LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

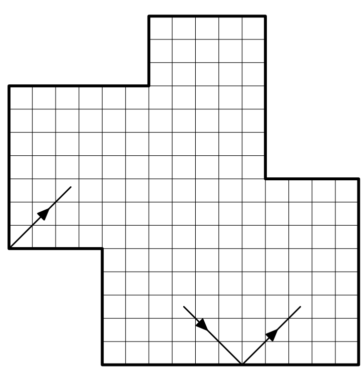
(11 września 2003 r. – 10 grudnia 2003 r.)

Zadanie **1.** Dany jest wielokąt o bokach długości wymiernej, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe 90° lub 270°. Z ustalonego wierzchołka wypuszczamy promień świetlny do wnętrza wielokąta w kierunku dwusiecznej kąta wewnętrznego przy tym wierzchołku. Promień odbija się zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Udowodnić, że promień trafi w jeden z wierzchołków wielokąta.

Rozwiązanie

Ponieważ każdy kąt wewnętrzy rozpatrywanego wielokąta $\mathcal{W}$ wynosi 90° lub 270°, więc wszystkie boki tego wielokąta (po odpowiednim jego obrocie) są ustawione poziomo lub pionowo (rys. 1). Niech $p_1/q_1, p_2/q_2, \ldots, p_n/q_n$ będą długościami kolejnych boków wielokąta $\mathcal{W}$, przy czym każda z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ jest całkowita dodatnia.

Rozpatrzmy kwadratową kratę, w której każdy mały kwadracik ma bok długości $1/(q_1 q_2 \ldots q_n)$. Wówczas wielokąt $\mathcal{W}$ można tak umieścić na tej kracie, by każdy jego bok był zawarty w pewnej prostej wyznaczającej kratę (rys. 1). Promień świetlny wypuszczony z wierzchołka wielokąta $\mathcal{W}$ zgodnie z podanymi zasadami porusza się wtedy wzdłuż przekątnych kwadratów kraty i odbija od boków wielokąta $\mathcal{W}$ w punktach kratowych.



rys. 1

Przypuśćmy, że promień świetlny nie trafił w żaden wierzchołek wielokąta $\mathcal{W}$. Odbijał się on zatem od boków wielokąta dowolnie wiele razy. Stąd wynika, że promień trafił co najmniej trzykrotnie w pewien punkt P leżący na obwodzie wielokąta $\mathcal{W}$. Zatem co najmniej dwukrotnie promień trafił w punkt P poruszając się z tego samego kierunku. To oznacza, że trajektoria promienia jest okresowa, co nie jest możliwe, gdyż promień rozpoczął swój bieg z wierzchołka wielokąta $\mathcal{W}$.

Zadanie **2.** Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba pierwsza p oraz liczby całkowite nieujemne x, y, z spełniające równanie

$$(12x+5)(12y+7)=p^z\,.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieją liczby p, x, y, z spełniające dane w zadaniu równanie. Skoro p jest liczbą pierwszą, to dzielnikami liczby p^z są tylko potęgi liczby p. Zatem istnieją takie liczby całkowite nieujemne a, b, że $12x+5=p^a$ oraz $12y+7=p^b$. Stąd widać, że liczba p jest nieparzysta i niepodzielna przez 3, jest więc postaci $6k+1$ lub $6k-1$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas

$$p^2=36k^2\pm12k+1=12(3k^2\pm k)+1\,,$$

skąd wynika, że

$$(*)\qquad p^n\equiv\begin{cases}1 \pmod{12}\,, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą,}\\ p \pmod{12}\,, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą.}\end{cases}$$

Z drugiej strony, $p^a\equiv5 \pmod{12}$ oraz $p^b\equiv7 \pmod{12}$. Ale na mocy zależności $(*)$ obie te kongruencje nie mogą zachodzić jednocześnie. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie istnieją liczby spełniające podane warunki.

Zadanie **3.** Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ spełniające warunek

$$(1)\qquad f(x^2+y)=xf(x)+f(y)$$

dla każdej pary liczb wymiernych x, y.

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wykażemy indukcyjnie, że dla dowolnej liczby wymiernej y oraz dowolnej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi równość

$$(2)\qquad f\left(\frac{k}{n^2}+y\right)=\frac{k}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)+f(y)\,.$$

Dla $k=1$ równość (2) uzyskujemy bezpośrednio z zależności (1) podstawiając $x=1/n$. Załóżmy teraz, że równość (2) jest spełniona dla liczby k oraz wszystkich liczb wymiernych y. Wówczas

$$f\left(\frac{k+1}{n^2}+y\right)=f\left(\frac{k}{n^2}+\left(\frac{1}{n^2}+y\right)\right)=\frac{k}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n^2}+y\right)=$$
$$=\frac{k}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)+f(y)=\frac{k+1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)+f(y)\,,$$

co kończy dowód indukcyjny zależności (2).

