Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

I seria

(okres od 11 września do 11 października 1999r.)

1. Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$. Udowodnić, że suma sześcianów wszystkich liczb naturalnych mniejszych od n, względnie pierwszych z n dzieli się przez n.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek $\sphericalangle ACB = 2 \sphericalangle ABC$. Punkt D leży na boku BC przy czym $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$. Dowieść, że

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\,.$$

3. Suma liczb dodatnich a, b, c równa jest 1. Udowodnić, że $a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1$.

4. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej do dnia

11 października 1999r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane.

. . . .

II seria

(okres od 12 października do 10 listopada 1999r.)

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb naturalnych, dla których liczby $a^3 + 6ab + 1$ i $b^3 + 6ab + 1$ są sześcianami liczb naturalnych.

6. Punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC, w którym kąt C jest prosty. Punkty P, Q i R są odpowiednio rzutami punktu X na boki BC, CA i AB. Udowodnić, że równość $AR \cdot RB = BP \cdot PC + AQ \cdot QC$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na boku AB.

7. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i dowolnej liczby $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ istnieją takie liczby $a, b \in (1999, 2000)$, że

$$\frac{1}{2}a^n + \frac{1}{2}b^n < \big(ta + (1-t)b\big)^n.$$

8. Liczby $c(n, k)$ są określone dla liczb całkowitych nieujemnychg $n \geq k$ w ten sposób, że zachodzą równości:

$$c(n,0) = c(n,n) = 1 \qquad \text{dla każdej liczby} \quad n \geq 0,$$
$$c(n{+}1,k) = 2^k c(n,k) + c(n,k{-}1) \qquad \text{dla} \quad n \geq k \geq 1.$$

Dowieść, że $c(n,k) = c(n,n{-}k)$ dla $n \geq k \geq 0$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej do dnia

10 listopada 1999r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane.

. . . .

III seria

(okres od 11 listopada do 10 grudnia 1999r.)

9. Dane są takie liczby całkowite dodatnie m i n, że $mn|m^2+n^2+m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby całkowitej.

10. W przestrzeni dane są trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Niech ω będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt O, zaś A', B', C' – rzutami punktów A, B, C odpowiednio na płaszczyznę w. Wyznaczyć zbiór watości wyrażenia $OA'^2+OB'^2+OC'^2$ dla wszystkich płaszczyzn ω.

11. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz zbiór M, złożony z n^2+1 liczb całkowitych dodatnich i mający następującą własność: wśród $n+1$ liczb dowolnie wybranych ze zbioru M znajduje się para liczb, z których jedna dzieli się przez drugą. Udowodnić, że w zbiorze M istnieją różne liczby $a_1,\ldots,a_{n+1}$ spełniające warunek: dla $i=1,\ldots,n$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1}.

12. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Okręgi opisane na trójkątach AEF, BFD, CDE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że jeżeli

$$\frac{PD}{PE}=\frac{BD}{AE}, \qquad \frac{PE}{PF}=\frac{CE}{BF}, \qquad \frac{PF}{PD}=\frac{AF}{CD},$$

to AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej do dnia

10 listopada 1999r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane.

. . . .