LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2003 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita $n > 2003$, że w ciągu

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \ldots,\ \binom{n}{2003}$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

Rozwiązanie

Liczba $\binom{n}{k+1}$ jest podzielna przez $\binom{n}{k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba

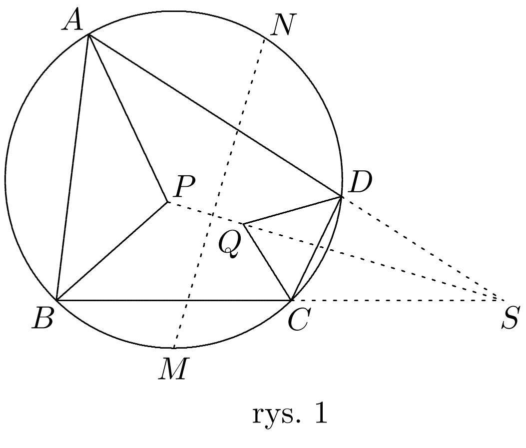
$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}\cdot\frac{k!\cdot(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} - 1$$

jest całkowita. Zatem liczba n spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n+1$ jest podzielna przez każdą z liczb 1, 2, 3, 4, …, 2003. Taką liczbą jest na przykład $n = 2003! - 1$.

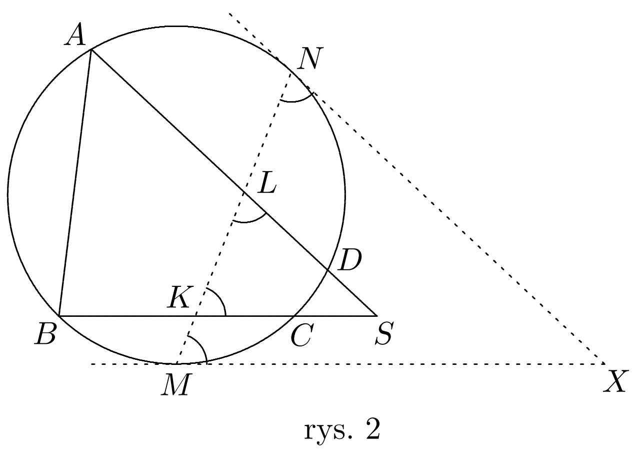
Zadanie **2.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Dwusieczne kątów DAB i ABC przecinają się w punkcie P, a dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie Q. Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktów D i A. Punkt N jest środkiem tego łuku DA okręgu o, który nie zawiera punktów B i C. Dowieść, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do MN.

Rozwiązanie

Załóżmy najpierw, że proste AD i BC są równoległe. Wówczas czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym. Jego podstawy BC i AD są prostopadłe do prostej MN. Ponadto punkty P i Q leżą na prostej równoległej do podstaw trapezu i równoodległej od nich. Stąd teza.



rys. 1



rys. 2

Przyjmijmy z kolei, że proste AD i BC nie są równoległe i przecinają się w punkcie S (rys. 1). Punkt P jest środkiem okręgu stycznego do odcinków

AB, BC, DA, zaś punkt Q jest środkiem okręgu stycznego do odcinków CD, BC, DA. Stąd wynika, że punkty P, Q leżą na dwusiecznej kąta ASB. Należy zatem wykazać, że dwusieczna ta jest prostopadła do prostej MN.

Oznaczmy przez K, L odpowiednio punkty przecięcia odcinka MN z prostymi BC, AD (rys. 2). Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że trójkąt SKL jest równoramienny.

Przez punkty M i N poprowadźmy proste styczne do danego okręgu. Proste te są równoległe odpowiednio do prostych BC i AD oraz wyznaczają – razem z prostą MN – trójkąt równoramienny MNX. Stąd

$$\sphericalangle SKL = \sphericalangle XMN = \sphericalangle XNM = \sphericalangle SLK\,.$$

Otrzymana równość dowodzi, że trójkąt SKL jest równoramienny, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **3.** Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x$. Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb całkowitych a, b spełniających równanie

$$W(a) = W(b)\,.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że $W(x) = (x-1)(x-2)(x^2+3) - 6$. Dla $n > 3$ zachodzą więc nierówności

$$\begin{aligned} W(n)+6 &= (n-1)(n-2)(n^2+3) = (n^2-3n+2)(n^2+3) < \\ &< (n^2-2n+4)(n^2+n) = n(n+1)((n-1)^2+3) = \\ &= W(-n+1)+6\,, \end{aligned}$$

a ponadto

$$\begin{aligned} W(-n+1)+6 &< (n^2-n)(n^2+2n+4) = n(n-1)((n+1)^2+3) = \\ &= W(n+1)+6\,. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$(1) \qquad W(3) < W(-2) < W(4) < W(-3) < W(5) < W(-4) < W(6) \ldots\,.$$

