# LI Olimpiada Matematyczna

## Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

### 3 kwietnia 2000 r. (pierwszy dzień zawodów)

*Zadanie* **1.** Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$.
Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ układu równań

$$\begin{cases} x_2+x_1^2=4x_1 \\ x_3+x_2^2=4x_2 \\ x_4+x_3^2=4x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n+x_{n-1}^2=4x_{n-1} \\ x_1+x_n^2=4x_n \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

*Rozwiązanie*

*Odpowiedź:* $2^n$.

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$x_1(x_1-4)=x_1^2-4x_1=-x_2 \leqslant 0,$$

skąd wynika, że $x_1 \leqslant 4$. Istnieje więc dokładnie jedna liczba $\alpha \in \langle 0,\pi/2\rangle$, spełniająca zależność $x_1=4\sin^2\alpha$.

Wówczas $x_2=x_1(4-x_1)=4\sin^2\alpha\cdot 4\cos^2\alpha=4\sin^2 2\alpha$. Rozumując analogicznie dostajemy

$$x_k=4\sin^2(2^{k-1}\alpha) \qquad (k=3,4,\ldots,n)$$

oraz $x_1=4\sin^2(2^n\alpha)$.

Liczba rozwiązań danego układu równań w liczbach nieujemnych jest więc równa liczbie rozwiązań równania

$$\sin^2\alpha=\sin^2(2^n\alpha)$$

w liczbach rzeczywistych $\alpha\in\langle 0,\pi/2\rangle$. Ponieważ równość $\sin\beta=\pm\sin\gamma$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy któraś z liczb $\beta+\gamma$, $\beta-\gamma$ jest całkowitą wielokrotnością $\pi$, więc jedna z liczb $(2^n+1)\alpha$, $(2^n-1)\alpha$ musi być całkowitą wielokrotnością $\pi$. Stąd wynika, że $\alpha$ jest jedną z liczb:

$$0,\quad \frac{k\pi}{2^n+1},\quad \frac{\ell\pi}{2^n-1},\quad \text{gdzie } k\in\{1,2,\ldots,2^{n-1}\},\ \ \ell\in\{1,2,\ldots,2^{n-1}-1\}.$$

Ponieważ największy wspólny dzielnik liczb $2^n+1$ i $2^n-1$ jest równy 1, więc wyżej wypisane możliwe wartości $\alpha$ są różne. Zatem istnieje dokładnie $2^n$ ciągów liczb nieujemnych $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ spełniających dany układ równań.

*Zadanie* **2.** Dany jest trójkąt $ABC$, w którym $AC=BC$. Punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta $ABC$, przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC$. Punkt $M$ jest środkiem boku $AB$. Dowieść, że

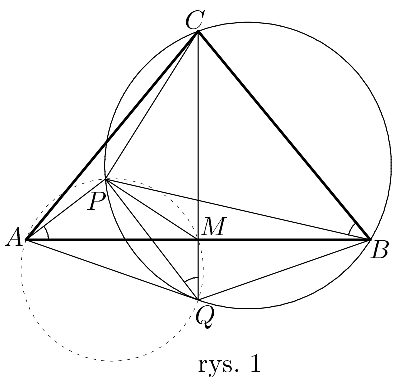
$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ.$$

*Rozwiązanie*

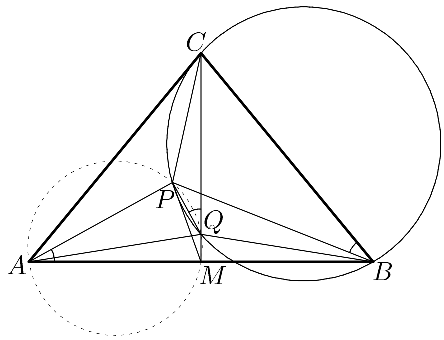
Załóżmy najpierw, że punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta $AMC$ lub na odcinku $MC$.

Niech $Q \neq C$ będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie $BCP$ z prostą $CM$ (rys. 1 i 2). Ponieważ $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PQC$, więc punkty $A$, $P$, $M$, $Q$ leżą na jednym okręgu. Ponadto

(1) $$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC = \sphericalangle AQC.$$



rys. 1



rys. 2

Jeżeli punkt $Q$ znajduje się na zewnątrz trójkąta $ABC$ (rys. 1)lub na odcinku $AB$, to na mocy zależności (1) otrzymujemy

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle APM + \sphericalangle AQC = 180^\circ.$$

Jeżeli natomiast punkt $Q$ znajduje się wewnątrz trójkąta $ABC$ (rys. 2), to korzystając raz jeszcze z równości (1) uzyskujemy

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle AQM + \sphericalangle AQC = 180^\circ.$$

Załóżmy teraz, że punkt $P$ znajduje się wewnątrz trójkąta $BCM$. Ponieważ $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PAC$, więc przeprowadzając rozumowanie analogiczne do powyższego otrzymujemy równość $\sphericalangle BPM + \sphericalangle APC = 180^\circ$. Stąd

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

(*wp, jwr*)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`

# LI Olimpiada Matematyczna

## Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2000 r. (drugi dzień zawodów)

*Zadanie* **4.** W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku $S$ i podstawie $A_1A_2...A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $60°$. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3, \ldots, B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach $A_2S$, $A_3S, \ldots, A_nS$, że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

*Rozwiązanie*

Takie punkty istnieją dla dowolnego $n \geqslant 3$.

