LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2003 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** W trójkącie ostrokątnym ABC odcinek CD jest wysokością. Przez środek M boku AB poprowadzono taką prostą przecinającą półproste CA i CB odpowiednio w punktach K i L, że $CK=CL$. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL. Wykazać, że $SD=SM$.

Rozwiązanie

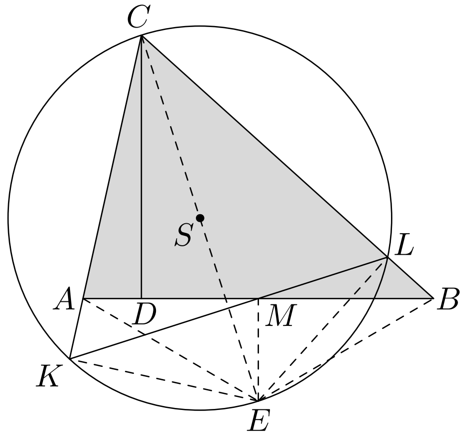
Z twierdzenia Menelausa zastosowanego do trójkąta ABC otrzymujemy

$$\frac{CK}{AK}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BL}{CL}=1, \quad \text{skąd} \quad AK=BL.$$

Niech E będzie drugim punktem przecięcia prostej CS z okręgiem opisanym na trójkącie CKL (rys. 1). Z równości $CK=CL$ wynika, że

$$EK=EL. \text{ Ponadto } \sphericalangle AKE=90^\circ=\sphericalangle BLE.$$

Zatem trójkąty prostokątne AKE oraz BLE są przystające. Stąd uzyskujemy $AE=BE$, czyli $EM\perp AB$, a to daje $CD\parallel EM$.



rys. 1

Ponieważ S jest środkiem odcinka CE, więc jego rzut prostokątny na prostą AB pokrywa się ze środkiem odcinka DM. Stąd $SD=SM$.

Zadanie **2.** Liczba a jest dodatnia i mniejsza od 1. Dowieść, że dla każdego skończonego, ściśle rosnącego ciągu nieujemnych liczb całkowitych $(k_1,\ldots,k_n)$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^2 < \frac{1+a}{1-a}\sum_{i=1}^{n} a^{2k_i}.$$

Rozwiązanie

Stosujemy indukcję względem n. Dla $n=1$ nierówność ma postać

$$1<\frac{1+a}{1-a}$$

i oczywiście jest spełniona. Ustalmy $n\geqslant 2$ i załóżmy, że nierówność jest spełniona dla każdego rosnącego ciągu długości $n-1$. Weźmy pod uwagę dowolny rosnący ciąg długości n: $0\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_n$. Dzieląc dowodzoną nierówność stronami przez a^{2k_1} możemy bez straty ogólności przyjąć, że $k_1=0$. Wówczas

$$(1) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^2=\left(1+\sum_{i=2}^{n} a^{k_i}\right)^2=1+2\sum_{i=2}^{n} a^{k_i}+\left(\sum_{i=2}^{n} a^{k_i}\right)^2.$$

Z nierówności $0<k_2<k_3<\ldots<k_n$ oraz $0<a<1$ wynika, że

$$\sum_{i=2}^{n} a^{k_i} \leqslant \sum_{j=1}^{k_n} a^j < \frac{a}{1-a}\,.$$

Stąd, z równości (1) oraz z założenia indukcyjnego uzyskujemy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^2 < 1+\frac{2a}{1-a}+\frac{1+a}{1-a}\sum_{i=2}^{n} a^{2k_i} = \frac{1+a}{1-a}\left(1+\sum_{i=2}^{n} a^{2k_i}\right) = \frac{1+a}{1-a}\sum_{i=1}^{n} a^{2k_i}\,.$$

To kończy krok indukcyjny i rozwiązanie zadania.

Zadanie **3.** Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek: dla każdej liczby naturalnej n liczba 2^n-1 jest podzielna przez $W(n)$.

