniej, przekształcająca okrąg c_1

na c_2 jest złożeniem jednokładności j_1 i j_2 — jej środek leży więc na prostej AD. Analogicznie dowodzimy, że środek jednokładności j leży na prostych BE i CF.

Wniosek: proste AD, BE, CF mają punkt wspólny, będący środkiem jednokładności okręgów c_1 i c_2.

10. W rozwiązaniu skorzystamy z następującego twierdzenia:
Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g, to ciąg (b_n), określony wzorem

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

jest również zbieżny i jego granica wynosi g.

Podstawmy $y_n = x_n^3$. Wtedy

$$y_{n+1} = y_n\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^3 = y_n + 3 + \frac{3}{y_n} + \frac{1}{y_n^2}.$$

Skoro $y_{n+1} > y_n + 3$, to ciąg (y_n) jest rozbieżny do nieskończoności. Zatem na mocy powyższej równości $(y_{n+1} - y_n) \to 3$. Z ostatniej zbieżności oraz z zacytowanego wyżej twierdzenia dostajemy $\dfrac{y_n}{n} \to 3$, skąd $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{3}$.

11. Niech $P(k,n)$, gdzie $1 \le k \le n-1$, oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że gdy w urnie jest n kul, to dokładnie k z nich ma kolor biały. Wówczas

$$P(1,2) = 1 \quad \text{oraz} \quad P(k,n+1) = \frac{n-k}{n} P(k,n) + \frac{k-1}{n} P(k-1,n).$$

Korzystając z powyższych związków dowodzimy indukcyjnie (ze względu na n), że $P(k,n) = 1/(n-1)$ dla $k = 1,2,\ldots,n-1$. W szczególności

$$P(k,52) = \frac{1}{51} \qquad \text{dla} \quad k = 1,2,\ldots,51.$$

Zatem każda możliwa liczba kul białych po 50 losowaniach (od 1 do 51) jest jednakowo prawdopodobna.

12. Z warunków zadania wynika, że dany sześcian $ABCDA'B'C'D'$ leży wewnątrz danego czworościanu $KLMN$. Możliwe są dwa przypadki:

(a) Istnieje ściana czworościanu $KLMN$ (na przykład KLM), na której leżą co najmniej trzy wierzchołki sześcianu;

(b) Na każdej ścianie czworościanu $KLMN$ leżą dokładnie dwa wierzchołki sześcianu.

Rozważmy najpierw przypadek (a). Trzy wierzchołki sześcianu, które leżą na ścianie KLM, muszą być wierzchołkami jednej ściany tego sześcianu. To oznacza, że pewna ściana sześcianu, powiedzmy $ABCD$, leży wewnątrz trójkąta KLM; pozostałe cztery wierzchołki A', B', C', D' znajdują się na ścianach KLN, LMN, MKN. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że ściana KLN zawiera któreś dwa spośród punktów A', B', C', D'. Muszą one być dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $A'B'C'D'$. Nie tracąc ogólności rozważań, możemy przyjąć, że punkty A', B' leżą na ścianie KLN, punkt C' leży na ścianie LMN, zaś punkt D' znajduje się na ścianie MKN.

Warunek (a) wyznacza więc jednoznacznie (z dokładnością do przyjętych oznaczeń) położenie danego sześcianu wewnątrz czworościanu foremnego o krawęd 1. Przystępujemy do wyznaczenia długości krawędzi a.

Oznaczmy przez K', L', M', odpowiednio punkty przecięcia krawędzi KN, LN, MN z płaszczyzną $A'B'C'D'$. Czworościan $K'L'M'N$ jest foremny. Oznaczmy jego krawędź przez b. Wtedy $K'A' = B'L' = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, skąd

$$b = a + \frac{2\sqrt{3}}{3}a. \tag{1}$$

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi λ wyraża się wzorem $h = \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda$. Porównując wysokości czworościanów $KLMN$ oraz $K'L'M'N$ otrzymujemy równość $\frac{\sqrt{6}}{3}b + a = \frac{\sqrt{6}}{3}$, skąd wykorzystując równość (1) mamy

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 3}.$$

Pozostał do rozpatrzenia przypadek (b).

