LII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2001 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Dane są liczby naturalne k, n większe od 1, przy czym liczba $p=2k-1$ jest pierwsza. Dowieść, że jeżeli liczba
$$\binom{n}{2}-\binom{k}{2}$$
jest podzielna przez p, to jest ona podzielna przez p^2.

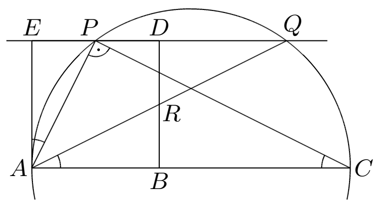
Rozwiązanie

Liczba p jest dzielnikiem liczby
$$a=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(4n^2-4n+1)-(4k^2-4k+1)}{8}=\frac{(2n-1)^2-p^2}{8}\,.$$
Zatem p, jako liczba nieparzysta, jest dzielnikiem liczby $(2n-1)^2-p^2$. Liczba p jest pierwsza, skąd $p\,|\,(2n-1)$. Z podzielności tej wynika, że $p^2\,|\,(2n-1)^2$, czyli $p^2\,|\,a$.

Zadanie **2.** Punkty A, B, C leżą w tej właśnie kolejności na jednej prostej, przy czym $AB<BC$. Punkty D, E są wierzchołkami kwadratu $ABDE$. Okrąg o średnicy AC przecina prostą DE w punktach P i Q, przy czym punkt P należy do odcinka DE. Proste AQ i BD przecinają się w punkcie R. Udowodnić, że $DP=DR$.

Rozwiązanie

Kąt APC jest prosty jako kąt wpisany oparty na średnicy (rys. 1). Stąd
$$\sphericalangle EAP=90^\circ-\sphericalangle PAC=\sphericalangle ACP\,.$$
Z kolei z równości łuków AP i CQ wynika równość kątów ACP i CAQ, skąd
$$\sphericalangle EAP=\sphericalangle BAR.$$



rys. 1

Trójkąty PAE i RBA są więc przystające (cecha *kąt-bok-kąt*), co dowodzi, że $EP=BR$. Stąd $DP=DR$.

Zadanie **3.** Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci

$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-5}x^{n-5} + \ldots + a_1 x + a_0\,,$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników rzeczywistych $a_0, a_1, \ldots, a_{n-3}$ jest różny od zera, ma mniej niż n pierwiastków rzeczywistych (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dany w treści zadania wielomian ma n pierwiastków rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ze wzorów Viéte'a wynika, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_{n-1} = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = a_{n-2} = 0\,.$$

Zatem $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 0$, skąd $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Jednak powyższa równość pociąga za sobą $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$, co przeczy założeniu.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dany wielomian stopnia n nie może mieć n pierwiastków rzeczywistych, zatem musi ich mieć mniej niż n.

(*wp, jwr*)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`

LII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2001 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których prawdziwe jest następujące zdanie:
W dowolnym n-wyrazowym ciągu arytmetycznym $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dla którego liczba $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n$ jest wymierna, istnieje wyraz będący liczbą wymierną.

Rozwiązanie

Odp.: Rozpatrywane zdanie jest prawdziwe jedynie dla liczb $n \geqslant 3$ dających z dzielenia przez 3 resztę 1.

Niech $a_i = a + ir$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ będzie ciągiem arytmetycznym. Korzystając ze wzorów

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{oraz} \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

stwierdzamy, że dana w treści zadania suma jest równa

$$S = \frac{n(n+1)}{2} a + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} r\,.$$

Stąd uzyskujemy

$$\frac{2S}{n(n+1)} = a + \frac{2n+1}{3} r. \tag{1}$$

Załóżmy najpierw, że liczba n daje z dzielenia przez 3 resztę 1. Wówczas liczba $k = \frac{1}{3}(2n+1)$ jest całkowita. Z równości (1) oraz z faktu, że S jest liczbą wymierną wynika, że wyraz a_k jest liczbą wymierną. Zatem rozpatrywane zdanie jest w tym przypadku prawdziwe.