Zatem wartości wielomianu W w punktach -2, ± 3, ± 4, ... są parami różne. Bezpośrednio obliczamy, że

$$W(-1) = 18, \quad W(0) = 0, \quad W(1) = -6, \quad W(2) = -6, \quad W(3) = 18,$$

zaś z nierówności (1) wnioskujemy, że wartości wielomianu W w pozostałych punktach całkowitych są większe od $W(3) = 18$. Stąd otrzymujemy łącznie cztery pary liczb spełniających warunki zadania:

$$(-1,3)\,, \quad (3,-1)\,, \quad (1,2)\,, \quad (2,1)\,.$$

(*wp, jwr*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2003 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p>3$ istnieją liczby całkowite x, y, k spełniające warunki: $0<2k<p$ oraz

$$kp+3=x^2+y^2\,.$$

Rozwiązanie

Niech A będzie zbiorem liczb postaci x^2, gdzie $0\leqslant x<p/2$, natomiast B zbiorem liczb postaci $3-y^2$, gdzie $0\leqslant y<p/2$; liczby x, y są całkowite. Wykażemy, że liczby ze zbioru A dają różne reszty z dzielenia przez p.

Przypuśćmy, że liczby x_1^2, x_2^2 ze zbioru A dają taką samą resztę z dzielenia przez p. Wtedy

$$p\,|\,x_1^2-x_2^2\,,$$

skąd mamy podzielność

$$p\,|\,(x_1-x_2)(x_1+x_2)\,.$$

Ponieważ $0\leqslant x_1,x_2<p/2$, więc $-p/2<x_1-x_2<p/2$ oraz $0\leqslant x_1+x_2<p$. Stąd oraz z powyższej podzielności wnioskujemy, że $x_1=x_2$.

Zatem liczby ze zbioru A dają różne reszty z dzielenia przez p. Analogicznie dowodzimy, że liczby ze zbioru B dają różne reszty z dzielenia przez p.

Ponieważ zbiory A i B mają łącznie $p+1$ elementów, więc istnieją dwie liczby – jedna ze zbioru A, druga ze zbioru B – dające z dzielenia przez p tę samą resztę. Niech x^2 i $3-y^2$ będą tymi liczbami. Wówczas liczba x^2+y^2-3 jest podzielna przez p, mamy więc

$$kp+3=x^2+y^2$$

dla pewnej liczby całkowitej k. Ponieważ $p>3$, więc k jest liczbą dodatnią oraz

$$k=\frac{x^2+y^2-3}{p}<\frac{(p/2)^2+(p/2)^2}{p}=\frac{p}{2}\,.$$

Warunki podane w treści zadania są więc spełnione.

Zadanie **5.** Punkt A leży na zewnątrz okręgu o o środku O. Z punktu A poprowadzono dwie proste styczne do okręgu o odpowiednio w punktach B i C. Pewna styczna do okręgu o przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Proste OE i OF przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że z odcinków BP, PQ i QC można zbudować trójkąt podobny do trójkąta AEF.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X punkt styczności okręgu o z prostą EF (rys. 3). Z równości

$$EB = EX \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BEP = \sphericalangle XEP$$

wynika, że trójkąty BEP oraz XEP są przystające. Zatem $BP = XP$.

Analogicznie dowodzimy równość $CQ = XQ$. To oznacza, że trójkąt PQX jest zbudowany z odcinków BP, PQ oraz QC.

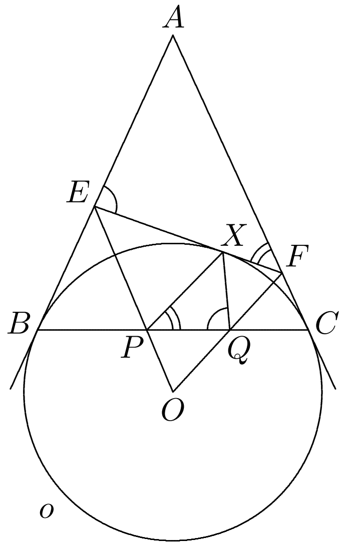
Pozostaje wykazać, że trójkąt PQX jest podobny do trójkąta FEA. Oznaczmy: $\sphericalangle FEA = \alpha$, $\sphericalangle EFA = \beta$. Trójkąt ABC jest równoramienny, skąd obliczamy, że $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Ponadto $\sphericalangle BEP = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Dwie ostatnie równości implikują

$$\sphericalangle BPE = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta\,,$$

co daje w rezultacie

$$\sphericalangle XPQ = 180^\circ - 2\sphericalangle BPE = \beta\,.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle XQP = \alpha$, co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 3

