LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2004 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^3+b^3+c^3=3d^3 \\ b^4+c^4+d^4=3a^4 \\ c^5+d^5+a^5=3b^5\,. \end{cases}$$

Udowodnić, że $a=b=c=d$.

Rozwiązanie

Niech $\langle p,q\rangle$ będzie najmniejszym przedziałem zawierającym liczby a, b, c, d. Wówczas co najmniej jedna z liczb d, a, b pokrywa się z końcem (lewym lub prawym) przedziału $\langle p,q\rangle$.

Jeśli $d=p$, to na mocy pierwszej równości mamy $3d^3=a^3+b^3+c^3\geqslant 3d^3$. Stąd wynika, że każda z liczb a, b, c musi być równa d, czyli $a=b=c=d$. Jeśli natomiast $d=q$, to otrzymujemy $3d^3=a^3+b^3+c^3\leqslant 3d^3$, co podobnie jak wyżej daje $a=b=c=d$.

Analogicznie, korzystając z drugiego lub trzeciego równania dowodzimy, że $a=b=c=d$, gdy któraś z liczb a, b jest równa p lub q. To kończy rozwiązanie zadania.

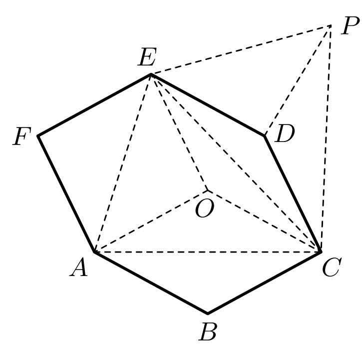
Zadanie **2.** W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz

$$\sphericalangle A+\sphericalangle C+\sphericalangle E=\sphericalangle B+\sphericalangle D+\sphericalangle F\,.$$

Dowieść, że przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Z danej w treści zadania równości kątów wynika, że $\sphericalangle B+\sphericalangle D+\sphericalangle F=360^\circ$. Długości wszystkich boków danego sześciokąta są równe, więc z trójkątów ABC, CDE oraz EFA można złożyć trójkąt PCE przystający do trójkąta ACE (rys. 1). Punkt D jest wówczas środkiem okręgu opisanego na trójkącie PCE. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACE. Trójkąty ACE i PCE są przystające, więc promienie okręgów opisanych na tych trójkątach są równe.



rys. 1

Stąd wynika, że czworokąty $AOEF$ i $COED$ są rombami, a więc odcinki AF, OE i CD są równe i równoległe. Zatem czworokąt $ACDF$ jest równoległobokiem, co oznacza, że środki odcinków AD i CF pokrywają się. Analogicznie, środki odcinków AD i BE pokrywają się. Stąd wniosek, że proste AD, BE i CF mają punkt wspólny, będący środkiem każdej z przekątnych AD, BE i CF.

Zadanie **3.** Wyznaczyć liczbę ciągów nieskończonych $a_1, a_2, a_3, \ldots$, o wyrazach równych $+1$ i -1, spełniających równanie

$$a_{mn} = a_m a_n \quad \text{dla} \ \ m,n = 1,2,3,\ldots$$

oraz warunek: w każdej trójce kolejnych wyrazów (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) występuje zarówno $+1$, jak i -1.

Rozwiązanie

Niech (a_n) będzie takim ciągiem. Rozpoczniemy od wykazania, że

$$(1) \qquad a_{3k+1} \neq a_{3k+2} \quad \text{dla} \ \ k = 1,2,3,\ldots .$$

Przypuśćmy, że $a_{3k+1} = a_{3k+2} = a$. Wówczas musi być $a_{3k} = a_{3k+3} = b$ oraz $b \neq a$. Mnożąc powyższe równości przez a_2 uzyskujemy $a_{6k+2} = a_{6k+4} = c$ oraz $a_{6k} = a_{6k+6} = d$, przy czym $c \neq d$. W trójce $(a_{6k+2}, a_{6k+3}, a_{6k+4})$ występuje $+1$ oraz -1, skąd wynika, że $a_{6k+3} = d$. Zatem $a_{6k} = a_{6k+3} = a_{6k+6}$. Dzieląc równości te stronami przez a_3 otrzymujemy $a_{2k} = a_{2k+1} = a_{2k+2}$. Sprzeczność.

Następnie udowodnimy przez indukcję, że

$$(2) \qquad a_{3k+1} = 1, \qquad a_{3k+2} = -1 \quad \text{dla} \ \ k = 0,1,2,3,\ldots .$$

Oczywiście $a_1 = a_1^2 = 1$; a z własności (1) wynika, że $a_{50} \neq a_{49} = a_7^2 = 1$, czyli $a_{50} = -1$; ale $a_{50} = a_2 a_5^2 = a_2$, więc $a_2 = -1$; równości (2) zachodzą dla $k = 0$.

Ustalmy $k \geqslant 1$ i przyjmijmy, że $a_{3i+1} = 1$, $a_{3i+2} = -1$ dla $i < k$. Zapiszmy liczbę k w postaci $2j$ lub $2j+1$. Jeśli $k = 2j$, to $3k+2 = 2(3j+1)$, i w konsekwencji $a_{3k+2} = a_2 a_{3j+1} = -1$; jeśli zaś $k = 2j+1$, to $3k+1 = 2(3j+2)$, więc $a_{3k+1} = a_2 a_{3j+2} = 1$. W obu przypadkach została wykazana jedna z równości (2); druga jest wtedy wnioskiem z zależności (1). To kończy indukcyjny dowód tezy (2).

