LI OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Do Pani/Pana Dyrektora Szkoły
Do Pani/Pana Profesora Matematyki

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej uprzejmie prosi o zapoznanie uczniów i nauczycieli zainteresowanych zadaniami Olimpiady z podanymi tu rozwiązaniami zadań konkursowych stopnia pierwszego LI Olimpiady Matematycznej.

W dalszej części niniejszego druku podajemy teksty zadań z zawodów międzynarodowych: XL Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej i XXII Austriacko–Polskich Zawodów Matematycznych, a także z X Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (*Baltic Way* ′99).

Zawody pierwszego stopnia LI Olimpiady Matematycznej są zakończone. Zawody stopnia drugiego odbędą się w dniach 25 i 26 lutego 2000 r. Zawody stopnia trzeciego odbędą się w dniach 3 i 4 kwietnia 2000 r.

Zawiadomienia o dokładnym terminie i miejscu zawodów stopnia drugiego wyślą komitety okręgowe zakwalifikowanym zawodnikom w terminie do dnia 10 lutego 2000 r.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego LI Olimpiady Matematycznej

Zadanie **1.** Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Udowodnić, że suma sześcianów wszystkich liczb naturalnych mniejszych od n, względnie pierwszych z n, dzieli się przez n.

Rozwiązanie

Każda liczba naturalna mniejsza od n i względnie pierwsza z n jest równa k lub $n-k$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną mniejszą od $n/2$ i względnie pierwszą z n. Zatem dana w zadaniu suma sześcianów jest równa

$$\sum_{\substack{1\leqslant k<n/2\\(k,n)=1}} k^3+(n-k)^3 \;=\; \sum_{\substack{1\leqslant k<n/2\\(k,n)=1}} n^3-3kn^2+3k^2n \;=\; n\cdot \sum_{\substack{1\leqslant k<n/2\\(k,n)=1}} n^2-3kn+3k^2\,,$$

a więc jest podzielna przez n.

Zadanie **2.** W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek

$$\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle ABC\,.$$

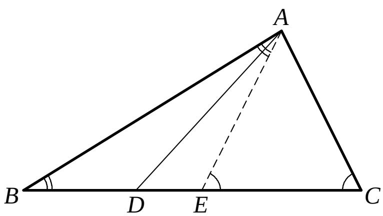
Punkt D leży na boku BC, przy czym $\sphericalangle BAD=\frac{1}{2}\sphericalangle ABC$. Dowieść, że

$$\frac{1}{BD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\,. \qquad (1)$$

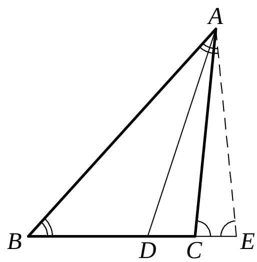
Rozwiązanie

Wykażemy, że równość (1) jest prawdziwa dla dowolnego trójkąta ABC, niekoniecznie ostrokątnego.

Niech E będzie takim punktem półprostej $BC^{\rightarrow}$, że AD jest dwusieczną kąta BAE (rys. 1 i 2).



rys. 1



rys. 2

Wówczas $\sphericalangle EBA=\sphericalangle EAB$. Jeżeli punkt E leży na boku BC (rys. 1), to

$$\sphericalangle AEC = 2\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACE\,.$$

Jeśli natomiast punkt E nie leży na boku BC (rys. 2), to

$$\sphericalangle AEC = 180^\circ - 2\sphericalangle ABE = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACE\,.$$

Zatem w obu przypadkach $BE=AE=AC$. Na mocy twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{BD}{AB}+\frac{BD}{AC}=\frac{DE}{AE}+\frac{BD}{AE}=\frac{BE}{AE}=1\,,$$

co należało udowodnić.

Zadanie **3.** Suma liczb dodatnich a, b, c równa jest 1. Udowodnić, że

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leqslant 1\,.$$

Rozwiązanie

Wystarczy dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)}\leqslant (a+b+c)^2\,.$$

Przekształcając równoważnie powyższą zależność otrzymujemy

$$\sqrt{3abc(a+b+c)}\leqslant ab+bc+ca\,.$$

Wykonując podstawienie $x=bc$, $y=ca$, $z=ab$, sprowadzamy dowodzoną nierówność do postaci

$$\sqrt{3(xy+yz+zx)}\leqslant x+y+z\,.$$

Podnosząc do kwadratu obie strony ostatniej nierówności i przekształcając równoważnie otrzymujemy

$$xy+yz+xz\leqslant x^2+y^2+z^2 \quad \text{lub} \quad (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0\,,$$

co jest prawdą.