Zadanie **6.** Każdej parze liczb całkowitych nieujemnych (x,y) jest przyporządkowana liczba $f(x,y)$ zgodnie z warunkami:

$$\begin{gathered} f(0,0) = 0\,; \\ f(2x,2y) = f(2x+1,2y+1) = f(x,y)\,, \\ f(2x+1,2y) = f(2x,2y+1) = f(x,y)+1 \quad \text{dla} \quad x,y \geqslant 0\,. \end{gathered}$$

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną i niech a, b będą takimi liczbami całkowitymi nieujemnymi, że $f(a,b) = n$. Rozstrzygnąć, ile jest liczb x spełniających równanie

$$f(a,x) + f(b,x) = n\,.$$

Rozwiązanie

Udowodnimy następujący lemat dający inny opis funkcji f.

Lemat

Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią oraz niech x, y będą liczbami całkowitymi nieujemnymi mniejszymi od 2^k. Niech

$$\overline{c_{k-1}c_{k-2}\ldots c_2c_1c_0}_{(2)} \quad \text{oraz} \quad \overline{d_{k-1}d_{k-2}\ldots d_2d_1d_0}_{(2)}$$

będą zapisami dwójkowymi odpowiednio liczb x i y, przy czym dopuszczamy zera początkowe. Wówczas

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{k-1} |c_i - d_i|\,.$$

(Zatem $f(x,y)$ jest liczbą miejsc dwójkowych, na których liczby x i y mają różne cyfry.)

Dowód lematu

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na k. Dla $k=1$ teza lematu wynika bezpośrednio z równości

$$f(0,0)=f(1,1)=0 \quad \text{oraz} \quad f(0,1)=f(1,0)=1\,.$$

Niech k będzie taką liczbą całkowitą, dla której teza lematu jest prawdziwa oraz niech x, y będą dowolnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi mniejszymi od 2^{k+1}. Zapiszmy liczby x, y w układzie dwójkowym:

$$x=\overline{c_kc_{k-1}c_{k-2}\ldots c_2c_1c_0}_{(2)}\,, \qquad y=\overline{d_kd_{k-1}d_{k-2}\ldots d_2d_1d_0}_{(2)}\,.$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że teza lematu jest spełniona dla liczb

$$x_0=\overline{c_kc_{k-1}c_{k-2}\ldots c_2c_1}_{(2)}\,, \qquad y_0=\overline{d_kd_{k-1}d_{k-2}\ldots d_2d_1}_{(2)}\,,$$

mamy więc $f(x_0,y_0)=|c_1-d_1|+|c_2-d_2|+\ldots+|c_k-d_k|$. Ponadto $x=2x_0+c_0$ oraz $y=2y_0+d_0$, skąd na mocy warunków podanych w treści zadania wynika, że $f(x,y)=f(x_0,y_0)+|c_0-d_0|$. Zatem

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{k}|c_i-d_i|\,.$$

Dowód lematu został zakończony.

Przechodzimy teraz do rozwiązania zadania. Niech

$$a=\overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0}_{(2)}\,, \quad b=\overline{b_{k-1}b_{k-2}\ldots b_2b_1b_0}_{(2)}\,, \quad x=\overline{c_{k-1}c_{k-2}\ldots c_2c_1c_0}_{(2)}\,.$$

Wówczas równość $f(a,x)+f(b,x)=f(a,b)$ jest równoważna równości

$$\sum_{i=0}^{k-1}|c_i-a_i|+|c_i-b_i|-|b_i-a_i|=0\,.$$

Ponieważ liczby $|c_i-a_i|+|c_i-b_i|-|b_i-a_i|$ mogą przyjmować tylko wartości 0 (gdy $a_i\neq b_i$ lub $a_i=b_i=c_i$) lub 2 (gdy $a_i=b_i\neq c_i$), zatem dla $i=0, 1, 2, \ldots, k-1$ zachodzi warunek

$$a_i\neq b_i \quad \text{lub} \quad a_i=b_i=c_i\,.$$

Możemy więc przy ustalonych a i b opisać wszystkie liczby x spełniające równanie $f(a,x)+f(b,x)=f(a,b)$. Na tych pozycjach zapisu dwójkowego, na których liczby a i b mają różne cyfry, liczba x może mieć cyfrę dowolną. Na tych pozycjach, na których cyfry liczb a i b są takie same, liczba x musi mieć cyfrę taką jak liczby a i b. Przy konstrukcji liczby x możemy więc dowolnie dobrać cyfry na $f(a,b)$ pozycjach.

Liczba rozwiązań danego w zadaniu równania jest więc równa 2^n.

(*wp, jwr*)