Rozwiązanie

Niech $W(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_rx^r$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, spełniającym rozważany warunek. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby naturalnej k wartość $W(k)$ jest różna od 1 i od -1; ma więc dzielnik pierwszy p. Niech $m=k+p$. Różnica $W(m)-W(k)$ jest sumą różnic postaci $a_j(m^j-k^j)$, które są liczbami podzielnymi przez $m-k$, czyli przez p. Zatem $W(m)$ dzieli się przez p.

Z warunku zadania wynika, że p jest dzielnikiem liczb 2^k-1 oraz 2^m-1; jest więc nieparzystym dzielnikiem pierwszym liczby $2^m-2^k=2^k(2^p-1)$, czyli jest dzielnikiem liczby 2^p-1. To jednak nie jest możliwe, bowiem

$$2^p-1=1+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\ldots+\binom{p}{p-1}\,,$$

a wartości symbolu Newtona $\binom{p}{i}$ są dla $i=1,\ldots,p-1$ liczbami podzielnymi przez p.

Sprzeczność dowodzi, że $W(n)=\pm1$ dla każdej liczby naturalnej n. Stąd wniosek, że W jest wielomianem równym tożsamościowo 1 lub równym tożsamościowo -1. Oczywiście każdy z tych dwóch wielomianów spełnia postulowany warunek.

(*mek, wp, jwr*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

15 kwietnia 2003 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, z, że

$$0<x<y<z<p.$$

Wykazać, że jeśli liczby x^3, y^3, z^3 dają takie same reszty przy dzieleniu przez p, to liczba $x^2+y^2+z^2$ jest podzielna przez $x+y+z$.

Rozwiązanie

Ponieważ liczba $y^3-x^3=(y-x)(x^2+xy+y^2)$ jest podzielna przez p oraz $0<y-x<p$, więc liczba x^2+xy+y^2 jest podzielna przez p. Podobnie liczby y^2+yz+z^2 oraz x^2+xz+z^2 są podzielne przez p. Zatem liczba

$$(x^2+xy+y^2)-(y^2+yz+z^2)=(x-z)(x+y+z)\,.$$

jest również podzielna przez p, co implikuje podzielność przez p liczby $x+y+z$. Liczba ta jako mniejsza od $3p$ jest więc równa p lub $2p$.

Z podzielności przez p liczb x^2+xy+y^2, y^2+yz+z^2 oraz x^2+xz+z^2 wynika podzielność przez p ich sumy pomnożonej przez 2, czyli liczby

$$2(2x^2+2y^2+2z^2+xy+yz+xz)=3(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2\,.$$

Z danych w treści zadania nierówności wnioskujemy, że $p>3$, co w połączeniu z powyższą równością dowodzi podzielności przez p liczby $x^2+y^2+z^2$.

Zatem w przypadku $x+y+z=p$ zadanie zostało rozwiązanie. Jeśli zaś $x+y+z=2p$, to z równości $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ wynika, że liczba $x^2+y^2+z^2$ jest parzysta. Jest ona również podzielna przez p, a zatem dzieli się także przez $x+y+z$.

Zadanie **5.** Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H. Druga sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany tego czworościanu w punktach, które do czworościanu nie należą. Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez K i L punkty styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio ze ścianami ACD i BCD. Niech ponadto P i Q będą punktami styczności drugiej rozważanej w treści zadania sfery, odpowiednio z płaszczyznami ACD i BCD. Wówczas trójkąty KCP i LCQ są przystające (cecha *bok-bok-bok*). Obróćmy trójkąt KCP wokół prostej AC tak, aby punkt K przeszedł na punkt H; niech przy tym obrocie P przejdzie na P'. Podobnie, obróćmy trójkąt LCQ wokół prostej BC tak, aby punkt L przeszedł na punkt H; niech przy tym obrocie Q przejdzie na Q'.