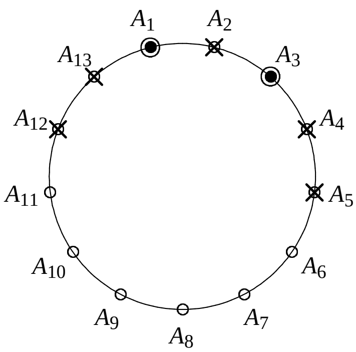
Zadanie **4.** Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązanie

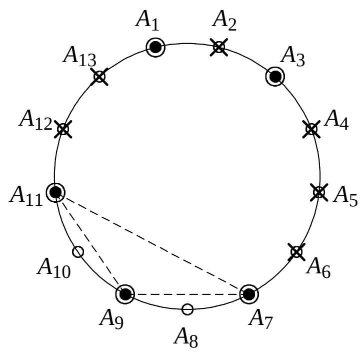
Niech $A_1, A_2, \ldots, A_{13}$ będą wierzchołkami dowolnego 13-kąta foremnego wpisanego w dany okrąg. Wykażemy, że wśród dowolnych pięciu wierzchołków tego 13-kąta znajdą się trzy będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Ponieważ wśród dowolnych trzynastu punktów danego okręgu zawsze znajdzie się pięć pomalowanych tym samym kolorem, zadanie zostanie rozwiązane.

Przypuśćmy więc, że udało się tak wybrać pięć wierzchołków spośród $A_1, A_2, \ldots, A_{13}$, że żadne trzy spośród wybranych punktów nie tworzą trójkąta równoramiennego.

Załóżmy najpierw, że wśród wybranych punktów nie ma dwóch sąsiednich wierzchołków 13-kąta $A_1A_2\ldots A_{13}$. Wówczas wśród wybranych punktów znajdziemy dwa oddzielone dokładnie jednym wierzchołkiem, który nie został wybrany. Bez szkody dla ogólności rozumowania, możemy przyjąć, że są to A_1 i A_3. Ponieważ żadne trzy wybrane wierzchołki nie tworzą trójkąta równoramiennego, więc nie został wybrany żaden z punktów: A_{12}, A_{13}, A_2, A_4, A_5 (rys. 1).



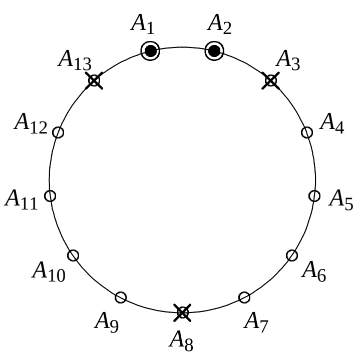
rys. 1



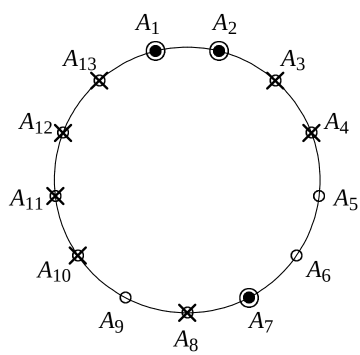
rys. 2

Ponieważ trójkąt $A_1A_6A_{11}$ jest równoramienny, więc co najmniej jeden z wierzchołków A_6, A_{11} nie został wybrany. Bez straty ogólności rozumowania możemy przyjąć, że tym wierzchołkiem jest A_6. Zatem spośród pięciu punktów A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11} dokładnie trzy zostały wybrane, przy czym żadne dwa z nich nie są kolejnymi wierzchołkami 13-kąta $A_1A_2\ldots A_{13}$. Musiały więc zostać wybrane punkty A_7, A_9, A_{11}. To jednak nie jest możliwe, gdyż punkty te tworzą trójkąt równoramienny (rys. 2). Otrzymaliśmy sprzeczność.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym wśród wybranych wierzchołków znajdują się dwa sąsiednie, powiedzmy A_1 i A_2. Oznacza to, że nie został wybrany żaden z wierzchołków: A_{13}, A_3, A_8 (rys. 3).



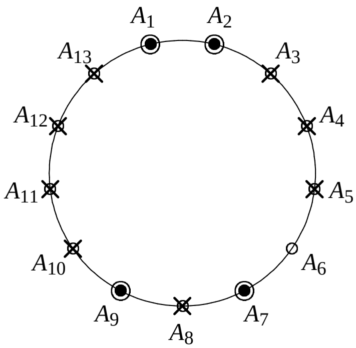
rys. 3



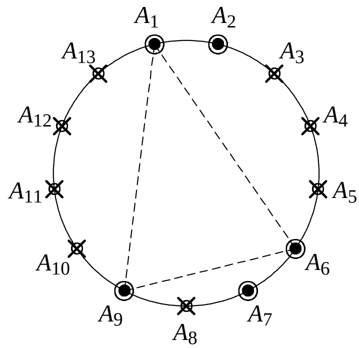
rys. 4

Ponieważ trójkąty $A_2A_4A_6$, $A_1A_6A_{11}$, $A_{11}A_1A_4$ są równoramienne, więc został wybrany co najwyżej jeden z punktów: A_4, A_6, A_{11}. Analogicznie stwierdzamy, że został wybrany co najwyżej jeden z punktów: A_5, A_{10}, A_{12}. Zatem wybrany być musiał co najmniej jeden z punktów A_7, A_9. Bez straty ogólności przyjmijmy, że został wybrany punkt A_7 (rys. 4). Równoramienność trójkątów: $A_1A_4A_7$, $A_2A_{10}A_7$, $A_2A_{11}A_7$ oraz $A_2A_{12}A_7$ dowodzi, że nie wybrano punktów: A_4, A_{10}, A_{11} oraz A_{12}.