Każdy z czterech odcinków łączących wierzchołki danego sześcianu, leżące na tej samej ścianie czworościanu $KLMN$, jest krawędzią tego sześcianu. Odcinki te nie mają wspólnych końców. Przypuśćmy, że krawędź AB leży na ścianie KLM. Wówczas jedna z krawędzi $A'B'$ lub CD leży na jednej ze ścian KLN, LMN, MKN. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $A'B'$ leży na KLN. Wtedy proste AB i $A'B'$ są równoległe do krawędzi KL, a co za tym idzie, proste CD i $C'D'$, są prostopadłe do krawędzi MN; nie mogą więc one leżeć na ścianach LMN i KMN. Możemy zatem założyć, że odcinek CC' leży na ścianie LMN, zaś odcinek DD' znajduje się na ścianie KMN.

Oznaczmy przez X, Y, Z, T odpowiednio środki krawędzi KN, NL, LM, MK. Wówczas kwadraty $A'B'BA$ oraz $D'C'CD$ mają boki równoległe odpowiednio do boków kwadratu $XYZT$. Stąd istnieje (w przestrzeni) środek jednokładności P kwadratów $A'B'BA$ i $XYZT$, leżący na krawędzi KL oraz środek jednokładności Q kwadratów $D'C'CD$ i $XYZT$, leżący na krawędzi MN. Skale jednokładności w obu przypadkach są równe i wynoszą $2a$. Odległości od punktów P i Q do płaszczyzny $XYZT$ są równe i wynoszą $\sqrt{2}/4$. Stąd wynika, że odległości od płaszczyzn $A'B'BA$ i $D'C'CD$ do płaszczyzny $XYZT$ są równe — a więc każda z nich wynosi $a/2$. Te trzy wielkości są związane ze sobą zależnością

$$1 - 2a = \frac{a/2}{\sqrt{2}/4}, \qquad \text{skąd otrzymujemy} \qquad a = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

Pozostaje zauważyć, że powyższą wartość można zrealizować biorąc za P i Q środki krawędzi KL i MN.

Reasumując: możliwe wartości a wynoszą

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2\sqrt{2}+3} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

(*wp, jwr*)

Zadania z XXXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

Taipei (Tajwan), 15 – 16 lipca 1998 r.

1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są prostopadłe, a przeciwległe boki AB i DC nie są równoległe. Zakładamy, że symetralne boków AB i DC przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta $ABCD$. Udowodnić, że czworokąt $ABCD$ da się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABP i CDP mają równe pola.

2. W konkursie bierze udział a uczestników, ocenianych przez b egzaminatorów, gdzie $b \geq 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Każdy egzaminator ocenia każdego uczestnika, wydając werdykt „zdał" lub „nie zdał". Załóżmy, że k jest liczbą o własności: dla każdych dwóch egzaminatorów, ich oceny są zgodne dla co najwyżej k uczestników. Dowieść, że

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

3. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oznaczmy przez $d(n)$ liczbę jej dodatnich dzielników (włącznie z 1 oraz n). Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite k takie, że

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

dla pewnego n.

4. Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich takie, że liczba a^2b+a+b jest podzielna przez ab^2+b+7.

5. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg ten jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach K, L i M. Prosta przechodząca przez B i równoległa do MK przecina proste LM i LK odpowiednio w punktach R i S. Wykazać, że kąt RIS jest ostry.

6. Rozważamy wszystkie funkcje f ze zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb całkowitych dodatnich do tego samego zbioru, spełniające warunek

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

dla wszystkich $s,t \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość $f(1998)$.

Zadania z XXI Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych

Przysiek (Polska), 29 czerwca – 1 lipca 1998 r.

1. Niech x_1, x_2, y_1, y_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $x_1^2+x_2^2 \le 1$. Udowodnić nierówność

$$(x_1y_1+x_2y_2-1)^2 \ge (x_1^2+x_2^2-1)(y_1^2+y_2^2-1).$$

2. Rozważamy n punktów $P_1,P_2,\ldots,P_n$ położonych w tej kolejności na jednej linii prostej. Malujemy każdy z tych n punktów na jeden z następujących kolorów: biały, czerwony, zielony, niebieski, fioletowy. Kolorowanie nazwiemy *dopuszczalnym*, jeśli dla dowolnych dwóch kolejnych punktów P_i, P_{i+1} ($i=1,2,\ldots,n-1$) oba są tego samego koloru lub co najmniej jeden z nich jest biały. Ile jest dopuszczalnych kolorowań?

