L Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia drugiego
Pierwszy dzień (26 lutego 1999 r.)

1. Przypuśćmy, że istnieją funkcje g i h spełniające warunki zadania. Ponieważ funkcje te są rosnące, więc dla każdego $k\in\mathbb{N}$ mamy

$$g\big(\tfrac{1}{2k+1}\big)=f\big(\tfrac{1}{2k+1}\big)+h\big(\tfrac{1}{2k+1}\big)=-1+h\big(\tfrac{1}{2k+1}\big)<$$

$$<-1+h\big(\tfrac{1}{2k}\big)=1+h\big(\tfrac{1}{2k}\big)-2=f\big(\tfrac{1}{2k}\big)+h\big(\tfrac{1}{2k}\big)-2=g\big(\tfrac{1}{2k}\big)-2<g\big(\tfrac{1}{2k-1}\big)-2.$$

Z monotoniczności funkcji g oraz powyższych nierówności dostajemy

$$g(0)<g\big(\tfrac{1}{2k+1}\big)<g\big(\tfrac{1}{2k-1}\big)-2<g\big(\tfrac{1}{2k-3}\big)-4<\ldots<g\big(\tfrac{1}{3}\big)-2(k-1)<g(1)-2k.$$

Zatem $g(1)-g(0)>2k$ dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$, co nie jest możliwe.

* * * * *

2. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n=1$ teza zadania jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy więc, że teza jest prawdziwa dla pewnego n i rozważmy sześcian C o krawędzi 2^{n+1} z wyróżnionym sześcianem jednostkowym D. Sześcian C dzielimy na osiem przystających sześcianów $C_1,C_2,\ldots,C_8$, każdy o krawędzi 2^n. W jednym z nich (przyjmijmy, że w C_8) znajduje się sześcian jednostkowy D. Połóżmy klocek w samym środku sześcianu C tak, aby jego część wspólna z każdym z sześcianów $C_1,C_2,\ldots,C_7$ była sześcianem jednostkowym. Wówczas pozostanie nam do wypełnienia klockami osiem sześcianów $C_1,C_2,\ldots,C_8$, każdy z usuniętym sześcianem jednostkowym. To zaś, na mocy założenia indukcyjnego, jest wykonalne. Dowód indukcyjny jest więc zakończony.

* * * * *

3. Załóżmy najpierw, że proste AD i BC nie są równoległe i przecinają się w punkcie S. Wówczas trójkąty ASB i CSD są podobne. Ponieważ $AE:EB=CF:FD$, więc podobne są również trójkąty ASE i CSF. Stąd $\sphericalangle DSE=\sphericalangle CSF$. Ponadto

$$\frac{SE}{SF}=\frac{SA}{SC}=\frac{AB}{CD}=\frac{PE}{PF},$$

skąd dostajemy $\sphericalangle ESP=\sphericalangle FSP$. Zatem punkt P jest równoodległy od prostych AD i BC. Stosunek pól trójkątów APD i BPC jest więc równy stosunkowi długości odcinków AD i BC, czyli nie zależy od wyboru punktów E i F.

Załóżmy teraz, że proste AD i BC są równoległe. Wtedy $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, gdzie $AB=CD$. Punkt P jest środkiem odcinka EF oraz $BE=DF$. Punkty E i F są więc jednakowo odległe odpowiednio od prostych BC i AD. Ponadto punkt P jest równoodległy od prostych przechodzących przez punkty E, F i równoleglych do podstaw trapezu $ABCD$. Zatem również w tym przypadku odległości od punktu P do prostych AD i BC są jednakowe. Powtarzając końcówkę rozumowania z poprzedniego przypadku dostajemy tezę.

(*wp, jwr*)

L Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia drugiego
Drugi dzień (27 lutego 1999 r.)