Zatem wśród wybranych pięciu punktów muszą być dwa spośród A_5, A_6, A_9. Z uwagi na równoramienność trójkąta $A_5A_6A_7$ wybrany mógł być tylko jeden z punktów A_5, A_6. Zatem wybranym punktem jest A_9 (rys. 5). To z kolei oznacza, że nie został wybrany punkt A_5, gdyż trójkąt $A_5A_7A_9$ jest równoramienny.



rys. 5



rys. 6

Tak więc piątym z wybranych punktów musi być A_6, co daje sprzeczność, gdyż trójkąt $A_9A_1A_6$ jest równoramienny (rys. 6).

Tym samym wykazaliśmy, że wybór pięciu wierzchołków 13-kąta, z których żadne trzy nie wyznaczają trójkąta równoramiennego, nie jest możliwy, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **5.** Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb naturalnych, dla których liczby $a^3+6ab+1$ i $b^3+6ab+1$ są sześcianami liczb naturalnych.

Rozwiązanie

Niech a i b będą liczbami spełniającymi warunki zadania. Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $a \leqslant b$. Wówczas

$$b^3 < b^3+6ab+1 \leqslant b^3+6b^2+1 < b^3+6b^2+12b+8 = (b+2)^3 .$$

Skoro liczba $b^3+6ab+1$ jest sześcianem liczby całkowitej, to musi zachodzić równość

$$b^3+6ab+1 = (b+1)^3 , \tag{1}$$

Przekształcając równoważnie powyższy związek otrzymujemy po kolei

$$b^3+6ab+1 = b^3+3b^2+3b+1$$

$$2ab = b(b+1)$$

$$b = 2a-1 \tag{2}$$

Pozostaje rozstrzygnąć, dla jakich par (a,b) spełniających warunek (2) liczba

$$a^3+6ab+1$$

jest sześcianem liczby całkowitej. Na mocy zależności (2) powyższa liczba jest równa a^3+12a^2-6a+1. Z nierówności

$$a^3 \leqslant a^3+6a^2-6a < a^3+12a^2-6a+1 < a^3+12a^2+48a+64 = (a+4)^3$$

wynika, że jeżeli liczba a^3+12a^2-6a+1 jest sześcianem liczby całkowitej, to jest ona równa $(a+1)^3$, $(a+2)^3$ lub $(a+3)^3$. Należy więc rozważyć trzy przypadki:

(a) $a^3+12a^2-6a+1=(a+1)^3$.

Wówczas otrzymujemy $9a^2-9a=0$, skąd $a=0$ lub $a=1$.

(b) $a^3+12a^2-6a+1=(a+2)^3$.

Stąd mamy $6a^2-18a-7=0$. Uzyskane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych, gdyż lewa strona nie jest podzielna przez 3, a prawa jest.

(c) $a^3+12a^2-6a+1=(a+3)^3$.

Wtedy uzyskujemy $3a^2-33a-26=0$. Podobnie jak w przypadku (b), otrzymane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych, gdyż lewa strona nie jest podzielna przez 3, a prawa jest równa 0.

Ostatecznie znaleźliśmy tylko jedną parę $(a,b)=(1,1)$ spełniającą warunki zadania.

Zadanie **6.** Punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC, w którym kąt C jest prosty. Punkty P, Q i R są odpowiednio rzutami punktu X na boki BC, CA i AB. Udowodnić, że równość

$$AR\cdot RB = BP\cdot PC + AQ\cdot QC$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na boku AB.

Rozwiązanie

Wprawadźmy dla zwięzłości zapisu następujące oznaczenie:

$$w = 2\cdot(AR\cdot RB - BP\cdot PC - AQ\cdot QC).$$

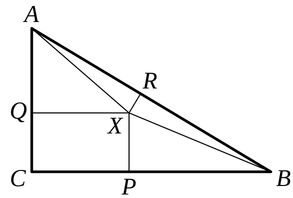
Należy wykazać, że $w=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $XR=0$.

Na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność (rys. 1):

$$(AR+RB)^2 = (AQ+QC)^2 + (CP+PB)^2.$$

Przekształcając równoważnie powyższą równość uzyskujemy po kolei:

$$w = AQ^2+QC^2+CP^2+PB^2-AR^2-RB^2$$
$$w = AQ^2+PX^2+QX^2+PB^2-AR^2-RB^2$$
$$w = AX^2+BX^2-AR^2-RB^2$$
$$w = 2XR^2$$



rys. 1

Z ostatniej równości wynika natychmiast, że $w=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $XR=0$.