Kładąc w równaniu (1) $x=y=-1$ dostajemy $f(0)=-f(-1)+f(-1)=0$. Podstawiając następnie $y=0$ i $k=n^2$ do zależności (2) otrzymujemy

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f(1)}{n} \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots\ . \tag{3}$$

Przyjmując z kolei w równości (2) $k=m\cdot n$, gdzie m jest pewną liczbą całkowitą dodatnią, oraz wykorzystując zależność (3) mamy

$$f\left(\frac{m}{n}+y\right)=m\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)+f(y)=f(1)\cdot\frac{m}{n}+f(y) \tag{4}$$

dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich m i n oraz wymiernych y. Podstawiając wreszcie $y=0$ oraz $y=-m/n$ w równości (4) uzyskujemy odpowiednio

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(1)\cdot\frac{m}{n} \quad \text{oraz} \quad f\left(-\frac{m}{n}\right)=-f(1)\cdot\frac{m}{n} \tag{5}$$

dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich m, n. Niech $a=f(1)$. Ze związków (5) oraz z równości $f(0)=0$ wynika, że $f(x)=ax$ dla wszystkich liczb wymiernych x.

Bezpośrednio sprawdzamy, że każda funkcja określona wzorem $f(x)=ax$, gdzie a jest liczbą wymierną, spełnia warunki zadania.

Sposób II.

Niech $a=f(1)$. Wówczas dla dowolnej liczby wymiernej x mamy

$$\begin{aligned} f(-x)&=f(x^2-x)-xf(x)=f((x-1)^2+(x-1))-xf(x)=\\ &=(x-1)f(x-1)+f(x-1)-xf(x)=\\ &=x(f(x-1)-f(1^2+(x-1)))=-xf(1)=-ax\,, \end{aligned}$$

skąd $f(x)=ax$ dla dowolnej liczby wymiernej x.

Bezpośrednio sprawdzamy, że każda funkcja określona wzorem $f(x)=ax$, gdzie a jest liczbą wymierną, spełnia warunki zadania.

Zadanie **4.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne XYZ, że punkty A, B, C są odpowiednio punktami wewnętrznymi odcinków YZ, ZX, XY. Dowieść, że środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów XYZ leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Jeśli trójkąt ABC jest równoboczny, to środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów XYZ pokrywają się ze środkiem ciężkości trójkąta ABC. Punkt ten leży oczywiście na każdym okręgu, który przezeń przechodzi.

Załóżmy więc, że trójkąt ABC nie jest równoboczny. Wtedy bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\sphericalangle ACB>60^\circ$. Niech P i Q będą takimi punktami leżącymi wewnątrz kąta wypukłego ACB, że

$$\sphericalangle PBC=\sphericalangle PCB=\sphericalangle QAC=\sphericalangle QCA=30^\circ\,.$$

Niech ponadto R będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej PQ, co punkt C, że trójkąt PQR jest równoboczny (rys. 2, 3). Wykażemy, że środki ciężkości wszystkich rozpatrywanych trójkątów XYZ leżą na okręgu opisanym na trójkącie PQR, co zakończy rozwiązanie zadania.

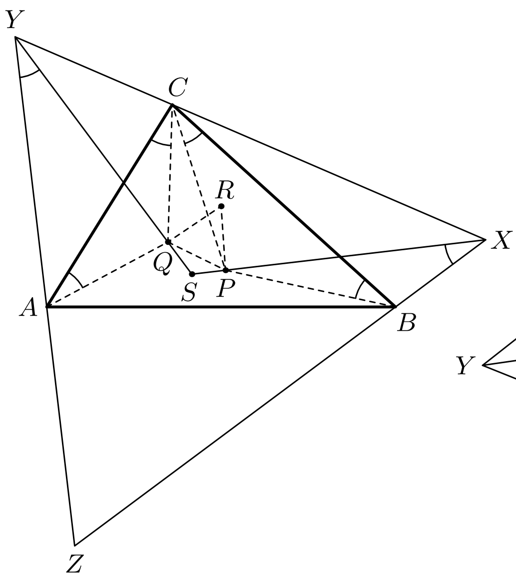
Z równości $\sphericalangle BPC + \sphericalangle BXC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ wnioskujemy, że na czworokącie $BXCP$ można opisać okrąg. Stąd $\sphericalangle PXB = \sphericalangle PCB = 30^\circ$ co oznacza, że prosta XP przechodzi przez środek ciężkości S trójkąta XYZ. Analogicznie dowodzimy, że prosta YQ przechodzi przez S. Pozostaje zatem wykazać, że punkt S leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR.