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (x,y) spełniające następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2-x^3=y \\ 2-y^3=x. \end{cases}$$

4. Niech m, n będą danymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech

$$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt[k^2]{k^m}\right]$$

($[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x). Udowodnić, że

$$S_m(n) \le n+m\cdot\left(\sqrt[4]{2^m}-1\right).$$

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich takich, że równanie $x^3-17x^2+ax-b^2=0$ ma trzy pierwiastki całkowite (niekoniecznie różne).

6. Różne punkty A, B, C, D, E, F są położone na okręgu k w tej kolejności. Proste styczne do okręgu k w punktach A i D oraz proste BF i CE przecinają się w jednym punkcie P. Udowodnić, że proste AD, BC i EF są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

7. Rozważamy pary (a,b) liczb naturalnych takich, że iloczyn $a^a\cdot b^b$ w zapisie dziesiętnym kończy się dokładnie 98 zerami. Wyznaczyć parę (a,b) o tej własności, dla której iloczyn ab jest najmniejszy.

8. Niech $n>2$ będzie daną liczbą naturalną. Rozważamy siatkę kwadratową na płaszczyźnie. W każdym kwadracie jednostkowym siatki wpisana jest liczba naturalna. Wielokąty o polu równym n, których boki są zawarte w prostych tworzących siatkę, nazwiemy wielokątami *dopuszczalnymi*. *Wartością* wielokąta dopuszczalnego nazwiemy sumę wszystkich liczb wpisanych w kwadraty zawarte w tym wielokącie. Udowodnić, że jeśli wartości dowolnych dwóch przystających wielokątów dopuszczalnych są równe, to wszystkie liczby wpisane w kwadraty siatki są równe.

Uwaga. Przypominamy, że obraz symetryczny Q wielokąta P jest wielokątem przystającym do P.

9. Niech K, L, M będą środkami boków BC, AC, AB trójkąta ABC. Punkty A, B, C dzielą okrąg opisany na trójkącie ABC na trzy łuki: AB, BC, CA. Niech X będzie takim punktem łuku BC, że $BX = XC$. Analogicznie, niech Y będzie takim punktem łuku AC, że $AY = YC$, zaś Z takim punktem łuku AB, że $AZ = ZB$. Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że $r + KX + LY + MZ = 2R$.

Zadania z IX Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich Baltic Way '98

Warszawa, 8 listopada 1998 r.

1. Znaleźć wszystkie funkcje dwóch zmiennych f, których argumenty x, y i wartości $f(x,y)$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, spełniające następujące warunki (dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x i y):

$$\begin{aligned} f(x,x) &= x, \\ f(x,y) &= f(y,x), \\ (x+y)f(x,y) &= yf(x,x+y). \end{aligned}$$

2. Trójkę liczb całkowitych dodatnich (a,b,c) nazywamy *quasi-pitagorejską*, jeśli istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c, w którym miara kąta naprzeciwko boku c wynosi $120°$. Udowodnić, że jeśli (a,b,c) jest trójką quasi-pitagorejską, to c ma dzielnik pierwszy większy od 5.

3. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y, które spełniają równanie

$$2x^2 + 5y^2 = 11(xy - 11).$$

4. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że dla $n = 1,2,\ldots,1998$ wartości $P(n)$ są liczbami naturalnymi trzycyfrowymi. Udowodnić, że wielomian P nie ma pierwiastków całkowitych.

5. Niech a będzie cyfrą nieparzystą, zaś b cyfrą parzystą. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje liczba całkowita dodatnia, podzielna przez 2^n, w której zapisie dziesiętnym nie występują cyfry inne niż a i b.

6. Niech P będzie wielomianem stopnia 6 i niech a, b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 < a < b$. Załóżmy, że $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$, $P'(0) = 0$. Udowodnić, że $P(x) = P(-x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

7. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ równanie

$$f(x)+f(y)=f(f(x)f(y)).$$

8. Niech $P_k(x)=1+x+x^2+\dots+x^{k-1}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_k(x)=2^{n-1}P_n\Big(\frac{1+x}{2}\Big)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej dodatniej n.