Zadanie **7.** Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i dowolnej liczby $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ istnieją takie liczby $a, b \in (1999, 2000)$, że

$$\tfrac{1}{2}a^n + \tfrac{1}{2}b^n < \big(ta + (1-t)b\big)^n.$$

Rozwiązanie

Niech $c = 3999/2$. Liczb a, b szukamy w postaci $a = c + x$, $b = c - x$, gdzie $x \in (0, \frac{1}{2})$. Wówczas

$$\begin{aligned}(ta + (1-t)b)^n - \tfrac{1}{2}a^n - \tfrac{1}{2}b^n = \\ &= (ct + tx + (1-t)c - (1-t)x)^n - \tfrac{1}{2}(c+x)^n - \tfrac{1}{2}(c-x)^n = \\ &= (c + (2t-1)x)^n - \tfrac{1}{2}(c+x)^n - \tfrac{1}{2}(c-x)^n = \\ &= (c + sx)^n - \tfrac{1}{2}(c+x)^n - \tfrac{1}{2}(c-x)^n\,,\end{aligned}$$

gdzie $s = 2t - 1 > 0$. Po rozpisaniu ze wzoru dwumianowego Newtona ostatnie wyrażenie przyjmuje postać

$$w(x) = sx + x^2 p(x)\,, \tag{1}$$

gdzie $p(x)$ jest pewnym wielomianem.

Chcemy wykazać, że dla pewnej liczby $y \in (0, \frac{1}{2})$, liczba $w(y)$ jest dodatnia. Z równości (1) wynika, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{w(x)}{x} = s > 0\,.$$

Zatem istnieje taka liczba $y \in (0, \frac{1}{2})$, że wyrażenie $w(y)/y$, a co za tym idzie również wyrażenie $w(y)$, ma wartość dodatnią. To zaś kończy dowód.

Zadanie **8.** Liczby $c(n,k)$ są określone dla liczb całkowitych nieujemnych $n \geqslant k$ w ten sposób, że zachodzą równości:

$$c(n,0) = c(n,n) = 1 \qquad \text{dla każdej liczby } n \geqslant 0,$$
$$c(n{+}1,k) = 2^k c(n,k) + c(n,k{-}1) \qquad \text{dla } n \geqslant k \geqslant 1.$$

Dowieść, że $c(n,k) = c(n,n{-}k)$ dla $n \geqslant k \geqslant 0$.

Rozwiązanie

Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych zdefiniowaną wzorami:

$$f(0) = 1\,, \qquad f(m) = (2^1 - 1)(2^2 - 1)\cdots(2^m - 1) \quad \text{dla} \quad m \geqslant 1\,.$$

Niech ponadto

$$a(n,k) = \frac{f(n)}{f(k)\,f(n-k)} \qquad \text{dla} \quad n \geqslant k \geqslant 0\,.$$

Wówczas $a(n,k) = a(n,n{-}k)$. Wykażemy, że $a(n,k) = c(n,k)$.

Ponieważ warunki dane w treści zadania wyznaczają jednoznacznie liczby $c(n,k)$, więc wystarczy dowieść, że liczby $a(n,k)$ spełniają te same warunki.

Oczywiście $a(n,0) = a(n,n) = 1$. Ponadto

$$2^k a(n,k) + a(n,k-1) = \frac{2^k f(n)}{f(k)\,f(n-k)} + \frac{f(n)}{f(k-1)\,f(n-k+1)} =$$

$$= \frac{2^k f(n)(2^{n-k+1}-1)}{f(k)\,f(n-k)(2^{n-k+1}-1)} + \frac{f(n)(2^k-1)}{f(k-1)(2^k-1)\,f(n-k+1)} =$$

$$= f(n)\cdot\frac{2^k(2^{n-k+1}-1)+(2^k-1)}{f(k)\,f(n-k+1)} =$$

$$= f(n)\cdot\frac{2^{n+1}-1}{f(k)\,f(n+1-k)} = \frac{f(n+1)}{f(k)\,f(n+1-k)} = a(n+1,k)\,,$$

co dowodzi, że $a(n,k) = c(n,k)$.

Zadanie **9.** Dane są takie liczby całkowite dodatnie m i n, że $mn \mid m^2+n^2+m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb m i n. Wówczas $d^2 \mid mn$, a zatem $d^2 \mid m^2+n^2+m$. Stąd wobec podzielności $d^2 \mid m^2$ oraz $d^2 \mid n^2$ otrzymujemy $d^2 \mid m$.

Z drugiej strony, $m \mid m^2+n^2+m$, skąd uzyskujemy podzielność $m \mid n^2$. Zatem m jest wspólnym dzielnikiem liczb n^2 i m^2. To oznacza, że największy wspólny dzielnik liczb m^2 i n^2, który jest równy d^2, jest podzielny przez m. Wobec wyżej udowodnionej podzielności $d^2 \mid m$ otrzymujemy $m = d^2$.