Ponieważ $\sphericalangle ACB > 60^\circ$, więc możliwe są następujące dwa przypadki:

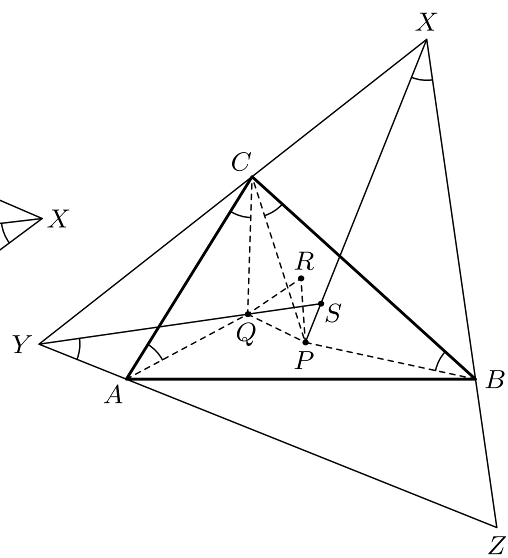
(i) Punkt S nie należy do odcinków XP i YQ (rys. 2). Wówczas

$$\sphericalangle PSQ = \sphericalangle XSY = 120^\circ = 180^\circ - \sphericalangle PRQ\,,$$

co oznacza, że punkt S leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR.



rys. 2



rys. 3

(ii) Punkt S leży na jednym z odcinków XP lub YQ. Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt S należy do odcinka XP (rys. 3). Wówczas

$$\sphericalangle PSQ = \sphericalangle PSY = 60^\circ = \sphericalangle PRQ\,,$$

co dowodzi, że punkty P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.

Zadanie **5.** Dla liczb całkowitych dodatnich m, n niech $N(m,n)$ oznacza liczbę m-wyrazowych ciągów niemalejących o wyrazach ze zbioru

$$\{1,2,3,\ldots,n\}\,.$$

Dowieść, że $N(m,n+1) = N(n,m+1)$.

Rozwiązanie

Dowolnemu ciągowi niemalejącemu $a_1, a_2, \ldots, a_m$ o wyrazach ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,n+1\}$ przypisujemy ciąg $b_1, b_2, \ldots, b_n$ określony następująco: dla $\ell = 1,2,\ldots,n$,

(1) $b_\ell = 1 +$ (liczba wyrazów ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mniejszych lub równych ℓ).

W ten sposób określony ciąg $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ma wyrazy ze zbioru $\{1,2,\ldots,m+1\}$ i jest niemalejący. Ponadto, każdy ciąg niemalejący $b_1, b_2, \ldots, b_n$ o wyrazach należących do zbioru $\{1,2,\ldots,m+1\}$ można otrzymać za pomocą wzoru (1) z dokładnie jednego ciągu niemalejącego $a_1, a_2, \ldots, a_m$ o wyrazach należących do zbioru $\{1,2,\ldots,n+1\}$. Istotnie: znając wartości $b_1, b_2, \ldots, b_n$, znamy również liczbę $c_1 = b_1 - 1$ oraz liczby

$$c_\ell = b_\ell - b_{\ell-1} \quad \text{dla} \quad \ell = 2,3,\ldots,n.$$

Liczba c_ℓ dla $\ell = 1,2,\ldots,n$ jest, na mocy wzoru (1), liczbą wszystkich wyrazów ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_m$ równych ℓ. Z kolei wyrazów ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_m$ równych $n+1$ jest

$$c_{n+1} = m - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = m + 1 - b_n.$$

Ponieważ ciąg $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jest niemalejący, $b_1 \geqslant 1$ oraz $b_n \leqslant m+1$, więc wszystkie liczby $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ są nieujemne. Liczby te wyznaczają zatem jednoznacznie ciąg niemalejący $a_1, a_2, \ldots, a_m$ o wyrazach ze zbioru $\{1,2,\ldots,n+1\}$.

