LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

11 września 2002 r. – 10 grudnia 2002 r.

Zadanie **1.** Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniających równanie

$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1\,.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \geqslant 2$ mamy

$$xy = x\cdot\frac{y}{2} + y\cdot\frac{x}{2} \geqslant x+y\,. \tag{1}$$

Zatem dla liczb rzeczywistych $x, y \geqslant 2$ prawdziwe są nierówności

$$2(xy)^2 + 1 > (xy)^2 \geqslant (x+y)^2\,,$$

co oznacza, że dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych (a nawet rzeczywistych) $x, y \geqslant 2$.

Wobec tego, jeśli para (x,y) liczb całkowitych dodatnich spełnia dane w treści zadania równanie, to jedna z liczb x, y musi być równa 1. Przyjmijmy ze względu na symetrię, że tą liczbą jest x. Dane równanie przyjmuje wówczas postać $(y+1)^2 - 2y^2 = 1$. Po uproszczeniu dostajemy $y^2 - 2y = 0$, skąd $y = 2$.

Równanie ma więc dwa rozwiązania: $x=1$, $y=2$ oraz $x=2$, $y=1$.

Uwaga

Kluczem do rozwiązania zadania jest nierówność $xy \geqslant x+y$ prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \geqslant 2$. Jej krótki dowód został przedstawiony w powyższym rozwiązaniu w linijce (1). Inny, równie krótki dowód to:

$$x,\, y \geqslant 2 \quad\Rightarrow\quad (x-1)(y-1) \geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad xy \geqslant x+y\,.$$

Zadanie **2.** Dana jest liczba rzeczywista $a_1 > 1$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorem

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1\,.$$

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1 - 1}\,.$$

Rozwiązanie

Niech $b_n = a_n - 1$. Wówczas daną w treści zadania zależność rekurencyjną możemy przepisać w postaci

$$b_{n+1} = b_n(b_n+1) \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1\,.$$

Z powyższego wzoru oraz z nierówności $b_1>0$ uzyskujemy przez indukcję nierówność $b_n>0$ dla dowolnego $n\geqslant 1$. Ponadto

$$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_n(b_n+1)}=\frac{b_n+1-1}{b_n(b_n+1)}=\frac{1}{b_n+1}=\frac{1}{a_n}\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\\&\qquad=\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)+\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)+\left(\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\\&\qquad=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{b_{n+1}}<\frac{1}{a_1-1}\,,\end{aligned}$$

czego należało dowieść.

Zadanie **3.** Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o. Proste styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Prosta styczna do okręgu o w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q. Udowodnić, że

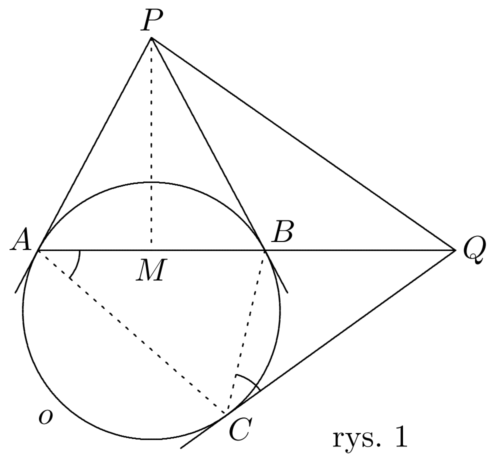
$$PQ^2=PB^2+QC^2\,.$$

Rozwiązanie

Niech M będzie środkiem odcinka AB (rys. 1). Wówczas trójkąt PMQ jest prostokątny. Na mocy twierdzenia Pitagorasa oraz podobieństwa trójkątów QBC i QCA otrzymujemy

$$\begin{aligned}PQ^2&=PM^2+QM^2=\\&=PB^2-MB^2+QM^2=\\&=PB^2+(QM-MB)(QM+MB)=\\&=PB^2+QB\cdot QA=PB^2+QC^2\,,\end{aligned}$$

co należało udowodnić.



rys. 1

Zadanie **4.** Rozpatrujemy zbiór wszystkich k-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,m\}$. Z każdego takiego ciągu wybieramy wyraz najmniejszy i sumujemy wybrane wyrazy. Udowodnić, że otrzymana suma jest równa

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+m^k\,.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez L_i $(i=1,2,\ldots,m)$ liczbę tych k-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1,\,2,\,3,\,\ldots,\,m\}$, których każdy wyraz jest nie mniejszy niż i. Ciągi takie to k-wyrazowe ciągi o wyrazach z $(m-i+1)$-elementowego zbioru

$$\{i,\,i+1,\,i+2,\,\ldots,\,m\}\,.$$

Stąd wynika, że $L_i = (m-i+1)^k$. Zatem liczba ciągów o najmniejszym wyrazie równym i wynosi $L_i - L_{i+1} = (m-i+1)^k - (m-i)^k$.