Zadanie **10.** W przestrzeni dane są trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Niech ω będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt O, zaś A', B', C' – rzutami punktów A, B, C odpowiednio na płaszczyznę ω. Wyznaczyć zbiór wartości wyrażenia

$$(OA')^2 + (OB')^2 + (OC')^2 \tag{1}$$

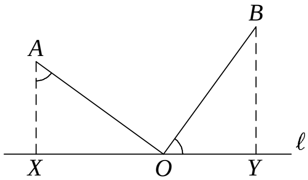
dla wszystkich płaszczyzn ω.

Rozwiązanie

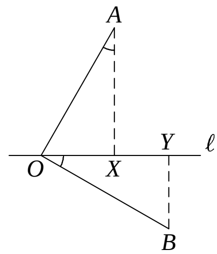
Wykażemy, że wartość wyrażenia (1) jest równa **2**, niezależnie od wyboru płaszczyzny ω.

Niech ω będzie dowolną płaszczyzną przechodzącą przez punkt O, zaś π płaszczyzną zawierającą punkty O, A, B. Oznaczmy przez ℓ wspólną prostą płaszczyzn π i ω. Niech X, Y będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A, B na prostą ℓ. Wówczas, niezależnie od położenia punktów A, B względem prostej ℓ (rys. 1 i 2),

$$\sphericalangle OAX = 90^\circ - \sphericalangle AOX = \sphericalangle BOY = \alpha\,.$$



rys. 1



rys. 2

Stąd

$$AX^2 + BY^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,. \tag{2}$$

Ponadto $\sphericalangle AXA' = \sphericalangle BYB' =$ (kąt pomiędzy płaszczyznami π i ω) $= \beta$. Zatem na mocy równości (2),

$$(AA')^2 + (BB')^2 = AX^2\sin^2\beta + BY^2\sin^2\beta = \sin^2\beta\,.$$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa oraz powyższej równości otrzymujemy

$$(OA')^2 + (OB')^2 = 2 - (AA')^2 - (BB')^2 = 2 - \sin^2\beta\,. \tag{3}$$

Wektor $\overrightarrow{OC}$ jest prostopadły do płaszczyzny π, skąd $\sphericalangle COC' = 90^\circ - \beta$. Zatem

$$(OC')^2 = \cos^2(90^\circ - \alpha) = \sin^2\beta\,. \tag{4}$$

Dodając stronami równości (3) i (4) uzyskujemy

$$(OA')^2 + (OB')^2 + (OC')^2 = 2\,,$$

niezależnie od wyboru płaszczyzny ω.

Zadanie **11.** Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz zbiór M, złożony z n^2+1 różnych liczb całkowitych dodatnich i mający następującą własność: wśród $n+1$ liczb dowolnie wybranych ze zbioru M znajduje się para liczb, z których jedna dzieli się przez drugą. Udowodnić, że w zbiorze M istnieją różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ spełniające warunek: dla $i = 1, 2, \ldots, n$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1}.

Rozwiązanie

Niech $k \in M$. Oznaczmy przez $d(k)$ największą liczbę naturalną ℓ, dla której istnieją różne liczby $a_1 = k$, a_2, a_3, $\ldots$, a_ℓ spełniające warunek: dla $i = 1, 2, \ldots, \ell{-}1$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1}.

Przypuśćmy, że teza zadania nie jest spełniona. To oznacza, że dla dowolnego $k \in M$ mamy $1 \leqslant d(k) \leqslant n$. Wówczas na mocy zasady szufladkowej, istnieją takie różne liczby $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$, że

$$d(k_1) = d(k_2) = \ldots = d(k_{n+1}) = m\,.$$

Z założeń zadania wynika, że dla pewnych różnych liczb s, t zachodzi podzielność $k_s \mid k_t$. Warunek $d(k_s) = m$ oznacza, że istnieją liczby $a_1 = k_s$, a_2,

$\dots, a_m$ spełniające: dla $i = 1, 2, \dots, m-1$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1}. Jednak wtedy liczby $b_1 = k_t$, $b_2 = a_1 = k_s$, $b_3 = a_2$, $\dots$, $b_{m+1} = a_m$ spełniają warunek: dla $i = 1, 2, \dots, m$ liczba b_i dzieli się przez b_{i+1}. To dowodzi, że $d(k_t) \geqslant m+1$ wbrew założeniu, że $d(k_t) = m$.

Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie **12.** W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Okręgi opisane na trójkątach AEF, BFD, CDE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że jeżeli

$$\frac{PD}{PE} = \frac{BD}{AE}, \qquad \frac{PE}{PF} = \frac{CE}{BF}, \qquad \frac{PF}{PD} = \frac{AF}{CD},$$

to AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC.

