LIV OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniających równanie
$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1\,.$$

2. Dana jest liczba rzeczywista $a_1 > 1$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorem
$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1\,.$$
Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1 - 1}\,.$$

3. Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o. Proste styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Prosta styczna do okręgu o w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q. Udowodnić, że
$$PQ^2 = PB^2 + QC^2\,.$$

4. Rozpatrujemy zbiór wszystkich k-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$. Z każdego takiego ciągu wybieramy wyraz najmniejszy i sumujemy wybrane wyrazy. Udowodnić, że otrzymana suma jest równa
$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + m^k\,.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2002 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LIV OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria

5. Liczba naturalna n_1 zapisana jest w układzie dziesiętnym za pomocą 333 cyfr, z których żadna nie jest zerem. Dla $i = 1, 2, 3, \ldots, 332$ liczba n_{i+1} powstaje z liczby n_i przez przeniesienie cyfry jedności na początek. Dowieść, że albo wszystkie liczby $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{333}$ są podzielne przez 333, albo żadna z nich.

6. Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na okręgu o. Punkt M jest środkiem tego łuku AB okręgu o, który nie zawiera punktów C i D; punkt N jest środkiem tego łuku CD okręgu o, który nie zawiera punktów A i B. Dowieść, że

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB} = \frac{DM^2 - CM^2}{CD}.$$

7. U cioci Reni spotkało się (łącznie z ciocią) $n \geqslant 4$ osób. Każdy z obecnych podarował co najmniej jednej z pozostałych osób co najmniej jeden prezent. Okazało się, że każdy podarował trzykrotnie więcej prezentów niż sam otrzymał, z jednym wyjątkiem: ciocia Renia podarowała zaledwie $\frac{1}{6}$ liczby prezentów, które dostała. Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą możliwą liczbę prezentów, które mogła otrzymać ciocia Renia.

8. W czworościanie $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami krawędzi AB i CD. Punkt P leży na odcinku MN, przy czym $MP = CN$ oraz $NP = AM$. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to $OP \perp MN$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 listopada 2002 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LIV OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

III seria

9. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x+y$ jest liczbą wymierną, to $W(x)+W(y)$ jest liczbą wymierną.

10. Mamy talię 52 kart. Tasowaniem będziemy nazywać wykonanie następujących czynności: dowolny podział talii na część górną i dolną, a następnie dowolne zmieszanie kart z zachowaniem porządku w obrębie każdej części. Mówiąc formalnie, tasowaniem jest dowolne przemieszanie kart, w którym i-ta karta od wierzchu przechodzi na pozycję p_i, przy czym istnieje takie $m \in \{1, 2, 3, \ldots, 51\}$, że $p_i < p_{i+1}$ dla $i < m$ oraz dla $i > m$.

Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od ustalonego początkowego uporządkowania kart, można uzyskać każde inne uporządkowanie wykonując pięć tasowań.

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P i Q, różne od wierzchołków czworokąta, leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$. Udowodnić, że trójkąty ABP i ADQ mają równe pola wtedy i tylko wtedy, gdy ich ortocentra leżą na prostej prostopadłej do AC.

Uwaga: Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia wysokości.

12. Dla liczb dodatnich a, b, c, d określamy

$$A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3, \quad B = bcd + cda + dab + abc\,.$$

Udowodnić nierówność

$$(a+b+c+d)^3 \leqslant 4A + 24B\,.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 grudnia 2002 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa pomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81–825 Sopot.

Dla województwa śląskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40–005 Katowice.

Dla województwa małopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30–059 Kraków.

Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20–031 Lublin.

Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa wielkopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Geologii Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Maków Polnych 16, 61–606 Poznań.

Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – ul. Wielkopolska 15, 70–251 Szczecin.

Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87–100 Toruń.

Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00–656 Warszawa.

Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50–384 Wrocław.