Suma wszystkich wyrazów najmniejszych jest więc równa

$$1\cdot(m^k-(m-1)^k)+2\cdot((m-1)^k-(m-2)^k)+3\cdot((m-2)^k-(m-3)^k)+\ldots$$
$$\ldots+(m-1)\cdot(2^k-1^k)+m\cdot 1^k=$$
$$=1^k+2^k+3^k+\ldots+m^k\,,$$

czego należało dowieść.

Zadanie **5.** Liczba naturalna n_1 zapisana jest w układzie dziesiętnym za pomocą 333 cyfr, z których żadna nie jest zerem. Dla $i=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,332$ liczba n_{i+1} powstaje z liczby n_i przez przeniesienie cyfry jedności na początek. Dowieść, że albo wszystkie liczby $n_1,\,n_2,\,n_3,\,\ldots,\,n_{333}$ są podzielne przez 333, albo żadna z nich.

Rozwiązanie

Niech j_i $(i=1,2,3,\ldots,333)$ oznacza cyfrę jedności liczby n_i. Wówczas dla $i=1,2,\ldots,332$ mamy

$$(1)\qquad n_{i+1}=\frac{n_i+10^{333}j_i-j_i}{10}\,,\quad \text{skąd}\quad 10n_{i+1}=n_i+(10^{333}-1)j_i\,.$$

Liczba $10^{333}-1=\big(10^3-1\big)\cdot\big(10^{330}+10^{327}+10^{324}+\ldots+10^3+1\big)$ jest podzielna przez 333 oraz liczby 10 i 333 są względnie pierwsze. Z drugiej równości (1) wynika zatem, że *liczba n_i jest podzielna przez* 333 *wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n_{i+1} jest podzielna przez* 333.

Jeśli liczba n_1 jest podzielna przez 333, to na mocy powyższego stwierdzenia uzyskujemy (indukcyjnie) podzielność przez 333 każdej z liczb $n_2,n_3,\ldots,n_{333}$. Jeżeli natomiast liczba n_1 nie dzieli się przez 333, to analogicznie jak wyżej wnioskujemy, że żadna z liczb $n_2,n_3,\ldots,n_{333}$ nie dzieli się przez 333.

Zadanie **6.** Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na okręgu o. Punkt M jest środkiem tego łuku AB okręgu o, który nie zawiera punktów C i D; punkt N jest środkiem tego łuku CD okręgu o, który nie zawiera punktów A i B. Dowieść, że

$$\frac{AN^2-BN^2}{AB}=\frac{DM^2-CM^2}{CD}\,.$$

Rozwiązanie

Z twierdzenia Ptolemeusza (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Dodatek D, str. 112) zastosowanego do czworokąta $AMBN$ uzyskujemy równość $BM\cdot(AN+BN)=MN\cdot AB$. Stąd

$$\frac{AN^2-BN^2}{AB}=\frac{(AN-BN)\cdot MN}{BM}\,.$$

Zatem zadanie sprowadza się do wykazania, że

$$(1)\qquad \frac{AN-BN}{BM}=\frac{DM-CM}{CN}\,.$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AN < BN$; wtedy $DM < CM$. Niech A' będzie punktem symetrycznym do A względem prostej MN (rys. 2). Ponieważ MN jest dwusieczną kąta ANB, punkt A' leży na odcinku BN. Ponadto $BM = AM = A'M$.