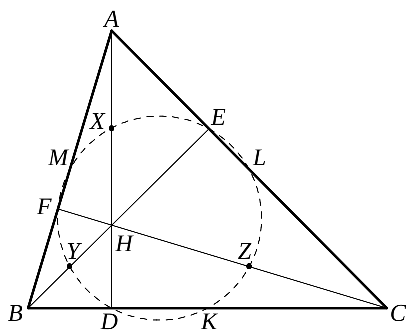
Rozwiązanie

Wykorzystamy następujące

Twierdzenie

Wysokości AD, BE, CF trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB. Punkty X, Y, Z są odpowiednio środkami odcinków AH, BH, CH. Wówczas następujące punkty: D, E, F, K, L, M, X, Y, Z leżą na jednym okręgu (rys. 1).

Okrąg ten nazywa się *okręgiem dziewięciu punktów trójkąta* ABC.

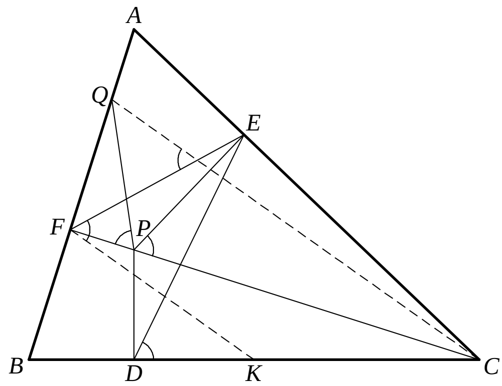


rys. 1

Z powyższego twierdzenia wynika, że *jeśli okrąg przechodzący przez środki boków trójkąta ostrokątnego* ABC *przecina obwód tego trójkąta po raz drugi w punktach* D, E, F, *to punkty* D, E, F *są spodkami wysokości trójkąta* ABC.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Na półprostej $FA^{\rightarrow}$ odkładamy taki punkt Q, aby zachodziła następująca równość kątów: $\sphericalangle FPQ = \sphericalangle EPC$ (rys. 2).



rys. 2

Punkty A, E, P, F leżą na jednym okręgu, więc $\sphericalangle QFP = \sphericalangle CEP$. Z powyższych równości wynika, że trójkąty PQF oraz PCE są podobne. Zatem

$$\frac{PF}{PE} = \frac{PQ}{PC}\,.$$

Ponadto $\sphericalangle FPE = \sphericalangle QPC$. Z dwóch ostatnich równości wynika, że trójkąty PFE oraz PQC są podobne. Z zależności w treści zadania oraz z podobieństwa trójkątów PQF, PCE otrzymujemy

$$\frac{BF}{CE} = \frac{PF}{PE} = \frac{QF}{CE}\,,$$

skąd $BF = QF$. Zatem punkt F jest środkiem odcinka BQ.

Niech K będzie środkiem boku BC. Wówczas proste KF oraz CQ są równoległe. Zatem kąt EFK jest równy kątowi pomiędzy prostymi FE oraz CQ. Natomiast na mocy podobieństwa trójkątów PFE oraz PQC, kąt pomiędzy prostymi FE oraz CQ jest równy kątowi pomiędzy odcinkami PE i PC, czyli kątowi EPC. Punkty E, P, D, C leżą na jednym okręgu, skąd wynika równość $\sphericalangle EPC = \sphericalangle EDC$.

Z powyższych rozważań uzyskujemy zależność $\sphericalangle EFK = \sphericalangle EDC$. Dowodzi ona, że punkty D, K, E, F leżą na jednym okręgu, niezależnie od tego, z której strony punktu K leży punkt D. Jeżeli $K = D$, to okrąg opisany na trójkącie DEF jest styczny do prostej BC w punkcie D.

Innymi słowy: okrąg opisany na trójkącie DEF przechodzi przez punkt D oraz środek boku BC i nigdzie indziej nie przecina prostej BC. Analogicznie dowodzimy, że ten sam okrąg przechodzi przez środki pozostałych boków. Poza punktami D, E, F oraz środkami boków trójkąta ABC okrąg ten nie ma punktów wspólnych z obwodem trójkąta ABC.

Wykazaliśmy więc, że okrąg przechodzący przez środki boków trójkąta ABC przecina jego obwód po raz drugi w punktach D, E, F. To zaś dowodzi, że proste AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC.

Zadania z XL Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej
Bukareszt (Rumunia), 16 – 17 lipca 1999 r.

1. Wyznaczyć wszystkie zbiory skończone S na płaszczyźnie, złożone z co najmniej trzech punktów i spełniające następujący warunek: Dla każdych dwóch różnych punktów A i B zbioru S, symetralna odcinka AB jest osią symetrii zbioru S.

2. Niech $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną.
(a) Wyznaczyć najmniejszą stałą C taką, że nierówność

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^4$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$.
(b) Dla tej stałej C ustalić, kiedy zachodzi równość.