Wykazaliśmy tym samym, że wzór (1) opisuje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy m-wyrazowymi ciągami niemalejącymi o wyrazach ze zbioru $\{1,2,\ldots,n+1\}$, a n-wyrazowymi ciągami niemalejącymi o wyrazach ze zbioru $\{1,2,\ldots,m+1\}$. Stąd $N(m, n+1) = N(n, m+1)$.

Zadanie **6.** Niech c będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian

$$P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - c$$

ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Wyznaczyć, w zależności od c, sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2).$$

Rozwiązanie

Z równości

$$\begin{aligned} Q(x^2) &= (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)(x^2 - x_4^2)(x^2 - x_5^2) = \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) \\ &\qquad \cdot (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4)(x + x_5) = \\ &= P(x) \cdot (-P(-x)) = (x^5 - 5x^3 + 4x - c) \cdot (x^5 - 5x^3 + 4x + c) = \\ &= (x^5 - 5x^3 + 4x)^2 - c^2 = x^{10} - 10x^8 + 33x^6 - 40x^4 + 16x^2 - c^2 \end{aligned}$$

wnioskujemy, że

$$Q(x)=x^5-10x^4+33x^3-40x^2+16x-c^2 \quad \text{dla wszystkich } x\geqslant 0\,.$$

Wyrażenia po obu stronach tej równości są wielomianami. Stąd wynika, że uzyskany wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Zatem suma wartości bezwzględnych współczynników wielomianu $Q(x)$ wynosi:

$$1+10+33+40+16+c^2=100+c^2\,.$$

Zadanie **7.** Znaleźć wszystkie takie rozwiązania równania

$$a^2+b^2=c^2$$

w liczbach całkowitych dodatnich, że liczby a i c są pierwsze, a liczba b jest iloczynem co najwyżej czterech liczb pierwszych.

Rozwiązanie

Odp.: Istnieją trzy rozwiązania (a,b,c): $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(11,60,61)$.

Niech a, b, c będą liczbami spełniającymi warunki zadania. Wówczas

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)\,,$$

skąd wobec założenia, że liczba a jest pierwsza, otrzymujemy $c=b+1$. Zatem $a^2=2b+1$, skąd wynika, że liczba a jest nieparzysta.

Niech $a=2n+1$. Wtedy

$$b=\tfrac{1}{2}(a^2-1)=2n(n+1) \quad \text{oraz} \quad c=2n^2+2n+1\,.$$

Jeśli liczba n daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, to liczba a jest podzielna przez 3. Zatem jest ona złożona, poza przypadkiem $n=1$, który daje rozwiązanie $(a,b,c)=(3,4,5)$. Jeśli z kolei liczba n daje przy dzieleniu przez 5 resztę 2, to liczba a jest podzielna przez 5. Zatem jest ona złożona, poza przypadkiem, gdy $n=2$. Przypadek ten daje drugie rozwiązanie $(a,b,c)=(5,12,13)$.

Jeśli natomiast liczba n daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1 lub 3, to liczba c jest podzielna przez 5. Zatem jest ona złożona poza przypadkiem $n=1$, który już rozpatrzyliśmy.

Pozostał jeszcze do rozpatrzenia przypadek, gdy liczba n daje przy dzieleniu przez 3 resztę 0 lub 2, a przy dzieleniu przez 5 resztę 0 lub 4. Wówczas liczba b jest podzielna przez $2\cdot 6\cdot 5=60$. Z drugiej strony, liczba b jest iloczynem co najwyżej czterech liczb pierwszych, skąd wynika, że $b=60$. Przypadek ten prowadzi do trzeciego rozwiązania: $(a,b,c)=(11,60,61)$.

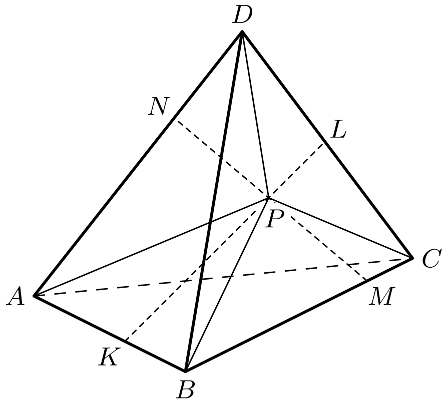
Zadanie **8.** Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że

$$\sphericalangle APB+\sphericalangle BPC+\sphericalangle CPD+\sphericalangle DPA>360^\circ\,.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez K punkt przecięcia płaszczyzny CDP z krawędzią AB oraz przez L punkt przecięcia płaszczyzny ABP z krawędzią CD (rys. 4).