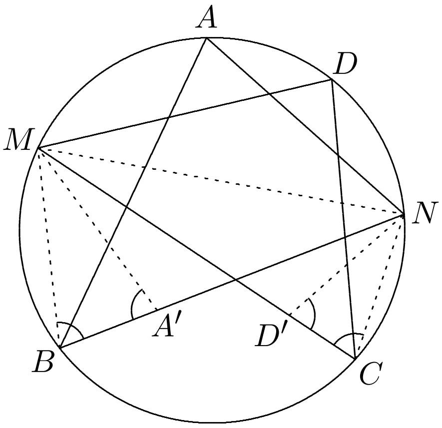
Analogicznie, oznaczając przez D' punkt symetryczny do D względem prostej MN wnioskujemy, że punkt D' leży na odcinku CM oraz $CN = D'N$. Na mocy równości

$$\sphericalangle MBN = \sphericalangle MCN,$$

trójkąty równoramienne BMA' i CND' są podobne. Stąd

$$\frac{BA'}{BM} = \frac{CD'}{CN},$$

co jest równoważne dowodzonej równości (1).



rys. 2

Zadanie **7.** U cioci Reni spotkało się (łącznie z ciocią) $n \geqslant 4$ osób. Każdy z obecnych podarował co najmniej jednej z pozostałych osób co najmniej jeden prezent. Okazało się, że każdy podarował trzykrotnie więcej prezentów niż sam otrzymał, z jednym wyjątkiem: ciocia Renia podarowała zaledwie $\frac{1}{6}$ liczby prezentów, które dostała. Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą możliwą liczbę prezentów, które mogła otrzymać ciocia Renia.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ liczbę prezentów otrzymanych przez i-tego gościa cioci Reni oraz niech x_R oznacza liczbę prezentów, które otrzymała ciocia Renia. Wówczas łączna liczba prezentów wynosi

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_R = \sum_{i=1}^{n-1} 3x_i + \frac{1}{6} x_R, \quad \text{skąd} \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{5}{12} x_R.$$

Zatem liczba x_R jest podzielna przez 12, powiedzmy $x_R = 12k$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą nieujemną.

Ponieważ każda osoba podarowała co najmniej jeden prezent, więc musiała ona także otrzymać przynajmniej jeden upominek. Stąd wnioskujemy, że $x_i \geqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$, co na mocy drugiej równości (1) daje $5k \geqslant n-1$. Ponieważ liczba k jest całkowita, więc ostatnia nierówność jest równoważna nierówności $k \geqslant [(n-1+4)/5]$, gdzie $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż a. Zatem

$$x_R \geqslant 12 \left[\frac{n+3}{5} \right].$$

Pozostaje wykazać, że przy spełnieniu warunków zadania możliwe jest, aby ciocia Renia dostała dokładnie $12[(n+3)/5]$ prezentów.

Załóżmy, że $n - 1 = 5k - r$, gdzie $r = 0, 1, 2, 3, 4$, zaś k jest pewną liczbą całkowitą dodatnią. Podzielmy $n-1$ gości cioci Reni na (co najwyżej) trzy rozłączne grupy:

$$A_1, A_2, \ldots, A_{3k-r}, \quad B_1, B_2, \ldots, B_{2k-r}, \quad C_1, C_2, \ldots, C_r.$$

(Ponieważ $n \geqslant 4$, więc $2k-r \geqslant 0$.) Następnie posadźmy wszystkie osoby A_i oraz C_i przy okrągłym stole i przyjmijmy, że:

1. Każda osoba A_i, C_i daje 1 prezent osobie siedzącej po jej prawej stronie;
2. Każda osoba A_i daje 2 prezenty cioci Reni;
3. Każda osoba B_i daje 3 prezenty cioci Reni;
4. Każda osoba C_i daje 5 prezentów cioci Reni;
5. Ciocia Renia daje po 1 prezencie każdej osobie B_i oraz C_i.

W ten sposób każda osoba A_i oraz B_i podarowała 3 prezenty, zaś otrzymała jeden, natomiast każda osoba C_i dała 6 prezentów, a sama dostała dwa. Zatem każdy gość cioci Reni podarował trzykrotnie więcej prezentów niż sam dostał. Z kolei ciocia Renia otrzymała

$$2(3k-r)+3(2k-r)+5r = 12k = 12[(n+3)/5]$$

prezentów, sama zaś podarowała $2k$ upominków, czyli sześciokrotnie mniej.

Odp.: Ciocia Renia mogła otrzymać co najmniej $12[(n+3)/5]$ prezentów.

Zadanie **8.** W czworościanie $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami krawędzi AB i CD. Punkt P leży na odcinku MN, przy czym $MP = CN$ oraz $NP = AM$. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to $OP \perp MN$.

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\alpha = \sphericalangle OPM, \quad a = AM = MB = NP, \quad b = CN = ND = MP, \quad x = OP.$$

Wówczas na mocy twierdzenia cosinusów mamy

$$(1) \qquad OM^2 = b^2 + x^2 + 2bx\cos\alpha \quad \text{oraz} \quad ON^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha.$$

Ponadto korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$(2) \qquad OM^2 + a^2 = OA^2 = OD^2 = ON^2 + b^2.$$

Odejmując stronami równości (1) oraz wykorzystując zależność (2) uzyskujemy $2(a+b)x\cos\alpha = 0$. Stąd $\alpha = 90°$, czyli $OP \perp MN$.

