LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2002 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x)=f(2x)=f(1-x)\,.$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Rozwiązanie

Na mocy danych w treści zadania równości, otrzymujemy dla dowolnej liczby rzeczywistej x:

$$\begin{aligned} f(x)&=f(2x)=f(1-2x)=\\ &=f(\tfrac{1}{2}(1-2x))=f(\tfrac{1}{2}-x)=f(1-(\tfrac{1}{2}-x))=f(x+\tfrac{1}{2}), \end{aligned}$$

co dowodzi, że funkcja f jest okresowa o okresie $\frac{1}{2}$.

Zadanie **2.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle ADB=2\sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BDC=2\sphericalangle BAC.$$

Udowodnić, że $AD=CD$.

Rozwiązanie

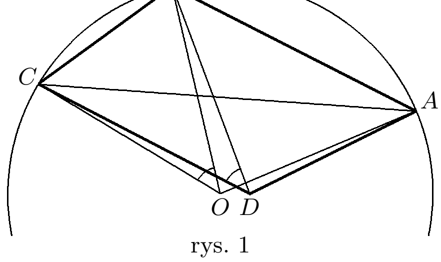
Z danych w zadaniu równości kątów oraz z nierówności $\sphericalangle ADC<180°$ wynika, że

$$\sphericalangle ACB+\sphericalangle BAC=\tfrac{1}{2}(\sphericalangle ADB+\sphericalangle BDC)=\tfrac{1}{2}\sphericalangle ADC<90°.$$

Kąty ACB i BAC są więc ostre, co oznacza, że środek O okręgu opisanego na trójkącie ABC leży wewnątrz kąta ABC (rys. 1). Stąd w szczególności wynika, że punkty O i D leżą po tej samej stronie prostej BC. Ponadto

$$\sphericalangle BDC=2\sphericalangle BAC=\sphericalangle BOC.$$

Zatem punkty B, C, O, D leżą na jednym okręgu o_1.



rys. 1

Analogicznie dowodzimy, że punkty A, B, O, D leżą na jednym okręgu o_2. Okręgi o_1 i o_2 są różne — w przeciwnym razie okrąg opisany na trójkącie ABC przechodziłby przez punkt O, czyli swój środek. Okręgi o_1 i o_2 mają jednak trzy punkty wspólne: B, D i O. Ponieważ $B \neq D$, więc musi być $O = D$, czyli $AD = CD$.

Zadanie **3.** W n-osobowym stowarzyszeniu działa sześć komisji. W skład każdej z nich wchodzi nie mniej niż $n/4$ osób. Dowieść, że istnieją dwie komisje oraz grupa licząca nie mniej niż $n/30$ osób, należących do obu tych komisji.

Rozwiązanie

Ponumerujmy komisje liczbami $1,2,\ldots,6$ i oznaczmy przez K_i liczbę tych członków i-tej komisji, którzy **nie są** członkami żadnej komisji o numerze mniejszym od i.

K_1 to liczba wszystkich członków komisji nr 1, co daje $K_1 \geqslant n/4$.

Przypuśćmy, że część wspólna dowolnych dwóch komisji liczy mniej niż $n/30$ osób.

Ponieważ w skład komisji nr 2 wchodzi co najmniej $n/4$ osób, więc liczba tych członków komisji nr 2, którzy nie są w komisji nr 1 musi być większa od $n/4 - n/30$. Stąd

$$K_2 > \frac{n}{4} - \frac{n}{30}.$$

Analogicznie stwierdzamy, że

$$K_i > \frac{n}{4} - (i-1)\frac{n}{30} \quad \text{dla} \quad i = 3,4,5,6.$$

Dodając stronami powyższe nierówności uzyskujemy

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 > \frac{6n}{4} - (1+2+3+4+5)\frac{n}{30} = n\,.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż wielkość $K_1 + K_2 + \ldots + K_6$ jest nie większa od liczby wszystkich członków stowarzyszenia, czyli n. Zatem do części wspólnej pewnych dwóch komisji należy co najmniej $n/30$ osób.

(*wp, jwr*)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`

LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2002 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb pierwszych $p \leqslant q \leqslant r$, że liczby

$$pq+r, \quad pq+r^2, \quad qr+p, \quad qr+p^2, \quad rp+q, \quad rp+q^2$$

są pierwsze.

