LII OLIMPIADA MATEMATYCZNA

ZADANIA KONKURSOWE
ZAWODÓW I STOPNIA

I SERIA

1. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^{2000} + 2000^{1999} = x^{1999} + 2000^{2000}.$$

2. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i AC, przy czym czworokąt $CLPK$ jest równoległobokiem. Dowieść, że

$$\frac{AE}{EL} = \frac{BD}{DK}.$$

3. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n \geq 2$, że nierówność

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \leq \frac{n-1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

4. Rozstrzygnąć, czy w sześciennym pudełku o krawędzi 4 można umieścić 65 kul o średnicy 1.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia **10 października 2000 r.** *(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

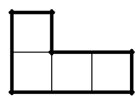
II SERIA

5. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnej liczby pierwszej p liczba
$$n^{p^p} + p^p$$
jest złożona.

6. Liczby całkowite a, b, x, y spełniają równanie
$$a + b\sqrt{2001} = \left(x + y\sqrt{2001}\right)^{2000}.$$
Udowodnić, że $a \geq 44b$.

7. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Punkty D i E leżą na przeciwprostokątnej BC, przy czym $\sphericalangle DAE = 45°$. Okrąg opisany na trójkącie ADE przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q.
Dowieść, że $BP + CQ = PQ$.

8. Rozstrzygnąć, dla jakich par liczb naturalnych m i n prostokąt o bokach długości m i n można pociąć na części przystające do figury na rysunku. Każdy z czterech kwadratów na rysunku ma bok długości 1.



Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia **10 listopada 2000 r.** *(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

III SERIA

9. Dowieść, że wśród dowolnych 12 kolejnych liczb całkowitych dodatnich istnieje liczba nie będąca sumą 10 czwartych potęg liczb całkowitych.

10. Dowieść, że wewnątrz dowolnego trójkąta ABC istnieje punkt P o następującej własności:
Każda prosta przechodząca przez punkt P dzieli obwód trójkąta ABC w takim samym stosunku, w jakim dzieli ona jego pole.

11. Układ liczb całkowitych dodatnich c_1, c_2, ..., c_n nazwiemy dopuszczalnym, gdy za pomocą wagi szalkowej i dwóch kompletów odważników o ciężarach c_1, c_2, ..., c_n można zważyć dowolny przedmiot o ciężarze będącym liczbą naturalną nie przekraczającą $2(c_1+c_2+...+c_n)$.
Dla każdej liczby n wyznaczyć maksymalną sumę n liczb tworzących układ dopuszczalny.

Uwaga: Odważniki można kłaść na obie szalki wagi.

12. Rozpatrujemy ciągi liczb całkowitych $x_0,x_1,...,x_{2000}$ spełniające warunki

$$x_0=0 \quad \text{i} \quad |x_n|=|x_{n-1}+1| \text{ dla } n=1,2,...,2000\,.$$

Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia

$$|x_1+x_2+...+x_{2000}|\,.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia **11 grudnia 2000 r.** *(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`