9. Liczby α, β spełniają $0<\alpha<\beta<\pi/2$. Niech γ, δ będą liczbami określonymi przez warunki:

(i) $0<\gamma<\pi/2$ oraz liczba $\tan\gamma$ jest średnią arytmetyczną liczb $\tan\alpha$ i $\tan\beta$;

(ii) $0<\delta<\pi/2$ oraz liczba $\dfrac{1}{\cos\delta}$ jest średnią arytmetyczną liczb $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ i $\dfrac{1}{\cos\beta}$.

Udowodnić, że $\gamma<\delta$.

10. Niech $n\geq 4$ będzie parzystą liczbą całkowitą. W okrąg o promieniu 1 wpisane są n-kąt foremny i $(n-1)$-kąt foremny. Dla każdego wierzchołka n-kąta rozważmy odległość od tego wierzchołka do najbliższego wierzchołka $(n-1)$-kąta, mierzoną po obwodzie okręgu. Niech S będzie sumą tych n odległości. Udowodnić, że S nie zależy od wzajemnego położenia tych dwóch wielokątów.

11. Niech a, b, c będą długościami boków pewnego trójkąta, zaś R — promieniem okręgu opisanego na nim. Udowodnić, że

$$R\geq\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}\ .$$

Kiedy zachodzi równość?

12. W trójkącie ABC zachodzi $\sphericalangle BAC=90^\circ$. Punkt D leży na boku BC i $\sphericalangle BDA=2\sphericalangle BAD$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{AD}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}\right).$$

13. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $\sphericalangle ADE=\sphericalangle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $\sphericalangle EAD=\sphericalangle BDP$ oraz $\sphericalangle CBD=\sphericalangle ADP$.

14. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB<AC$. Prosta przechodząca przez B i równoległa do AC przecina dwusieczną kąta zewnętrznego $\sphericalangle BAC$ w punkcie D. Prosta przechodząca przez C i równoległa do AB przecina tę dwusieczną w punkcie E. Punkt F leży na boku AC i spełniona jest równość $FC=AB$. Udowodnić, że $DF=FE$.

15. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na bok BC. Punkt E leży na odcinku AD i spełnione jest równanie

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Punkt F jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D na bok BE. Udowodnić, że $\sphericalangle AFC = 90°$.

16. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 czterdziestoma dwoma klockami o wymiarach 4×1 w taki sposób, że tylko środkowe pole szachownicy pozostanie nie zakryte? (Zakładamy, że każdy klocek zakrywa cztery pełne pola szachownicy.)

17. Niech n i k będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Danych jest nk przedmiotów (tych samych rozmiarów) i k pudełek, z których każde pomieści n przedmiotów. Każdy przedmiot jest pokolorowany jednym z k różnych kolorów. Wykazać, że można rozmieścić te przedmioty w pudełkach w taki sposób, że w każdym pudełku znajdą się przedmioty w co najwyżej dwóch kolorach.

18. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieje zbiór S o następujących własnościach:

(i) S składa się z n liczb całkowitych dodatnich, z których wszystkie są mniejsze od 2^{n-1};

(ii) dla dowolnych dwóch różnych niepustych podzbiorów A i B zbioru S suma elementów zbioru A jest różna od sumy elementów zbioru B.

19. Rozważmy mecz ping-ponga między dwiema drużynami, z których każda składa się z 1000 graczy. Każdy gracz grał przeciwko każdemu z graczy przeciwnej drużyny dokładnie raz (w ping-pongu nie ma remisów). Udowodnić, że istnieje dziesięciu graczy z jednej drużyny, takich że każdy z graczy drużyny przeciwnej przegrał z co najmniej jednym z tych dziesięciu graczy.

20. Powiemy, że liczba całkowita dodatnia m *pokrywa* liczbę 1998, jeśli 1, 9, 9, 8 pojawiają się w tej właśnie kolejności jako cyfry m. (Na przykład 1998 jest pokrywana przez **2**1**5**9**9**3**6**9**8**, ale nie przez 213326798.) Niech $k(n)$ oznacza liczbę tych liczb całkowitych dodatnich, które pokrywają 1998 i mają dokładnie n cyfr ($n \geq 5$), z których wszystkie są różne od 0. Jaką resztę z dzielenia przez 8 daje $k(n)$?