LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (11 września 2003 r. – 10 października 2003 r.)

1. Dany jest wielokąt o bokach długości wymiernej, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe $90°$ lub $270°$. Z ustalonego wierzchołka wypuszczamy promień świetlny do wnętrza wielokąta w kierunku dwusiecznej kąta wewnętrznego przy tym wierzchołku. Promień odbija się zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Udowodnić, że promień trafi w jeden z wierzchołków wielokąta.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba pierwsza p oraz liczby całkowite nieujemne x, y, z spełniające równanie

$$(12x+5)(12y+7)=p^z\,.$$

3. Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ spełniające warunek

$$f(x^2+y)=xf(x)+f(y)$$

dla każdej pary liczb wymiernych x, y.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne XYZ, że punkty A, B, C są odpowiednio punktami wewnętrznymi odcinków YZ, ZX, XY. Dowieść, że środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów XYZ leżą na jednym okręgu.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2003 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (11 października 2003 r. – 12 listopada 2003 r.)

5. Dla liczb całkowitych dodatnich m, n niech $N(m,n)$ oznacza liczbę m-wyrazowych ciągów niemalejących o wyrazach ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$. Dowieść, że $N(m,n+1)=N(n,m+1)$.

6. Niech c będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian

$$P(x)=x^5-5x^3+4x-c$$

ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Wyznaczyć, w zależności od c, sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x)=(x-x_1^2)(x-x_2^2)(x-x_3^2)(x-x_4^2)(x-x_5^2)\,.$$

7. Znaleźć wszystkie takie rozwiązania równania

$$a^2+b^2=c^2$$

w liczbach całkowitych dodatnich, że liczby a i c są pierwsze, a liczba b jest iloczynem co najwyżej czterech liczb pierwszych.

8. Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że

$$\sphericalangle APB+\sphericalangle BPC+\sphericalangle CPD+\sphericalangle DPA>360^\circ\,.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 listopada 2003 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (13 listopada 2003 r. – 10 grudnia 2003 r.)

9. Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), W_3(x), \ldots, W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby

$$W_1(a), W_2(a), W_3(a), \ldots, W_n(a)$$

są złożone.

10. Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części jednakowej długości.

11. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA, przy czym czworokąt $KLMN$ jest rombem. Udowodnić, że punkt O leży na prostej KM.

12. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 5$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań w liczbach rzeczywistych x_1, x_2, x_3, …, x_n układu równań

$$x_{i-2}^3 + x_{i-1}^3 + x_i^3 = x_i^4 + x_{i+1}^3 + x_{i+2}^2 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

gdzie $x_{-1} = x_{n-1}$, $x_0 = x_n$, $x_1 = x_{n+1}$, $x_2 = x_{n+2}$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 grudnia 2003 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`