LI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

Stalowa Wola, 3–4 kwietnia 2000

1. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ układu równań

$$\begin{cases} x_2+x_1^2=4x_1 \\ x_3+x_2^2=4x_2 \\ x_4+x_3^2=4x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n+x_{n-1}^2=4x_{n-1} \\ x_1+x_n^2=4x_n \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że

$$\sphericalangle APM+\sphericalangle BPC=180^\circ.$$

3. Ciąg liczb naturalnych (p_n) spełnia następujące warunki:
1° p_1 i p_2 są liczbami pierwszymi,
2° dla $n \geqslant 3$ liczba p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby

$$p_{n-1}+p_{n-2}+2000\ .$$

Udowodnić, że ciąg (p_n) jest ograniczony.

4. W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2...A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2,B_3,\ldots,B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach $A_2S,A_3S,\ldots,A_nS$, że

$$A_1B_2+B_2B_3+B_3B_4+\ldots+B_{n-1}B_n+B_nA_1<2A_1S.$$

5. Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą liczbę k o następującej własności. Z dowolnego k-elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$, można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta.

6. Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x

$$P(x^2-1)=(P(x))^2-1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x)=x.$$