LIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2003 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinek CD jest wysokością. Przez środek M boku AB poprowadzono taką prostą przecinającą półproste CA i CB odpowiednio w punktach K i L, że $CK = CL$. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL. Wykazać, że $SD = SM$.

2. Liczba a jest dodatnia i mniejsza od 1. Dowieść, że dla każdego skończonego, ściśle rosnącego ciągu nieujemnych liczb całkowitych $(k_1, \ldots, k_n)$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^2 < \frac{1+a}{1-a} \sum_{i=1}^{n} a^{2k_i}.$$

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek: dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez $W(n)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).

2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.

3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.

4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.

5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.

6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2003 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, z, że

$$0 < x < y < z < p.$$

Wykazać, że jeśli liczby x^3, y^3, z^3 dają takie same reszty przy dzieleniu przez p, to liczba $x^2+y^2+z^2$ jest podzielna przez $x+y+z$.

5. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H. Druga sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany tego czworościanu w punktach, które do czworościanu nie należą. Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Udowodnić, że istnieje permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, spełniająca dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ warunek:

$$x_{i+1} \text{ jest jedną z liczb } 2x_i,\ 2x_i - 1,\ 2x_i - n,\ 2x_i - n - 1,$$

przy czym $x_{n+1} = x_1$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.