Dalsza część rozwiązania rozgrywa się w płaszczyźnie trójkąta ABC: Trójkąty HCP' i HCQ' są przystające, więc $P'Q' \perp CH$. Ponadto czworokąty $AOCP'$ i $BOCQ'$ są rombami, co implikuje $AB \parallel P'Q'$. Zatem $CH \perp AB$.

Analogicznie dowodzimy, że $BH \perp AC$, a to oznacza, że H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC.

Zadanie **6.** Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Udowodnić, że istnieje permutacja $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, spełniająca dla każdego $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ warunek:

$$x_{i+1} \text{ jest jedną z liczb } 2x_i,\ 2x_i-1,\ 2x_i-n,\ 2x_i-n-1,$$

przy czym $x_{n+1}=x_1$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia: $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{gdy } x \leqslant n/2, \\ 2x-n & \text{gdy } x > n/2, \end{cases} \quad g(x)=f(x)-1.$
Rozważamy graf skierowany o n wierzchołkach ponumerowanych $1,2,\ldots,n$, w którym z punktu (wierzchołka) x wychodzą dwie zorientowane krawędzie: do punktu $f(x)$ i do $g(x)$. Teza sprowadza się do istnienia zamkniętej ścieżki, przechodzącej przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz (*cyklu Hamiltona*).

Startując od wierzchołka o numerze 1 i działając funkcjami f, g, możemy uzyskać: w jednym kroku – punkty 1 i 2; w dwóch krokach – punkty 1, 2, 3, 4; w trzech krokach – punkty od 1 do 8; itd. Widać, że każdy punkt jest osiągalny z wierzchołka 1.

Niech S: $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_m$ będzie najdłuższą ścieżką, przechodzącą przez różne wierzchołki, wśród których jest wierzchołek o numerze 1. Obie wychodzące z punktu x_m krawędzie trafiają w pewne punkty ścieżki S (w przeciwnym razie ścieżkę dałoby się przedłużyć). Mamy więc krawędzie $x_m \to x_k$, $x_m \to x_\ell$ $(k,\ell \leqslant m,\ k \neq \ell)$; niech np. $f(x_m)=x_k$, $g(x_m)=x_\ell$.

Przypuśćmy, że $k,\ell > 1$. Wówczas

$$x_k \in \{f(x_{k-1}), g(x_{k-1})\}, \qquad x_\ell \in \{f(x_{\ell-1}), g(x_{\ell-1})\}.$$

Funkcja f przyjmuje tylko wartości parzyste, a g wartości nieparzyste. Ponadto każda z równości $f(x)=f(y)$ i $g(x)=g(y)$ implikuje $x \equiv y \pmod{n/2}$. Zatem

$$x_k = f(x_{k-1}) = f(x_m), \qquad x_\ell = g(x_{\ell-1}) = g(x_m),$$

skąd $x_m \equiv x_{k-1} \equiv x_{\ell-1} \pmod{n/2}$ – sprzeczność, bo x_m, x_{k-1}, $x_{\ell-1}$ są trzema różnymi liczbami ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$.

Zatem $k=1$ lub $\ell=1$, co oznacza, że $x_m \to x_1$ jest krawędzią grafu. Uzupełnia ona ścieżkę S do zamkniętego cyklu. Załóżmy, że poza nią pozostały jakieś wierzchołki grafu. Są one osiągalne z wierzchołka o numerze 1 (leżącego na ścieżce S). Zatem z pewnego punktu tej ścieżki, x_p, musi wychodzić krawędź do punktu y leżącego poza nią. Wtedy $x_{p+1} \to \ldots \to x_m \to x_1 \to \ldots \to x_p \to y$ jest ścieżką przechodzącą przez $m+1$ różnych wierzchołków (wśród których jest punkt 1), wbrew maksymalności m.

Wniosek: ścieżka S, uzupełniona krawędzią $x_m \to x_1$, jest cyklem przechodzącym przez wszystkie wierzchołki grafu. (*mek, wp, jwr*)