Rozwiązanie

Gdyby wszystkie trzy liczby pierwsze p, q, r były większe od 2, to liczba $pq+r$ jako liczba parzysta większa od 2 byłaby złożona. Zatem co najmniej jedna z liczb p, q, r jest równa 2, co na mocy nierówności $p \leqslant q \leqslant r$ daje $p=2$.

Ponadto $q>2$, gdyż przy $q=2$ mielibyśmy $qr+p=2(r+1)$, co jest liczbą złożoną.

Gdyby obie liczby pierwsze q, r były większe od 3, to liczba qr byłaby niepodzielna przez 3, a zatem jedna z liczb $qr+2$, $qr+4$ byłaby podzielna przez 3 i większa od 3, czyli złożona. Stąd wynika, że jedna z liczb q, r jest równa 3, co na mocy nierówności $2<q\leqslant r$ daje $q=3$.

Pozostało wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze $r \geqslant 3$, aby liczby

$$(1) \qquad 6+r, \quad 6+r^2, \quad 3r+2, \quad 3r+4, \quad 2r+3, \quad 2r+9$$

były pierwsze.

Gdyby liczba pierwsza r była różna od 5, to przez 5 dzieliłaby się jedna z liczb $r+1$, $r+2$, $r+3$, $r+4$, a co za tym idzie, również jedna z liczb

$$6+r=(r+1)+5\,, \qquad 2r+9=2(r+2)+5\,,$$
$$3r+4=3(r+3)-5\,, \qquad 2r+3=2(r+4)-5\,.$$

Zatem musi być $r=5$. Wtedy liczby (1) przyjmują odpowiednio wartości 11, 31, 17, 19, 13, 19 i wszystkie one są pierwsze.

Odp.: Warunki zadania spełnia jedna trójka $(p,q,r)=(2,3,5)$.

Zadanie **5.** Trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A=90^\circ$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości

$$AD=BD \quad \text{oraz} \quad AB=CD.$$

Udowodnić, że $\sphericalangle ACD \geqslant 30^\circ$.

Rozwiązanie

Trójkąt BAC uzupełniamy do prostokąta $BACE$. Wówczas z równości $AD=BD$ wynika, że $CD=ED$. To w połączeniu z $AB=CD$ dowodzi, że trójkąt CDE jest równoboczny. Zatem

$$\sphericalangle ACD \geqslant \sphericalangle ACE - \sphericalangle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Zadanie **6.** Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1,x_2,\dots,x_n$, $y_1,y_2,\dots,y_n$ zachodzi nierówność

$$x_1x_2\dots x_n+y_1y_2\dots y_n \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{x_n^2+y_n^2}\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Dla $n=1$ dana nierówność przybiera postać

$$x_1+y_1 \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2}\,,$$

co nie dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, y_1 jest prawdą — wystarczy przyjąć $x_1=y_1=1$.

Wykażemy, że nierówność (1) jest prawdziwa, jeśli $n\geqslant 2$.

Jeśli któryś z czynników stojących po prawej stronie nierówności (1), np.

$$\sqrt{x_k^2+y_k^2}$$

jest równy 0, to obie liczby x_k i y_k muszą być zerami. Wtedy nierówność (1) jest spełniona.

Przyjmijmy więc, że liczba stojąca po prawej stronie nierówności (1) jest różna od 0, a zatem dodatnia. Wówczas dowodzoną nierówność możemy sprowadzić do postaci

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}+\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\leqslant 1. \tag{2}$$

Podstawmy:

$$a_k=\frac{x_k^2}{x_k^2+y_k^2}\,,\quad b_k=\frac{y_k^2}{x_k^2+y_k^2}\qquad (k=1,2,\dots,n).$$

Liczby $a_1,a_2,\dots,a_n$, $b_1,b_2,\dots,b_n$ należą do przedziału $\langle 0,1\rangle$ oraz $a_k+b_k=1$. Stąd oraz z nierówności pomiędzy średnią geometryczną a średnią arytmetyczną uzyskujemy

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1a_2\dots a_n}+\sqrt{b_1b_2\dots b_n} &\leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\dots b_n}\leqslant\\ &\leqslant \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)+\frac{1}{n}(b_1+b_2+\ldots+b_n)=1,\end{aligned}$$

czyli

$$\frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{|x_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}+\frac{|y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\leqslant 1. \tag{3}$$

Lewa strona nierówności (2) jest nie większa niż lewa strona nierówności (3). To oznacza, że udowodniona właśnie nierówność (3) pociąga za sobą nierówność (2), a tym samym dowodzi nierówności (1).

(*wp, jwr*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`