Zadanie **9.** Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x+y$ jest liczbą wymierną, to

$$W(x) + W(y)$$

jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że warunki zadania są spełnione przez każdy wielomian postaci $W(x)=ax+b$, gdzie a i b są liczbami wymiernymi.

Udowodnimy, że są to wszystkie wielomiany o własności podanej w zadaniu.

Niech W będzie wielomianem spełniającym warunki zadania. Dla liczby wymiernej q rozważamy wielomian $P(x)=W(q+x)+W(q-x)$. Wielomian P przyjmuje wartości wymierne dla wszystkich argumentów rzeczywistych x, jest więc wielomianem stałym równym $P(0)=2W(q)$. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość $W(n-1)+W(n+1)=2W(n)$, czyli

$$W(n)-W(n-1)=W(n+1)-W(n)\,.$$

Niech $V(x)=W(x)-ax-b$, gdzie $a=W(1)-W(0)$ oraz $b=W(0)$. Wówczas $V(0)=V(1)=0$ oraz dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$V(n)-V(n-1)=V(n+1)-V(n)\,.$$

Zatem wielomian V przyjmuje wartość 0 dla wszystkich argumentów całkowitych, musi więc być wielomianem zerowym, a w konsekwencji $W(x)=ax+b$.

Zadanie **10.** Mamy talię 52 kart. Tasowaniem będziemy nazywać wykonanie następujących czynności: dowolny podział talii na część górną i dolną, a następnie dowolne zmieszanie kart z zachowaniem porządku w obrębie każdej części. Mówiąc formalnie, tasowaniem jest dowolne przemieszanie kart, w którym i-ta karta od wierzchu przechodzi na pozycję p_i, przy czym istnieje takie $m\in\{1, 2, 3, \ldots, 51\}$, że $p_i<p_{i+1}$ dla $i<m$ oraz dla $i>m$. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od ustalonego początkowego uporządkowania kart, można uzyskać każde inne uporządkowanie wykonując pięć tasowań.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że po pięciu tasowaniach nie można uzyskać porządku odwrotnego do wyjściowego.

Zauważmy, że karty, które podczas pewnego tasowania znalazły się w tej samej części, nie zmieniają wzajemnego porządku po tym tasowaniu.

Spośrod 52 kart podczas pierwszego tasowania w jednej z części znajdzie się co najmniej 26 kart. Spośród tych 26 kart co najmniej 13 znajdzie się w jednej części także podczas drugiego tasowania.

Rozumując podobnie dalej wnioskujemy, że istnieje co najmniej 7 kart, które będą się znajdowały w tej samej części przez pierwsze trzy tasowania. Co najmniej 4 z nich będą w tej samej części także przy czwartym tasowaniu, a pewne dwie po wszystkich pięciu tasowaniach. Zatem zawsze będą istniały dwie karty, które przez pięć tasowań nie zmienią wzajemnego położenia.

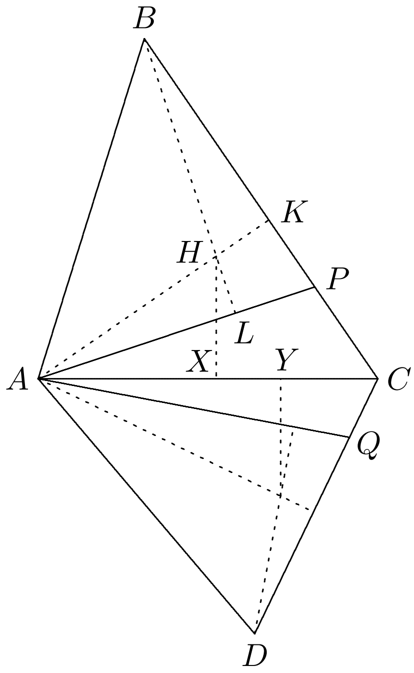
Nie można więc uzyskać kart w porządku odwrotnym do wyjściowego, gdyż wtedy każde dwie karty musiałyby zmienić wzajemną kolejność.