Załóżmy z kolei, że liczba n nie daje z dzielenia przez 3 reszty 1 (innymi słowy, liczba $\frac{1}{3}(2n+1)$ nie jest całkowita). Skonstruujemy ciąg arytmetyczny a_i, dla którego rozpatrywane zdanie nie jest prawdziwe. Przyjmijmy:

$$r = \sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad a = -\tfrac{1}{3}(2n+1)\sqrt{2}\,.$$

Ze związku (1) otrzymujemy $S = 0$, jednak dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ liczba

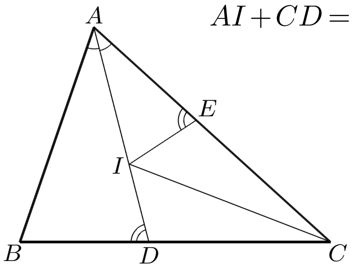
$$a_i = \Big(i - \tfrac{1}{3}(2n+1)\Big)\sqrt{2}$$

jest niewymierna. Rozpatrywane zdanie nie jest więc prawdziwe, jeśli n nie daje z dzielenia przez 3 reszty 1.

Zadanie **5.** Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina bok BC w punkcie D. Dowieść, że $AI+CD=AC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle B=60^\circ+\frac{1}{3}\sphericalangle C$.

Rozwiązanie

Niech E będzie takim punktem leżącym na boku AC, że $AI=AE$ (rys. 1). Wówczas



rys. 1

$$\begin{aligned}
AI+CD=AC \quad &\Leftrightarrow \quad CE=CD\\
&\Leftrightarrow \quad \text{trójkąty } CDI \text{ i } CEI \text{ są przystające}\\
&\Leftrightarrow \quad \sphericalangle AEI=\sphericalangle ADB\\
&\Leftrightarrow \quad \text{trójkąty } AIE \text{ i } ABD \text{ są podobne}\\
&\Leftrightarrow \quad \sphericalangle B=\sphericalangle ADB\\
&\Leftrightarrow \quad \sphericalangle B=\tfrac{1}{2}\sphericalangle A+\sphericalangle C\\
&\Leftrightarrow \quad \sphericalangle B=60^\circ+\tfrac{1}{3}\sphericalangle C.
\end{aligned}$$

Zadanie **6.** Dla danej liczby całkowitej dodatniej n rozstrzygnąć, czy podzbiorów n-elementowych zbioru $\{1,2,3,\ldots,2n-1,2n\}$ mających sumę elementów parzystą jest tyle samo, co podzbiorów n-elementowych mających nieparzystą sumę elementów. Jeśli nie, to rozstrzygnąć, których jest więcej i o ile.

Rozwiązanie

Połączmy liczby ze zbioru $S=\{1,2,3,\ldots,2n-1,2n\}$ w pary:

$$(1,2),\quad (3,4),\quad \ldots,\quad (2n-1,2n).$$

Niech X będzie dowolnym n-elementowym podzbiorem zbioru S. Wybierzmy (jeśli jest to możliwe) najmniejszą liczbę x ze zbioru X o tej własności, że liczba y występująca w parze z liczbą x nie należy do zbioru X. Następnie usuńmy ze zbioru X element x zastępując go elementem y. Otrzymany zbiór nazwijmy $f(X)$. Zbiory X i $f(X)$ mają sumy elementów różnej parzystości.

W dalszej części rozwiązania rozpatrzymy dwa przypadki:

(a) Liczba n jest nieparzysta.

Odwzorowanie f jest określone dla dowolnego n-elementowego podzbioru zbioru S i łączy ono w pary $(X,f(X))$ *wszystkie* podzbiory n-elementowe o nieparzystej sumie elementów ze wszystkimi n-elementowymi podzbiorami o sumie elementów parzystej. To dowodzi, że n-elementowych podzbiorów o parzystej sumie elementów jest tyle samo, co n-elementowych podzbiorów o nieparzystej sumie elementów.

(b) Liczba n jest parzysta.

W tym przypadku odwzorowania f nie da się określić jedynie na tych n-elementowych podzbiorach zbioru S, które są złożone z pełnych par. Zbiorów tych jest $\binom{n}{n/2}$ i wszystkie one mają sumę elementów o takiej samej parzystości, jak parzystość liczby $n/2$. Pozostałe podzbiory możemy połączyć w pary $(X,f(X))$. Jeżeli n dzieli się przez cztery, to n-elementowych podzbiorów o parzystej sumie elementów jest o $\binom{n}{n/2}$ więcej niż n-elementowych podzbiorów o nieparzystej sumie elementów. Jeśli natomiast n nie dzieli się przez cztery, to podzbiorów o nieparzystej sumie elementów jest o $\binom{n}{n/2}$ więcej.

(wp, jwr)