4. Oznaczmy przez K, L, M odpowiednio punkty przecięcia prostych AP, BP, CP z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Na mocy równości $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ACM$ długości łuków BK i AM są równe. Analogicznie, długości łuków KC i LA są równe. Odcinki LC, AK, MB są więc równoległe oraz mają wspólną symetralną, przechodzącą przez punkt O. Na tej symetralnej leży również punkt P, jako punkt przecięcia przekątnych MC i BL trapezu równoramiennego $MBCL$. Zatem w szczególności $\sphericalangle APO = 90^\circ$.

*   *   *   *   *

5. Niech f będzie funkcją spełniającą warunki zadania. Dla liczb $x \neq y$ dostajemy $f^{49}(f(x)) = x \neq y = f^{49}(f(y))$, skąd $f(x) \neq f(y)$. Zatem f jest permutacją zbioru S. Oznaczmy przez $r(x)$ $(x \in S)$ najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią taką, że $f^{r(x)}(x) = x$. Wówczas $r(x) \leq 5$ oraz $r(x)|50$, skąd $r(x) \in \{1,2,5\}$.

Jeżeli istnieje taka liczba $a \in S$, że $r(a) = 5$, to liczby a, $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, $f^4(a)$ są różne; wyczerpują więc zbiór S. Wtedy dla dowolnej liczby $x \in S$, $r(x) = 5$. Funkcja f jest więc jednoznacznie wyznaczona przez permutację $\big(f(1), f^2(1), f^3(1), f^4(1)\big)$ zbioru $\{2,3,4,5\}$; zatem może być określona na $4! =$**24** sposoby.

Jeżeli dla wszystkich $x \in S$ zachodzi $r(x) = 1$, to f jest funkcją identycznościową. Taka funkcja jest **jedna**.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym największa wartość osiągana przez funkcję r wynosi 2. Niech więc a będzie takim elementem zbioru S, że $r(a) = 2$. Wtedy także $r(b) = 2$, gdzie $b = f(a)$.

Jeżeli $r(x) = 1$ dla wszystkich $x \in S \setminus \{a,b\}$, to f jest wyznaczona przez wybór dwuelementowego podzbioru $\{a,b\}$ zbioru S, co można uczynić na $\binom{5}{2} =$**10** sposobów.

Jeżeli natomiast istnieje taka liczba $c \in S \setminus \{a,b\}$, że $r(c) = 2$, to przyjmując $d = f(c)$ oraz oznaczając przez e jedyny element zbioru $S \setminus \{a,b,c,d\}$, mamy

$$f(a) = b, \quad f(b) = a, \qquad f(c) = d, \quad f(d) = c, \qquad f(e) = e. \tag{1}$$

Taka funkcja f jest wyznaczona przez wybór liczby e (można to zrobić na 5 sposobów) oraz podział zbioru $S \setminus \{e\}$ na dwa podzbiory dwuelementowe $\{a,b\}$ i $\{c,d\}$ (istnieją 3 takie podziały). Dostajemy więc **15** funkcji postaci (1).

łącznie istnieje **50** funkcji spełniających warunki zadania.

*   *   *   *   *

6. Dla dowolnej liczby całkowitej $m \geq k$ liczba $\binom{m}{k}$ jest całkowita. Stąd dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m liczba $m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)$ jest podzielna przez $k!$. Istnieją więc takie liczby całkowite $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m,

$$m^k \equiv b_1 m + b_2 m^2 + \ldots + b_{k-1} m^{k-1} \pmod{k!}.$$

Mnożąc powyższą kongruencję przez a_m, a następnie dodając stronami od $m = 1$ do $m = n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_1 + 2^k a_2 + \ldots + n^k a_n &\equiv b_1(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n) + b_2(a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + n^2 a_n) + \ldots \\ &\qquad \ldots + b_{k-1}(a_1 + 2^{k-1} a_2 + \ldots + n^{k-1} a_n) = \\ &= 0 \pmod{k!}. \end{aligned}$$

(*wp*, *jwr*)