Niech $a_3 = c$. Każda liczba naturalna n ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $n = 3^r m$, gdzie $r \geqslant 0$, a m nie dzieli się przez 3. Z warunku multyplikatywności wynika, że $a_n = a_3^r a_m = c^r a_m$, i w myśl związków (2):

$$(3) \qquad a_n = \begin{cases} c^r & \text{dla} \ \ n = 3^r(3k+1), \\ -c^r & \text{dla} \ \ n = 3^r(3k+2). \end{cases}$$

Zatem ciąg (a_n) jest wyznaczony przez wartość $c = a_3$, która może być równa 1 lub -1. Na odwrót, zarówno dla $c = 1$, jak i dla $c = -1$, wzór (3) określa ciąg (a_n), spełniający zadane warunki. Są więc dwa takie ciągi.

(*mek, wp, jwr*)

LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2004 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, mające dokładnie $\sqrt{n}$ dzielników dodatnich.

Rozwiązanie

Liczba $n=1$ spełnia warunki zadania. Załóżmy więc w dalszej części rozwiązania, że $n>1$.

Z warunków zadania wynika, że $n=k^2$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k. Liczba dzielników dodatnich liczby n, mniejszych od k, jest równa liczbie jej dzielników większych od k. Istotnie: każdemu dzielnikowi $d<k$ liczby n odpowiada dzielnik n/d liczby n, który jest większy od k. Dodatkowo sama liczba k jest dzielnikiem liczby n, skąd wynika, że n ma nieparzystą liczbę dzielników. Zatem k, a więc również n, jest liczbą nieparzystą.

Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia takich liczb nieparzystych $n=k^2$ $(n>1)$, których liczba dzielników mniejszych od k jest równa $\frac{1}{2}(k-1)$.

Ponieważ k^2 jest liczbą nieparzystą, więc żadna liczba parzysta nie jest dzielnikiem liczby k^2. Aby więc liczba dzielników mniejszych od k liczby k^2 była równa $\frac{1}{2}(k-1)$, każda liczba nieparzysta mniejsza od k musi być dzielnikiem liczby k^2. W szczególności k^2 ma się dzielić przez $k-2$. Ponieważ $k^2=(k-2)(k+2)+4$, więc liczba $k-2$ jest nieparzystym dzielnikiem liczby 4. To oznacza, że $k-2=1$, czyli $k=3$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $n=3^2=9$ spełnia warunki zadania. Zatem szukanymi liczbami są $n=1$ i $n=9$.

Zadanie **5.** Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym $BD=AE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinki AD i BE odpowiednio w punktach Q i R. Wykazać, że

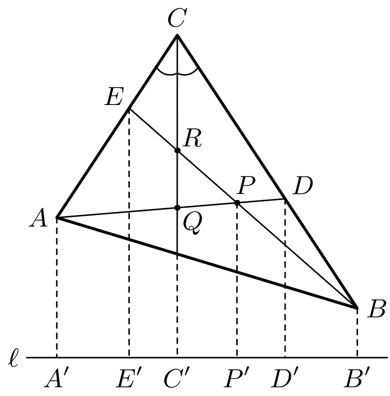
$$\frac{PQ}{AD}=\frac{PR}{BE}\,.$$

Rozwiązanie

Niech ℓ będzie dowolną prostą prostopadłą do dwusiecznej kąta ACB (rys. 2). Oznaczmy przez A', B', C', D', E', P' odpowiednio rzuty prostokątne punktów A, B, C, D, E, P na prostą ℓ.

Proste AC i BC tworzą równe kąty z prostą ℓ, zatem na mocy równości $AE=BD$ mamy $A'E'=B'D'$. Wobec tego $A'D'=B'E'$. Stąd korzystając z twierdzenia Talesa uzyskujemy dowodzoną równość:

$$\frac{PQ}{AD}=\frac{C'P'}{A'D'}=\frac{C'P'}{B'E'}=\frac{PR}{BE}\,.$$



rys. 2

Zadanie **6.** Na przyjęciu spotkało się n osób ($n \geqslant 5$). Wiadomo, że wśród dowolnych trzech osób pewne dwie znają się. Dowieść, że spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X zbiór osób obecnych na przyjęciu. Niech k będzie największą liczbą naturalną o własności: Istnieje k osób $A_1, A_2, \ldots, A_k$ takich, że dla $i = 1, 2, \ldots, k-1$ osoby A_i oraz A_{i+1} znają się. Oznaczmy:

$$S = X \setminus \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}.$$

W dalszym ciągu rozwiązania rozpatrzymy trzy przypadki:

(i) $k \leqslant n/2$. Wówczas zbiór S liczy co najmniej $n/2$ osób. Osoba A_k nie zna żadnej osoby ze zbioru S, więc każde dwie osoby w tym zbiorze muszą się znać. Jeśli osoby te usiądą dowolnie przy okrągłym stole, to każda z nich będzie siedzieć obok dwóch swoich znajomych.

(ii) $n/2 < k \leqslant n-1$. Wówczas zbiór S jest niepusty i żadna osoba z tego zbioru nie zna ani A_1, ani A_k. Stąd wynika, że osoby A_1 i A_k się znają. Zatem osoby $A_1, A_2, \ldots, A_k$ można posadzić przy okrągłym stole zgodnie z warunkami opisanymi w treści zadania.

(iii) $k = n$. Niech $\ell = [(n+1)/2]$. Wiemy, że wśród osób A_1, A_ℓ, A_n pewne dwie się znają. Stąd wynika, że osoby należące do co najmniej jednego spośród zbiorów

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_\ell\}, \quad \{A_\ell, A_{\ell+1}, \ldots, A_n\}, \quad \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

mogą usiąść przy okrągłym stole zgodnie z warunkami zadania. Pozostaje zauważyć, że każdy z tych trzech zbiorów liczy co najmniej $n/2$ osób.

(*mek, wp, jwr*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`