3. Rozważmy planszę kwadratową $n \times n$, gdzie n jest daną dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Plansza jest podzielona na n^2 kwadratów jednostkowych. Dwa różne kwadraty planszy są *przyległe*, gdy mają wspólny bok. N kwadratów planszy zostało wyróżnionych w taki sposób, by każdy kwadrat planszy (wyróżniony lub nie) był przyległy do co najmniej jednego kwadratu wyróżnionego. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość N.

4. Wyznaczyć wszystkie takie pary (n, p) liczb całkowitych dodatnich, że: p jest liczbą pierwszą, $n \leqslant 2p$ oraz $(p-1)^n + 1$ dzieli się przez n^{p-1}.

5. Okręgi Γ_1 i Γ_2 są położone wewnątrz okręgu Γ i są odpowiednio styczne do Γ w różnych punktach M i N. Okrąg Γ_1 przechodzi przez środek okręgu Γ_2. Prosta przechodząca przez punkty przecięcia okręgów Γ_1 i Γ_2 przecina okrąg Γ w punktach A i B. Proste MA i MB przecinają Γ_1 odpowiednio w punktach C i D. Udowodnić, że prosta CD jest styczna do okręgu Γ_2.

6. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadania z XXII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych
Spittal/Drau (Austria), 30 czerwca – 2 lipca 1999 r.

1. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Wyznaczyć liczbę uporządkowanych szóstek zbiorów $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ spełniających następujące dwa warunki:
(a) zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_6$ są (niekoniecznie różnymi) podzbiorami zbioru M;

(b) każdy element zbioru M albo nie należy do żadnego, albo należy do dokładnie trzech, albo należy do wszystkich sześciu zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

2. Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą C_1 i najmniejszą liczbę rzeczywistą C_2 takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzą następujące nierówności

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2$$

3. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie takie układy n funkcji $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, gdzie $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x)f_2(y) + f_1(y) &= 0 \\ f_2(x^2) - f_3(x)f_3(y) + f_2(y^2) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x^k) - f_{k+1}(x)f_{k+1}(y) + f_k(y^k) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x^n) - f_1(x)f_1(y) + f_n(y^n) &= 0 \end{aligned}$$

4. Dany jest trójkąt ABC. Przez punkt P leżący wewnątrz trójkąta ABC prowadzimy trzy proste k, l, m w taki sposób, że:

(a) prosta k przecina proste AB i AC odpowiednio w takich punktach A_1 i A_2 ($A_1 \neq A_2$), że $PA_1 = PA_2$;

(b) analogicznie prosta l przecina proste BC i BA odpowiednio w takich punktach B_1 i B_2 ($B_1 \neq B_2$), że $PB_1 = PB_2$;

(c) analogicznie prosta m przecina proste CA i CB odpowiednio w takich punktach C_1 i C_2 ($C_1 \neq C_2$), że $PC_1 = PC_2$.

Udowodnić, że proste k, l, m są przez te warunki wyznaczone jednoznacznie. Wyznaczyć punkt P (i udowodnić, że jest tylko jeden taki punkt), dla którego trójkąty AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 mają równe pola.

5. Ciąg liczb całkowitych (a_n) spełnia następującą zależność rekurencyjną:

$$a_{n+1} = a_n^3 + 1999$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że istnieje co najwyżej jedna wartość n, dla której a_n jest kwadratem liczby całkowitej.

6. Rozwiązać następujący układ równań

$$\begin{gathered} x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^4 = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots, 1999) \\ x_0 = x_{1999} \end{gathered}$$

w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych.

7. Wyznaczyć wszystkie takie pary (x,y) liczb całkowitych dodatnich, że

$$x^{x+y} = y^{y-x} \ .$$

8. Dana jest prosta g i punkty P, Q, S leżące po tej samej stronie tej prostej. Punkty M i N leżą na prostej g, przy czym $PM \perp g$ i $QN \perp g$. Punkt S leży między prostymi PM i QN. Ponadto $PM = PS$ i $QN = QS$. Symetralne odcinków SM i SN przecinają się w punkcie R. Prosta RS przecina okrąg opisany na trójkącie PQR w punkcie T różnym od R. Udowodnić, że punkt S jest środkiem odcinka RT.

9. Punktem kratowym nazywamy punkt płaszczyzny mający obie współrzędne całkowite. Rozważamy następującą grę jednoosobową. Pozycja w grze składa się ze skończonego zbioru zaznaczonych punktów kratowych i ze skończonego zbioru odcinków spełniających następujące warunki:

(a) końce każdego zaznaczonego odcinka są zaznaczonymi punktami kratowymi;

(b) każdy zaznaczony odcinek jest równoległy do jednej osi układu współrzędnych lub do jednej z dwóch prostych o równaniach $y = x$, $y = -x$;

(c) każdy zaznaczony odcinek zawiera dokładnie 5 punktów kratowych i każdy z tych punktów jest zaznaczony;

(d) dowolne dwa zaznaczone odcinki mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Ruch w grze polega na zaznaczeniu nowego punktu kratowego, a następnie zaznaczeniu odcinka w taki sposób, by powstała nowa pozycja w grze. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka pozycja początkowa w grze, że możliwe jest wykonanie nieskończonego ciągu ruchów.

X Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

Reykjavik (Islandia), 6 listopada 1999

1. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające układ równań:

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1 \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9 \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 9 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 9 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że pierwiastek trzeciego stopnia z n powstaje przez odrzucenie trzech ostatnich cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby n.

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 3$, że nierówność

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leqslant 0$$

zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniających równość $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$.

4. Dla liczb rzeczywistych dodatnich x, y określamy

$$f(x,y) = \min\left(x, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Udowodnić, że istnieją takie liczby x_0, y_0, że $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ dla wszystkich liczb dodatnich x, y. Wyznaczyć $f(x_0,y_0)$.

5. Styczna w punkcie o współrzędnych (a,b) do okręgu $x^2+y^2=1$ ma z parabolą $y = x^2+1$ dokładnie jeden punkt wspólny. Wyznaczyć wszystkie punkty (a,b) o powyższej własności.

6. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, którą potrzebuje skoczek szachowy, aby przejść z jednego narożnika szachownicy $n \times n$ (gdzie $n \geqslant 4$) do narożnika przeciwległego?

7. Dwa różne pola szachownicy 8×8 nazwiemy *sąsiadującymi*, jeżeli mają wspólny bok lub wspólny wierzchołek. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, aby król szachowy zaczynając od pewnego pola szachownicy 8×8 odwiedził wszystkie pola dokładnie raz według następującej reguły: W każdym etapie podróży (licząc od trzeciego odwiedzonego pola) król stoi na polu sąsiadującym z parzystą liczbą pól, które już odwiedził.

8. Mamy do dyspozycji 1999 monet, z których każde dwie mają różny ciężar. Dysponujemy urządzeniem, które pozwala spośród dowolnych trzech monet wskazać tę, której ciężar zawiera się pomiędzy ciężarami dwóch pozostałych. Dowieść, że moneta tysięczna pod względem ciężaru może być wyznaczona przez nasze urządzenie stosowane nie więcej niż 1 000 000 razy. Udowodnić, że za pomocą tego urządzenia miejsce w ciągu ciężarów można wyznaczyć tylko dla tej monety.

9. Sześcian o krawędzi 3 podzielono na 27 sześcianów jednostkowych, które ponumerowano w sposób dowolny liczbami $1, 2, \ldots, 27$. Tworzymy 27 możliwych sum w poszczególnych rzędach (jest dziewięć takich sum w każdym z trzech kierunków równoległych do krawędzi sześcianu, każda suma o trzech składnikach). Co najwyżej ile spośród tych 27 sum może być liczbą nieparzystą?

10. Czy można koło o promieniu 1 (łącznie z brzegiem) rozdzielić na trzy takie podzbiory, że żaden z nich nie zawiera dwóch punktów odległych o 1?

11. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnić, że istnieje taki okrąg przechodzący przez trzy z tych punktów, że czwarty punkt leży na okręgu lub w jego wnętrzu.

12. W trójkącie ABC zachodzi równość $2AB = AC + BC$. Udowodnić, że następujące cztery punkty: środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, środek okręgu opisanego oraz środki boków AC i BC, leżą na jednym okręgu.

13. W trójkącie ABC dwusieczne kątów A i B przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Ponadto $AE + BD = AB$. Wyznaczyć miarę kąta C.

14. W trójkącie równoramiennym ABC równe są boki AB i AC. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC. Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do AC przecina prostą DE w punkcie F. Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{AD}{AE},$$

gdzie $[PQRS]$ oznacza pole czworokąta $PQRS$.

15. W trójkącie ABC zachodzi $\sphericalangle C = 60^\circ$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC i spełnia $BD = AC$. Bok AC przedłużono do punktu E tak, aby $AC = CE$. Udowodnić, że $AB = DE$.

16. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, którą można przedstawić w postaci $k = 19^n - 5^m$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n.

17. Czy istnieje taki skończony ciąg liczb całkowitych $c_1, c_2, \ldots, c_n$, że każda z liczb $a + c_1$, $a + c_2$, $\ldots$, $a + c_n$ jest pierwsza dla więcej niż jednej, ale tylko dla skończenie wielu różnych liczb całkowitych a?

18. Liczba całkowita dodatnia m daje z dzielenia przez 4 resztę 2. Dowieść, że istnieje co najwyżej jeden rozkład $m = ab$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi

$$0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m+1}}.$$

19. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich parzystych k, że dla każdej liczby pierwszej p liczba $p^2 + k$ jest złożona.

20. Liczby a, b, c, d są pierwsze oraz spełniają warunki $a > 3b > 6c > 12d$, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażenia

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$