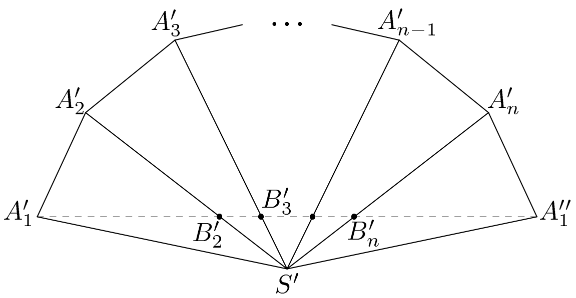
Niech $O$ będzie spodkiem wysokości ostrosłupa, zaś $\alpha$ miarą kąta ściany bocznej przy wierzchołku $S$. Z równości $A_1S = 2A_1O$ otrzymujemy

$$\sin\tfrac{\alpha}{2} = \frac{A_1A_2}{2A_1S} = \frac{1}{2}\cdot\frac{A_1A_2}{2A_1O} = \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{180°}{n} = \sin\tfrac{90°}{n}\cos\tfrac{90°}{n} < \sin\tfrac{90°}{n},$$

skąd

$$n\alpha < 180°. \qquad (1)$$

Rozetnijmy powierzchnię boczną ostrosłupa wzdłuż krawędzi $A_1S$ i rozłóżmy ją na płaszczyźnie. Otrzymamy wtedy wielokąt $S'A_1'A_2'\ldots A_n'A_1''$ (rys. 1). Na mocy nierówności (1), $\sphericalangle A_1'S'A_1'' = n\alpha < 180°$.




rys. 1

Niech $B_2', B_3', \ldots, B_n'$ będą punktami przecięcia odcinka $A_1'A_1''$ odpowiednio z odcinkami $A_2'S', A_3'S', \ldots, A_n'S'$. Na mocy nierówności trójkąta,

$$A_1'B_2' + B_2'B_3' + B_3'B_4' + \ldots + B_{n-1}'B_n' + B_n'A_1'' < 2A_1'S'\ .$$

Punkty $B_2', B_3', \ldots, B_n'$ wyznaczają więc punkty $B_2, B_3, \ldots, B_n$ na krawędziach ostrosłupa spełniające warunki zadania.

*Zadanie* **5.** Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą liczbę $k$ o następującej własności. Z dowolnego $k$-elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$, można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta.

*Rozwiązanie*

Udowodnimy następujące dwa zdania:

**1.** Z dowolnego zbioru złożonego z $m+n$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$ $(m,n \geqslant 2)$ można wybrać niepusty podzbiór mający w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy parzystą liczbę pól.

**2.** Istnieje zbiór $m+n-1$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$, z którego nie da się wybrać niepustego podzbioru mającego w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy parzystą liczbę pól.

Z powyższych zdań zastosowanych dla $m=n$ wnioskujemy, że najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest $\boldsymbol{k=2n}$.

*Dowód zdania* 1.

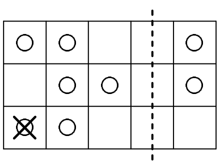
Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem $m+n$. Dla $m=2$, $n=2$ teza zdania 1 jest prawdziwa.

Ustalmy dwie liczby naturalne $m$, $n$ o sumie większej niż 4 i załóżmy, że zdanie 1 jest prawdziwe dla dowolnej szachownicy o sumie wymiarów mniejszej niż $m+n$. Rozważmy dowolny zbiór $A$ złożony z $m+n$ pól szachownicy $S$ o wymiarach $m \times n$. Możliwe są następujące trzy przypadki:

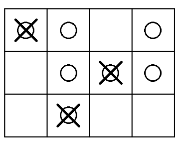
(a) istnieje wiersz lub kolumna szachownicy $S$ nie zawierająca żadnego pola ze zbioru $A$;

(b) istnieje wiersz lub kolumna szachownicy $S$, w której znajduje się dokładnie jedno pole ze zbioru $A$;

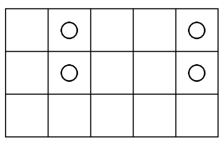
(c) w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się co najmniej dwa pola ze zbioru $A$.



rys. 1



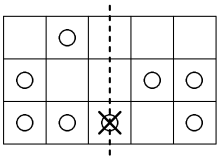
rys. 2



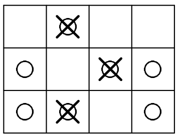
rys. 3

W przypadku (a) usuwamy z szachownicy $S$ tę kolumnę (lub wiersz), która nie zawiera żadnego pola ze zbioru $A$. Następnie usuwamy ze zbioru $A$ dowolne pole (na rysunku 1 pola zbioru $A$ oznaczone są kółeczkami). W ten sposób otrzymujemy nową szachownicę, która zawiera pewien zbiór $A'$ złożony z $m+n-1$ pól i której suma wymiarów jest równa $m+n-1$ (rys. 2). Stąd wynika, że każdy z wymiarów uzyskanej szachownicy jest nie mniejszy niż 2. Zatem na mocy założenia indukcyjnego można wybrać ze zbioru $A'$ niepusty podzbiór mający w każdym wierszu i w każdej kolumnie parzystą liczbę pól. Wklejając z powrotem usuniętą kolumnę lub usunięty wiersz na swoje miejsce (rys. 3) otrzymujemy żądany podzbiór zbioru $A$.

