LIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2002 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych a, b, c, że liczby a^2+1 i b^2+1 są pierwsze oraz

$$(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1\,.$$

2. Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ACPQ$ i $BKLC$ o równych polach. Udowodnić, że środek odcinka PL, punkt C oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

3. Na tablicy są napisane trzy nieujemne liczby całkowite. Wybieramy z tej trójki dwie liczby k, m i zastępujemy je liczbami $k+m$ i $|k-m|$, a trzecia liczba pozostaje bez zmiany. Z otrzymaną trójką postępujemy tak samo. Rozstrzygnąć, czy z każdej początkowej trójki liczb całkowitych nieujemnych, kontynuując to postępowanie, można otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2002 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ i dla każdego ciągu liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi co najmniej jedna z nierówności

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqslant \frac{n}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i-2}} \geqslant \frac{n}{2}$$

(przyjmujemy $x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2$ oraz $x_0=x_n,\ x_{-1}=x_{n-1}$).

5. W przestrzeni dany jest trójkąt ABC oraz sfera s rozłączna z płaszczyzną ABC. Przez każdy z punktów A, B, C poprowadzono prostą styczną do tej sfery. Punkty styczności oznaczono odpowiednio K, L, M. Punkt P leży na sferze s i spełnia warunki

$$\frac{AK}{AP} = \frac{BL}{BP} = \frac{CM}{CP}.$$

Udowodnić, że sfera opisana na czworościanie $ABCP$ jest styczna do sfery s.

6. Dana jest liczba naturalna k. Określamy ciąg (a_n) wzorami

$$a_1 = k+1, \qquad a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Wykazać, że jeżeli $m \neq n$, to liczby a_m i a_n są względnie pierwsze.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.