Analogicznie, niech M będzie punktem przecięcia płaszczyzny ADP i krawędzi BC oraz niech N oznacza punkt wspólny płaszczyzny BCP i krawędzi AD.



rys. 4

Punkty K, P i L należą do części wspólnej płaszczyzn ABP i CDP, leżą więc na jednej prostej. Analogicznie, punkty M, P i N leżą na jednej prostej. Stąd wynika, że punkty K, L, M, N i P leżą w jednej płaszczyźnie. Zatem

$$\begin{aligned}\sphericalangle APB+\sphericalangle BPC+\sphericalangle CPD+\sphericalangle DPA= \\ &= \sphericalangle KPB+\sphericalangle BPM+\sphericalangle MPC+\sphericalangle CPL \\ &\quad +\sphericalangle LPD+\sphericalangle DPN+\sphericalangle NPA+\sphericalangle APK> \\ &> \sphericalangle KPM+\sphericalangle MPL+\sphericalangle LPN+\sphericalangle NPK=360^\circ,\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **9.** Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), W_3(x), \ldots, W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby

$$W_1(a),\ W_2(a),\ W_3(a),\ \ldots,\ W_n(a)$$

są złożone.

Rozwiązanie

Dane wielomiany mają stopień co najmniej 1, więc istnieje taka liczba naturalna x_0, że dla $i=1,2,\ldots,n$ liczby $c_i=|W_i(x_0)|$ są większe od 1 oraz $|W_i(x)|>c_i$ dla wszystkich $x>x_0$.

Niech $a=x_0+c_1c_2\ldots c_n$. Wykażemy, że liczby

$$W_1(a),\ W_2(a),\ W_3(a),\ \ldots,\ W_n(a)$$

są złożone, co zakończy rozwiązanie zadania.

Z zależności $a\equiv x_0 \pmod{c_i}$ wynika, że $W_i(a)\equiv W_i(x_0) \pmod{c_i}$. Ponieważ $c_i=|W_i(x_0)|$, więc liczba $W_i(a)$ jest podzielna przez c_i. Ponadto $a>x_0$, co daje $|W_i(a)| > c_i$. Zatem dla $i=1,2,\ldots,n$ liczba $W_i(a)$ jest złożona.

Zadanie **10.** Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części jednakowej długości.

Rozwiązanie

Niech liczba boków wielokąta będzie równa $2n$. Oznaczmy wierzchołki wielokąta kolejno A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_{2n}. Dla $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$ niech

$$f(i) = A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + \ldots + A_{i+n-1}A_{i+n} + \\ - A_{i+n}A_{i+n+1} - A_{i+n+1}A_{i+n+2} - A_{i+n+2}A_{i+n+3} - \ldots - A_{i+2n-1}A_i\,,$$

gdzie $A_{k+2n} = A_k$ dla $k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1$. Innymi słowy, $f(i)$ jest różnicą długości części, na które dzielą obwód wielokąta punkty A_i oraz A_{i+n}.

Wówczas dla $i=1,2,\ldots,2n$ liczba $f(i)$ jest całkowita parzysta oraz

$$|f(i+1) - f(i)| = |2\cdot A_{i+n}A_{i+n+1} - 2\cdot A_iA_{i+1}| = \\ = 2\cdot|A_{i+n}A_{i+n+1} - A_iA_{i+1}| \leqslant 2\,.$$

Ponadto $f(i) = -f(i+n)$. Stąd wynika, że ciąg liczb

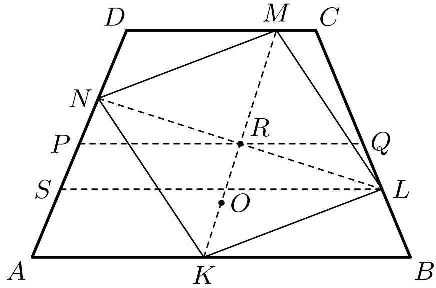
$$f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(n+1) = -f(1)$$

składa się z liczb parzystych, a jego kolejne wyrazy różnią się o nie więcej niż 2. Zatem istnieje takie i, że $f(i)=0$, a to właśnie należało udowodnić.