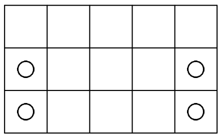
Podobnie postępujemy w przypadku (b): znajdujemy najpierw kolumnę (lub wiersz), w której znajduje się dokładnie jedno pole ze zbioru $A$, a następnie usuwamy tę kolumnę z szachownicy $S$ (rys. 4). W rezultacie otrzymujemy nową szachownicę, która zawiera pewien zbiór $A'$ złożony z $m+n-1$ pól i której suma wymiarów jest równa $m+n-1$ (rys. 5). Tak jak wyżej, stosujemy założenie indukcyjne, po czym wklejamy z powrotem usuniętą kolumnę lub usunięty wiersz (rys. 6).



rys. 4



rys. 5



rys. 6

Rozpatrzmy przypadek (c). Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $w_1, w_2, \ldots, w_m$ oznaczają odpowiednio liczby pól zbioru $A$ w poszczególnych kolumnach i wierszach. Wówczas

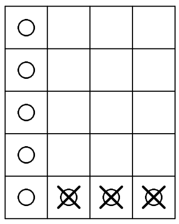
$$(k_1+k_2+\ldots+k_n)+(w_1+w_2+\ldots+w_m)=2(m+n).$$

Ponadto $k_i, w_j \geqslant 2$ dla wszystkich $i$, $j$. Stąd wynika, że $k_i = w_j = 2$. Zatem zbiór $A$ ma w każdej kolumnie i w każdym wierszu dokładnie dwa pola. To oznacza, że liczba pól zbioru $A$ w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest parzysta.

Dowód indukcyjny, a tym samym dowód zdania 1, został zakończony.

*Dowód zdania* 2.

Rozważmy zbiór $A$ złożony ze wszystkich $m+n-1$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$ znajdujących się w dolnym wierszu i pierwszej kolumnie (rys. 7). Aby otrzymać parzystą liczbę pól w kolumnach od drugiej do ostatniej musimy usunąć ze zbioru $A$ pola, które się w tych kolumnach znajdują. Po ich usunięciu widzimy, że z tego samego powodu musimy usunąć pozostałe pola zbioru $A$. To kończy dowód zdania 2.



rys. 7

*Zadanie* **6.** Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego $x$

$$P(x^2-1)=\big(P(x)\big)^2-1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi równość

$$P(x)=x.$$

*Rozwiązanie*

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$ prawdziwe są zależności

$$(P(-x))^2=P(x^2-1)+1=(P(x))^2.$$

Stąd wynika, że dla każdego $x$ zachodzi jedna z równości: $P(-x)=P(x)$ lub $P(-x)=-P(x)$.

Przypuśćmy, że dla nieskończenie wielu $x$ zachodzi równość $P(-x)=P(x)$. Wówczas równość ta musi być prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$, co przeczy założeniu, że stopień wielomianu $P$ jest liczbą nieparzystą.

Zatem dla nieskończenie wielu $x$ zachodzi równość $P(-x)=-P(x)$, skąd wynika, że równość ta jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych $x$.

Dowolną liczbę rzeczywistą $x\geqslant -1$ możemy zapisać w postaci $x=y^2-1$, dla pewnej liczby rzeczywistej $y$. Stąd

(1) $$P(x)=P(y^2-1)=(P(y))^2-1\geqslant -1\,.$$

Określamy rekurencyjnie ciąg $(x_n)$ wzorami:

$$x_1=1 \quad \text{oraz} \quad x_n=\sqrt{x_{n-1}+1} \quad \text{dla} \quad n\geqslant 2\,.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że

(2) $$P(x_n)=x_n \quad \text{dla} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Z zależności $P(-x)=-P(x)$ otrzymujemy $P(0)=0$. Kładąc $x=0$ do danej w treści zadania tożsamości otrzymujemy $P(-1)=-1$, skąd $P(1)=1$. To dowodzi równości (2) dla $n=1$.

Ze związku $P(x_{n-1})=x_{n-1}$ wynika, że

$$(P(x_n))^2=P(x_n^2-1)+1=P(x_{n-1})+1=x_{n-1}+1=x_n^2\,.$$

Ponieważ $x_n>1$ dla $n\geqslant 2$, więc nierówność (1) wyklucza prawdziwość równości $P(x_n)=-x_n$. Zatem $P(x_n)=x_n$, co kończy dowód zależności (2).

Ciąg $(x_n)$ jest rosnący, więc równość $P(x)=x$ zachodzi dla nieskończenie wielu $x$. Z tego zaś wynika, że $P(x)=x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$.

(*wp, jwr*)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`