LIII OLIMPIADA MATEMATYCZNA
ZADANIA KONKURSOWE
ZAWODÓW I STOPNIA

I SERIA

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych równanie

$$|x|-|x+2|+|x+4|-|x+6|+\ldots-|x+998|=$$
$$=|x+1|-|x+3|+|x+5|-|x+7|+\ldots-|x+999|\,.$$

2. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Wyznaczyć możliwe wartości wyrażenia $MN{:}BC$.

3. Wykazać, że liczba

$$\sum_{n=0}^{10^{10}} \binom{2\cdot 10^{10}}{2n} 5^n$$

jest podzielna przez $2^{2\cdot 10^{10}-1}$.

4. Dowieść, że wykres wielomianu $W(x)$ stopnia większego od 1 ma oś symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$, że $W(x)=F(G(x))$, przy czym $G(x)$ jest stopnia 2.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia **10 października 2001 r.** *(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

II SERIA

5. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna m, że każda z liczb $m, 2m, 3m, \ldots, m^2$ w rozwinięciu dwójkowym ma dokładnie k jedynek.

6. Okrąg dzieli każdy bok rombu na 3 odcinki. Malujemy otrzymane odcinki kolejno na czerwono, zielono i biało, zaczynając od wierzchołka rombu i poruszając się po jego obwodzie w ustalonym kierunku. Wykazać, że suma długości odcinków czerwonych jest równa sumie długości odcinków białych.

7. W grupie $n \geqslant 3$ osób każda ma parzystą (być może zerową) liczbę znajomych. Dowieść, że istnieją trzy osoby mające tę samą liczbę znajomych.

Uwaga: Zakładamy, że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych, oraz że osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy B zna A.

8. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $S(2n^2+3)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia **12 listopada 2001 r.** *(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

III SERIA

9. Płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego tworząc w przekroju sześciokąt wypukły $D_1D_2\ldots D_6$. Niech d_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ będzie odległością punktu D_i od płaszczyzny ustalonej podstawy graniastosłupa. Dowieść, że

$$d_1^2+d_3^2+d_5^2=d_2^2+d_4^2+d_6^2.$$

10. Dana jest szachownica 2000×2000. Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeżeli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu, i czy ruch opróżni jakiekolwiek pole).

Rozstrzygnąć, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle B > \sphericalangle C$. Punkt D leży na odcinku BC i spełnia równość $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}(\sphericalangle B - \sphericalangle C)$. Okrąg styczny w punkcie A do prostej AC i przechodzący przez punkt D przecina prostą AB w punkcie $P \neq A$. Dowieść, że

$$\frac{BP}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

12. W niemalejącym ciągu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi dodatnimi, a ponadto dla każdego k dokładnie k wyrazów jest równych k. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze postaci

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\,.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia **10 grudnia 2001 r.** *(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`