Zadanie **11.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P i Q, różne od wierzchołków czworokąta, leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$. Udowodnić, że trójkąty ABP i ADQ mają równe pola wtedy i tylko wtedy, gdy ich ortocentra leżą na prostej prostopadłej do AC.

Uwaga: Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia wysokości.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez K, L rzuty prostokątne punktów A, B odpowiednio na proste BC, AP (rys. 3). Niech ponadto H oznacza ortocentrum trójkąta ABP oraz niech X będzie rzutem prostokątnym punktu H na prostą AC.



rys. 3

Korzystając z podobieństwa trójkątów prostokątnych AHL i APK otrzymujemy

$$\frac{AH}{AL} = \frac{AP}{AK}.$$

Analogicznie, z podobieństwa trójkątów prostokątnych AHX i ACK uzyskujemy zależność

$$\frac{AH}{AX} = \frac{AC}{AK}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\alpha = \sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ.$$

Z nierówności $\sphericalangle BAD < 180^\circ$ wynika, że $\alpha < 90^\circ$. Zatem

$$AC \cdot AX = AH \cdot AK = AP \cdot AL = AP \cdot BL \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 2[ABP] \cdot \operatorname{ctg}\alpha, \tag{1}$$

gdzie $[TUW]$ oznacza pole trójkąta TUW.

Oznaczmy przez Y rzut prostokątny ortocentrum trójkąta ADQ na prostą AC. Wówczas, analogicznie jak wyżej, otrzymujemy zależność

$$AC \cdot AY = 2[ADQ] \cdot \operatorname{ctg}\alpha. \tag{2}$$

Porównując równości (1) oraz (2) wnioskujemy, że $[ABP] = [ADQ]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AX = AY$. Ostatnia równość jest równoważna stwierdzeniu, że ortocentra trójkątów ABP i ADQ leżą na prostej prostopadłej do AC, jeśli przekonamy się, że punkty X i Y leżą na prostej AC po tej samej stronie punktu A.

W tym celu wykażemy, że punkt X leży na półprostej $AC^{\rightarrow}$. Ponieważ $\alpha < 90^\circ$, więc punkt H leży na półprostej $AK^{\rightarrow}$. Ponadto trójkąt AKC jest prostokątny (lub $K = C$), więc rzut prostokątny półprostej $AK^{\rightarrow}$ na prostą AC pokrywa się z półprostą $AC^{\rightarrow}$. Stąd bezpośrednio wynika, że punkt X leży na półprostej $AC^{\rightarrow}$. Analogicznie dowodzimy, że punkt Y leży na półprostej $AC^{\rightarrow}$, co kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga

Rysunek 3 przedstawia przypadek, w którym trójkąty ABP i ADQ są ostrokątne. Zaprezentowane rozwiązanie pozostaje jednak w mocy dla każdej innej konfiguracji spełniającej warunki zadania.

Zadanie **12.** Dla liczb dodatnich a, b, c, d określamy

$$A=a^3+b^3+c^3+d^3, \quad B=bcd+cda+dab+abc\,.$$

Udowodnić nierówność

$$(a+b+c+d)^3 \leqslant 4A+24B\,.$$

Rozwiązanie

Niech $S=a+b+c+d$. Wtedy $S^3=A+6B+3Q$, gdzie

$$\begin{aligned}Q&=a^2(b+c+d)+b^2(c+d+a)+c^2(d+a+b)+d^2(a+b+c)=\\&=a^2(S-a)+b^2(S-b)+c^2(S-c)+d^2(S-d)=\\&=a(Sa-a^2)+b(Sb-b^2)+c(Sc-c^2)+d(Sd-d^2)\,.\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności

$$0\leqslant\left(x-\frac{S}{2}\right)^2=x^2-Sx+\frac{S^2}{4}$$

prawdziwej dla dowolnej liczby rzeczywistej x otrzymujemy

$$Sa-a^2\leqslant\frac{S^2}{4}, \quad Sb-b^2\leqslant\frac{S^2}{4}, \quad Sc-c^2\leqslant\frac{S^2}{4} \quad \text{oraz} \quad Sd-d^2\leqslant\frac{S^2}{4}\,.$$

Zatem

$$Q\leqslant(a+b+c+d)\cdot\frac{S^2}{4}=\frac{S^3}{4}, \quad \text{skąd} \quad S^3\leqslant A+6B+\frac{3S^3}{4}\,,$$

co daje $S^3\leqslant 4A+24B$, czyli nierówność, którą należało udowodnić.

(*wp, jwr*)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.om.edu.pl`