Zadanie **11.** Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA, przy czym czworokąt $KLMN$ jest rombem. Udowodnić, że punkt O leży na prostej KM.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P, Q, R odpowiednio środki odcinków AD, BC, KM (rys. 5). Wówczas punkty P, Q i R leżą na jednej prostej – równoległej do podstaw trapezu $ABCD$. Przez punkt L poprowadźmy prostą równoległą do podstaw trapezu $ABCD$, przecinającą odcinek AD w punkcie S.



rys. 5

Ponieważ punkt R jest środkiem przekątnej KM rombu $KLMN$, więc jest on również środkiem drugiej przekątnej tego rombu, czyli odcinka NL. Zatem z równoległości prostych PR i SL wnioskujemy, że $NP=PS$. Punkt P jest środkiem odcinka AD, więc $OP\perp AD$. Ta własność, równość $NP=PS$ oraz fakt, iż punkt O leży na symetralnej odcinków AB, CD i LS dają

$$ON=OS=OL\,.$$

Stąd wynika, że punkt O leży symetralnej odcinka NL, czyli na prostej KM.

Zadanie **12.** Dana jest liczba całkowita $n\geqslant 5$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań w liczbach rzeczywistych x_1, x_2, x_3, …, x_n układu równań

$$x_{i-2}^3+x_{i-1}^3+x_i^3=x_i^4+x_{i+1}^3+x_{i+2}^2 \quad \text{dla} \quad i=1,2,3,\ldots,n,$$

gdzie $x_{-1}=x_{n-1}$, $x_0=x_n$, $x_1=x_{n+1}$, $x_2=x_{n+2}$.

Rozwiązanie

Dodając równania stronami otrzymujemy

$$3\sum_{i=1}^{n}x_i^3=\sum_{i=1}^{n}x_i^4+\sum_{i=1}^{n}x_i^3+\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^{n}x_i^2\,(x_i-1)^2=0\,.$$

Zatem liczby $x_1,x_2,\ldots,x_n$ przyjmują wartości 0 lub 1. Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia liczby rozwiązań układu równań

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1+x_2&=x_4+x_5\\ x_2+x_3&=x_5+x_6\\ x_3+x_4&=x_6+x_7\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-2}+x_{n-1}&=x_1+x_2\\ x_{n-1}+x_n&=x_2+x_3\\ x_n+x_1&=x_3+x_4 \end{aligned}\right.$$

w liczbach należących do zbioru $\{0,1\}$.

Zauważmy, że układ równań (1) jest spełniony, gdy $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$ lub gdy $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Załóżmy, że liczba n nie jest podzielna przez 3. Wówczas uzyskujemy

$$x_1+x_2=x_4+x_5=x_7+x_8=\ldots=x_n+x_1\,,$$

skąd $x_n=x_2$. Analogicznie dowodzimy, że $x_i=x_{i+2}$ dla $i=1,2,\ldots,n-1$. Zatem jeżeli n jest liczbą nieparzystą i niepodzielną przez 3, to jedynymi rozwiązaniami $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ układu (1) są $(0,0,0,\ldots,0)$ i $(1,1,1,\ldots,1)$. Natomiast dla liczb parzystych n, niepodzielnych przez 3, otrzymujemy dwa dodatkowe rozwiązania $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, a mianowicie

$$(0,1,0,1,\ldots,0,1) \quad \text{oraz} \quad (1,0,1,0,\ldots,1,0)\,.$$

Załóżmy teraz, że liczba n jest podzielna przez 3. Wówczas układ równań (1) ma co najmniej 8 rozwiązań: niewiadome mogą się powtarzać okresowo z okresem 3.

Zbadajmy istnienie rozwiązań $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, które nie są okresowe z okresem 3. Bez szkody dla ogólności przyjmijmy, że $x_1 \neq x_4$. Wówczas równość $x_1 + x_2 = x_4 + x_5$ jest możliwa tylko wtedy, gdy $x_1 + x_2 = 1$. Stąd $x_1 \neq x_2$ oraz $x_2 \neq x_5$.

Powtarzając rozumowanie stwierdzamy, że $x_2 \neq x_3$ oraz $x_3 \neq x_6$, skąd dla dowolnego i mamy $x_i \neq x_{i+1}$. Zatem niewiadome muszą być na przemian równe 0 i 1, co jest możliwe tylko dla n parzystego.

Podsumowując: liczba rozwiązań danego układu równań wynosi:

2 dla n względnie pierwszych z 6;
4 dla n parzystych niepodzielnych przez 3;
8 dla n nieparzystych podzielnych przez 3;
10 dla n podzielnych przez 6.

(*wp*, *jwr*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`